

REVISTA BRASILEIRA DE ESTATÍSTICA

Órgão oficial do IBGE
e da Sociedade Brasileira de Estatística

A Revista não se responsabiliza
pelos conceitos emitidos
em artigos assinados

PUBLICAÇÃO TRIMESTRAL

ISSN 0034-7175

Pedidos de assinatura e número avulso ou atrasado para:

Diretoria de Administração — Sergraf: Av. Brasil, 15.671 — Lucas — Rio de Janeiro — Brasil
CEP — 21.241
Tel.: 391-7788

Livraria do IBGE: Av. Franklin Roosevelt, 146/loja — Centro — RJ — Brasil
CEP — 20.021
Tel.: 220-9147 / 220-8163
DDD: 021

SUMÁRIO

Artigos

- Primeiros comentários aos resultados do Censo Demográfico de 1980
Célia Diogo Alves da Costa
Maria Beatriz Afonso Lopes
Aída L. F. de Souza
Iêda Siqueira 167
- Observações sobre a evolução da população rural e urbana do Brasil no período 1940 a 1930
Aída Laura Ferreira de Souza
Iêda Siqueira
Regina Coeli de Siqueira Lana 197
- Um método para a geração de variáveis aleatórias normais
Thadeu Keller Filho 217
- Matrizes de Leslie e projeção de população
José Paulo Q. Carneiro
Paulo Klinger Monteiro 227

Bibliografia

- Publicações de interesse para a Estatística editadas pelo IBGE no período de abril a junho de 1981 265
- Revista Brasileira de Estatística:** índice alfabético e remissivo de autores e assuntos — 1978-1980 269

ISSN 0034-7175

R. bras. Estat.	Rio de Janeiro	v. 42	n.º 167	p. 165 a 280	jul./set. 1981
-----------------	----------------	-------	---------	--------------	----------------

FUNDAÇÃO INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA — IBGE
Av. Franklin Roosevelt, 166 — Centro
20 021 — Rio de Janeiro, RJ — Brasil

ISSN 0034-7175

Revista brasileira de estatística / Fundação Instituto Brasileiro de
Geografia e Estatística — ano 1, n. 1(1940, jan./mar.) —

Rio de Janeiro : IBGE, 1940-

Trimestral.

Órgão oficial do IBGE e da Sociedade Brasileira de Estatística.

Continuação de : Revista de economia e estatística.

Índices : autor-assunto, v. 22-24(1951-1963) no v. 25, n. 1 ; v. 25-26
(1954-1965) no v. 27, n. 1 ; v. 27-28(1966-1967) no v. 29, n. 1 ; . Índices
anuais de autor-assunto, publicados no n. 1 (jan./mar.) do ano seguinte
(período 1968-1977, v. 29-38).

ISSN 0034-7175 = Revista brasileira de estatística.

1. Estatística — Periódicos. I. IBGE.

IBGE. Biblioteca Central
RJ-IBGE/81-41

CDD 310.5
CDU 31(05)

PRIMEIROS COMENTÁRIOS AOS RESULTADOS DO CENSO DEMOGRÁFICO DE 1980

IBGE/SUEGE/DESPO

SUMÁRIO

1. *Introdução*
2. *Aspectos do comportamento demográfico — Brasil, Regiões e Unidades da Federação*
3. *Aspectos do comportamento demográfico das Regiões Metropolitanas*

1 — INTRODUÇÃO

Estes comentários decorrem da divulgação pelo IBGE dos resultados preliminares do Censo Demográfico de 1980¹.

Apesar de os dados serem de caráter geral, possibilitam a realização de análises onde se salientam as principais mudanças na estrutura demográfica do País.

Com esses dados é possível avaliar a evolução da população total de cada Município, na última década, através do cálculo da variação absoluta e relativa, o ritmo de crescimento (fornecido pela taxa média de crescimento anual) e a densidade demográfica.

¹ IBGE, Sinopse Preliminar do *Censo Demográfico de 1980*, [Rio de Janeiro] 1980, 79 p., tab. IX Recenseamento Geral do Brasil [1980].

2 — ASPECTOS DO COMPORTAMENTO DEMOGRÁFICO — BRASIL, REGIÕES E UNIDADES DA FEDERAÇÃO ²

Em uma primeira etapa os resultados serão analisados a nível do País como um todo, suas Macrorregiões e Unidades da Federação.

O exame da tabela 2, referente à taxa média geométrica de crescimento anual, revela que a população brasileira cresceu à taxa de 2,49 no período 1970/1980. Embora o padrão de crescimento do País tenha se mantido elevado, constata-se a diminuição de 0,40 em relação à taxa de 1960/1970, que alcançou 2,89.

Na última década, a nível das macrorregiões brasileiras, observa-se que as taxas de crescimento apresentam a seguinte distribuição: Regiões Norte, Sudeste e Centro-Oeste registram valores acima da média nacional e as Regiões Nordeste e Sul mostram taxas abaixo dessa média.

O crescimento da Região Norte é o que mais se destaca, tendo registrado taxa de 5,04, a maior dentre as Regiões. Em oposição, a Região Sul conta com o crescimento de 1,44, o menor dentre elas. A Região Sudeste mantém praticamente o mesmo padrão de crescimento desde a década de 60, com taxa em torno de 2,60. As demais, Nordeste e Centro-Oeste, mostram valores de 2,18 e 4,06, respectivamente, sendo que nesta última o ritmo do crescimento é bem menor que o da década de 60 (tabela 2).

A evolução das taxas de crescimento das Macrorregiões pode ser observada no gráfico à página 169.

Verifica-se que no período 1940/1950 a amplitude do intervalo de variação das taxas regionais (1,27) é aproximadamente três vezes menor que a verificada no período 1970/1980 (3,71), o que implica maior dispersão das taxas de crescimento na última década.

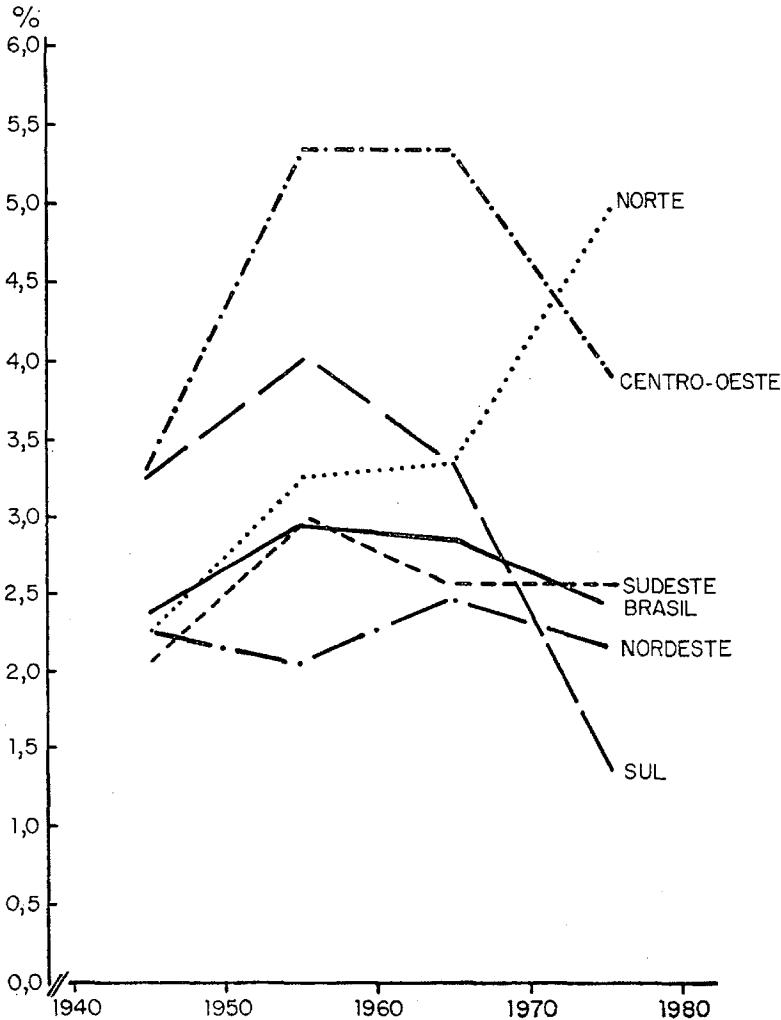
Nota-se, ainda, que na década de 70 as Regiões Norte e Sul apresentavam taxas de crescimento aproximadamente iguais (3,40 e 3,44). No período decenal que se segue, nessas Regiões, as tendências anteriormente observadas para o ritmo de crescimento intensificaram-se de tal forma que os valores referentes a essas Regiões alcançaram os extremos máximo e mínimo do intervalo de variação das taxas regionais.

Os mapas 1 e 2 mostram a diferenciação espacial das taxas médias de incremento anual nos dois últimos decênios para as Unidades da Federação, tendo como critério de organização a taxa média de crescimento do Brasil. Verifica-se que a distribuição espacial de tais taxas identifica, grosso modo, dois blocos de comportamento distinto: um no sentido centro-norte, correspondente às taxas acima da média do Brasil e outro, a leste, relativo às cifras em torno e abaixo da média nacional.

² Elaboração e redação de Célia Diogo Alves da Costa e Maria Beatriz Afonso Lopes, Analistas Especializadas do DESPO.

BRASIL

TAXA MÉDIA GEOMÉTRICA DE CRESCIMENTO ANUAL
NOS PERÍODOS INTERCENSITÁRIOS



Um exame mais detalhado do mapa 1, que se refere à década de 60, durante a qual a taxa média de crescimento nacional foi de 2,89, demonstra que as altas taxas (3,5 e mais) se distribuem por um espaço contínuo formado pela Região Centro-Oeste, por parte da Região Norte (Pará, Amapá, Roraima e Rondônia) e pelo Paraná. As demais Unidades da Federação, que retratam valores de crescimento abaixo da média (menos de 2,4), se estendem por uma área quase que contínua (Maranhão, Paraíba, Pernambuco, Alagoas, Sergipe, Bahia, Minas Gerais, Espírito Santo e Rio Grande do Sul). Os estados que acusaram taxas

de crescimento em torno da média nacional (entre 2,4 e 3,4) se dispõem de forma dispersa no espaço.

O mapa 2, que registra as taxas de crescimento do decênio 1970/1980, período em que a taxa média de crescimento nacional foi de 2,49, espelha, de modo geral, padrão semelhante ao da década anterior. Constata-se que as altas taxas (3,0 e mais) não só refletem a incorporação de espaços mais a oeste do País (Amazonas e Acre) e do Estado de São Paulo, como também a exclusão do Paraná e Goiás. Os valores abaixo da média (menos de 2,0) e em torno da média (2,0 a 2,9) apresentam padrão espacial diferenciado quando comparado com o da década de 60. Assim, os Estados que detêm valores abaixo da média se dispõem de forma dispersa (Ceará, Paraíba, Pernambuco, Minas Gerais, Paraná e Rio Grande do Sul). Os que acusam taxas em torno da média distribuem-se em espaço quase contínuo (Maranhão, Piauí, Rio Grande do Norte, Alagoas, Sergipe, Bahia, Espírito Santo, Rio de Janeiro, Santa Catarina e Goiás).

Cabe ainda destacar o comportamento da taxa do Paraná, que na década de 60 se situava acima da média nacional e que, no último decênio, passou a integrar a categoria com padrão de crescimento abaixo da média nacional.

A nível de crescimento nacional, no período 1970/1980, verifica-se o incremento de 26 milhões de habitantes no contingente populacional brasileiro, o que representa aumento relativo de 27,9%. Na década anterior o incremento absoluto foi de 23 milhões de habitantes, correspondendo à variação relativa de 32,9%, maior que a registrada para a década de 70 (tabela 3).

Os valores elevados do aumento relativo da população das Macrorregiões, na última década, também constam da tabela 3. Na Região Norte registra-se o maior aumento relativo (63,5%), seguindo-se a Centro-Oeste (48,9%). As demais acusam menores variações: 29,9% na Sudeste, 24,0% na Nordeste e 15,4% na Sul. Faz-se necessário alertar que as Regiões Norte e Sul que detêm, respectivamente, o maior e o menor incremento relativo de população, contam com aumentos absolutos praticamente iguais, ou seja, 2,289 milhões na primeira e 2,540 milhões na segunda. A Região Sudeste, exibindo o terceiro maior aumento relativo de população, registra o maior incremento absoluto do País: 11,899 milhões de habitantes.

As informações do mapa de variação absoluta e relativa da população total (mapa 3) conduzem ainda à observação de que áreas com menor incremento absoluto de população são, de um modo geral, as de maior variação relativa. Pode-se observar, grosso modo, na parte oeste do País, variações relativas acima de 40%, mas que não ultrapassam o incremento de 500 mil habitantes em cada Unidade da Federação. Aquelas áreas cujo aumento relativo é inferior a 40% detêm maior incremento absoluto de população, estando espacialmente registradas em todo o leste do território.

A tabela 4 contém informações sobre a distribuição espacial da população brasileira. Para o Brasil, cuja área terrestre é de 8,457 milhões de quilômetros quadrados, a contagem de cerca de 119 milhões de habitantes por ocasião do censo de 1980 propicia uma densidade demográfica de 14,1 hab/km². Embora se observe um aumento geral de 3 hab/km², em relação à densidade demográfica de 1970, é importante ressaltar que este aumento não foi uniforme em todo o País, nem tampouco implicou maior homogeneidade na distribuição espacial da população, mesmo a nível estadual. Os Estados do centro-sul, com exceção de Minas Gerais, e os do extremo-nordeste são os de maior adensamento de população, enquanto que na faixa a oeste do País as densidades são extremamente baixas, apresentando valores inferiores a 1 hab/km² (mapa 4).

Cabe agora focar as particularidades que caracterizam cada região, retomando-se a análise das tabelas 2, 3 e 4.

A Região Norte, com o efetivo aproximado de 6 milhões de habitantes, é a que guarda a menor proporção de população (4,95%) em relação ao total do País. Isto se verifica mesmo tendo-se detectado nessa Região a maior taxa de crescimento e a maior variação relativa de população, na década. Sua densidade demográfica é de 1,7 hab/km².

Os Territórios de Rondônia e Roraima foram as Unidades que apresentaram maiores variações relativas (343,7% e 93,6%, respectivamente) e mais elevadas taxas de crescimento (16,0% e 6,8%) correspondendo a acréscimos aproximados de 381 mil e 38 mil habitantes, no período 1970/1980.

A Região Nordeste, que contém a segunda maior parcela de população do País (34.861.907 habitantes), participa com 29,27% no total do efetivo nacional, e teve um aumento de 24,0% em sua população na última década.

Aos Estados do Maranhão, Piauí, Sergipe e Bahia correspondem as maiores variações relativas de população. As maiores taxas de crescimento da Região foram verificadas no Maranhão e em Sergipe. A Bahia e o Maranhão contam com os maiores incrementos absolutos no período 1970/1980, respectivamente, 1,981 e 1,010 milhões de habitantes. A densidade demográfica da Região é de 22,6 hab/km²; a nível estadual destacam-se Alagoas com 71,9 hab/km², Pernambuco com 62,6 hab/k² e Sergipe com 51,9 hab/km².

Na Região Sudeste foram enumerados aproximadamente 52 milhões de habitantes em 1980, o que representa 43,45% da população brasileira. Esta Região é a de maior concentração populacional do País, com densidade demográfica de 56,3 hab/km². Em São Paulo (101,3 hab/km²) e Rio de Janeiro (260,9 hab/km²) foram verificadas as maiores densidades regionais.

Para Minas Gerais foi encontrada a menor variação relativa da população (16,6%) e a menor taxa de crescimento (1,54%) da Região;

em contraposição, São Paulo teve 40,9% de aumento em seu efetivo e uma taxa de 3,5%, a maior a nível regional.

A participação da Região Sul no total da população brasileira, em 1980, é da ordem de 15,98% (19 milhões de habitantes). Teve o menor incremento relativo de população dentre as regiões, no período 1970/1980, e a maior queda na taxa de crescimento desde 1960. Este comportamento pode ser observado em todos os Estados da Região, o Paraná, por exemplo, de uma taxa de 4,97%, na década de 60, passa para 0,97% na seguinte. A densidade demográfica da Região é de 33,9 hab/km², sendo que as densidades estaduais não se afastam desse valor.

A Região Centro-Oeste, possuindo a segunda menor participação relativa na população do País (6,34%), conta com 7,555 milhões de habitantes em 1980. Embora tenha registrado declínio acentuado na taxa de crescimento a partir de 1960, coloca-se como a segunda de maior crescimento no País.

O Distrito Federal e o Estado de Mato Grosso são os que mais cresceram na Região, muito embora o primeiro tenha diminuído consideravelmente sua taxa de crescimento: de 14,4% no período 1960/1970 passou para 8,2% no seguinte.

Esta Região apresenta densidade demográfica de 4,0 hab/km², sendo que os valores estaduais não ultrapassam 10,0 hab/km², exceto no Distrito Federal com 204,0 hab/km².

3 — ASPECTOS DO COMPORTAMENTO DEMOGRÁFICO DAS REGIÕES METROPOLITANAS³

No caso específico deste informe a avaliação se restringe aos municípios que compõem as Regiões Metropolitanas, focalizados em conjunto e individualmente. Observa-se que interpretações desses cálculos seriam prematuras neste instante, pois ainda não estão disponíveis os dados que as tornariam plausíveis. O objetivo, então, é abordar alguns aspectos do comportamento demográfico recente das principais aglomerações do Brasil.

Pode-se observar na tabela 5 e no mapa 7 que, quando as RMs são ordenadas, segundo o volume de suas respectivas populações em 1970 e 1980, as de São Paulo e Rio de Janeiro mantiveram durante o decênio suas posições de primeiro e segundo maiores aglomerados do País, exibindo, no último Censo, 12,6 e 9,0 milhões de habitantes. Verifica-se também que, com 2,5 milhões de pessoas, a RM de Belo Horizonte passou a ocupar, em 1980, a terceira posição em tamanho demográfico, a qual pertencia à RM de Recife dez anos antes. O quarto maior contingente populacional foi então conferido à RM de Recife (com 2,3 milhões de

³ Elaboração e redação de Aida L. F. de Souza e Iêda Siqueira, Analistas Especializadas do DESPO.

pessoas), seguido pelos das RMs de Porto Alegre (2,2 milhões), Salvador (1,8 milhão), Fortaleza (1,6 milhão), Curitiba (1,4 milhão) e Belém (1,0 milhão) as quais mantiveram suas posições.

Esses totais implicam fortes densidades demográficas em todas as RMs; as de São Paulo e Rio de Janeiro, 1.583,25 hab/km² e 1.395,21 hab/km², são as mais elevadas, sendo a RM de Recife a terceira mais densamente povoada (1.066,95 hab/km²). As RMs de Belém e Salvador, ambas com cerca de 800 hab/km² se colocam, respectivamente, como quarta e quinta densidades metropolitanas. A RM de Belo Horizonte, com quase 700 hab/km², vem a seguir. Uma diminuição pronunciada ocorre desta última RM para a de Fortaleza, que tem 454,09 hab/km² e também para as de Porto Alegre (384,49 hab/km²) e especialmente Curitiba, a menos densa das RMs, com 164,53 hab/km² (tabela 7 e mapa 8).

Dentro do contexto macrorregional brasileiro foram as Regiões Metropolitanas do Sudeste as que apresentaram maior variação absoluta da população no período 1970/1980. A RM de São Paulo teve seu contingente populacional aumentado por quase 4,5 milhões de pessoas; posicionam-se em seguida a RM do Rio de Janeiro com um acréscimo de aproximadamente 2 milhões e a RM de Belo Horizonte com cerca de 1 milhão. Destacam-se após estas as RMs do Sul: a de Porto Alegre contando com 700 mil e a de Curitiba com 621 mil habitantes a mais nos seus tamanhos demográficos. No Nordeste a RM de Salvador foi a única que teve um crescimento absoluto superior a 600 mil pessoas, pois as RMs de Recife e Fortaleza aumentaram em cerca de 550 mil habitantes cada. Finalmente, a RM do Norte, a de Belém, não chegou a atingir um incremento de 350 mil habitantes, sendo, portanto, a RM brasileira que teve a menor variação absoluta durante a década.

O padrão estabelecido pela variação relativa e pelas taxas médias geométricas é, entretanto, bastante distinto do padrão de variação absoluta. A RM de Curitiba teve tanto o maior incremento relativo (75,7%) como a mais elevada taxa anual (5,80%) dentre todas as RMs. De acordo com esse critério pode-se englobar numa mesma categoria as RMs de Belém, Fortaleza, Salvador, São Paulo e Belo Horizonte, nas quais a variação relativa oscilou entre 52% e 58%, e cujas taxas estão entre 4,30% e 4,70%. Quanto à RM de Porto Alegre, esta apresentou 45,8% de variação e sua taxa foi de 3,84%. Já nas RMs de Recife e Rio de Janeiro se observam, ao mesmo tempo, os incrementos relativos mais baixos (em torno de 30%) e as menores taxas (respectivamente 2,73% e 2,45%).

Ressalta-se que, quando se faz uma comparação rigorosa das taxas de 1970/1980 com as da década anterior (tabela 6), somente a RM de Curitiba acelerou seu ritmo de crescimento populacional, enquanto as demais diminuíram os seus, embora em diferentes magnitudes.

Focalizando-se em separado os municípios que constituem os núcleos das RMs, constata-se que todos eles, em 1980, continuavam a englobar acima de 50% da população total da RM. Essa concentração

é mais acentuada na RM de Belém, cujo núcleo congrega 93%, mas também é bastante pronunciada nos núcleos das RMs de Salvador (85%) e Fortaleza (83%).

Embora todos os municípios-núcleo tenham elevadas densidades demográficas, que variam de 1.269,46 hab/km² em Belém até 5.688,95 hab/km² em São Paulo, estes Municípios não detêm, necessariamente, as densidades máximas de suas respectivas RMs. Uma relação mais alta entre o número de habitantes e o de quilômetros quadrados ocorre em municípios periféricos das RMs de Recife (Olinda — com 9.719,24 hab/km²), Rio de Janeiro (Nilópolis — com 6.895,45 hab/km² e São João de Meriti — com 11.726,06 hab/km²) e São Paulo (Diadema — com 9.524,75 hab/km², Osasco — com 7.072,48 hab/km² e São Caetano do Sul com 6.792,92 hab/km²) (tabela 7 e mapa 8).

Contando com os maiores volumes populacionais em 1970, os municípios-núcleo apresentaram, naturalmente, as maiores amplitudes de variação absoluta durante a década. Em termos relativos, o incremento mais substancial foi o de Curitiba, que cresceu 68,6% e o de menor expressão o de Recife, que aumentou 13,6%. As taxas de incremento anual destes municípios são todas menores no período 1970/1980 do que no decênio anterior. Aliás, essa desaceleração do ritmo de crescimento demográfico ocorreu em 54% dos 117 municípios formadores das RMs, especialmente das RMs do Rio de Janeiro, São Paulo e Recife, enquanto 37% destes aumentaram e os 9% restantes mantiveram as suas taxas. Note-se que apenas 2 municípios perderam população.

Ainda no âmbito da variação relativa e das taxas médias de incremento anual, deve-se ressaltar que, a despeito da menor intensidade do crescimento da maior parte dos municípios metropolitanos, o comportamento de alguns municípios periféricos se destaca pela ordem de grandeza dos resultados obtidos. Para colocar em evidência apenas o caso mais notório de cada uma das RMs, é necessário mencionar as taxas e variações relativas de Ananindeua (RM de Belém, 11,32% e 192%), Caucaia (RM de Fortaleza, 5,56% e 72%), Paulista (RM de Recife, 8,85% e 136%), Lauro de Freitas (RM de Salvador, 13,39% e 251%), Ribeirão das Neves (RM de Belo Horizonte, 21,33% e 591,16% — este foi o de mais elevado incremento dentre todos os municípios considerados), Itaboraí (RM do Rio de Janeiro, 5,69% e 74%), Embu (RM de São Paulo, 18,06% e 427,31%), Piraquara (RM de Curitiba, 12,74% e 232%) e Sapiranga (RM de Porto Alegre, 8,56% e 127,33%). O confronto das taxas de 1960/1970 com as de 1970/1980, bem como de suas respectivas distribuições espaciais, pode ser feito pelos mapas 5 e 6 e pela tabela 6.

A generalidade dos aspectos demográficos recém-apresentados não diminui sua relevância. Em especial, a divulgação de resultados preliminares do Censo Demográfico de 1980 a nível municipal permitiu que esta primeira investigação apontasse as principais modificações demográficas dos últimos dez anos.

TABELA 1

POPULAÇÃO RESIDENTE, SEGUNDO AS GRANDES REGIÕES
E UNIDADES DA FEDERAÇÃO — 1940-1980

GRANDES REGIÕES E UNIDADES DA FEDERAÇÃO	POPULAÇÃO RESIDENTE				
	1.º-9-1940	1.º-7-1950	1.º-9-1960	1.º-9-1970	1.º-9-1980
TOTAL.....	41 165 289	51 941 767	70 070 457	93 139 037	119 098 992
Norte.....	1 467 940	1 834 185	2 561 782	3 603 860	5 893 136
Rondônia.....	14 308	37 173	69 792	111 064	492 810
Acre.....	79 744	114 788	158 184	215 299	301 605
Amazonas.....	418 572	507 628	708 459	955 235	1 432 066
Roraima.....	10 541	17 834	28 304	40 885	79 153
Pará.....	913 838	1 119 790	1 529 293	2 167 018	3 411 868
Amapá.....	30 937	36 972	67 750	114 359	175 634
Nordeste.....	14 426 185	17 992 094	22 181 880	28 111 927	34 861 907
Maranhão.....	1 231 955	1 577 838	2 469 447	2 992 686	4 002 599
Piauí.....	816 796	1 047 192	1 242 136	1 680 573	2 140 066
Ceará.....	2 092 301	2 706 611	3 296 366	4 361 603	5 294 876
Rio Grande do Norte.....	766 516	970 348	1 145 502	1 550 244	1 899 720
Paraíba.....	1 423 165	1 717 160	2 000 851	2 382 617	2 772 660
Pernambuco.....	2 681 032	3 395 099	4 095 379	5 160 640	6 147 102
Alagoas.....	950 158	1 094 845	1 258 107	1 588 109	1 987 581
Fernando de Noronha.....	—	628	1 389	1 241	1 266
Sergipe.....	542 579	644 255	752 256	900 744	1 141 834
Bahia.....	3 921 683	4 838 118	5 920 447	7 493 470	9 474 263
Sudeste.....	18 304 317	22 549 386	30 630 728	39 853 498	51 752 651
Minas Gerais.....	6 774 037	7 839 674	9 912 507	11 487 415	13 390 805
Espírito Santo.....	772 778	914 531	1 298 242	1 599 333	2 023 821
Rio de Janeiro.....	3 596 186	4 667 270	6 610 748	8 994 802	11 297 327
São Paulo.....	7 161 316	9 127 911	12 809 231	17 771 948	25 040 698
Sul.....	5 722 018	7 835 418	11 753 075	16 496 493	19 036 429
Paraná.....	1 235 849	2 112 893	4 268 239	6 929 868	7 630 466
Santa Catarina.....	1 177 149	1 562 862	2 118 116	2 901 734	3 628 751
Rio Grande do Sul.....	3 309 020	4 159 663	5 366 720	6 664 891	7 777 212
Centro-Oeste.....	1 244 829	1 730 684	2 942 992	5 073 259	7 554 869
Mato Grosso do Sul.....	235 143	309 458	(1) 572 018	998 211	1 370 333
Mato Grosso.....	186 763	211 858	(1) 324 827	598 879	1 141 661
Goiás.....	822 923	1 209 368	1 913 289	2 938 677	3 865 482
Distrito Federal.....	—	—	140 164	537 492	1 177 393

FONTE: IBGE — Censos Demográficos de 1940, 1950, 1960 e 1970 e Sinopse Preliminar do Censo Demográfico de 1980.

(1) Em virtude do desmembramento do Estado de Mato Grosso, os números se referem à população presente. Conservou-se, porém, para os totais da região Centro-Oeste e Brasil os valores correspondentes à população residente.

TABELA 2

**TAXA MÉDIA GEOMÉTRICA DE INCREMENTO ANUAL DA
POPULAÇÃO RESIDENTE, SEGUNDO AS GRANDES REGIÕES E
UNIDADES DA FEDERAÇÃO — 1940-1980**

GRANDES REGIÕES E UNIDADES DA FEDERAÇÃO	TAXA MÉDIA GEOMÉTRICA DE INCREMENTO ANUAL			
	1940/1950	1950/1960	1960/1970	1970/1980
TOTAL	2,39	2,99	2,89	2,49
Norte	2,29	3,34	3,40	5,04
Rondônia.....	10,20	6,39	4,76	16,07
Acre.....	3,77	3,20	3,13	3,43
Amazonas.....	1,98	3,33	3,03	4,13
Roraima.....	5,49	4,65	3,75	6,83
Pará.....	2,09	3,11	3,55	4,64
Amapá.....	1,83	6,14	5,37	4,38
Nordeste	2,27	2,08	2,50	2,18
Maranhão.....	2,55	4,50	1,94	2,95
Piauí.....	2,56	1,69	3,07	2,45
Ceará.....	2,65	1,96	2,84	1,96
Rio Grande do Norte.....	2,43	1,65	3,07	2,05
Paraíba.....	1,93	1,52	1,76	1,53
Pernambuco.....	2,43	1,86	2,34	1,76
Alagoas.....	1,45	1,38	2,36	2,27
Fernando de Noronha.....	—	8,12	—1,12	0,20
Sergipe.....	1,76	1,54	1,82	2,40
Bahia.....	2,16	2,01	2,38	2,37
Sudeste	2,14	3,06	2,60	2,65
Minas Gerais.....	1,50	2,33	1,49	1,54
Espírito Santo.....	1,73	3,51	2,11	2,38
Rio de Janeiro.....	2,69	3,48	3,13	2,31
São Paulo.....	2,50	3,39	3,33	3,49
Sul	3,25	4,07	3,44	1,44
Paraná.....	5,61	7,16	4,97	0,97
Santa Catarina.....	2,92	3,04	3,20	2,26
Rio Grande do Sul.....	2,35	2,54	2,19	1,56
Centro-Oeste	3,41	5,36	5,60	4,06
Mato Grosso do Sul.....	2,83	6,23	5,59	3,22
Mato Grosso.....	1,29	4,29	6,12	6,66
Goiás.....	3,99	4,62	4,38	2,78
Distrito Federal.....	—	—	14,39	8,16

FONTE: IBGE — Censos Demográficos de 1940, 1950, 1960 e 1970; Sinopse Preliminar do Censo Demográfico de 1980.

TABELA 3

**VARIAÇÃO ABSOLUTA E RELATIVA DA POPULAÇÃO
RESIDENTE, SEGUNDO AS GRANDES REGIÕES
E UNIDADES DA FEDERAÇÃO — 1940-1980**

GRANDES REGIÕES E UNIDADES DA FEDERAÇÃO	VARIAÇÃO DA POPULAÇÃO RESIDENTE							
	1940/1950		1950/1960		1960/1970		1970/1980	
	Absoluta	Relativa (%)	Absoluta	Relativa (%)	Absoluta	Relativa (%)	Absoluta	Relativa (%)
TOTAL.....	10 776 478	26,2	18 128 690	34,9	23 068 580	32,9	25 959 955	27,9
Norte.....	366 245	24,9	727 597	39,6	1 042 078	40,6	2 289 276	63,5
Rondônia.....	22 865	159,8	32 619	87,7	41 272	59,1	381 746	343,7
Acre.....	35 044	43,9	43 396	37,8	57 115	36,1	86 306	40,1
Amazonas.....	89 056	21,3	200 831	39,6	246 776	34,8	476 831	49,9
Roraima.....	7 293	69,2	10 470	58,7	12 581	44,4	38 268	93,6
Pará.....	205 952	22,5	409 503	36,6	637 725	41,7	1 244 850	57,5
Amapá.....	6 035	19,5	30 778	83,2	46 609	68,8	61 275	53,6
Nordeste..... (1)	3 565 909	24,7	4 189 786	23,3	5 930 047	26,7	6 749 980	24,0
Maranhão.....	345 883	28,1	891 609	56,5	523 239	21,2	1 009 913	33,7
Piauí.....	230 396	28,2	194 944	18,6	438 437	35,3	459 493	27,3
Ceará.....	614 310	29,4	589 755	21,8	1 065 237	32,3	933 273	21,4
Rio Grande do Norte	203 832	26,6	175 154	18,1	404 742	35,3	349 476	22,5
Paraíba.....	293 995	20,7	283 691	16,5	381 766	19,1	389 983	16,4
Pernambuco.....	714 067	26,6	700 280	20,6	1 065 261	26,0	986 462	19,1
Alagoas.....	144 687	15,2	163 262	14,9	330 002	26,2	399 472	25,2
Fernando de Noronha..	—	—	761	21,2	—148	—10,6	25	2,0
Sergipe.....	101 676	18,7	108 001	16,8	148 488	15,7	241 090	26,8
Bahia.....	916 435	23,4	1 082 329	22,4	1 573 023	26,6	1 980 793	26,4
Sudeste.....	4 245 069	23,2	8 081 342	35,8	9 222 770	30,1	11 899 153	29,9
Minas Gerais.....	1 065 637	15,7	2 072 833	25,2	1 574 908	17,1	1 903 390	16,6
Espírito Santo.....	141 753	18,3	383 711	42,0	301 091	23,2	424 488	26,5
Rio de Janeiro.....	1 071 084	29,8	1 943 478	41,6	2 384 054	36,0	2 302 525	25,6
São Paulo.....	1 966 595	27,5	3 681 320	40,3	4 962 717	38,7	7 268 750	40,9
Sul.....	2 113 400	36,9	3 917 657	50,0	4 743 418	40,4	2 539 936	15,4
Paraná.....	877 044	71,1	2 155 346	102,0	2 661 629	62,4	700 598	10,1
Santa Catarina.....	385 713	32,8	555 254	35,5	783 618	37,0	727 017	25,1
Rio Grande do Sul.....	850 643	25,7	1 207 057	29,0	1 298 171	24,2	1 112 321	16,7
Centro-Oeste.....	485 855	39,0	1 212 308	70,0	2 130 267	72,3	2 481 610	48,9
Mato Grosso do Sul....	74 315	31,6	(2) 262 560	84,8	(3) 426 193	74,5	372 122	37,3
Mato Grosso.....	25 095	13,4	(2) 112 696	53,3	(3) 274 052	84,3	542 782	90,6
Goiás.....	386 445	46,9	703 921	58,2	1 025 388	53,6	926 805	31,5
Distrito Federal.....	—	—	—	—	397 328	283,6	639 901	119,1

FONTE: IBGE — Censos Demográficos de 1940, 1950, 1960, 1970; Sinopse Preliminar do Censo Demográfico de 1980.

(1) Inclusive a população do Território de Fernando de Noronha. (2) Diferença entre a população presente em 1960 e residente em 1950. (3) Diferença entre a população residente em 1970 e presente em 1960.

TABELA 4

**ÁREA E DENSIDADE DEMOGRÁFICA, SEGUNDO AS GRANDES
REGIÕES E UNIDADES DA FEDERAÇÃO — 1940-1980**

GRANDES REGIÕES E UNIDADES DA FEDERAÇÃO	ÁREA TERRES- TRE (km ²)	DENSIDADE DEMOGRÁFICA (hab/km ²)				
		1.º-9-1940	1.º-7-1950	1.º-9-1960	1.º-9-1970	1.º-9-1980
TOTAL	8 456 508	4,87	6,14	8,29	11,01	14,08
Norte (1)	3 554 002	0,41	0,52	0,72	1,01	1,66
Rondônia.....	243 044	0,06	0,15	0,29	0,46	2,03
Acre.....	152 589	0,52	0,75	1,04	1,41	1,98
Amazonas.....	1 558 987	0,27	0,33	0,45	0,61	0,92
Roraima.....	230 104	0,05	0,08	0,12	0,18	0,34
Pará.....	1 227 530	0,74	0,91	1,25	1,77	2,78
Amapá.....	139 068	0,22	0,27	0,49	0,82	1,26
Nordeste (2)	1 542 271	9,35	11,67	14,38	18,23	22,60
Maranhão.....	324 616	3,80	4,86	7,61	9,22	12,33
Piauí.....	250 934	3,26	4,17	4,95	6,70	8,53
Ceará.....	146 817	14,25	18,44	22,45	29,71	36,06
Rio Grande do Norte..	53 015	14,46	18,30	21,61	29,24	35,83
Paraíba.....	56 372	25,25	30,46	35,49	42,27	49,18
Pernambuco.....	98 281	27,28	34,54	41,67	52,51	62,55
Alagoas.....	27 652	34,36	39,59	45,50	57,43	71,88
Fernando de Noronha (3)	25	—	25,12	55,56	49,64	50,64
Sergipe.....	21 994	24,67	29,29	34,20	40,95	51,92
Bahia.....	559 951	7,00	8,64	10,57	13,38	16,92
Sudeste	918 808	19,92	24,54	33,34	43,38	56,33
Minas Gerais.....	582 586	11,63	13,46	17,01	19,72	22,99
Espírito Santo (4).....	45 597	16,95	20,06	28,47	35,08	44,38
Rio de Janeiro.....	43 305	83,04	107,78	152,66	207,71	260,88
São Paulo.....	247 320	28,96	36,91	51,79	71,86	101,25
Sul	562 071	10,18	13,94	20,91	29,35	33,87
Paraná.....	199 060	6,21	10,61	21,44	34,81	38,33
Santa Catarina.....	95 483	12,33	23,87	22,18	30,39	38,00
Rio Grande do Sul.....	267 528	12,37	15,55	20,06	24,91	29,07
Centro-Oeste	1 879 356	0,66	0,92	1,57	2,70	4,02
Mato Grosso do Sul...	350 548	0,67	0,88	1,63	2,85	3,91
Mato Grosso.....	881 001	0,21	0,24	0,37	0,68	1,30
Goiás.....	642 036	1,28	1,88	2,98	4,58	6,02
Distrito Federal.....	5 771	—	—	24,29	93,14	204,02

FONTE: IBGE — Censos Demográficos de 1940, 1950, 1960, 1970; Sinopse Preliminar do Censo Demográfico de 1980.

(1) Incluídos 2.680 km² da zona de litígio entre Amazonas e Pará. (2) Incluídos 2.614 km² da zona de litígio entre Piauí e Ceará. (3) Incluídas as áreas do atol das Rocas e dos penedões São Pedro e São Paulo. (4) Incluídas as áreas das ilhas de Trindade e Martim Vaz.

TABELA 5

POPULAÇÃO RESIDENTE E VARIAÇÃO ABSOLUTA E
RELATIVA, SEGUNDO AS REGIÕES METROPOLITANAS
E MUNICÍPIOS — 1970-1980

(continua)

REGIÕES METROPOLITANAS E MUNICÍPIOS	POPULAÇÃO RESIDENTE		VARIAÇÃO DA POPULAÇÃO	
	1.º-9-1970	1.º-9-1980	Absoluta	Relativa (%)
Belém.....	656 351	1 000 349	343 998	52,41
Belém.....	633 749	934 322	300 573	47,43
Ananindeua.....	22 602	66 027	43 425	192,13
Fortaleza.....	1 038 041	1 581 588	543 547	52,36
Fortaleza.....	859 135	1 308 919	449 784	52,35
Aquiraz.....	32 558	45 214	12 656	38,87
Caucaia.....	54 801	94 157	39 356	71,82
Maranguape.....	59 516	91 222	31 706	53,27
Pacatuba.....	32 031	42 076	10 045	31,36
Recife.....	1 792 688	2 348 362	555 674	31,00
Recife.....	1 060 752	1 204 738	143 986	13,57
Cabo.....	75 980	104 425	28 445	37,44
Igarassu.....	55 127	73 219	18 092	32,82
Itamaracá.....	7 140	8 259	1 119	15,67
Jaboatão.....	201 460	330 923	129 463	64,26
Morreno.....	31 342	34 985	3 643	11,62
Olinda.....	196 471	231 858	35 387	43,46
Paulista.....	70 279	165 827	95 548	135,96
São Lourenço da Mata...	94 137	144 128	49 991	53,10
Salvador.....	1 148 828	1 772 018	623 190	54,25
Salvador.....	1 007 744	1 506 602	498 858	49,50
Camaçari.....	33 533	89 511	55 978	166,93
Candeias.....	34 388	54 197	19 809	57,60
Itaparica.....	8 350	10 892	2 542	30,44
Lauro de Freitas.....	10 126	35 572	25 446	251,29
São Francisco do Conde..	20 928	17 886	-3 042	-14,54
Simões Filho.....	22 088	43 693	21 605	97,81
Vera Cruz.....	11 671	13 665	1 994	17,09
Belo Horizonte.....	1 605 663	2 541 788	936 125	58,30
Belo Horizonte.....	1 235 001	1 781 924	546 923	44,29
Betim.....	37 883	84 290	46 407	122,50
Caeté.....	25 176	30 593	5 417	21,52
Contagem.....	111 338	280 721	169 383	152,13
Ibirité.....	19 523	40 017	20 494	104,97
Lagoa Santa.....	14 050	19 525	5 475	38,97
Nova Lima.....	34 001	41 239	7 238	21,29
Pedro Leopoldo.....	20 700	30 004	9 304	44,95
Raposos.....	10 137	11 830	1 693	16,70
Ribeirão das Neves.....	9 734	67 278	57 544	591,16
Rio Acima.....	5 118	5 054	-64	-1,25
Sabará.....	45 260	64 255	18 995	41,97

TABELA 5

POPULAÇÃO RESIDENTE E VARIAÇÃO ABSOLUTA E
RELATIVA, SEGUNDO AS REGIÕES METROPOLITANAS
E MUNICÍPIOS — 1970-1980

(continua)

REGIÕES METROPOLITANAS E MUNICÍPIOS	POPULAÇÃO RESIDENTE		VARIAÇÃO DA POPULAÇÃO	
	1.º-9-1970	1.º-9-1980	Absoluta	Relativa (%)
Belo Horizonte				
Santa Luzia.....	25 301	59 903	34 602	136,76
Vespasiano.....	12 441	25 155	12 714	102,19
Rio de Janeiro.....	7 082 404	9 018 637	1 936 233	27,34
Rio de Janeiro.....	4 252 009	5 093 232	841 223	19,78
Duque de Caxias.....	431 345	575 533	144 188	33,43
Itaboraí.....	65 851	114 494	48 643	73,87
Itaguaí.....	55 860	90 192	34 332	61,46
Magé.....	113 032	166 576	53 544	47,37
Mangaratiba.....	12 538	13 829	1 291	10,30
Maricá.....	23 656	32 692	9 036	38,20
Nilópolis.....	128 098	151 700	23 602	18,42
Niterói.....	324 367	400 140	75 773	23,36
Nova Iguaçu.....	727 674	1 094 650	366 976	50,43
Paracambi.....	25 399	30 341	4 942	19,46
Petrópolis.....	189 118	241 884	52 766	27,90
São Gonçalo.....	430 349	614 688	184 339	42,83
São João de Meriti.....	303 108	398 686	95 578	31,53
São Paulo.....	8 137 421	12 588 439	4 451 018	54,70
São Paulo.....	5 921 796	8 493 598	2 571 802	43,43
Arujá.....	9 585	17 482	7 897	82,39
Barueri.....	37 803	75 321	37 518	99,25
Biritiba-Mirim.....	8 966	13 379	4 413	49,22
Caieiras.....	15 563	25 066	9 503	61,06
Cajamar.....	10 440	21 941	11 501	110,16
Carapicuíba.....	54 907	185 763	130 856	238,32
Cotia.....	30 957	63 373	32 416	104,71
Diadema.....	78 957	228 594	149 637	189,52
Embu.....	18 161	95 764	77 603	427,31
Embu-Guaçu.....	10 301	21 028	10 727	104,14
Ferraz de Vasconcelos....	25 248	55 107	29 859	118,26
Francisco Morato.....	11 210	28 462	17 252	153,80
Franco da Rocha.....	36 391	50 710	14 319	39,35
Guararema.....	12 636	15 123	2 487	19,68
Guarulhos.....	236 865	532 908	296 043	124,98
Itapeerica da Serra.....	25 312	60 716	35 404	139,87
Itapevi.....	27 589	53 325	25 736	93,28
Itaquaquecetuba.....	29 153	72 779	43 626	149,64
Jandira.....	12 490	36 017	23 527	188,37
Juquitiba.....	7 290	12 500	5 210	71,47
Mairiporã.....	19 640	27 498	7 858	40,01
Mauá.....	101 726	205 817	104 091	102,32
Mogi das Cruzes.....	138 746	198 081	59 335	42,77
Osasco.....	283 203	473 856	190 653	67,32
Pirapora do Bom Jesus....	3 714	4 815	1 101	29,64

TABELA 5

POPULAÇÃO RESIDENTE E VARIAÇÃO ABSOLUTA E
RELATIVA, SEGUNDO AS REGIÕES METROPOLITANAS
E MUNICÍPIOS — 1970-1980

(conclusão)

REGIÕES METROPOLITANAS E MUNICÍPIOS	POPULAÇÃO RESIDENTE		VARIAÇÃO DA POPULAÇÃO	
	1.º-9-1970	1.º-9-1980	Absoluta	Relativa (%)
São Paulo				
Poá.....	32 382	52 795	20 413	63,04
Ribeirão Pires.....	29 117	56 487	27 370	94,00
Rio Grande da Serra.....	8 314	20 102	11 788	141,78
Salesópolis.....	9 560	10 649	1 089	11,39
Santa Isabel.....	17 179	28 997	11 818	68,79
Santana de Parnaíba.....	5 428	10 070	4 642	85,52
Santo André.....	418 578	552 797	134 219	32,07
São Bernardo do Campo.....	201 462	425 780	224 318	111,35
São Caetano do Sul.....	150 171	163 030	12 859	8,56
Suzano.....	55 622	101 067	45 445	81,70
Taboão da Serra.....	40 959	97 642	56 683	138,39
Curitiba	820 766	1 441 743	620 977	75,66
Curitiba.....	608 417	1 025 979	417 562	68,63
Almirante Tamandaré.....	15 367	34 226	18 859	122,72
Araucária.....	17 162	34 832	17 670	102,96
Balsa Nova.....	4 709	5 283	574	12,19
Bocaiuva do Sul.....	10 733	12 135	1 402	13,06
Campina Grande do Sul.....	7 885	9 800	1 915	24,29
Campo Largo.....	34 340	54 901	20 561	59,87
Colombo.....	19 228	62 874	43 646	226,99
Contenda.....	7 212	7 552	340	4,71
Mandirituba.....	11 051	15 454	4 403	39,84
Piraquara.....	21 266	70 561	49 295	231,80
Quatro Barras.....	4 079	5 715	1 636	40,11
Rio Branco do Sul.....	25 163	31 794	6 631	26,35
São José dos Pinhais.....	34 154	70 637	36 483	106,82
Porto Alegre	1 531 168	2 232 370	701 202	45,80
Porto Alegre.....	885 564	1 125 901	240 337	27,14
Alvorada.....	40 378	91 487	51 109	126,58
Cachoeirinha.....	31 023	63 228	32 205	103,81
Campo Bom.....	16 623	33 831	17 208	103,52
Canoas.....	153 759	220 569	66 810	43,45
Estância Velha.....	8 897	14 260	5 363	60,28
Esteio.....	34 587	50 975	16 388	47,38
Gravataí.....	52 457	107 500	55 043	104,93
Guaíba.....	33 695	55 038	21 343	63,34
Novo Hamburgo.....	85 356	136 551	51 195	59,98
São Leopoldo.....	64 311	98 586	34 275	53,30
Sapiranga.....	16 402	37 286	20 884	127,33
Sapucaia do Sul.....	41 749	79 402	37 653	90,19
Viamão.....	66 367	117 756	51 389	77,43

FONTE: IBGE — Sinopses Preliminares do Censo Demográfico de 1970 e do Censo Demográfico de 1980.

TABELA 6

TAXA MÉDIA GEOMÉTRICA DE INCREMENTO ANUAL, SEGUNDO AS REGIÕES METROPOLITANAS E MUNICÍPIOS — 1960-1980

(continua)

REGIÕES METROPOLITANAS E MUNICÍPIOS	TAXA MÉDIA GEOMÉTRICA DE INCREMENTO ANUAL		REGIÕES METROPOLITANAS E MUNICÍPIOS	TAXA MÉDIA GEOMÉTRICA DE INCREMENTO ANUAL	
	1960/1970 (1)	1970/1980 (2)		1960/1970 (1)	1970/1980 (2)
Belém	4,85	4,30	Belo Horizonte		
Belém.....	4,80	3,96	Caeté.....	2,60	1,97
Ananindeua.....	6,54	11,32	Contagem.....	14,82	9,69
Fortaleza	4,87	4,30	Ibirité.....	9,94	7,44
Fortaleza.....	5,42	4,30	Lagoa Santa... ..	2,09	3,35
Aquiraz.....	2,09	3,34	Nova Lima... ..	2,00	1,95
Caucaia.....	2,62	5,56	Pedro Leopoldo	2,47	3,78
Maranguape.....	2,75	4,35	Raposos.....	1,91	1,56
Pacatuba.....	2,78	2,76	Ribeirão das Ne-		
Recife	3,93	2,73	ves.....	4,32	21,33
Recife.....	3,12	1,28	Rio Acima.....	0,11	-0,13
Cabo.....	3,96	3,21	Sabará.....	6,98	3,57
Igarassu.....	4,19	2,85	Santa Luzia... ..	7,25	9,00
Itamaracá.....	1,50	1,47	Vespasiano.....	4,15	7,29
Jaboatão.....	6,77	5,09	Rio de Janeiro	3,62	2,45
Moreno.....	0,56	1,11	Rio de Janeiro	2,70	1,82
Olinda.....	6,13	3,67	Duque de Caxias	5,96	2,93
Paulista.....	3,20	8,85	Itaboraí.....	4,71	5,69
São Lorenzo da Mata	6,43	4,35	Itaguaí.....	5,30	4,91
Salvador	4,77	4,39	Magé.....	6,79	3,95
Salvador.....	4,91	4,07	Mangaratiba... ..	0,27	0,98
Camaçari.....	4,61	10,32	Maricá.....	2,08	3,29
Candeias.....	6,53	4,73	Nilópolis.....	2,94	1,71
Itaparica.....	0,98	2,69	Niterói.....	3,02	2,12
Lauro de Freitas... ..	0,27	13,39	Nova Iguaçu.. ..	7,37	4,17
São Francisco do			Paracambi.....	5,03	1,79
Conde.....	1,40	-2,11	Petrópolis.....	2,55	2,48
Simões Filho.....	8,35	7,06	São Gonçalo... ..	5,77	3,64
Vera Cruz.....	-0,07	1,59	São João de Me-		
Belo Horizonte	6,25	4,67	riti.....	4,75	2,78
Belo Horizonte.....	6,12	3,69	São Paulo	5,53	4,45
Betim.....	7,08	8,33	São Paulo.....	4,89	3,67
			Arujá.....	5,24	6,19
			Barueri.....	8,61	7,14
			Biritiba-Mirim..	4,65	4,08
			Caieiras.....	5,21	4,88

TABELA 6

TAXA MÉDIA GEOMÉTRICA DE INCREMENTO ANUAL, SEGUNDO AS REGIÕES METROPOLITANAS E MUNICÍPIOS — 1960-1980

(conclusão)

REGIÕES METROPOLITANAS E MUNICÍPIOS	TAXA MÉDIA GEOMÉTRICA DE INCREMENTO ANUAL		REGIÕES METROPOLITANAS E MUNICÍPIOS	TAXA MÉDIA GEOMÉTRICA DE INCREMENTO ANUAL	
	1960/1970 (1)	1970/1980 (2)		1960/1970 (1)	1970/1980 (2)
São Paulo			Curitiba.....	5,04	5,80
Cajamar.....	4,97	7,71	Curitiba.....	5,62	5,36
Carapicuíba.....	12,14	12,93	Alm. Tamandaré	4,23	8,34
Cotia.....	7,96	7,29	Araucária.....	0,55	7,33
Diadema.....	20,46	11,18	Balsa Nova....	0,39	1,16
Embu.....	13,69	18,06	Bocaiúva do Sul	0,95	1,24
Embu-Guaçu.....	8,02	7,40	Campina Grande do Sul.....	3,21	2,20
Ferraz de Vasconcelos	9,57	8,12	Campo Largo..	2,20	4,80
Francisco Morato..	15,96	9,77	Colombo.....	8,26	12,58
Franco da Rocha..	3,69	3,37	Contenda.....	3,45	0,46
Guararema.....	5,20	1,81	Mandirituba...	2,68	3,41
Guarulhos.....	8,92	8,45	Piraquara.....	7,38	12,74
Itapecerica da Serra	5,94	9,09	Quatro Barras..	2,57	3,43
Itapevi.....	10,51	6,45	Rio Branco do Sul	2,18	2,37
Itaquaquecetuba...	9,79	9,58	São José dos Pinhais	5,41	7,54
Jandira.....	19,83	11,17	Porto Alegre.....	4,19	3,84
Juquitiba.....	2,22	5,54	Porto Alegre...	3,49	2,43
Mairiporã.....	4,35	3,42	Alvorada.....	11,39	8,52
Mauá.....	13,45	7,30	Cachoeirinha...	10,50	7,38
Mogi das Cruzes...	3,99	3,62	Campo Bom...	6,91	7,36
Osasco.....	9,52	5,25	Canoas.....	4,03	3,67
Pirapora do Bom Jesus.....	4,10	2,63	Estância Velha.	7,04	4,83
Poá.....	7,44	5,01	Esteio.....	4,70	3,95
Ribeirão Pires....	5,47	6,81	Gravataí.....	4,26	7,44
Rio Grande da Serra	7,73	9,22	Guaíba.....	4,48	5,03
Salesópolis.....	1,00	1,08	Novo Hamburgo	4,77	4,81
Santa Isabel.....	3,88	5,37	São Leopoldo..	3,68	4,36
Santana de Parnaíba	0,39	6,37	Sapiranga.....	3,23	8,56
Santo André.....	5,55	2,82	Sapucaia do Sul	8,65	6,64
São Bernardo do Campo.....	9,41	7,76	Viamão.....	6,12	5,90
São Caetano do Sul	2,81	0,82			
Suzano.....	7,48	6,15			
Taboão da Serra...	19,08	8,97			

FONTE: IBGE — Sinopse Preliminar do Censo Demográfico de 1980.

(1) Referente à população recenseada. (2) Referente à população residente.

TABELA 7

ÁREA E DENSIDADE DEMOGRÁFICA, SEGUNDO AS REGIÕES
METROPOLITANAS E MUNICÍPIOS — 1970-1980

(continua)

REGIÕES METROPOLITANAS E MUNICÍPIOS	ÁREA TERRES- TRE (km ²)	DENSIDADE DEMOGRÁFICA (hab/km ²)	
		1.º-9-1970	1.º-9-1980
Belém	1 221	537,55	819,29
Belém.....	736	861,07	1 269,46
Ananindeua.....	485	46,60	136,14
Fortaleza	3 433	238,03	454,09
Fortaleza.....	336	2 556,95	3 895,59
Aquiraz.....	546	59,63	82,81
Caucaia.....	1 293	42,38	72,82
Maranguape.....	754	78,93	120,98
Pacatuba.....	554	57,82	75,95
Recife	2 201	814,49	1 066,95
Recife.....	209	5 075,37	5 764,30
Cabo.....	451	168,47	231,54
Igárasu.....	487	113,20	150,35
Itamaracá.....	65	109,85	127,06
Jabotão.....	234	860,94	1 414,20
Moreno.....	189	165,83	185,11
Olinda.....	29	6 774,86	9 719,24
Paulista.....	207	339,51	801,10
São Lourenço da Mata.....	330	285,26	436,75
Salvador	2 213	519,13	899,73
Salvador.....	324	3 110,32	4 650,01
Camaçari.....	926	36,21	96,66
Candeias.....	233	147,59	232,61
Itaparica.....	35	238,57	311,20
Lauro de Freitas.....	93	108,88	382,49
São Francisco do Conde.....	184	113,74	97,21
Simões Filho.....	207	106,71	211,08
Vera Cruz.....	211	55,31	64,76
Belo Horizonte	3 670	437,51	692,59
Belo Horizonte.....	335	3 686,57	5 319,18
Betim.....	376	100,75	224,18
Caeté.....	528	47,68	57,94
Contagem.....	167	666,69	1 680,96
Ibiritó.....	145	134,64	275,98
Lagoa Santa.....	280	50,18	69,73
Nova Lima.....	410	82,93	100,58
Pedro Leopoldo.....	305	67,87	98,37
Raposos.....	77	131,65	153,64
Ribeirão das Neves.....	157	62,00	428,52
Rio Acima.....	228	22,45	22,17

TABELA 7

ÁREA E DENSIDADE DEMOGRÁFICA, SEGUNDO AS REGIÕES
METROPOLITANAS E MUNICÍPIOS — 1970-1980

(continua)

REGIÕES METROPOLITANAS E MUNICÍPIOS	ÁREA TERRES- TRE (km ²)	DENSIDADE DEMOGRÁFICA (hab/km ²)	
		1.º-9-1970	1.º-9-1980
Belo Horizonte			
Sabará.....	205	220,78	313,44
Santa Luzia.....	341	74,20	175,67
Vespasiano.....	116	107,25	216,85
Rio de Janeiro.....	6 464	1 095,67	1 395,21
Rio de Janeiro.....	1 171	3 631,09	4 349,47
Duque de Caxias.....	442	975,89	1 302,11
Itaboraí.....	526	125,19	217,67
Itaguaí.....	523	106,81	172,45
Magé.....	718	157,43	232,00
Mangaratiba.....	290	43,23	47,69
Maricá.....	339	69,78	96,44
Nilópolis.....	22	5 822,64	6 895,45
Niterói.....	130	2 495,13	3 078,00
Nova Iguaçu.....	764	952,45	1 432,79
Paracambi.....	197	128,93	154,02
Petrópolis.....	1 080	175,11	223,97
São Gonçalo.....	228	1 887,50	2 696,00
São João de Meriti.....	34	8 914,94	11 726,06
São Paulo.....	7 951	1 023,44	1 583,25
São Paulo.....	1 493	3 966,37	5 688,95
Arujá.....	82	116,89	213,20
Barueri.....	64	590,67	1 176,89
Biritiba-Mirim.....	380	23,59	35,21
Caieiras.....	106	146,82	236,47
Cajamar.....	134	77,91	163,74
Carapicuíba.....	44	1 247,89	4 211,89
Cotia.....	335	92,41	189,17
Diadema.....	24	3 289,87	9 524,75
Embu.....	76	238,96	1 260,05
Embu-Guaçu.....	200	51,50	105,14
Ferraz de Vasconcelos.....	22	1 147,64	2 504,86
Francisco Morato.....	29	386,55	981,45
Franco da Rocha.....	155	234,78	327,16
Guararema.....	236	53,54	64,08
Guarulhos.....	341	694,62	1 562,78
Itapeccerica da Serra.....	342	74,01	177,53
Itapevi.....	98	281,32	544,13
Itaquaquecetuba.....	104	280,32	699,80
Jandira.....	25	499,60	1 440,68
Juquitiba.....	569	12,81	21,97
Mairiporã.....	310	63,35	88,70
Mauá.....	78	1 304,18	2 638,68
Mogi das Cruzes.....	749	185,24	264,46
Osasco.....	67	4 226,91	7 072,48

TABELA 7

ÁREA E DENSIDADE DEMOGRÁFICA, SEGUNDO AS REGIÕES
METROPOLITANAS E MUNICÍPIOS — 1970-1980

(conclusão)

REGIÕES METROPOLITANAS E MUNICÍPIOS	ÁREA TERRES- TRE (km ²)	DENSIDADE DEMOGRÁFICA (hab/km ²)	
		1.º-9-1970	1.º-9-1980
São Paulo			
Pirapora do Bom Jesus.....	76	48,87	63,36
Poá.....	14	2 313,00	3 771,07
Ribeirão Pires.....	110	264,70	513,52
Rio Grande da Serra.....	28	296,93	717,93
Salesópolis.....	414	23,09	25,72
Santa Isabel.....	368	46,68	78,20
Santana de Parnaíba.....	169	32,12	59,59
Santo André.....	159	2 632,57	3 476,71
São Bernardo do Campo.....	319	631,54	1 334,73
São Caetano do Sul.....	24	6 257,12	6 792,92
Suzano.....	184	302,29	549,28
Taboão da Serra.....	23	1 780,83	4 245,30
Curitiba.....	8 763	93,66	164,53
Curitiba.....	431	1 411,64	2 380,46
Almirante Tamandaré.....	495	31,04	69,14
Araucária.....	486	35,31	71,67
Balsa Nova.....	337	13,97	15,68
Bocaiúva do Sul.....	1 489	7,21	8,15
Campina Grande do Sul.....	690	11,43	14,20
Campo Largo.....	1 289	26,64	42,59
Colombo.....	158	121,70	397,94
Contenda.....	272	26,51	27,76
Mandirituba.....	524	21,09	29,49
Piraquara.....	353	60,24	199,89
Quatro Barras.....	182	22,41	31,40
Rio Branco do Sul.....	1 081	23,28	29,41
São José dos Pinhais.....	976	34,99	72,37
Porto Alegre.....	5 806	263,72	384,49
Porto Alegre.....	497	1 781,82	2 265,39
Alvorada.....	71	568,70	1 288,55
Cachoeirinha.....	67	463,03	943,70
Campo Bom.....	48	346,31	704,81
Canoas.....	313	491,24	704,69
Estância Velha.....	122	72,93	116,89
Esteio.....	40	864,67	1 274,37
Gravatá.....	771	68,04	139,43
Guaíba.....	1 371	24,58	40,14
Novo Hamburgo.....	223	382,76	612,34
São Leopoldo.....	60	1 071,85	1 643,10
Sapiranga.....	178	92,15	209,47
Sapucaia do Sul.....	53	787,72	1 498,15
Viamão.....	1 992	33,32	59,11

FONTE: IBGE — Sinopses Preliminares do Censo Demográfico de 1970 e do Censo Demográfico de 1980.

TABELA 8

**COMPARAÇÃO ENTRE OS RESULTADOS DO CENSO
DEMOGRÁFICO DE 1.º-9-1980 E A PROJEÇÃO
REALIZADA PARA A MESMA DATA, SEGUNDO AS
GRANDES REGIÕES E UNIDADES DA FEDERAÇÃO**

GRANDES REGIÕES E UNIDADES DA FEDERAÇÃO	POPULAÇÃO RESIDENTE EM 1.º-9-1980			
	Censo demográfico (1)	Projetada (2)	Diferença (1 — 2)	
			Absoluta	Relativa (%)
BRASIL	119 098 992	123 593 410	—4 494 418	— 3,64
Norte	5 893 136	4 948 439	944 697	19,09
Rondônia.....	492 810	173 311	319 499	184,35
Acre.....	301 605	289 490	12 115	4,18
Amazonas.....	1 432 066	1 257 419	174 647	13,89
Roraima.....	79 153	56 664	22 489	39,69
Pará.....	3 411 868	2 996 215	415 653	13,87
Amapá.....	175 634	175 340	294	0,17
Nordeste	34 861 907	36 400 393	—1 538 486	— 4,23
Maranhão.....	4 002 599	3 711 186	291 413	7,85
Piauí.....	2 140 066	2 318 013	— 177 947	— 7,68
Ceará.....	5 294 876	5 918 528	— 623 652	—10,54
Rio Grande do Norte.....	1 899 720	2 173 544	— 273 824	—12,60
Paraíba.....	2 772 600	2 974 023	— 201 423	— 6,77
Pernambuco (1).....	6 148 368	6 633 690	— 485 322	— 7,32
Alagoas.....	1 987 581	2 020 640	— 33 059	— 1,64
Sergipe.....	1 141 834	1 097 981	43 853	3,99
Bahia.....	9 474 263	9 552 788	— 78 525	— 0,82
Sudeste	51 752 651	51 795 860	— 43 209	— 0,08
Minas Gerais.....	13 390 805	13 729 172	— 338 367	— 2,46
Espírito Santo.....	2 023 821	1 864 610	159 211	8,54
Rio de Janeiro.....	11 297 327	12 079 180	— 781 853	— 6,47
São Paulo.....	25 040 698	24 122 898	917 800	3,80
Sul	19 036 429	22 609 610	—3 573 181	—15,80
Paraná.....	7 630 466	10 338 659	—2 708 193	—26,19
Santa Catarina.....	3 628 751	3 899 447	— 270 696	— 6,94
Rio Grande do Sul.....	7 777 212	8 371 504	— 594 292	— 7,10
Centro-Oeste	7 554 869	7 839 108	— 284 239	— 3,63
Mato Grosso do Sul.....	1 370 333	1 543 889	— 173 556	—11,24
Mato Grosso.....	1 141 661	962 007	179 654	18,67
Goiás.....	3 865 482	4 287 192	— 421 710	— 9,84
Distrito Federal.....	1 177 393	1 046 020	131 373	12,56

FONTE: IBGE — Sinopse Preliminar do Censo Demográfico de 1980 e Centro Brasileiro de Estudos Demográficos, Projeção da população brasileira por idade e sexo — período 1970/2000 e Revista Brasileira de Estatística — Rio de Janeiro, v. 35, n.º 139, julho/setembro de 1974.

(1) Inclusive Fernando de Noronha.

TABELA 9

**COMPARAÇÃO ENTRE ALGUNS PARÂMETROS DEMOGRÁFICOS
CALCULADOS A PARTIR DOS RESULTADOS DO CENSO
DEMOGRÁFICO E DOS VALORES PROJETADOS
PARA A MESMA DATA — 1970-1980**

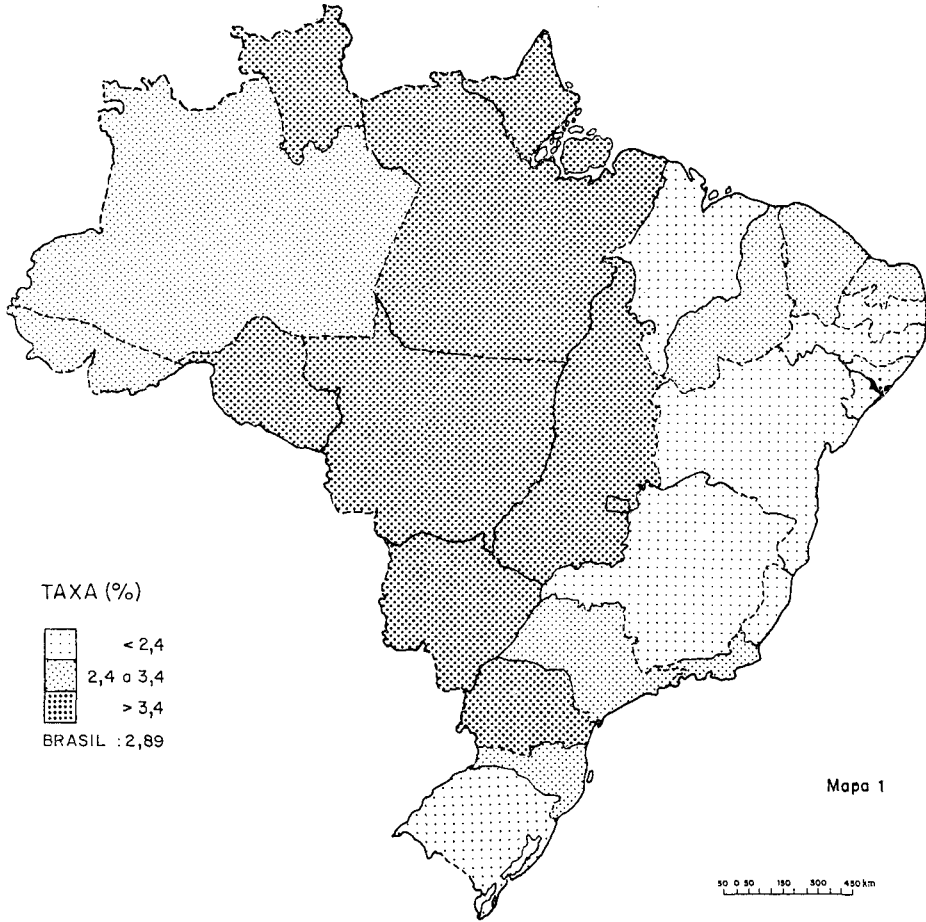
GRANDES REGIÕES E UNIDADES DA FEDERAÇÃO	TAXAS MÉDIAS GEOMÉTRICAS DE INCREMENTO ANUAL		DISTRIBUIÇÃO RELATIVA DA POPULAÇÃO EM 1.º-9-1980	
	Calculada a partir dos resultados dos censos de 1970 e 1980 (1)	Calculada a partir dos resultados do censo de 1970 e da projeção (2)	Censo	Projeção
BRASIL	2,49	2,85	109,09	109,00
Norte	5,04	3,23	4,95	4,00
Roraima.....	16,07	4,31	0,41	0,14
Acre.....	3,43	2,96	0,25	0,23
Amazonas.....	4,13	2,78	1,20	1,02
Roraima.....	6,83	3,30	0,07	0,05
Pará.....	4,64	3,32	2,87	2,42
Amapá.....	4,38	4,34	0,15	0,14
Nordeste	2,18	2,60	29,27	29,45
Maranhão.....	2,95	2,16	3,36	3,00
Piauí.....	2,45	3,27	1,80	1,88
Ceará.....	1,96	3,09	4,45	4,79
Rio Grande do Norte.....	2,05	3,42	1,60	1,76
Paraíba.....	1,53	2,23	2,33	2,41
Pernambuco (3).....	1,76	2,53	5,16	5,37
Alagoas.....	2,27	2,43	1,67	1,63
Sergipe.....	2,40	1,99	0,96	0,89
Bahia.....	2,37	2,44	7,94	7,72
Sudeste	2,65	2,65	43,45	41,90
Minas Gerais.....	1,54	1,79	11,24	11,11
Espírito Santo.....	2,38	1,54	1,70	1,51
Rio de Janeiro.....	2,31	2,99	9,49	9,77
São Paulo.....	3,49	3,10	21,02	19,51
Sul	1,44	3,19	15,99	18,30
Paraná.....	0,97	4,07	6,41	8,37
Santa Catarina.....	2,26	2,99	3,05	3,16
Rio Grande do Sul.....	1,56	2,30	6,53	6,77
Centro-Oeste	4,06	4,43	6,34	6,35
Mato Grosso do Sul.....	3,22	4,44	1,15	1,25
Mato Grosso.....	6,66	4,82	0,96	0,78
Goiás.....	2,78	3,84	3,24	3,47
Distrito Federal.....	8,16	6,87	0,99	0,85

FONTE: IBGE — Censo Demográfico de 1970 e Sinopse Preliminar do Censo Demográfico de 1980.

(1) Taxa média geométrica anual de incremento divulgada em: IBGE, Sinopse Preliminar do Censo Demográfico de 1980 (Rio de Janeiro) 1980, 79 p., tabela, IX Recenseamento Geral do Brasil (1980). (2) Taxa média geométrica anual de incremento calculada com a população residente em 1.º-9-1970 e a população residente projetada para 1.º-9-1980 com correção nesta última de 4,5% no grupo 0 a 4 anos. (3) Inclusive Fernando de Noronha.

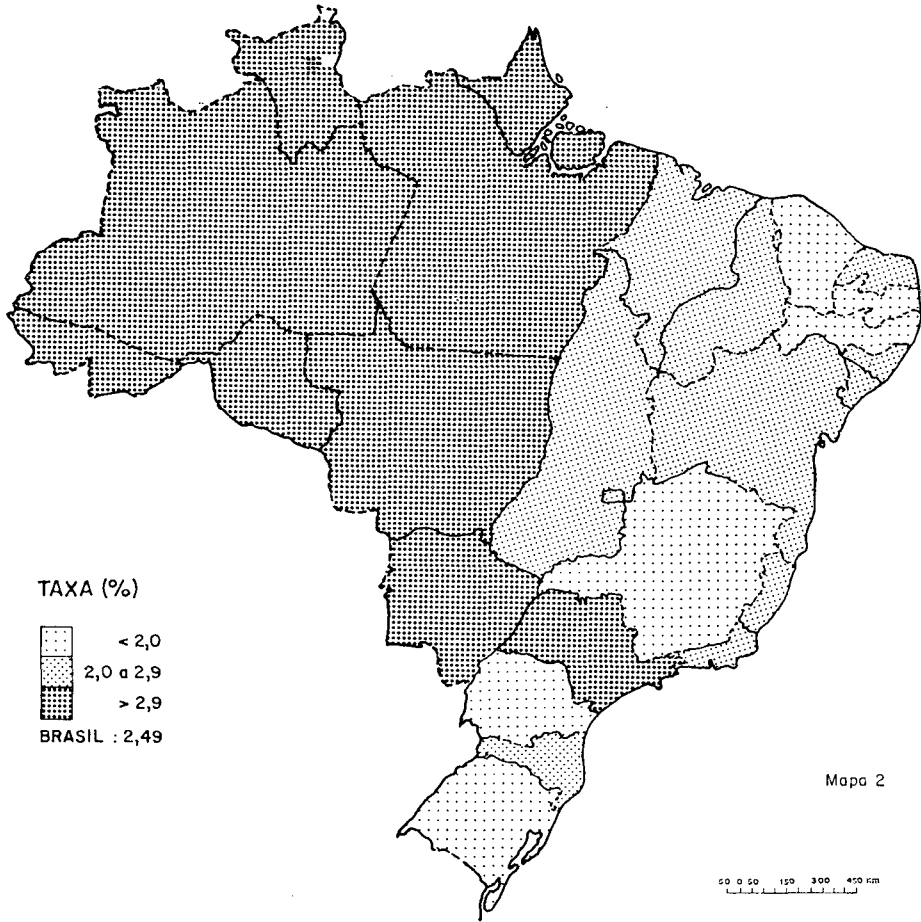
BRASIL

TAXA MÉDIA GEOMÉTRICA DE INCREMENTO ANUAL - 1960/1970



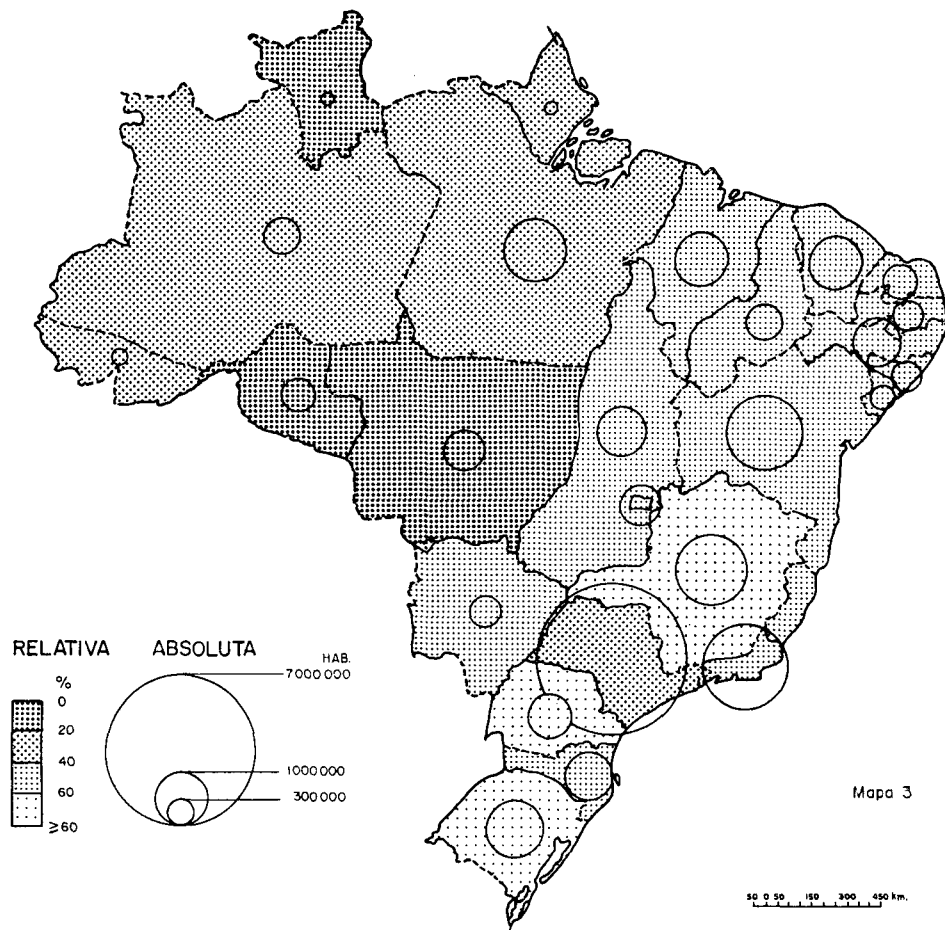
BRASIL

TAXA MÉDIA GEOMÉTRICA DE INCREMENTO ANUAL - 1970/1980



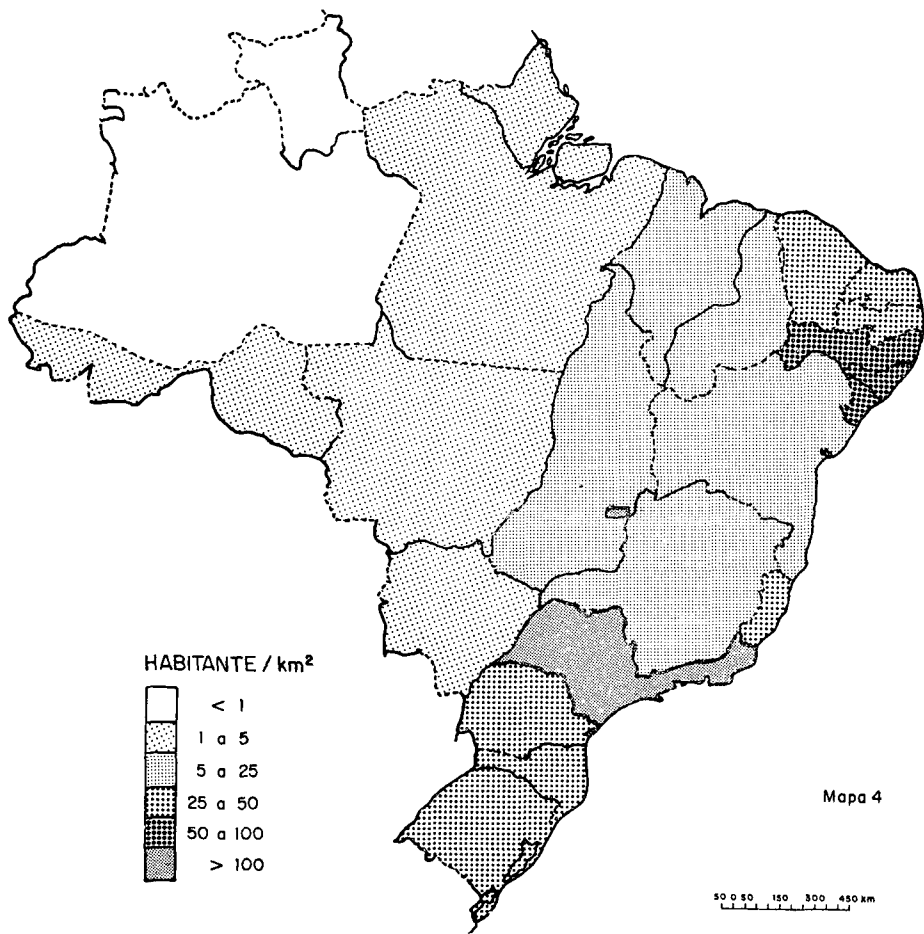
BRASIL

VARIAÇÃO ABSOLUTA E RELATIVA DA POPULAÇÃO TOTAL - 1970/1980



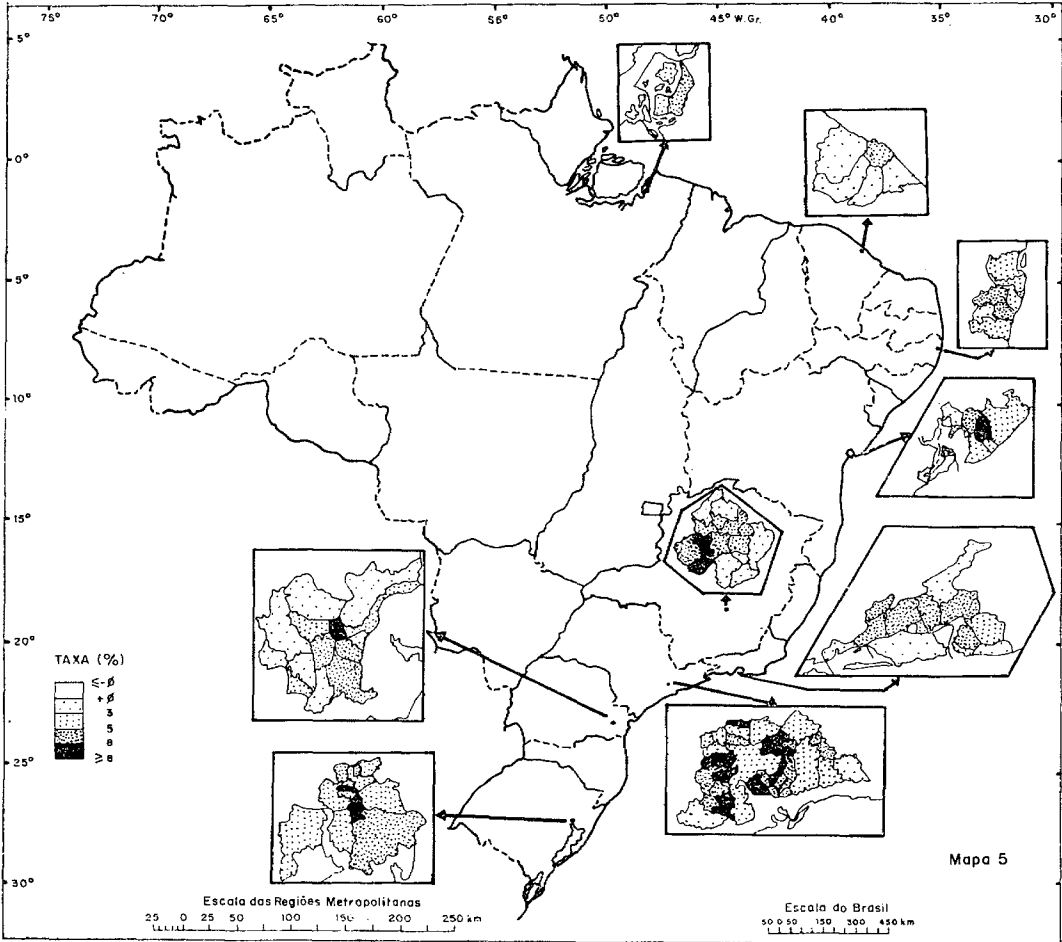
BRASIL

DENSIDADE DEMOGRÁFICA - 1980



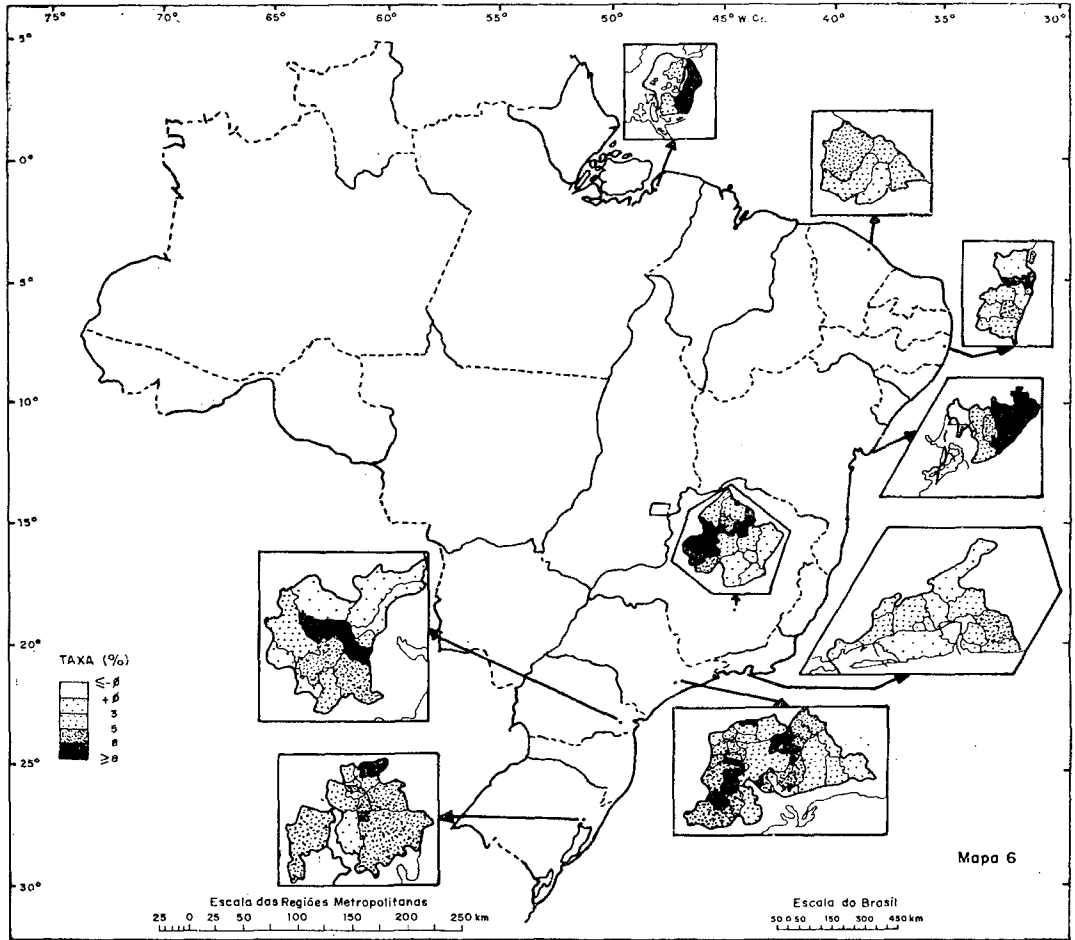
BRASIL - REGIÕES METROPOLITANAS

TAXA MÉDIA GEOMÉTRICA DE INCREMENTO ANUAL - 1960/1970



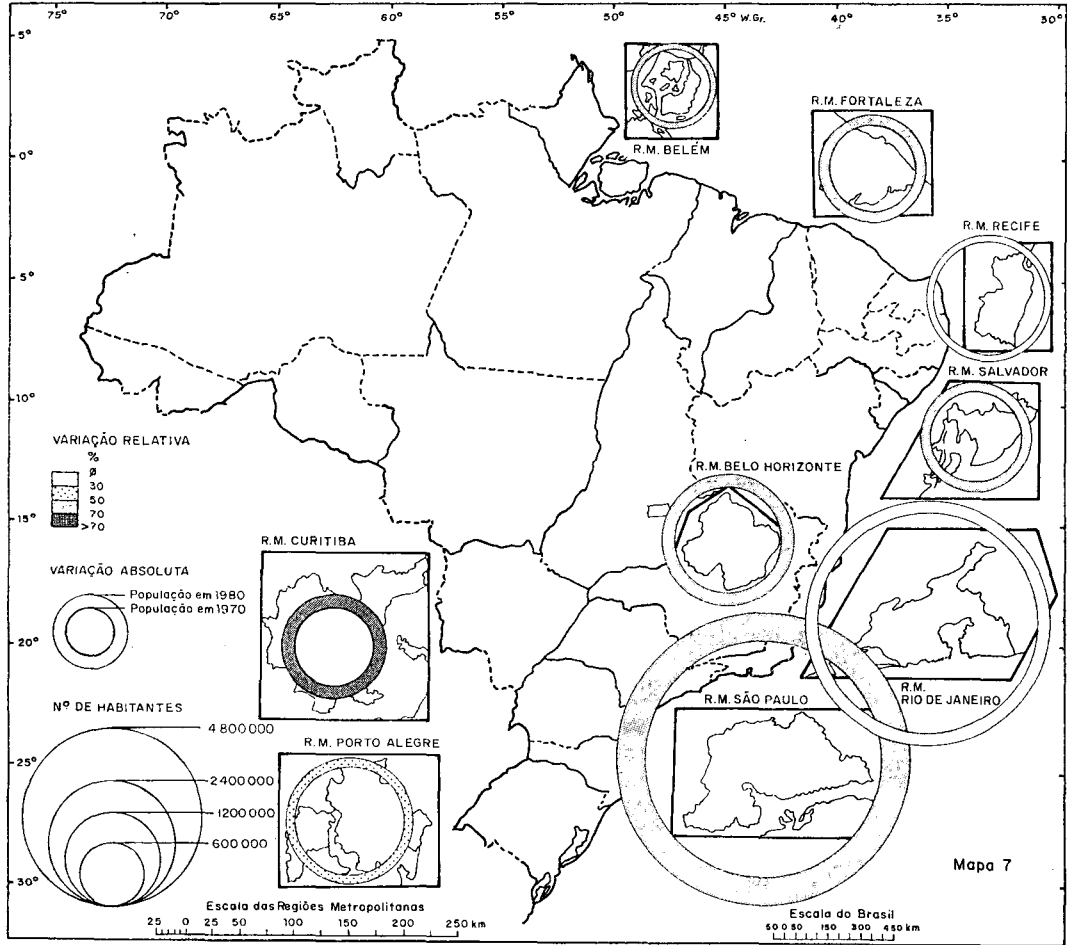
BRASIL - REGIÕES METROPOLITANAS

TAXA MÉDIA GEOMÉTRICA DE INCREMENTO ANUAL - 1970/1980



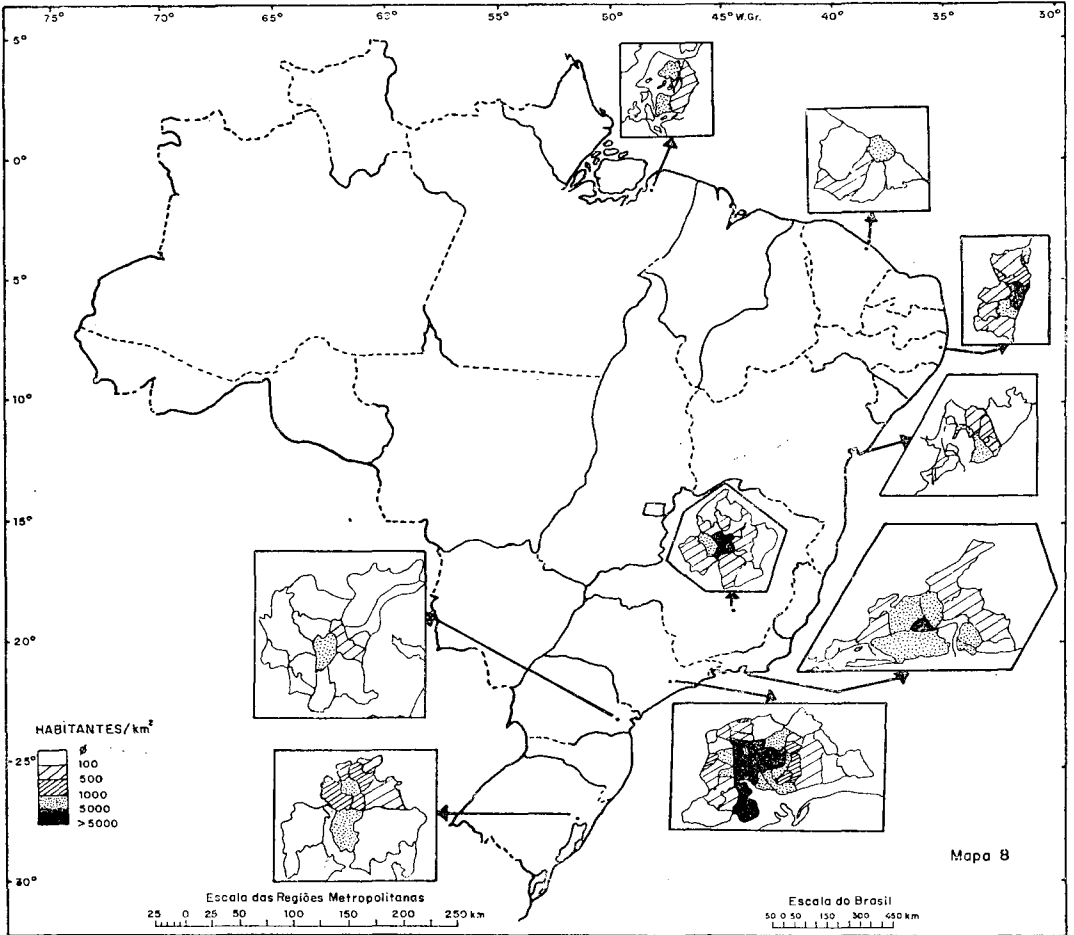
BRASIL - REGIÕES METROPOLITANAS

VARIAÇÃO ABSOLUTA E RELATIVA DA POPULAÇÃO TOTAL - 1970/1980



BRASIL - REGIÕES METROPOLITANAS

DENSIDADE DEMOGRÁFICA - 1980



OBSERVAÇÕES SOBRE A EVOLUÇÃO DA POPULAÇÃO RURAL E URBANA DO BRASIL NO PERÍODO 1940 A 1980*

IBGE/SUEGE/DESFO

SUMÁRIO

1. *Situação demográfica em 1980*
2. *Evolução no período 1940/1980*
3. *Ritmo de crescimento no período 1940/1980*

1 — SITUAÇÃO DEMOGRÁFICA EM 1980

Recentemente divulgada, a Sinopse Preliminar do Censo Demográfico de 1980 revela que a população total residente no Brasil é de 119.098.992 habitantes. Classificando-se esta população segundo a situação do domicílio, tem-se que 80.479.195 pessoas foram enumeradas em áreas urbanas e 38.619.797 em áreas rurais.

A distribuição espacial da população brasileira, mesmo ao nível das Grandes Regiões, continua a apresentar um padrão de concentração no qual se ressalta a Região Sudeste com 51,8 milhões de pessoas. Nesta

* Elaborado e redigido por Aida Laura Ferreira de Souza, Iêda Siqueira e Regina Coeli de Siqueira Lana, Analistas Especializadas do DESFO.

Região se localizam os três Estados mais populosos do Brasil: São Paulo (25 milhões), Minas Gerais (13 milhões) e Rio de Janeiro (11 milhões), cujos efetivos demográficos, somados aos do Espírito Santo (2 milhões), constituem praticamente a metade (43,5%) da população total do País.

O segundo maior contingente demográfico regional se encontra no Nordeste (34,9 milhões, onde se destacam, por seus tamanhos, as populações da Bahia — 9 milhões, Pernambuco — 6 milhões e Ceará — 5 milhões) e o terceiro no Sul (19 milhões, dos quais 7,8 milhões pertencem ao Rio Grande do Sul, 7,6 milhões ao Paraná e 3,6 milhões a Santa Catarina).

O Centro-Oeste e o Norte, contendo, respectivamente, 7,6 milhões e 5,9 milhões de pessoas, representam apenas 6,3% e 5% do volume populacional brasileiro (veja tabela 1).

Para o Brasil como um todo, os residentes em áreas urbanas já eram mais numerosos em 1970 (56% do total), embora, dentre as Regiões, este fato só ocorresse na Sudeste. A Sinopse Preliminar do Censo Demográfico de 1980 mostra que essa proporção não aumentou só para o conjunto do País (passando a 67,6%), em todas as Grandes Regiões a participação da população urbana atinge pelo menos 50% da total, sendo a mais elevada a do Sudeste (82,8%) e a menor a do Nordeste (50,4%).

A comparação da participação das populações urbana e rural no volume total de cada uma das Unidades da Federação pode ser visualizada no mapa 1. Verifica-se que o Distrito Federal é a Unidade da Federação que apresenta a mais alta proporção de população urbana¹ (96,8%), por efeito, porém, da forma como foi planejado para exercer suas funções no Território Nacional. Rio de Janeiro (com 91,8%) e São Paulo (com 88,6%) são os Estados onde a urbanização é mais acentuada, havendo um diferencial de mais de 20% na participação urbana dos Estados que se seguem: Rio Grande do Sul, Minas Gerais e Mato Grosso do Sul (todos com aproximadamente 67%).

Os demais Estados localizados nas Regiões Sudeste, Sul e Centro-Oeste possuem todos cerca de 60% de população urbana. Entretanto, das Unidades da Federação nordestinas e nortistas, apenas Pernambuco, Rio Grande do Norte, Roraima, Amazonas e Amapá atingem essa proporção. As outras, em maioria, estão na ordem de 50%, mas no Acre, no Piauí e no Maranhão a população rural ainda é consideravelmente mais numerosa que a urbana.

¹ Excluindo-se o Território Federal de Fernando de Noronha, que, por definição, só possui população urbana.

2 — EVOLUÇÃO NO PERÍODO 1940/1980

Em todos os Censos Demográficos realizados até 1960 a participação do contingente rural brasileiro ultrapassava bastante a do urbano: 15,4 milhões e 14,3 milhões a mais em 1940 e 1950, respectivamente; em 1960 esse diferencial se estreitou para 7,5 milhões. Contudo, a variação da população considerada segundo a situação do domicílio no período 1940/1950 já indicava um crescimento maior da população urbana, tanto absoluto quanto relativo. Nesse decênio, a um incremento de quase 6 milhões no efetivo urbano correspondia um de quase 5 milhões no rural, o que se traduzia percentualmente em 45,8% e 17%. Entre 1950 e 1960 a população urbana sofreu um aumento de 12,5 milhões de pessoas e a rural, de 5,6 milhões, alargando a discrepância entre as respectivas variações relativas: 66,7% e 16,9%. No período seguinte o incremento absoluto alcançou 20,8 milhões de habitantes em áreas urbanas, em contraposição ao de áreas rurais, que foi de apenas 2,3 milhões; enquanto a variação relativa da população urbana se mantinha na mesma magnitude ocorrida entre 1950 e 1960, a da população rural caía para 5,9%.

Assim, o Censo Demográfico de 1970 acusou um volume de população urbana 11 milhões maior que o rural. Mas entre 1970 e 1980 esta diferença se acentuou marcadamente: o efetivo urbano se torna 2,08 vezes maior que o rural, resultado de um aumento absoluto de 28,4 milhões no primeiro e de uma perda de 2,5 milhões no segundo. Note-se que a diminuição de 6% no contingente rural o reduziu a um valor menor, inclusive ao encontrado em 1960 (veja tabelas 2 e 3).

A evolução demográfica constatada para o Brasil como um todo pode ser desdobrada, para um entendimento mais completo, ao nível das Grandes Regiões e também das Unidades da Federação.

Tanto em 1940 quanto em 1950 os Recenseamentos Gerais mostravam um peso maior da população rural nas cinco Grandes Regiões. Este padrão não se repetia, contudo, em todas as Unidades da Federação, pois em 1940 o Rio de Janeiro já apresentava um efetivo urbano mais numeroso, ao qual o Censo Demográfico de 1950 veio acrescentar São Paulo. Observe-se que as variações relativas regionais de 1940 a 1950 se coadunavam com as do Brasil: as diferenças percentuais urbanas foram coerentemente maiores que as rurais. As variações absolutas, entretanto, por efeito aritmético, foram mais elevadas para a população rural — somente na Região Sudeste, devido à importância do volume demográfico urbano do Rio de Janeiro e São Paulo, foi mais amplo o diferencial absoluto urbano.

Em 1960 a distribuição regional da população segundo a situação do domicílio sofreu alteração. O Sudeste, a despeito de englobar Minas Gerais e Espírito Santo — Estados ainda basicamente rurais naquela data, reunia uma população urbana que excedia a rural em 4,3 milhões;

enquanto a variação relativa do Sudeste entre 1950 e 1960 foi de 62,9%, esta Região teve um aumento urbano absoluto de 6,7 milhões de habitantes.

No período 1950/1960 a urbanização não estava localizada apenas no Sudeste. Todas as Grandes Regiões acusavam variações relativas urbanas bem superiores às rurais. Ao mesmo tempo, somente no Centro-Oeste o incremento absoluto do efetivo rural era maior que o do urbano, embora tenha sido esta Região a que apresentou a mais elevada variação relativa urbana (137,8%). Quando comparados os diferenciais das populações urbanas e rurais (tanto os absolutos quanto os percentuais) entre 1950 e 1960 fica evidente que o efeito aritmético exercido pelo tamanho da população rural começava a se diluir.

Foram várias as mudanças que tiveram lugar no intervalo censitário 1960/1970. Para todo o Brasil, o Censo de 1970 mostrou, pela primeira vez, um contingente urbano maior que o rural. O crescimento da população rural, tanto absoluto quanto relativo, caiu para menos da metade do que fora constatado no intervalo anterior; concomitantemente a um diferencial de 20,8 milhões de urbanos, o dos rurais foi de somente 2,3 milhões.

Regionalmente, o Sudeste perdeu 17,3% da população rural (isto é, 2,3 milhões), bem como todos os Estados que o compõem (tendo sido os decréscimos mais pronunciados os de São Paulo, — 27%, e Rio de Janeiro — 22%). O Sul e o Centro-Oeste tiveram diferenciais relativos menores que no período precedente, reproduzindo, *grosso modo*, os mesmos números absolutos. Assim, se justifica o modesto crescimento rural a nível nacional, pois as Regiões Nordeste e Norte mantiveram entre 1960 e 1970 as magnitudes de seus crescimentos relativos anteriores.

Por outro lado, fortes aumentos urbanos são detectados novamente em todas as Regiões. Em números relativos, o menor é definido pelo Nordeste (56,4%); o maior, encontrado no Centro-Oeste (142%), não se deve apenas à criação de Brasília (a área do Distrito Federal teve um aumento urbano de 484,2%), mas também ao Estado de Goiás (que, já tendo crescido 134,2% na década anterior, passou a 115%). Nas outras Regiões a variação relativa da população urbana ficou entre 66% e 70%. Note-se que aos altos incrementos percentuais ocorridos na Região Norte, mais especificamente em Rondônia, Acre e Amapá, corresponderam cada um a menos de 30.000 pessoas, enquanto um de 78% em São Paulo significou 6,3 milhões a mais nas áreas urbanas deste Estado.

O período 1970/1980 acentuou a expansão da urbanização em sua fronteira mais remota, a Região Norte. Dentre as Grandes Regiões, apenas esta apresentou crescimento relativo urbano maior que o observado entre 1960 e 1970. Seu comportamento demográfico também se destaca por ter sido a única Região onde ocorreu uma expressiva varia-

ção relativa positiva da população rural. Não foi, entretanto, a Região Norte a que teve o mais elevado crescimento percentual urbano no último intervalo censitário. Na perspectiva da evolução populacional esta posição coube, mais uma vez, ao Centro-Oeste (com 109,9%), ficando, então, a segunda com o Norte (87,3%). A seguir se colocaram o Sul (62,7%), o Nordeste (49,6%) e o Sudeste (47,9%). Naturalmente, o padrão estabelecido pelos aumentos absolutos diferiu deste, tendo seguido a ordenação tradicional dos volumes demográficos regionais: Sudeste, Nordeste, Sul, Centro-Oeste e Norte (veja tabela 2).

O período 1970/1980 marcou ainda perdas rurais em três das cinco Grandes Regiões: as diminuições mais acentuadas surgiram no Sul (2,0 milhões e — 22,2%) e no Sudeste (2,0 milhões e — 18,2%), mas no Centro-Oeste a perda foi menor (200 mil e — 7,6%). Enquanto isso, o crescimento rural do Nordeste assumiu proporções modestas (917 mil e 5,6%) e o do Norte atingiu os valores mais elevados dentre todos os períodos intercensitários (870 mil e 44%) (veja tabela 3).

Ao nível das Unidades da Federação, nota-se imediatamente que os Estados do Sudeste e do Sul tiveram, ao mesmo tempo, os maiores incrementos absolutos urbanos e as maiores perdas rurais. Em termos percentuais, a menor variação urbana de todas as Unidades da Federação se localizou no Rio de Janeiro (31,2%), fugindo ao padrão de crescimento relativo urbano dos demais Estados dessas duas Regiões, que oscilou entre 48,3% (em Minas Gerais) e 79,2% (no Espírito Santo).

Quanto aos decréscimos nos efetivos rurais destes mesmos Estados, o mais relevante foi o do Paraná, onde ocorreu a maior perda de população rural do País tanto em termos absolutos quanto relativos (1,3 milhões e — 28,7%). Este decréscimo se torna especialmente notório quando contraposto ao aumento da população urbana (78,6%) no mesmo período e ao incremento rural do período anterior. Contudo, todos os Estados do Sul e do Sudeste perderam população rural; excluindo-se o Paraná e Santa Catarina, que teve o menor decréscimo relativo (— 11%), a proporção das perdas foi bastante homogênea: — 15% no Rio de Janeiro, — 16,8% no Espírito Santo e — 19% em Minas Gerais, São Paulo e Rio Grande do Sul.

Já os Estados nordestinos desenvolveram um padrão diferente de variação populacional, exceto pelo Maranhão. Pode-se observar claramente que os aumentos absolutos foram menos significativos que no Sul e no Sudeste; que a aumentos relativos médios e fortes (entre 34,7% e 67,3%) da população urbana se opõem decréscimos (da ordem de 4%) e incrementos (tanto absolutos quanto percentuais) pequenos no contingente rural. No Maranhão, entretanto, foram praticamente iguais os aumentos absolutos das duas populações, ficando a diferença por conta da variação relativa (67,2% a urbana e 22,5% a rural).

Os efetivos urbanos das Unidades da Federação do Centro-Oeste apresentaram todos elevados incrementos relativos de 1970 a 1980:

Goiás, Mato Grosso do Sul e Distrito Federal com, respectivamente, 94,3%, 103,2% e 120,8% e Mato Grosso com 182,9%. Os maiores diferenciais absolutos ficaram por conta de Goiás (1,2 milhão) e do Distrito Federal (623 mil), enquanto Mato Grosso e Mato Grosso do Sul não chegaram a atingir um aumento de 500 mil pessoas (424 mil e 467 mil, respectivamente). O comportamento das populações rurais dessas unidades da Federação não mostrou tendências tão homogêneas: enquanto Goiás e Mato Grosso do Sul acusaram diminuições (— 14,1% e — 17,3%, respectivamente), o Distrito Federal e Mato Grosso tiveram variações positivas (77,1% e 32,3%, respectivamente). Note-se, entretanto, que o aumento relativo no contingente rural do Distrito Federal corresponde a apenas 16,5 mil pessoas; recorde-se que a população rural do Distrito Federal equivale a apenas 3% da total.

Para concluir observe-se que as unidades da Federação da Região Norte tiveram as mais altas variações urbanas relativas do País: as populações de Rondônia, Acre, Amazonas e Roraima cresceram, respectivamente, 291,7%, 122,9%, 111,5% e 179,7%, e Pará e Amapá 63,4% e 66,4%. A despeito desse crescimento bastante elevado, as variações absolutas das unidades da Federação nortistas ainda foram modestas no período 1970/1980: a maior, 648 mil, ocorreu no Pará, e a menor, 31 mil, em Roraima. Finalmente, foi em Rondônia que se verificou o mais expressivo crescimento relativo da população rural no Brasil: 403,9%, correspondendo a um aumento absoluto de 208 mil pessoas. Destaque-se que, dentre todas as Unidades da Federação, somente em Rondônia a variação do contingente rural foi maior que a do urbano.

Embora as demais unidades da Federação nortistas tenham tido aumentos em suas populações rurais, estes foram de diferentes magnitudes: no Pará ocorreu o maior acréscimo rural absoluto do País (597 mil habitantes), equivalente a 52,2% em termos relativos; já no Amapá e em Roraima as variações relativas ainda foram expressivas (38,1% e 29,3%, respectivamente), mas os valores absolutos bastante pequenos (19,8 mil e 6,9 mil), enquanto no Acre e no Amazonas foram baixos os diferenciais tanto absolutos quanto relativos (8,6% e 13,4 mil; 4,5% e 24 mil, respectivamente).

3 — RITMO DE CRESCIMENTO NO PERÍODO 1940/1980

O ritmo de crescimento em cada um dos períodos intercensitários da população classificada segundo a situação do domicílio é fornecido pelas respectivas taxas médias geométricas de crescimento anual (tabela 4). O mapa 2 mostra como o ritmo da população urbana evoluiu em cada uma das Grandes Regiões entre 1940 e 1980.

Em todas as Regiões, já entre 1940/1950, as taxas de crescimento do efetivo urbano eram bastante altas, indo de 3,45% no Nordeste a

4,57% no Centro-Oeste, não apresentando, portanto, diferenciais muito pronunciados.

No período seguinte, isto é, de 1950 a 1960, o ritmo de crescimento urbano se intensificou em todas as Regiões; essa aceleração se processou em graus diferenciados, o que acentuou as desigualdades dos incrementos. A taxa mais elevada se localizou ainda no Centro-Oeste (9,05%), vindo em seguida as do Sul (6,55%), Norte (5,13%), Sudeste (5,00%) e Nordeste (4,71%).

Essa intensificação do ritmo de crescimento da população urbana foi sucedida, no decênio 1960/1970, por ganhos muito pequenos, equivalência e decréscimo em suas taxas médias anuais: a do Centro-Oeste aumentou para 9,24%, a do Norte para 5,44%, a do Sudeste para 5,19%, o Nordeste praticamente manteve a sua, 4,57%, e a do Sul sofreu diminuição: 5,29%.

Apesar de terem continuado bastante elevadas, as taxas de crescimento urbano das Regiões Centro-Oeste, Sudeste, Nordeste e Sul acusaram decréscimo no último período intercensitário; apenas a Região Norte acentuou o seu ritmo, passando sua taxa a 6,47%. Todavia, a despeito de ter diminuído, o Centro-Oeste continuou a ser a Região onde a população urbana cresceu mais rapidamente: 7,70%. No Sul, no Nordeste e no Sudeste as taxas foram respectivamente para 4,99%, 4,11% e 3,99%.

A distribuição espacial das taxas de crescimento para 1970/1980 das populações urbanas estaduais aparece no mapa 3. Fazendo-se a ressalva de que a mais baixa taxa de aumento urbano, 2,75%, a da população do Rio de Janeiro, foi consideravelmente alta, observa-se que as menores taxas do Brasil, as inferiores a 4% ao ano, se localizaram em Pernambuco, Paraíba, Rio Grande do Sul e Rio de Janeiro.

A partir de São Paulo estende-se até Alagoas uma faixa de crescimento urbano compreendida entre 4% e 5%, interrompida pelo Espírito Santo, cuja taxa de 6% o posicionou na classe imediatamente superior.

Para sul e para oeste de São Paulo até o Território Federal de Rondônia formam-se bolsões de crescimento progressivamente mais elevados: Paraná e Santa Catarina (6%), Goiás, Mato Grosso do Sul e Distrito Federal (6% a 9%), e, finalmente, Mato Grosso e Rondônia (que atingiram as duas maiores taxas do Brasil: 10,96% e 14,63%).

O aumento das taxas de crescimento urbano também se verificou para oeste do Rio Grande do Norte e Ceará (cujos incrementos ficaram na classe de 4% a 5%). Piauí, Maranhão, Pará e Amapá formam uma faixa contínua de aumentos entre 5% e 6% ao ano, à qual se sucedem Amazonas e Acre (7% a 8%) e, por fim, Roraima, o terceiro mais alto crescimento do País (10,83%).

As taxas regionais de crescimento da população rural, por sua vez, foram, em todos os períodos intercensitários, inferiores às do efetivo

urbano. Reportando-se ao mapa 4, observa-se que o incremento rural entre 1940/1950 foi de 0,62% na Região Sudeste a 2,92% na Região Sul, sendo que desta muito pouco diferia a taxa do Centro-Oeste (2,89%) e que Norte e Nordeste, numa posição intermediária, alcançaram o mesmo valor (1,81%). No período seguinte, o ritmo tornou-se mais intenso no Centro-Oeste, no Norte e no Sudeste (3,95% e 2,41% e 1,08%, respectivamente), se manteve no Sul (2,95%) e arrefeceu no Nordeste (passando a 1,04%).

O decênio 1960/1970 se caracterizou por uma diminuição do ritmo de crescimento rural em todas as Regiões, exceto a Nordeste, que praticamente continuou o mesmo (1,10%). Esse decréscimo nas taxas ficou ainda mais marcado no Sudeste, que, pela primeira vez, perdeu população rural (— 1,88% ao ano), pois Norte, Sul e Centro-Oeste ainda cresciam a taxas anuais de, respectivamente, 2,11%, 2,20% e 3,14%. As perdas rurais que se iniciaram naquela década se alastraram no período 1970/1980, isto é, o Sudeste tornou a sofrer diminuição (— 1,99%), a qual também atingiu o Sul (— 2,47%) e o Centro-Oeste (— 0,78%). O Nordeste reduziu seu ritmo para 0,55% e o Norte, escapando ao padrão, intensificou o seu, passando sua taxa para 3,71%.

A distribuição espacial das taxas de crescimento para 1970/1980 da população rural a nível das Unidades da Federação aparece no mapa 5, o qual torna evidente que o maior número e as mais intensas perdas rurais se localizaram nas Unidades da Federação do Centro-Sul, enquanto os maiores ganhos ocorreram nas do Norte. De Goiás para o sul, com exceção de uma “ilhota” de aumento formada pelo Distrito Federal, todos os Estados não só perderam população rural como também tiveram taxas bastante próximas. Isto confere uma razoável uniformidade à distribuição espacial das perdas. No Centro-Sul apenas Goiás e Santa Catarina diminuíram entre 0% e — 1,5%, os outros Estados ficaram entre — 1,5% e — 3,32% (no Paraná). Dentre as de mais Unidades da Federação, ainda Ceará, Rio Grande do Norte e Paraíba formaram uma área contínua de taxas negativas entre 0% e — 0,5%.

Podem ainda ser identificados no mapa 5 dois bolsões de taxas positivas entre 0% e 1,5%; são formados, a noroeste, por Acre e Amazonas, e a nordeste, por Bahia, Sergipe, Alagoas, Pernambuco e Piauí.

Um ritmo mais acelerado de crescimento rural (de 1,5% a 3,5% ao ano) foi localizado no Maranhão, Amapá, Roraima e Mato Grosso, enquanto taxas que podem ser consideradas bastante elevadas surgiram no Pará e Distrito Federal (4,29% e 5,88%).

Finalmente, foi em Rondônia que o crescimento da população rural atingiu a taxa máxima do período 1970/1980: 17,55%, um ritmo de incremento que até então não fora observado e que enfatizou as desigualdades no comportamento demográfico das Unidades da Federação.

TABELA 1

**POPULAÇÃO RESIDENTE, POR SITUAÇÃO DO DOMICÍLIO,
SEGUNDO AS GRANDES REGIÕES E UNIDADES DA
FEDERAÇÃO — 1980**

GRANDES REGIÕES E UNIDADES DA FEDERAÇÃO	POPULAÇÃO RESIDENTE			
	Total	Situação do domicílio		
		Urbana		Rural
		Absoluta	Relativa (%)	
BRASIL.....	119 098 992	80 479 195	67,57	38 619 797
Norte.....	5 893 136	3 046 129	51,69	2 847 007
Rondônia.....	492 810	233 301	47,34	259 509
Acre.....	301 605	132 174	43,82	169 431
Amazonas.....	1 432 066	858 181	59,93	573 885
Roraima.....	79 153	48 885	61,76	30 268
Pará.....	3 411 868	1 669 662	48,94	1 742 206
Amapá.....	175 634	103 926	59,17	71 708
Nordeste.....	34 861 907	17 585 618	50,44	17 276 289
Maranhão.....	4 002 599	1 257 109	31,41	2 745 490
Piauí.....	2 140 066	897 993	41,96	1 242 073
Ceará.....	5 294 876	2 814 235	53,15	2 480 641
Rio Grande do Norte.....	1 899 720	1 115 630	58,73	784 090
Paraíba.....	2 772 600	1 450 346	52,31	1 322 254
Pernambuco.....	6 147 102	3 785 697	61,59	2 361 405
Alagoas.....	1 987 581	978 597	49,24	1 008 984
Fernando de Noronha.....	1 266	1 266	100,00	—
Sergipe.....	1 141 834	618 344	54,15	523 490
Bahia.....	9 474 263	4 666 401	49,25	4 807 862
Sudeste.....	51 752 651	42 848 823	82,80	8 903 828
Minas Gerais.....	13 390 805	8 986 266	67,11	4 404 539
Espírito Santo.....	2 023 821	1 293 334	63,91	730 487
Rio de Janeiro.....	11 297 327	10 373 893	91,83	923 434
São Paulo.....	25 040 698	22 195 330	88,64	2 845 368
Sul.....	19 036 429	11 880 533	62,41	7 155 896
Paraná.....	7 630 466	4 473 541	58,63	3 156 925
Santa Catarina.....	3 628 751	2 154 527	57,37	1 474 224
Rio Grande do Sul.....	7 777 212	5 252 465	67,54	2 524 747
Centro-Oeste.....	7 554 869	5 118 092	67,75	2 436 777
Mato Grosso do Sul.....	1 370 333	918 865	67,05	451 468
Mato Grosso.....	1 141 661	656 513	57,51	485 148
Goiás.....	3 865 482	2 403 234	62,17	1 462 248
Distrito Federal.....	1 177 393	1 139 480	96,78	37 913

FONTE: IBGE — Sinopse Preliminar do Censo Demográfico de 1980.

TABELA 2

POPULAÇÃO URBANA E SUA VARIAÇÃO, SEGUNDO AS GRANDES REGIÕES E UNIDADES DA FEDERAÇÃO — 1940-1980

(continua)

GRANDES REGIÕES E UNIDADES DA FEDERAÇÃO	POPULAÇÃO URBANA				
	1.º-9-1940 (1)	1.º-7-1950 (1)	1.º-9-1960 (2)	1.º-9-1970 (2)	1.º-9-1980 (2)
BRASIL.....	12 880 182	18 782 891	31 303 034	52 084 984	80 479 195
Norte.....	405 792	580 867	957 718	1 626 600	3 046 129
Rondônia.....	...	13 816	30 186	59 564	233 301
Acre.....	14 138	21 272	32 700	59 307	132 174
Amazônas.....	104 789	137 736	232 917	405 831	858 181
Roraima.....	...	5 132	12 148	17 481	48 885
Pará.....	286 865	389 011	614 973	1 021 966	1 669 662
Amapá.....	...	13 900	34 794	62 451	103 926
Nordeste.....	3 381 173	4 744 808	7 516 500	11 752 977	17 585 618
Maranhão.....	185 552	274 288	436 624	752 027	1 257 109
Piauí.....	124 197	170 584	285 566	536 612	897 993
Ceará.....	475 028	679 604	1 098 901	1 780 093	2 814 235
Rio Grande do Norte....	164 248	253 765	428 113	737 368	1 115 630
Paraíba.....	311 402	456 716	697 336	1 002 156	1 450 346
Pernambuco.....	787 808	1 167 400	1 825 284	2 810 843	3 785 697
Alagoas.....	229 126	286 379	420 436	631 739	978 597
Fernando de Noronha....	...	581	1 389	1 241	1 266
Sergipe.....	166 241	204 984	289 929	415 415	618 344
Bahia.....	937 571	1 250 507	2 032 922	3 085 483	4 666 401
Sudeste.....	7 231 905	10 720 734	17 460 897	28 964 601	42 848 823
Minas Gerais.....	1 693 658	2 322 915	3 847 601	6 060 300	8 986 266
Espírito Santo.....	157 925	199 186	378 744	721 916	1 293 334
Rio de Janeiro.....	2 212 211	3 394 422	5 214 809	7 906 146	10 373 893
São Paulo.....	3 168 111	4 804 211	8 019 743	14 276 239	22 195 330
Sul.....	1 590 475	2 312 985	4 360 691	7 303 427	11 880 533
Paraná.....	302 272	528 288	1 305 927	2 504 378	4 473 541
Santa Catarina.....	253 717	362 717	673 981	1 246 043	2 154 527
Rio Grande do Sul.....	1 034 486	1 421 980	2 380 783	3 553 006	5 252 465
Centro-Oeste.....	270 837	423 497	1 007 228	2 437 379	5 118 092
Mato Grosso do Sul.....	} 128 727 }	} 177 830 }	} 343 569 }	452 117	918 865
Mato Grosso.....				232 072	656 513
Goiás.....	142 110	245 667	575 325	1 237 108	2 403 234
Distrito Federal.....	88 334	516 082	1 139 480

FONTE: IBGE — Censos Demográficos 1940, 1950, 1960, 1970 e Sinopse Preliminar do Censo Demográfico de 1980.

NOTA — Em virtude das alterações ocorridas na Divisão Territorial com a criação dos Territórios Federais de Rondônia, Roraima e Amapá na Região Norte, do Território Federal de Fernando de Noronha na Região Nordeste, do Distrito Federal e do Estado de Mato Grosso do Sul na Região Centro-Oeste, a variação absoluta da população observada nas Regiões Norte e Nordeste (1940/1950) e na Região Centro-Oeste (1950/1960) não corresponde à soma das variações das Unidades da Federação que as compõem.

(1) População presente. (2) População residente.

TABELA 2

POPULAÇÃO URBANA E SUA VARIAÇÃO, SEGUNDO AS GRANDES REGIÕES E UNIDADES DA FEDERAÇÃO — 1940-1980

(conclusão)

GRANDES REGIÕES E UNIDADES DA FEDERAÇÃO	VARIAÇÃO DA POPULAÇÃO URBANA							
	1940/1950		1950/1960		1960/1970		1970/1980	
	Absoluta	Rela- tiva (%)	Absoluta	Rela- tiva (%)	Absoluta	Rela- tiva (%)	Absoluta	Rela- tiva (%)
BRASIL.....	5 902 709	45,83	12 520 143	66,66	20 781 950	66,39	28 394 211	54,52
Norte.....	175 075	43,14	376 851	64,88	668 882	69,84	1 419 529	87,27
Rondônia.....	—	—	16 370	118,49	29 378	97,32	173 737	291,68
Acre.....	7 131	50,46	11 428	53,72	26 607	81,37	72 867	122,86
Amazonas.....	32 947	31,44	95 181	69,10	172 914	74,24	452 350	111,46
Roraima.....	—	—	7 016	136,71	5 333	43,90	31 404	179,65
Pará.....	102 146	35,61	225 962	58,09	406 993	66,18	647,696	63,38
Amapá.....	—	—	20 894	150,32	27 657	79,49	41 475	66,41
Nordeste.....	1 363 635	40,33	2 771 692	58,42	4 236 477	56,36	5 832 641	49,63
Maranhão.....	88 736	47,82	162 336	59,18	315 403	72,24	505 082	67,16
Piauí.....	46 387	37,35	114 982	67,40	251 046	87,91	361 381	67,34
Ceará.....	204 576	43,07	419 297	61,70	681 192	61,99	1 034 142	58,09
Rio Grande do Norte	89 517	54,50	174 348	68,70	309 255	72,24	378 262	51,30
Paraíba.....	145 314	46,66	240 620	52,68	304 820	43,71	448 190	44,72
Pernambuco.....	379 592	48,18	657 884	56,35	985 559	53,99	974 854	34,68
Alagoas.....	57 253	24,99	134 057	46,81	211 303	50,26	346 858	54,91
Fernando de Noronha..	—	—	808	139,07	—148	—10,66	25	2,01
Sergipe.....	38 743	23,31	84 945	41,44	125 486	43,28	202 929	48,85
Bahia.....	312 936	33,38	782 415	62,57	1 052 561	51,78	1 580 918	51,24
Sudeste.....	3 488 829	48,24	6 740 163	62,87	11 503 704	65,88	13 884 222	47,94
Minas Gerais.....	629 257	37,15	1 524 686	65,64	2 212 699	57,51	2 925 966	48,28
Espírito Santo.....	41 261	26,13	179 558	90,15	343 172	90,61	571 418	79,15
Rio de Janeiro.....	1 182 211	53,44	1 820 387	53,63	2 691 337	51,61	2 467 747	31,21
São Paulo.....	1 636 100	51,64	3 215 532	66,93	6 256 496	78,01	7 919 091	55,47
Sul.....	722 510	45,43	2 047 706	88,53	2 942 736	67,48	4 577 106	62,67
Paraná.....	226 016	74,77	777 639	147,20	1 198 451	91,77	1 969 163	78,63
Santa Catarina.....	109 000	42,96	311 264	85,81	572 062	84,88	908 484	72,91
Rio Grande do Sul.....	387 494	37,46	958 803	67,43	1 172 223	49,24	1 699 459	47,83
Centro-Oeste.....	152 660	56,37	583 731	137,84	1 430 151	141,99	2 680 713	109,98
Mato Grosso do Sul....	49 103	38,15	165 739	93,20	340 620	99,14	466 748	103,23
Mato Grosso.....							424 441	182,89
Goiás.....	103 557	72,87	329 658	134,19	661 783	115,03	1 166 126	94,26
Distrito Federal.....	—	—	—	—	427 748	484,24	623 398	120,79

TABELA 3

POPULAÇÃO RURAL E SUA VARIAÇÃO, SEGUNDO AS GRANDES
REGIÕES E UNIDADES DA FEDERAÇÃO — 1940-1980

(continua)

GRANDES REGIÕES E UNIDADES DA FEDERAÇÃO	POPULAÇÃO RURAL				
	1.º-9-1940 (1)	1.º-7-1950 (1)	1.º-9-1960 (2)	1.º-9-1970 (2)	1.º-9-1980 (2)
BRASIL.....	28 356 133	33 161 506	38 767 423	41 054 053	38 619 797
Norte.....	1 056 628	1 263 788	1 604 064	1 977 260	2 847 007
Rondônia.....	...	23 119	39 606	51 500	259 509
Acre.....	65 630	93 483	125 484	155 992	169 431
Amazonas.....	333 219	376 363	475 542	549 404	573 885
Roraima.....	...	12 984	16 156	23 404	30 268
Pará.....	657 779	734 262	914 320	1 145 052	1 742 206
Amapá.....	...	23 577	32 956	51 908	71 708
Nordeste.....	11 052 907	13 228 605	14 665 380	16 358 950	17 276 289
Maranhão.....	1 049 617	1 308 960	2 032 823	2 240 659	2 745 490
Piauí.....	693 404	875 112	956 570	1 143 961	1 242 073
Ceará.....	1 616 004	2 015 846	2 197 465	2 581 510	2 480 641
Rio Grande do Norte....	603 770	714 156	717 389	812 876	784 090
Paraíba.....	1 110 880	1 256 543	1 303 515	1 380 461	1 322 254
Pernambuco.....	1 900 432	2 227 785	2 270 095	2 349 797	2 361 405
Alagoas.....	722 174	806 758	837 671	956 370	1 008 984
Fernando de Noronha....	—	—	—	—	—
Sergipe.....	376 085	439 377	462 327	485 329	523 490
Bahia.....	2 980 541	3 584 068	3 887 525	4 407 987	4 807 862
Sudeste.....	11 113 926	11 827 760	13 169 831	10 888 897	8 903 828
Minas Gerais.....	5 069 710	5 459 273	6 064 906	5 427 115	4 404 539
Espírito Santo.....	632 224	758 052	919 498	877 417	730 487
Rio de Janeiro.....	1 399 787	1 280 223	1 395 939	1 088 656	923 434
São Paulo.....	4 012 205	4 330 212	4 789 488	3 495 709	2 845 368
Sul.....	4 144 830	5 527 885	7 392 384	9 193 066	7 155 896
Paraná.....	934 004	1 587 259	2 962 312	4 425 490	3 156 925
Santa Catarina.....	924 623	1 197 785	1 444 135	1 655 691	1 474 224
Rio Grande do Sul.....	2 286 203	2 742 841	2 985 937	3 111 885	2 524 747
Centro-Oeste.....	987 842	1 313 468	1 935 764	2 635 880	2 436 777
Mato Grosso do Sul.....	} 303 538 }	} 344 214 }	} 545 970	546 094	451 468
Mato Grosso.....				366 807	485 148
Goiás.....	684 304	969 254	1 337 964	1 701 569	1 462 248
Distrito Federal.....	51 830	21 410	37 913

FONTE: IBGE — Censos Demográficos 1940, 1950, 1960, 1970 e Sinopse Preliminar do Censo Demográfico de 1980.

NOTA — Em virtude das alterações ocorridas na Divisão Territorial com a criação dos Territórios Federais de Rondônia, Roraima e Amapá na Região Norte, do Território Federal de Fernando de Noronha na Região Nordeste, do Distrito Federal e do Estado de Mato Grosso do Sul na Região Centro-Oeste, a variação absoluta da população observada nas Regiões Norte e Nordeste (1940/1950) e na Região Centro-Oeste (1950/1960) não corresponde à soma das variações das Unidades da Federação que as compõem.

(1) População presente. (2) População residente.

TABELA 3

POPULAÇÃO RURAL E SUA VARIAÇÃO, SEGUNDO AS GRANDES REGIÕES E UNIDADES DA FEDERAÇÃO — 1940-1980

(conclusão)

GRANDES REGIÕES E UNIDADES DA FEDERAÇÃO	VARIAÇÃO DA POPULAÇÃO RURAL							
	1940/1950		1950/1960		1960/1970		1970/1980	
	Absoluta	Relativa (%)	Absoluta	Relativa (%)	Absoluta	Relativa (%)	Absoluta	Relativa (%)
BRASIL.....	4 805 373	16,95	5 605 917	16,90	2 286 630	5,90	-2 434 256	-5,93
Norte.....	207 160	19,61	340 276	26,93	373 196	23,27	869 747	43,99
Rondônia.....	—	—	16 487	71,31	11 894	30,03	208 009	403,90
Acre.....	27 853	42,44	32 001	34,23	30 508	24,31	13 439	8,62
Amazonas.....	43 144	12,95	99 179	26,35	73 862	15,53	24 481	4,46
Roraima.....	—	—	3 172	24,43	7 248	44,86	6 864	29,33
Pará.....	76 483	11,63	180 058	24,52	230 732	25,24	597 154	52,15
Amapá.....	—	—	9 379	39,78	18 952	57,51	19 800	38,14
Nordeste.....	2 175 698	19,68	1 436 775	10,86	1 693 570	11,55	917 339	5,61
Maranhão.....	259 343	24,71	723 863	55,30	207 836	10,22	504 831	22,53
Piauí.....	181 708	26,21	81 458	9,32	187 391	19,59	98 112	8,58
Ceará.....	399 842	24,74	181 619	9,01	384 045	17,48	-100 869	-3,91
Rio Grande do Norte..	110 386	18,28	3 233	0,45	95 487	13,31	-28 786	-3,54
Paraíba.....	145 663	13,11	46 972	3,74	76 946	5,90	-58 207	-4,22
Pernambuco.....	327 353	17,24	42 310	1,90	79 702	3,51	11 608	0,49
Alagoas.....	84 584	11,71	30 913	3,83	118 699	14,17	52 614	5,50
Fernando de Noronha..	—	—	—	—	—	—	—	—
Sergipe.....	63 292	16,83	22 950	5,22	23 002	4,98	38 161	7,96
Bahia.....	603 527	20,25	303 457	8,47	520 462	13,39	399 875	9,07
Sudeste.....	713 834	6,42	1 342 071	11,35	-2 280 934	-17,32	-1 985 069	-18,23
Minas Gerais.....	389 563	7,68	605 633	11,09	-637 791	-10,52	-1 022 576	-18,84
Espirito Santo.....	125 828	19,90	161 446	21,30	-42 081	-4,58	-146 930	-16,75
Rio de Janeiro.....	-119 564	8,54	115 716	9,04	-307 283	-22,01	-165 222	-15,18
São Paulo.....	318 007	7,93	459 276	10,61	-1 293 779	-27,01	-650 341	-18,60
Sul.....	1 383 055	33,37	1 864 499	33,73	1 800 682	24,36	-2 037 170	-22,16
Paraná.....	653 255	69,94	1 375 053	86,63	1 463 178	49,39	-1 268 565	-28,66
Santa Catarina.....	273 162	29,54	246 350	20,57	211 556	14,65	-181 467	-10,96
Rio Grande do Sul...	456 638	19,97	243 096	8,86	125 948	4,22	-587 138	-18,87
Centro-Oeste.....	325 626	32,96	622 296	47,38	700 116	36,17	-199 103	-7,55
Mato Grosso do Sul } Mato Grosso..... }	40 676	13,40	201 756	58,61	366 931	67,21	-94 626	-17,33
Goiás.....	284 950	41,64	368 710	38,04	363 605	27,18	-239 321	-14,06
Distrito Federal.....	—	—	—	—	-30 420	-58,69	16 503	77,08

TABELA 4

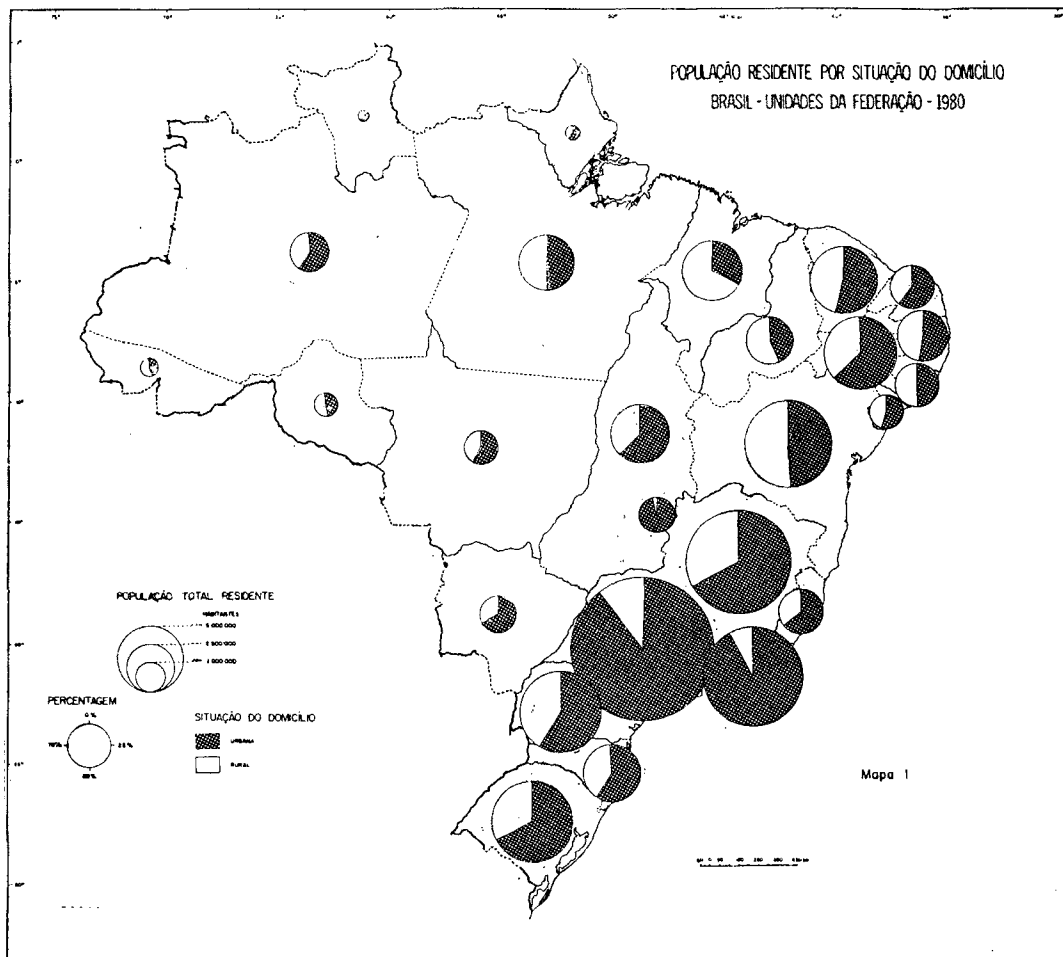
**TAXA MÉDIA GEOMÉTRICA DE INCREMENTO ANUAL, SEGUNDO
AS GRANDES REGIÕES E UNIDADES DA
FEDERAÇÃO — 1940-1980**

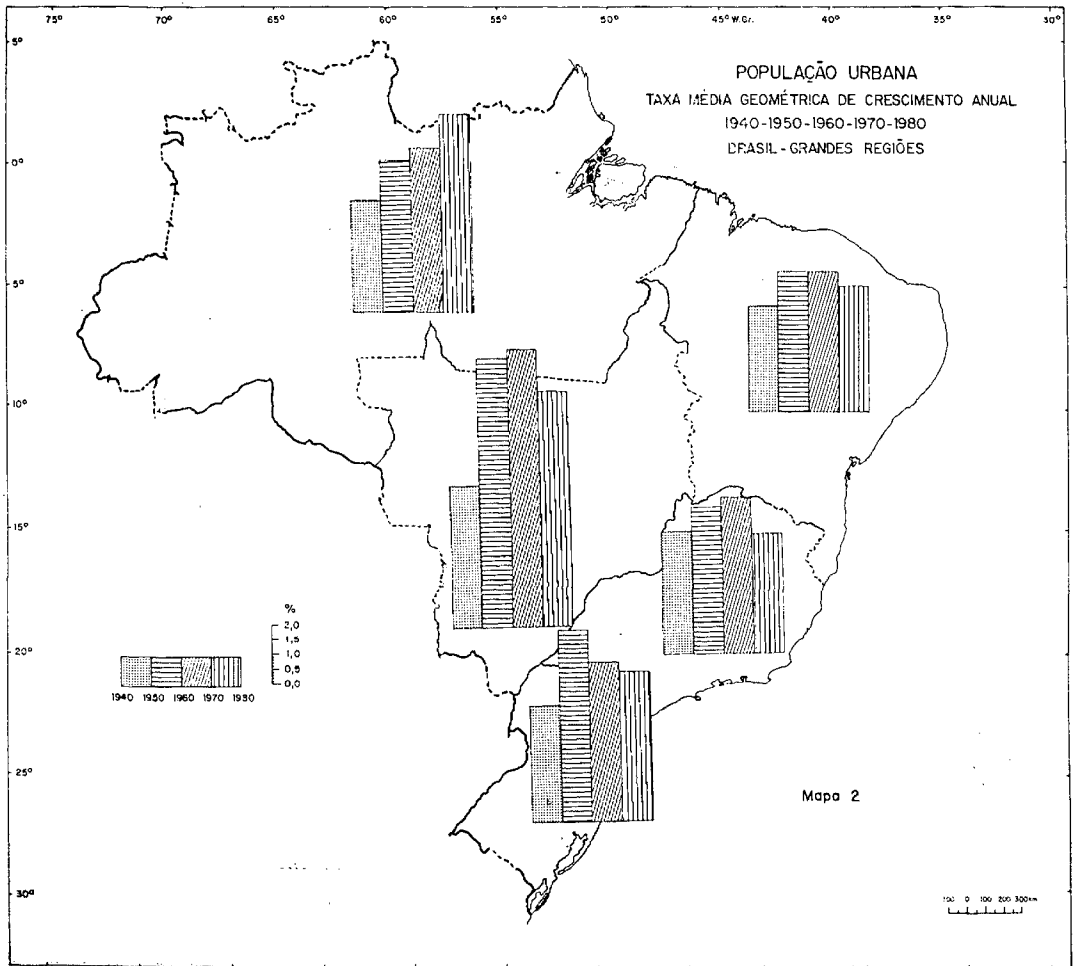
GRANDES REGIÕES E UNIDADES DA FEDERAÇÃO	TAXA MÉDIA GEOMÉTRICA DE INCREMENTO ANUAL (por 100 habitantes)											
	1940/1950			1950/1960			1960/1970			1970/1980		
	To- tal	Ur- ba- na	Ru- ral	To- tal	Ur- ba- na	Ru- ral	Total	Urba- na	Rural	Total	Urba- na	Rural
BRASIL.....	2,34	3,84	1,58	3,04	5,24	1,57	2,89	5,22	0,57	2,49	4,45	-0,61
Norte.....	2,35	3,65	1,81	3,34	5,13	2,41	3,47	5,44	2,11	5,04	6,47	3,71
Rondônia.....	—	—	—	6,57	8,13	5,53	4,76	7,03	2,66	16,07	14,63	17,55
Acre.....	3,70	4,17	3,60	3,26	4,39	2,99	3,13	6,13	2,20	3,43	8,34	0,83
Amazonas.....	1,61	2,77	1,22	3,26	5,39	2,37	3,03	5,71	1,45	4,13	7,78	0,44
Roraima.....	—	—	—	4,56	9,00	2,21	3,75	3,71	3,78	6,83	10,83	2,61
Pará.....	1,75	3,09	1,10	3,13	4,69	2,22	3,55	5,21	2,28	4,64	5,03	4,29
Amapá.....	—	—	—	6,10	9,61	3,41	5,37	6,02	4,65	4,38	5,22	3,28
Nordeste.....	2,22	3,45	1,81	2,13	4,71	1,04	2,40	4,57	1,10	2,18	4,11	0,55
Maranhão.....	2,51	3,99	2,23	4,55	4,76	4,50	1,94	5,59	0,98	2,95	5,27	2,05
Piauí.....	2,49	3,22	2,35	1,73	5,29	0,89	3,07	6,51	1,81	2,45	5,28	0,83
Ceará.....	2,57	3,65	2,24	2,03	4,92	0,87	2,84	4,94	1,62	1,96	4,69	-0,40
Rio Grande do Norte.....	2,34	4,45	1,69	1,67	5,37	0,05	3,07	5,59	1,26	2,05	4,23	-0,36
Paraíba.....	1,88	3,90	1,24	1,56	4,32	0,37	1,76	3,69	0,58	1,53	3,77	-0,43
Pernambuco.....	2,36	4,01	1,60	1,89	4,57	0,19	2,34	4,41	0,35	1,76	3,02	0,05
Alagoas.....	1,40	2,26	1,11	1,42	3,91	0,38	2,36	4,16	1,33	2,27	4,47	0,54
Fernando de Noronha.....	—	—	—	9,11	9,11	—	-1,12	-1,12	—	0,20	0,20	—
Sergipe.....	1,74	2,12	1,57	1,56	3,52	0,51	1,82	3,66	0,49	2,40	4,06	0,76
Bahia.....	2,12	2,92	1,86	2,05	4,98	0,82	2,38	4,26	1,26	2,37	4,22	0,87
Sudeste.....	2,08	4,02	0,62	3,11	5,00	1,08	2,67	5,19	-1,88	2,65	3,99	-1,99
Minas Gerais.....	1,41	3,21	0,74	2,45	5,18	1,06	1,49	4,65	-1,10	1,54	4,02	-2,07
Espírito Santo.....	1,94	2,35	1,83	3,09	6,34	1,95	2,11	6,66	-0,47	2,38	6,00	-1,82
Rio de Janeiro.....	2,61	4,37	0,89	3,53	4,39	0,87	3,13	4,25	-2,46	2,31	2,75	-1,63
São Paulo.....	2,44	4,25	0,77	3,44	5,26	1,01	3,33	5,94	-3,10	3,49	4,51	-2,04
Sul.....	3,17	3,82	2,92	4,13	6,55	2,95	3,45	5,29	2,20	1,44	4,99	-2,47
Paraná.....	5,52	5,74	5,45	7,27	9,47	6,44	4,97	6,73	4,10	0,97	5,97	-3,32
Santa Catarina.....	2,85	3,64	2,62	3,10	6,39	1,89	3,20	6,34	1,38	2,26	5,63	-1,15
Rio Grande do Sul.....	2,29	3,23	1,84	2,57	5,29	0,86	2,19	4,08	0,41	1,56	3,99	-2,08
Centro-Oeste.....	3,27	4,57	2,89	5,41	9,05	3,95	5,60	9,24	3,14	4,06	7,70	-0,78
Mato Grosso do Sul.....	1,91	3,28	1,27	5,47	6,80	4,72	6,03	7,13	5,26	3,21	7,85	-1,88
Mato Grosso.....										6,63	10,96	2,84
Goiás.....	3,93	5,63	3,54	4,65	8,88	3,28	4,38	7,96	2,43	2,78	6,87	-1,50
Distrito Federal.....	—	—	—	—	—	—	14,39	19,31	-8,46	8,16	8,24	5,88

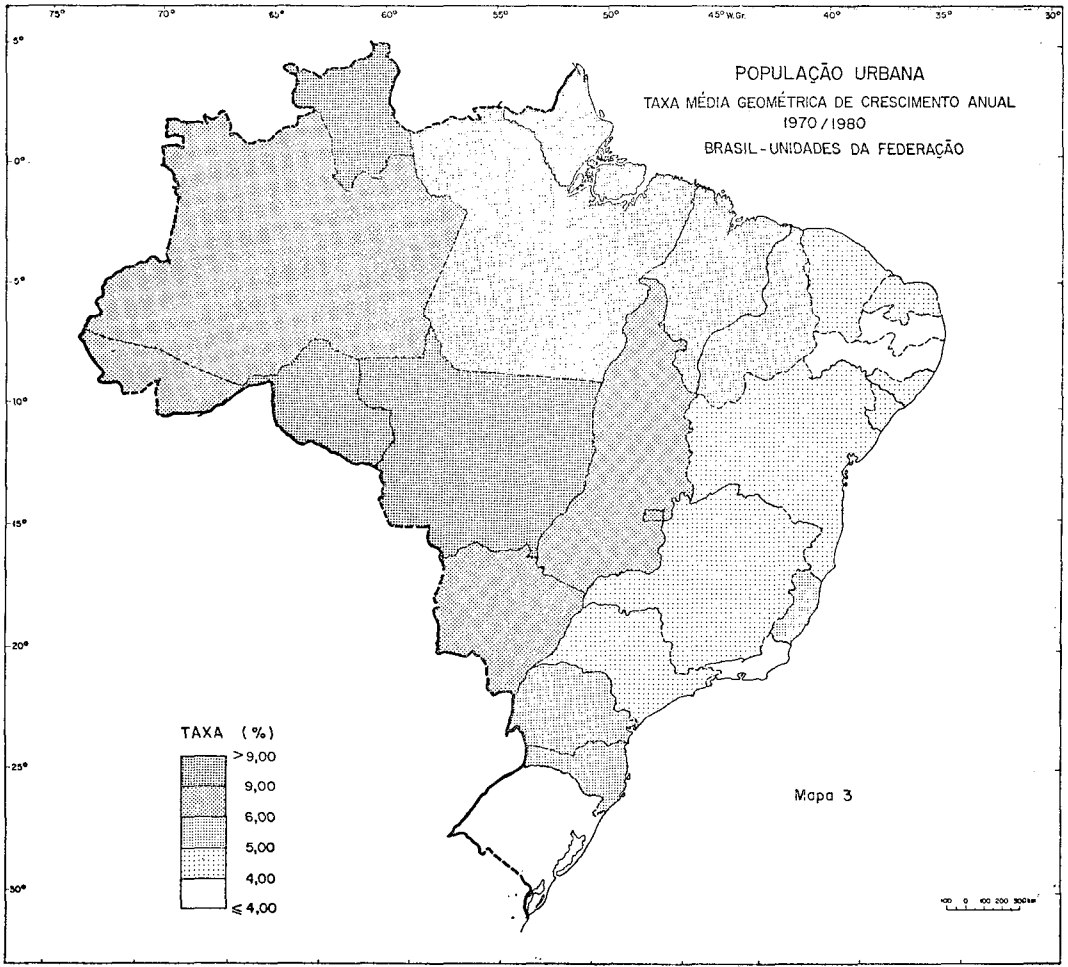
NOTA: IBGE — Censos Demográficos 1940, 1950, 1960, 1970 e Sinopse Preliminar do Censo Demográfico de 1980.

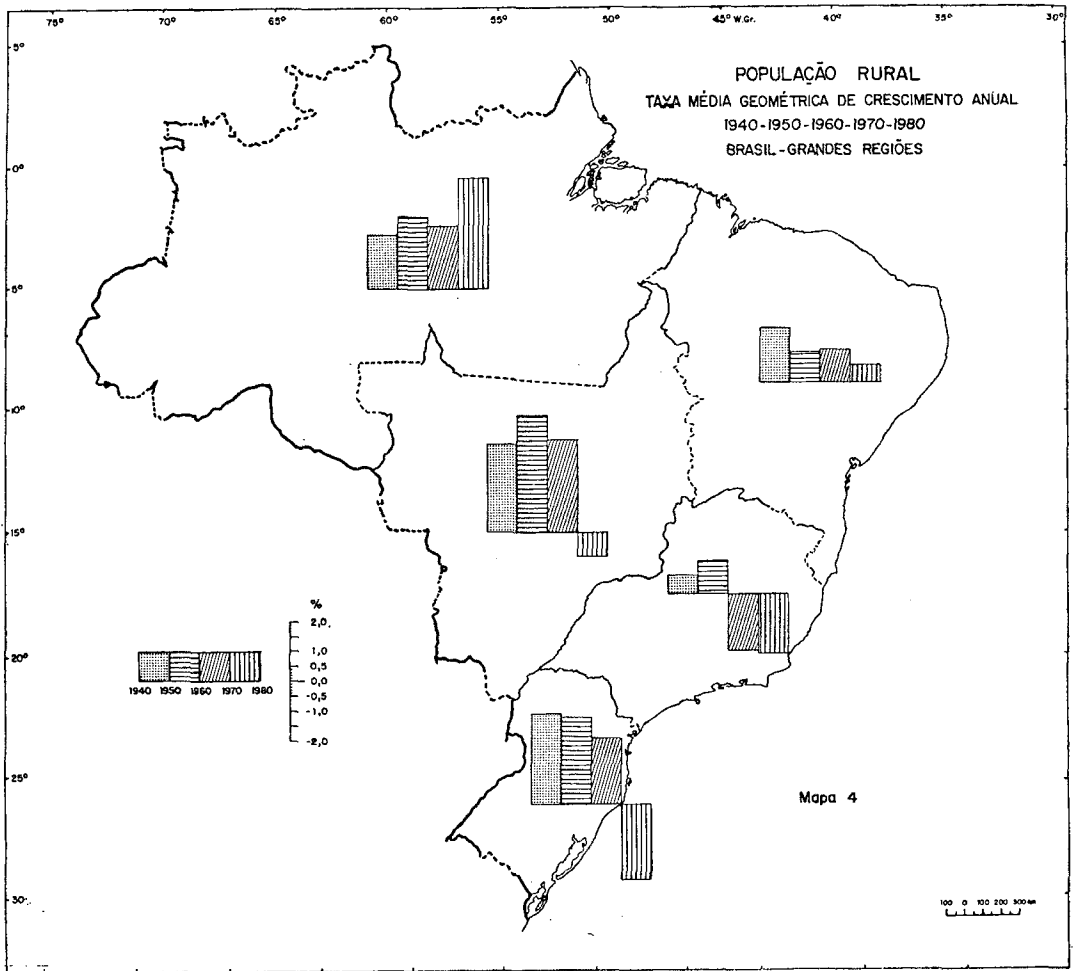
NOTA — Em 1940 e 1950, população presente; em 1960, 1970 e 1980, população residente.

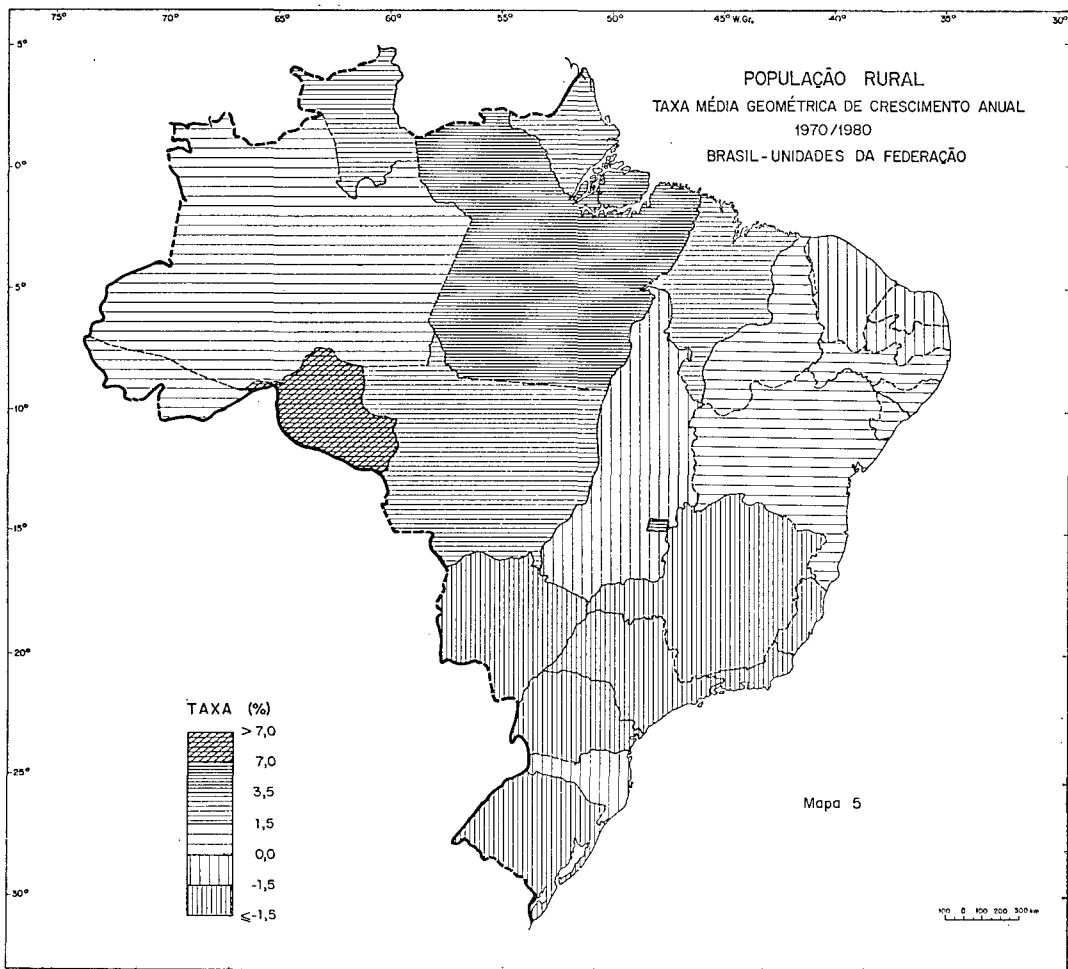
POPULAÇÃO RESIDENTE POR SITUAÇÃO DO DOMÍLIO
BRASIL - UNIDADES DA FEDERAÇÃO - 1980











UM MÉTODO PARA A GERAÇÃO DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS NORMAIS

Thadeu Keller Filho

PUC/RJ

SUMÁRIO

1. *Introdução*
2. *Teoremas básicos*
3. *Geração de variáveis aleatórias normais*
4. *Aplicações*

Bibliografia

1 — INTRODUÇÃO

As técnicas de simulação discreta, quando aplicadas a modelos probabilísticos, têm por base a geração artificial de amostras dos valores assumidos pelas variáveis aleatórias definidas naqueles modelos.

Com a crescente utilização dos computadores eletrônicos, as aplicações da simulação discreta exigiram o desenvolvimento de métodos numéricos para a geração de amostras artificiais, provenientes dos mais variados tipos de distribuições.

Do ponto de vista teórico, os métodos utilizados para a geração de variáveis aleatórias em computadores baseiam-se na geração prévia

de seqüências de *números aleatórios*¹ as quais são transformadas, posteriormente, em seqüências de determinações das variáveis aleatórias definidas no modelo de simulação.

Do ponto de vista prático, entretanto, não é possível a geração exata de números aleatórios em computadores, por meio da utilização exclusiva de processos numéricos. Por essa razão, nas simulações, os números aleatórios são substituídos pelos chamados *números pseudoaleatórios*², gerados por processos de recorrência, de forma tal que possuam aproximadamente, as propriedades das seqüências de números aleatórios.

Os métodos de aproximação numérica são utilizados ainda, com muita freqüência, para efetuar as transformações dos números pseudoaleatórios em determinações das variáveis aleatórias especificadas nos modelos, uma vez que os métodos de transformação somente existem para determinados tipos de distribuição.

No que respeita à geração de variáveis aleatórias com distribuição normal, utilizam-se, com freqüência, diversos métodos de aproximação numérica³, além de um método exato — denominado *método polar* — devido ao Box e Muller⁴.

O objetivo deste trabalho é apresentar um método alternativo para a geração exata de distribuições normais em computadores. Trata-se de um caso particular de um método, aplicável a uma ampla classe de distribuições, desenvolvido pelo autor⁵, como uma extensão do *método da rejeição*, concebido originalmente por Von Neumann⁶.

Teoricamente, o método apóia-se nos teoremas 1 e 2, desenvolvidos na seção 2. A aplicação prática do método permite várias escolhas alternativas de distribuições auxiliares, necessárias ao processo de geração das variáveis aleatórias normais. Algumas dessas alternativas são apresentadas na seção 4, a título de ilustração das aplicações do método proposto.

¹ Chama-se números aleatórios as determinações de uma seqüência de variáveis aleatórias independentes com distribuição uniforme no intervalo (0,1).

² Veja-se: HAMMERSLEY, J. M. e HANDSCOMBE, D. C., *Monte Carlo Methods*, Methuen, London, (1964).

³ KNUTH, D. E., *The Art of Computer Programming*, Vol. 2: *Seminumerical Algorithms*, Addison Wesley, Reading, Massachusetts, (1969).

⁴ Veja-se: BOX, G. E. P. e MULLER, M. E., *Annals of Mathematical Statistics*, 29, p. 610-611, (1958).

⁵ Veja-se: KELLER, T., *Uma Extensão de um Método de Von Neumann para a Geração de Variáveis Aleatórias* — Tese de Mestrado, Departamento de Informática da PUC/RJ, (1973).

⁶ Veja-se: VON NEUMANN, J., *National Bureau of Standard Applied Mathematics*, 12, p. 36-38 (1951).

2 — TEOREMAS BÁSICOS

2.1 — Lema 1

Seja X uma variável aleatória do tipo contínuo, com função de densidade $f_X(\cdot)$. Represente-se por R o conjunto dos números reais e admita-se que $f_X(x) > 0$ para $x \in R$. Suponha-se, ainda, que a função

$$g(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi} f_X(x)} \quad x \in R$$

seja limitada superiormente em R e represente-se por M o supremo de $g(x)$, em R .

Nessas condições, tem-se:

a) $0 < \frac{g(x)}{M} \leq 1$ para $x \in R$

b) $\frac{g(x)}{M} = 1$ se, e somente se, $f_X(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$ para $x \in R$

Demonstração:

(i) Como $g(x)$ é limitada superiormente em R , tem-se $g(x) \leq M$ para $x \in R$. Por outro lado, tem-se $f_X(x) > 0$ e $\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} > 0$ para $x \in R$, o que implica $g(x) > 0$ para $x \in R$.

Segue-se, então, $0 < g(x) \leq M$ para $x \in R$, o que implica $0 < \frac{g(x)}{M} \leq 1$ para $x \in R$.

ii) Suponha-se que seja $f_X(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$ para $x \in R$. Nessa hipótese, $g(x) = 1$ para $x \in R$, portanto

$$M = \sup_{x \in R} g(x) = 1, \text{ seguindo-se } \frac{g(x)}{M} = 1 \text{ para } x \in R.$$

Reciprocamente, admita-se que $\frac{g(x)}{M} = 1$ para $x \in R$. Nessa hipótese,

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{M \sqrt{2\pi} f_X(x)} = 1 \text{ para } x \in R \quad (2.1)$$

Logo,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = M \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x) dx$$

Tem-se, portanto, $M = 1$

Retornando à (2.1), obtem-se $f_x(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \quad x \in \mathbb{R}$

2.2 — Teorema 1

Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes, do tipo contínuo, sendo Y não negativa.

Representem-se por R o conjunto dos números reais, por $f_x(\cdot)$ a função de distribuição de Y . Admita-se que X satisfaça às seguintes condições:

a) $f_x(x) > 0$ para $x \in \mathbb{R}$

b) $g(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi} f_x(x)}$ é limitada superiormente em \mathbb{R} .

Represente-se por M o supremo de $g(x)$ em \mathbb{R} e considere-se a função:

$$h_M(x) = \text{Inf} \left\{ y \in \mathbb{R} \mid F_Y(y) = \frac{g(x)}{M} \right\} \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.2)$$

Defina-se, ainda, a variável aleatória:

$$Z_M = h_M(X) \quad (2.3)$$

Nessas condições:

$$P \{ Y < Z_M \} = \frac{1}{M}$$

Demonstração:

(i) Suponha-se, inicialmente, que seja $f_x(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \quad x \in \mathbb{R}$.

Nessa hipótese, de acordo com o Lema 1, ter-se-ia: $\frac{g(x)}{M} = 1$ e, ainda, $M = 1$.

Logo,

$$h_M(x) = \text{Inf} \{ y \in \mathbb{R} \mid F_Y(y) = 1 \} \quad x \in \mathbb{R}$$

e, portanto,

$$P \{ Y < Z_M \} = 1 = \frac{1}{M}$$

(ii) Admita-se, agora, que $f_X(x)$ não seja igual a $\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Nessa hipótese, de acordo com o Lema 1, ter-se-ia: $0 < \frac{g(x)}{M} < 1$.

Logo, por ser Y do tipo contínuo, $h_M(x) = \text{Inf} \left\{ y \in \mathbb{R} \mid F_Y(y) = \frac{g(x)}{M} \right\} =$

$$= F_Y^{-1} \left[\frac{g(x)}{M} \right] \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.4)$$

onde $F_Y^{-1}(\cdot)$ representa a inversa de $F_Y(\cdot)$.

Por conseguinte, lembrando que Y é não negativa, teremos:

$$\begin{aligned} P \{ Y < Z_M \} &= P \left\{ Y < F_Y^{-1} \left[\frac{g(x)}{M} \right] \right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{h_M(x)} f_X(x) f_Y(y) \, dy dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) F_Y(y) \Big|_0^{h_M(x)} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) F_Y F_Y^{-1} \left[\frac{g(x)}{M} \right] dx = \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) g(x) dx = \\ &= \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi} f_X(x)} dx = \frac{1}{M \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{M} \end{aligned}$$

2.3 — Teorema 2

Nas condições do teorema anterior, defina-se a variável aleatória condicionada:

$$W = \{ X \mid Y < Z_M \} \quad (2.5)$$

Então, W tem distribuição normal $(0,1)$

Demonstração:

(i) Admita-se, inicialmente, que X tenha distribuição normal $(0,1)$. Nesse caso, de acordo com o teorema 1, tem-se $P \{ Y < Z_M \} = 1$. Logo,

$$P \{ W \leq x \} = P \{ X \leq x \mid Y < Z_M \} = P \{ X \leq x \} \quad x \in \mathbb{R}$$

e, portanto W tem a mesma distribuição que X , ou seja, tem distribuição normal $(0,1)$.

(ii) Suponha-se, agora, que X não possui distribuição normal $(0,1)$. Nesse caso,

$$P \{W \leq x\} = P \{X \leq x \mid Y < Z_M\} = \frac{P \{X \leq x ; Y < Z_M\}}{P \{Y < Z_M\}}$$

ou, utilizando o teorema 2:

$$\begin{aligned} P \{W \leq x\} &= M P \{X \leq x ; Y < Z_M\} = M P \{X \leq x ; Y < h_M(X)\} = \\ &= M \int_{-\infty}^x \int_0^{h_M(x)} f_X(x) f_Y(y) dy dx = M \int_0^x f_X(x) F_Y[h_M(x)] dx = \\ &= M \int_{-\infty}^x f_X(x) F_Y F_Y^{-1} \left[\frac{g(x)}{M} \right] dx = \int_{-\infty}^x f_X(x) g(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^x f_X(x) \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi} f_X(x)} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \end{aligned}$$

Logo, W tem distribuição normal $(0,1)$.

3 — GERAÇÃO DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS NORMAIS

3.1 — Suporte Gerador e Suporte Auxiliar

As variáveis aleatórias X e Y , referidas nos teoremas 1 e 2, necessárias ao processo de geração das variáveis aleatórias normais, serão denominadas, respectivamente, *suporte gerador* e *suporte auxiliar*.

De acordo com os teoremas 1 e 2, o suporte gerador poderá ser qualquer variável aleatória, X , do tipo contínuo, cuja densidade de probabilidade, $f_X(\cdot)$ satisfaça às seguintes condições:

- a) $f_X(x) > 0$ para $x \in R$
- b) $\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi} f_X(x)}$ é uma função limitada superiormente em R .

Por outro lado, X deverá ser gerável em computadores, a partir dos números pseudoaleatórios, mediante algum método exato de transformação. No que segue, admitiremos que X seja gerável mediante utilização do *método de transformação inversa*⁷.

Quanto ao suporte auxiliar, Y , a escolha poderá recair em qualquer variável aleatória do tipo contínuo, não negativa. Convém notar que, atendidas essas condições, os resultados dos teoremas 1 e 2 são independentes da distribuição de Y .

⁷ Veja-se NAYLOR, T. H., *Computer Simulation Experiments with Models of Economic Systems*, John Wiley, New York, (1971).

Suporemos, de agora em diante, que o suporte auxiliar possua distribuição uniforme no intervalo $(0, M)$, onde

$$M = \text{Sup}_{x \in R} \left[\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi} f_X(x)} \right] \quad (3.1)$$

A escolha é motivada, por um lado, pela facilidade de geração em computadores das variáveis aleatórias uniformes e, por outro lado, pela simplificação resultante na expressão analítica da função $h_M(x)$, definida pela (2.2). De fato, nesse caso, a função de distribuição, $F_Y(\cdot)$, do suporte auxiliar, tem por expressão:

$$F_Y(y) = \frac{y}{M} \quad 0 \leq y \leq M \quad (3.1)$$

e, portanto,

$$h_M(x) = F_Y^{-1} \left[\frac{g(x)}{M} \right] =: g(x) \quad x \in R \quad (3.2)$$

que é independente de M .

3.2 — Algoritmo para a Geração

Apresentam-se, a seguir, os passos a serem seguidos, na prática, para a geração de variáveis aleatórias normais $(0,1)$, com base nos resultados alcançados com os teoremas 1 e 2:

a) Escolhe-se um suporte gerador, X , nas condições definidas no item anterior.

b) Calcula-se $M = \text{Sup}_{x \in R} \left[\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi} f_X(x)} \right]$

c) Gera-se um par de números aleatórios, (U_1, U_2)

d) Efetuam-se as transformações:

$$y = MU_1 \quad \text{e} \quad x = F_X^{-1}(U_2)$$

onde $F_X^{-1}(\cdot)$ representa a inversa da função de distribuição de X .

c) Se for

$$y < \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi} f_X(x)}$$

aceita-se x como uma determinação de uma variável aleatória normal $(0,1)$.

f) Caso contrário, *rejeita-se* o valor de x .

g) Reitera-se o procedimento, a partir de (c), até se obter o número desejado de determinações da variável aleatória que está sendo gerada.

Com este procedimento, a probabilidade de que um valor de x não seja rejeitado é igual a $\frac{1}{M}$.

4 — APLICAÇÕES

4.1 — Considerações Preliminares

A utilização prática do método proposto poderá ser efetuada com várias escolhas possíveis para o suporte gerador, desde que atendidas as condições definidas em 3.1.

No que segue, a título de ilustração, apresentaremos alguns exemplos de suportes geradores que podem ser gerados pelo método da transformação inversa. Para cada suporte gerador, X , apresentaremos:

- a) a função de densidade, $f_x(\cdot)$;
- b) a função de distribuição, $F_x(\cdot)$, e sua inversa, $F_x^{-1}(\cdot)$, necessária para a aplicação do método da transformação inversa;
- c) A função

$$h(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi} f_x(x)} \quad x \in R$$
- d) $M = \text{Sup}_{x \in X} [h(x)]$
- e) $P = \frac{1}{M}$ correspondente à *probabilidade de aceitação* dos valores gerados.

4.2 — Suporte de Cauchy

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad x \in R \quad h(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (1+x^2) e^{-\frac{x^2}{2}} \quad x \in R$$

$$F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Arctg } x \quad x \in R \quad F_X^{-1}(u) = \text{tg } \pi \left(u - \frac{1}{2} \right) \quad 0 < u < 1$$

$$M = \sqrt{\frac{2\pi}{e}} = 1,5203 \quad P = \frac{1}{M} = 0,6577$$

4.3 — Suporte de Laplace

$$f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} \quad x \in R \quad h(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2} + |x|} \quad x \in R$$

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^x & x < 0 \\ 1 - \frac{e^{-x}}{2} & x \geq 0 \end{cases} \quad F_X^{-1}(u) = \begin{cases} \log_e 2u & 0 < u \leq \frac{1}{2} \\ -\log_e 2(1-u) & \frac{1}{2} < u < 1 \end{cases}$$

$$M = \sqrt{\frac{2e}{\pi}} = 1,3155 \quad P = \frac{1}{M} = 0,7602$$

4.4 — Suporte Logístico

$$f_X(x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} \quad x \in R \quad h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (1 + e^{-x})^2 e^{-\frac{x^2}{2} + x} \quad x \in R$$

$$f_X(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \quad x \in R \quad F_X^{-1}(u) = -\log_e \left(\frac{1-u}{u} \right) \quad 0 < u < 1$$

$$M = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} = 1,5958 \quad P = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} = 0,6267$$

4.5 — Suporte de Gumbell

$$f_X(x) = e^{-e^{-x}-x} \quad x \in R \quad h(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2} - e^{-x}-x} \quad x \in R$$

$$F_X(x) = e^{-e^{-x}} \quad x \in R \quad F_X^{-1}(u) = -\log_e(-\log_e u) \quad 0 < u < 1$$

$$M = \frac{e}{\sqrt{2\pi}} = 1,0844 \quad P = \frac{1}{M} = 0,9221$$

BIBLIOGRAFIA

- (1) BOX, G. E. P. e MULLER, M. E., *Annals of Mathematical Statistics*, 29, p. 610-611, (1958).
- (2) HAMMERSLEY, J. M. e HANDSCOMB, D. C., *Monte Carlo Methods*, Methuen, London, (1964).
- (3) KELLER, T., *Uma Extensão de um Método de Von Neumann para a Geração de Variáveis Aleatórias*, Tese de Mestrado, Departamento de Informática da PUC/RJ, (1973).
- (4) KNUTH, D. E., *The Art of Computer Programming*, Vol. 2: *Semi-numerical Algorithms*, Addison Wesley Reading, Massachusetts, (1969).
- (5) NAYLOR, T. H., *Computer Simulation Experiments with Models of Economic Systems*, John Wiley, New York, (1971).
- (6) VON NEUMANN, J., *National Bureau of Standard Applied Mathematics*, 12, p. 36-38, (1951).

MATRIZES DE LESLIE E PROJEÇÃO DE POPULAÇÃO

José Paulo Q. Carneiro
Paulo Klinger Monteiro *

SUMÁRIO

1. *Introdução*
2. *O Modelo de Leslie*
3. *O conceito de estabilidade*
4. *Propriedades das matrizes de Leslie*
5. *Estabilidade a longo prazo*
 - 5.1 — *O caso diagonalizável*
 - 5.2 — *O caso não-diagonalizável*
6. *A matriz de Leslie na prática demográfica*
 - 6.1 — *Cálculo dos termos da matriz*
 - 6.2 — *Um exemplo no contexto brasileiro*
 - 6.3 — *Estimativa para o autovalor principal*
7. *Exemplos ilustrativos*
 - 7.1 — *Dois exemplos 3 X 3*
 - 7.2 — *Sobre o cálculo das matrizes E_t*

Bibliografia

* Paulo Klinger Monteiro, estudante de Matemática na UFRJ e bolsista de Iniciação Científica do CNPq, é co-autor das partes 4 e 5.

1 — INTRODUÇÃO

Em uma população fechada, isto é, não sujeita a migrações externas, o crescimento se deve exclusivamente ao excesso dos nascimentos sobre os óbitos. A capacidade reprodutiva, porém, bem como a maior ou menor susceptibilidade à morte, variam de modo bem diferenciado com a idade. É natural, pois, que os estudos de projeção de população levem em consideração a variação da fecundidade e da mortalidade conforme a idade.

Bernardelli (1), Lewis (2) e, principalmente, Leslie (3), dentro desta linha de pensamento, desenvolveram um modelo matricial para projeção de população, que aqui chamaremos de modelo de Leslie. Um dos grandes méritos deste modelo é que ele vem a ser um perfeito análogo, no caso discreto, do modelo de Lotka (4) para o caso contínuo, surgindo então naturalmente o conceito de população estável.

A idéia deste trabalho é dupla: em primeiro lugar, reunir, justificando, as propriedades das matrizes de Leslie que são usadas na teoria da população estável; e, em segundo lugar, aplicar a teoria a exemplos brasileiros.

2 — O MODELO DE LESLIE

O modelo que vai ser apresentado se aplica, em princípio, a qualquer população fechada de seres vivos, mas aqui fixaremos nossa atenção em populações humanas.

Tradicionalmente, e por motivos sobejamente conhecidos, o estudo da fecundidade humana se limita ao sexo feminino, por isto nos restringiremos à população feminina, isto é, fica convencionado daqui por diante que “população” significa “população feminina”.

Começamos então dividindo a população em n grupos etários, cada um com a amplitude de T anos. (O ano é a unidade usual em demografia humana. Outra unidade de tempo, obviamente, poderia ser usada). Em princípio, nT deve ser no mínimo igual a w , a maior idade encontrada em indivíduos da população. Mas é claro que os indivíduos que já ultrapassaram a maior idade fértil β não poderão ter influência no crescimento das classes de idade anteriores (isto aliás ficará provado matematicamente dentro do modelo), de modo que muitas vezes se estuda apenas a população com idade até a maior idade reprodutiva, isto é, exige-se apenas que $nT \geq \beta$.

Um indivíduo está na i -ésima classe de idade quando sua idade x , em anos completos, é tal que $(i - 1) T \leq x < iT$, isto para i variando de 1 até n . Então, num certo instante inicial de observação, estamos de posse de um vetor coluna $x^{(0)} = [x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}]^t$, que traduz a estrutura etária inicial da população, já que $x_i^{(0)}$ designa o efetivo de população

encontrada no instante 0 , na i -ésima classe da idade (o símbolo t significa "transposto"). Vamos agora acompanhar a evolução desta população de T em T anos, isto é, calcular como varia o vetor de distribuição etária $x^{(k)} = [x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}]^t$, onde $x_i^{(k)}$ é o efetivo de população que se encontra na i -ésima classe de idades na época kT , contada a partir do instante inicial de observação. Isto significa que a periodicidade da projeção será igual a T , a largura inicialmente escolhida para as faixas etárias. Para efetuar tal cálculo precisaremos de parâmetros que expressem a fecundidade e a mortalidade da população. Estas duas importantes variáveis das populações humanas variam com o tempo, mas no modelo simplificado em questão são supostas constantes no tempo. Isto acarreta que os resultados obtidos devem ser usados com cautela, como aliás ocorre com toda projeção. O que eles querem dizer é que se a fecundidade e a mortalidade permanecerem em tais níveis e com tais distribuições por idades, então o crescimento se processará de tal forma.

Com estas hipóteses, vejamos como se relacionam os vetores $x^{(k+1)}$ e $x^{(k)}$, isto é, como varia a estrutura etária da população, da época kT para a época $(k + 1) T$.

Pelo fato de o período de projeção T ser o mesmo que a amplitude das classes de idade, temos que as mulheres que, na época $(k + 1) T$, estão na i -ésima classe de idade (em número de $x_i^{(k+1)}$) são as sobreviventes daquelas que, na época kT , estavam na $(i - 1)$ -ésima classe (em número de $x_{i-1}^{(k)}$), este raciocínio valendo para $i > 1$. Porém, de acordo com a nossa hipótese sobre a constância da mortalidade no tempo, a razão $x_i^{(k+1)}/x_{i-1}^{(k)}$ independe de k , sendo uma expressão da mortalidade do $(i - 1)$ -ésimo grupo de idade. Chamando de s_{i-1} (inicial de "sobrevivência") esta razão, temos, para $i = 2, \dots, n$:

$$x_i^{(k+1)} = s_{i-1} \cdot x_{i-1}^{(k)},$$

onde s_j é a proporção esperada de mulheres da j -ésima classe de idade, que sobrevivem de modo a passar para a $(j + 1)$ -ésima classe, para $j = 1, \dots, n - 1$.

Falta avaliar $x_1^{(k+1)}$ isto é, o número de mulheres que, na época $(k + 1) T$, estão na primeira classe de idade. Estas não são, obviamente, sobreviventes de uma classe de idade na época kT , já que nessa época nem eram nascidas. Elas são as sobreviventes das que nasceram nos últimos T anos. Vamos então chamar de f_i o número esperado de filhos tidos por uma mulher de i -ésima classe de idade na época kT , durante o período $kT \vdash (k + 1) T$ e que sobrevivem de modo a estar na primeira classe de idade na época $(k + 1) T$. Tal número é, por hipótese, independente de k , e, embora designado pela letra f , incorpora tanto a fecundidade específica por idades quanto a mortalidade das mulheres com idades $0 < x < T$.

Com esta definição, temos:

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{i=1}^n f_i x_i^{(k)}$$

Observação: a maneira pela qual os coeficientes f_i e s_i são calculados na prática demográfica é exposta detalhadamente no § 6. Lá também se encontram aplicações no contexto brasileiro.

As equações se escrevem pois:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= f_1 x_1^{(k)} + f_2 x_2^{(k)} + \dots + f_{n-1} x_{n-1}^{(k)} + f_n x_n^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} &= s_1 x_1^{(k)} + 0 x_2^{(k)} + \dots + 0 x_{n-1}^{(k)} + 0 x_n^{(k)} \\ &\dots \dots \dots \\ x_n^{(k+1)} &= 0 x_1^{(k)} + 0 x_2^{(k)} + \dots + s_{n-1} x_{n-1}^{(k)} + 0 x_n^{(k)} \end{aligned}$$

Este sistema, colocado em forma matricial, fica:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_{n-1} & f_n \\ s_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix},$$

isto é:

$$x^{(k+1)} = L x^{(k)},$$

onde L é a matriz dos coeficientes do sistema.

Utilizando esta equação para valores sucessivos de k , obtemos

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= L x^{(0)} \\ x^{(2)} &= L x^{(1)} = L(L x^{(0)}) = L^2 x^{(0)} \\ x^{(3)} &= L x^{(2)} = L(L^2 x^{(0)}) = L^3 x^{(0)} \end{aligned}$$

De um modo geral, $x^{(k)} = L^k x^{(0)}$, o que mostra que, para projetar para k períodos de T anos, basta pré-multiplicar o vetor estrutura etária inicial pela k -ésima potência da matriz L .

Pela própria definição dos coeficientes f_i e s_j , temos que $f_i \geq 0$ e $0 \leq s_j \leq 1$, para $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, n - 1$. Aqui vamos exigir que $s_j > 0$, para todo j , e que $f_i > 0$ para algum i pelo menos. Estas suposições significam que em cada classe, exceto a última, existe sempre uma mulher que sobrevive e passa para a seguinte, e que em cada T anos alguma mulher nasce e sobrevive ao período. Estas suposições são perfeitamente razoáveis do ponto de vista demográfico em populações de um tamanho não desprezível e servem para expelir da teoria certos casos limite sem interesse.

Mais adiante será conveniente também fazer a hipótese mais restritiva $f_n > 0$, ou, o que é o mesmo, restringir o número n de classes etárias de modo que não entrem em consideração as idades acima da maior idade fértil.

Vamos mostrar que, com esta restrição, não perdemos nenhuma informação sobre a evolução da estrutura etária da população no que se refere às idades não superiores à maior idade fértil.

De fato suponha que n' (suposto menor que n) seja o maior índice i tal que $f_i \neq 0$. Então, podemos decompor a matriz L em blocos do seguinte modo:

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} f_1 & f_2 & \dots & f_{n'-1} & f_{n'} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ s_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s_{n'-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & s_{n'} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & s_{n'+1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{n-1} & 0 & 0 \end{array} \right] = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc} A & B \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{cc} C & D \end{array} \right] \end{array}$$

onde A, B, C, D têm dimensões $n' \times n'$, $n' \times (n - n')$, $(n - n') \times n'$, $(n - n') \times (n - n')$, respectivamente, e B é nula.

Vamos verificar, por indução, que L^k é da forma $\begin{bmatrix} A^k & O \\ C_k & D^k \end{bmatrix}$, onde

C_k é uma matriz $(n - n') \times n'$ cuja expressão explícita não importa. De fato, para $k = 1$, basta tomar $C_1 = C$. Supondo a afirmativa válida para um certo k , temos:

$$L^{k+1} = L \cdot L^k = \begin{bmatrix} A & O \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^k & O \\ C_k & D^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{k+1} & O \\ CA^k + DC_k & D^{k+1} \end{bmatrix}$$

Basta pois tomar $C_{k+1} = CA^k + DC_k$.

Por outro lado, podemos particionar

$$x^{(0)} = [x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}]^t, \text{ pondo } x^{(0)} = [y^{(0)} \ z^{(0)}]^t, \text{ onde}$$

$y^{(0)} = [x_1^{(0)}, \dots, x_{n'}^{(0)}]$ e $z^{(0)} = [x_{n'+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}]$, obtendo:

$$L^k x^{(0)} = \begin{bmatrix} A^k & 0 \\ C_k & D^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^{(0)} \\ z^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^k y^{(0)} \\ C_k y^{(0)} + D^k z^{(0)} \end{bmatrix}.$$

Isto mostra que as n' primeiras componentes de $L^k x^{(0)} = x^{(k)}$ são dadas por A^k vezes o vetor $y^{(0)}$ das n' primeiras componentes de $x^{(0)}$, ou seja, no que toca aos n' primeiros grupos de idade podemos substituir L por A , o que equivale a abandonar as idades acima da maior idade fértil.

3 — O CONCEITO DE ESTABILIDADE

Suponhamos que, para um certo k , constate-se que o vetor $x^{(k+1)}$ é um múltiplo escalar do vetor $x^{(k)}$, isto é, existe um λ tal que $x^{(k+1)} = \lambda x^{(k)}$. Neste caso, para cada $i = 1, \dots, n$, se tem: $x_i^{(k+1)} = \lambda x_i^{(k)}$

Do ponto de vista matemático, isto ocorre quando $x^{(k+1)} = Lx^{(k)} = \lambda x^{(k)}$, isto é, quando λ é um *autovalor* da matriz L e $x^{(k)}$ um correspondente *autovetor*. Por outro lado, $x^{(k+2)} = Lx^{(k+1)} = \lambda x^{(k+1)} = \lambda^2 x^{(k)}$, e assim por diante, de modo que $x^{(k+m)} = \lambda^m x^{(k)}$, para todo m natural.

Do ponto de vista demográfico isto significa (supondo $\lambda > 0$, e veremos que isto ocorre no nosso caso) que:

1.º) A população a partir da época kT passa a variar geometricamente a uma taxa de crescimento $\lambda - 1$ por T anos, isto é, a uma taxa geométrica de crescimento anual igual a $\lambda^{1/T} - 1$; de fato, as populações totais nas épocas kT e $(k+1)T$ são, respectivamente,

$$P_k = \sum_{i=1}^n x_i^{(k)} \text{ e } P_{k+1} = \sum_{i=1}^n x_i^{(k+1)} = \lambda P_k, \text{ de modo que } \frac{P_{k+1} - P_k}{P_k} = \lambda - 1.$$

2.º) A estrutura etária permanece invariável a partir da época kT ; de fato, a proporção de indivíduos que se encontra na i -ésima faixa é, na época $(k+1)T$, igual a $\frac{x_i^{(k+1)}}{P_{k+1}} = \frac{\lambda x_i^{(k)}}{\lambda P_k} = \frac{x_i^{(k)}}{P_k}$, exatamente a mesma que havia na época kT .

Estamos, pois, diante de uma população que cresce geometricamente com uma estrutura etária invariável no tempo. Por este motivo diremos que uma distribuição etária x é *estável* para a matriz L quando existir um número positivo λ tal que $Lx = \lambda x$. Matematicamente, isto equivale a dizer que x é estável para a matriz L quando é um autovetor relativo a um autovalor positivo de L .

Estas considerações já sugerem a importância de se estudar os autovalores e autovetores da matriz L .

4 — PROPRIEDADES DAS MATRIZES DE LESLIE

Chamaremos de matriz de Leslie de ordem n uma matriz da forma

$$L = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_{n-1} & f_n \\ s_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s_{n-1} & 0 \end{bmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned} f_i &\geq 0, \text{ para } i = 1, \dots, n \\ 0 < s_j &\leq 1, \text{ para } j = 1, \dots, n-1 \\ &\text{Para algum } i, f_i > 0 \end{aligned}$$

Teorema 1:

O polinômio característico de L é $p(\lambda) = \det(\lambda I - L) = \lambda^n - f_1 \lambda^{n-1} - f_2 s_1 \lambda^{n-2} - \dots - f_n s_1 s_2 \dots s_{n-1}$

Prova:

A demonstração é por indução sobre n .

Para $n = 1$, $L = [f_1]$, $\det(\lambda I - L) = \lambda - f_1$.

Suponha agora que a fórmula é válida para as matrizes de Leslie de ordem $n - 1$, e tome $n \geq 2$.

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - L) &= \begin{vmatrix} \lambda - f_1 & -f_2 & \dots & -f_{n-1} & -f_n \\ -s_1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & s_{n-1} & \lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{n+1} (-f_n) \begin{vmatrix} -s_1 & \lambda & \dots & 0 \\ 0 & -s_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \lambda \\ 0 & 0 & \dots & s_{n-1} \end{vmatrix} + \lambda \\ &+ \lambda \begin{vmatrix} \lambda - f_1 & -f_2 & \dots & -f_{n-2} & -f_{n-1} \\ -s_1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -s_{n-2} & \lambda \end{vmatrix} \end{aligned}$$

A primeira parcela é $(-1)^{n+1} (-f_n) (-1)^{n-1} s_1 s_2 \dots s_{n-1} = -f_n s_1 s_2 \dots s_{n-1}$.

O segundo determinante é $\det(\lambda I - M)$, onde

$$M = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_{n-2} & f_{n-1} \\ s_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s_{n-2} & 0 \end{vmatrix}$$

que é uma matriz de Leslie de ordem $n - 1$. Pela hipótese indutiva, $\det(\lambda I - M) = \lambda^{n-1} - f_1 \lambda^{n-2} - f_2 s_1 \lambda^{n-3} - \dots - f_{n-1} s_1 s_2 \dots s_{n-2}$.

Substituindo:

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - L) &= -f_n s_1 s_2 \dots s_{n-1} + \lambda \det(\lambda I - M) = \\ &= \lambda^n - f_1 \lambda^{n-1} - f_2 s_1 \lambda^{n-2} - \dots - f_n s_1 s_2 \dots s_{n-1}, \end{aligned}$$

o que completa a demonstração.

Observação 1: neste parágrafo, as seguintes notações serão muito usadas.

Ponhamos $c_k = f_k \cdot s_1 \dots s_{k-1}$, para $k \geq 2$, e $c_1 = f_1$, de forma que o polinômio característico $p(\lambda) = \lambda^n - c_1 \lambda^{n-1} - c_2 \lambda^{n-2} - \dots - c_n$.

Observemos que, como todos os $s_i > 0$, c_k tem o sinal de f_k .

Para $\lambda \neq 0$, definimos $q(\lambda) = 1 - \frac{p(\lambda)}{\lambda^n} = \frac{c_1}{\lambda} + \dots + \frac{c_n}{\lambda^n}$.

λ é um autovalor de L se e somente se $p(\lambda) = 0$, ou seja, $q(\lambda) = 1$.

Teorema 2:

a matriz L tem um e somente um autovalor positivo.

Prova: como algum $c_k > 0$, segue-se (ver observação 1) que $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} q(\lambda) = +\infty$ e $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} q(\lambda) = 0$.

A continuidade de q em $]0; +\infty[$ já acarreta que existe pelo menos um λ_1 tal que $q(\lambda_1) = 1$. Por outro lado, $q'(\lambda) = -\frac{c_1}{\lambda^2} - \frac{2c_2}{\lambda^3} - \dots - \frac{nc_n}{\lambda^{n+1}}$ é negativa pois todo $c_k \geq 0$ e algum $c_k > 0$. Logo q é estritamente decrescente e portanto só pode assumir uma única vez o valor 1. Na figura 1 vemos um gráfico de $q(\lambda)$.

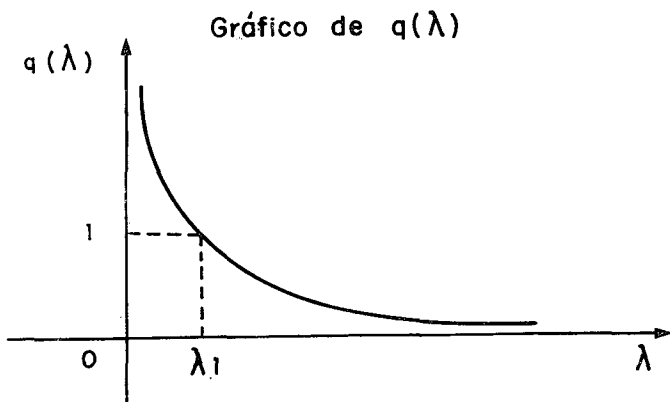


Fig. 1

Definição: ao autovalor positivo λ_1 de L chamamos de autovalor principal de L .

Teorema 3:

o autovalor principal de L é raiz simples do polinômio característico de L .

Prova: se λ_1 for uma raiz múltipla de $p(\lambda)$, então é também raiz de $p'(\lambda)$.

Porém, de $q(\lambda) = 1 - \frac{p(\lambda)}{\lambda^n}$, tira-se que $q'(\lambda) = \frac{np(\lambda) - \lambda p'(\lambda)}{\lambda^{n+1}}$, e, portanto $q'(\lambda_1) = 0$. Mas já vimos na demonstração do teorema 2 que $q'(\lambda_1) < 0$. Logo λ_1 não pode ser raiz múltipla de $p(\lambda)$.

Teorema 4:

qualquer autovalor λ de L é tal que $|\lambda| \leq \lambda_1$, onde λ_1 é o autovalor principal de L .

Prova: se $\lambda = 0$, isto é claro. Podemos então supor $\lambda \neq 0$.

Lembrando que os autovalores podem ser complexos, ponhamos $\lambda = re^{i\phi}$, onde $r = |\lambda| > 0$. como $p(\lambda) = p(\lambda_1) = 0$, isto é, $q(\lambda) = q(\lambda_1) = 1$, então:

$$\sum_{k=1}^n \frac{c_k}{\lambda_1^k} = 1 = \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{r^k e^{ki\phi}} = \left| \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{r^k e^{ki\phi}} \right| \leq \sum_{k=1}^n \left| \frac{c_k}{r^k e^{ki\phi}} \right| = \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{r^k}$$

Portanto $\sum_{k=1}^n c_k \left(\frac{1}{r^k} - \frac{1}{\lambda_1^k} \right) \geq 0$.

Queremos provar que $r \leq \lambda_1$. Suponhamos, por absurdo, que $r > \lambda_1$.

Então teríamos $\frac{1}{r} < \frac{1}{\lambda_1}$ e $\frac{1}{r^k} < \frac{1}{\lambda_1^k}$, para todo $k = 1, \dots, n$.

Como todo $c_k \geq 0$ e algum $c_k > 0$, seguir-se-ia que

$$\sum_{k=1}^n c_k \left(\frac{1}{r^k} - \frac{1}{\lambda_1^k} \right) < 0.$$

Esta contradição prova que $r \leq \lambda_1$.

Observação 2: veremos mais adiante que seria muito interessante termos, no teorema 4, $|\lambda| < \lambda_1$ para todo autovalor não principal λ de L (quando isto ocorre, dizemos que λ_1 é *estritamente dominante*).

Infelizmente não se pode garantir isto, como se vê no exemplo seguinte:

$$\text{Se } L = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0 \end{bmatrix}, \text{ então } p(\lambda) = \lambda^2 - 0,25.$$

Os autovalores são $\lambda_1 = 0,5$ e $\lambda_2 = -0,5$. Aqui, pois $|\lambda_2| = \lambda_1$.

Felizmente, o teorema seguinte e seu corolário dão condições suficientes para que λ_1 seja estritamente dominante.

Teorema 5:

se existem índices j, l primos entre si, tais que $f_j > 0$ e $f_l > 0$, então o autovalor principal de L é estritamente dominante.

Prova: sejam λ_1 o autovalor principal de L e λ um autovalor qualquer de L . Já sabemos que $|\lambda| \leq \lambda_1$. Para provar então que λ_1 é estritamente dominante, basta provar que $|\lambda| = \lambda_1$ só pode ocorrer se $\lambda = \lambda_1$.

Suponha então que $|\lambda| = \lambda_1$. Pondo $\lambda = \lambda_1 e^{i\phi}$ e, como $q(\lambda) = q(\lambda_1) = 1$, temos:

$$\sum_{k=1}^n \frac{c_k}{\lambda_1^k} = \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{\lambda_1^k e^{k i \phi}}.$$

Tomando a parte real de ambos os membros (lembrando que a parte real de $e^{-ki\phi}$ é $\cos(-ki\phi) = \cos(ki\phi)$, vem:

$$\sum_{k=1}^n \frac{c_k}{\lambda_1^k} = \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{\lambda_1^k} \cos(k\phi),$$

ou seja,

$$\sum_{k=1}^n \frac{c_k}{\lambda_1^k} (1 - \cos k\phi) = 0.$$

Como c_k, λ_1^k e $1 - \cos k\phi$ são todos ≥ 0 , para todo k , segue-se que todas as parcelas desta soma têm que ser nulas. Como, por hipótese, f_j e f_l , e, portanto, c_j e c_l são estritamente positivos (ver observação 1), temos:

$$1 - \cos(j\phi) = 1 - \cos(l\phi) = 0.$$

Logo, existem inteiros m, r tais que:

$$j\phi = 2m\pi$$

$$l\phi = 2r\pi$$

Finalmente, como j e l são primos entre si, existem inteiros x, y tais que $xj + yl = 1$. Tem-se então:

$$\phi = (xj + yl)\phi = x(j\phi) + y(l\phi) = x \cdot 2m\pi + y \cdot 2r\pi = 2(xm + yr)\pi.$$

Logo $\cos \phi = 1$ e $\sin \phi = 0$, isto é, $e^{i\phi} = 1$, e, portanto $\lambda = \lambda_1$.

Corolário: Se para dois índices consecutivos j e $j + 1$, $f_j > 0$ e $f_{j+1} > 0$, então o autovalor principal de L é estritamente dominante.

Prova: j e $j + 1$ são primos entre si.

Observação 3: A condição deste corolário é satisfeita para populações humanas desde que o período T não seja muito grande. De fato, se T não exceder, por exemplo, 15 anos, certamente haverá duas classes de idade contíguas situadas no intervalo de idade que vai de 15 a 50 anos, onde se encontrarão f_j e f_{j+1} não nulos. Como na prática demográfica T é, em geral, 5 ou 10 anos (na pior das hipóteses, 15), a condição de dominância estrita será sempre satisfeita.

Teorema 6:

se 0 é autovalor de L , então o auto-espço correspondente é o espaço unidimensional gerado pelo vetor $[0, 0, \dots, 1]^t$. Se $\lambda \neq 0$ é autovalor de L , então o auto-espço correspondente é o espaço unidimensional gerado pelo vetor

$$[1, s_1/\lambda, s_2 s_1/\lambda^2, \dots, s_{n-1} \dots s_2 s_1/\lambda^{n-1}]^t.$$

Prova: o auto-espço correspondente ao autovalor λ é o conjunto dos vetores x tais que $Lx = \lambda x$. No presente caso, se $\lambda = 0$, $x = [x_1, \dots, x_n]^t$ pertence ao auto-espço de 0 se e só se é solução do sistema $Lx = 0$. Por outro lado, $\lambda = 0$ é autovalor de L quando $p(\lambda) = 0$, isto é, $c_n = 0$, ou seja $f_n = 0$ (ver observação 1). Então, o citado sistema fica:

$$\begin{aligned} f_1 x_1 + \dots + f_{n-1} x_{n-1} &= 0 \\ s_1 x_1 &= 0 \\ s_2 x_2 &= 0 \\ \dots & \\ s_{n-1} x_{n-1} &= 0 \end{aligned}$$

Portanto $x = [0, 0, \dots, x_n]^t = x_n [0, 0, \dots, 1]^t$.

Se $\lambda \neq 0$, o sistema $Lx = \lambda x$ fica:

$$\begin{aligned} (f_1 - \lambda)x_1 + f_2x_2 + \dots + f_nx_n &= 0 \\ s_1\lambda_1 - \lambda x_2 &= 0 \\ \dots & \\ s_ix_i - \lambda x_{i+1} &= 0 \\ \dots & \\ s_{n-1}x_{n-1} - \lambda x_n &= 0 \end{aligned}$$

Para $i = 1, \dots, n - 1$, temos então

$$x_{i+1} = \frac{S_i}{\lambda} x_i.$$

Por indução, concluiu-se que $x_{i+1} = \frac{s_1s_{i-1} \dots s_1}{\lambda} x_1$.

Logo,

$$\begin{aligned} x &= \left[x_1, \frac{s_1}{\lambda} x_1, \frac{s_2s_1}{\lambda^2} x_1, \dots, \frac{s_{n-1} \dots s_1}{\lambda^{n-1}} x_1 \right]^t = \\ &= x_1 \left[1, \frac{s_1}{\lambda}, \frac{s_2s_1}{\lambda^2}, \dots, \frac{s_{n-1} \dots s_1}{\lambda^{n-1}} \right]^t. \end{aligned}$$

Corolário: o auto-espaço correspondente a qualquer autovalor da matriz L tem dimensão 1.

Observação 4: o Corolário acima mostra que a multiplicidade geométrica de cada autovalor de L é 1. Infelizmente não temos uma propriedade tão simples a respeito de sua multiplicidade algébrica. Por exemplo,

a matriz de Leslie $L = \begin{bmatrix} 0 & 0,75 & 0,5 \\ 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \end{bmatrix}$ tem por polinô-

mio característico $p(\lambda) = (\lambda - 0,5) (\lambda + 0,25)^2$. Portanto, o autovalor $-0,25$ tem multiplicidade algébrica 2. Por outro lado, o teorema que segue garante que a proliferação de raízes múltiplas do polinômio característico está limitada geometricamente.

Teorema 7:

o número de autovalores distintos de L é no mínimo igual à dimensão do espaço gerado por todos os autovetores de L .

Prova: seja $\{v_1, \dots, v_m\}$ uma base para o espaço gerado pelos autovetores de L , e $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ correspondentes autovalores. Se para algum $i \neq j$, tivéssemos $\lambda_i = \lambda_j$, os correspondentes v_i e v_j seriam linearmente dependentes, pelo corolário do teorema 6, o que é absurdo, pois $\{v_1, \dots, v_m\}$ é uma base. Logo os λ_i são todos distintos.

Observação 5: recordemos alguns fatos importantes da teoria geral de matrizes (ver, por exemplo, [5]). Uma matriz A $n \times n$ é dita *diagonalizável* quando existe uma matriz P $n \times n$ e uma matriz diagonal D $n \times n$, tais que $P^{-1}AP = D$. Os elementos da diagonal principal de D são os autovalores de A , e as colunas de P são autovetores correspondentes. Uma matriz A é diagonalizável se e somente se o espaço gerado por suas colunas tem uma base formada por autovetores de A . Em particular, se A é $n \times n$ e tem n autovalores distintos, então seus correspondentes autovetores são linearmente independentes e portanto formam uma base para o espaço-coluna de A , que é então diagonalizável. De um modo geral, não vale a recíproca. Por exemplo, a matriz identidade 2×2 é obviamente diagonalizável e, no entanto, só tem um autovalor, que é 1. No entanto, para matrizes de Leslie, vale a recíproca, e este é o objeto do próximo teorema.

Teorema 8:

uma matriz de Leslie $n \times n$ é diagonalizável se e somente se possui n autovalores distintos.

Prova: a suficiência da condição vale para matrizes em geral (ver observação 5). Quanto à necessidade, se L é diagonalizável, então o espaço-coluna de L possui uma base formada por autovetores, isto é, a dimensão do espaço gerado pelos seus autovetores é n . Pelo teorema 7, L tem no mínimo n autovalores distintos. Como porém este número é no máximo n , então ele é exatamente igual a n .

5 — ESTABILIDADE A LONGO PRAZO

Vimos no parágrafo anterior que a matriz de Leslie L tem um único autovalor positivo λ_1 e que os autovetores correspondentes são múltiplos do vetor $v_1 = \left[1, \frac{s_2}{\lambda_1}, \dots, \frac{s_{n-1} \dots s_1}{\lambda_1^{n-1}} \right]^t$. Pelo que foi visto na seção 3, v_1 e seus múltiplos caracterizam as únicas distribuições etárias *estáveis* para L , isto é, uma vez atingida a estrutura etária dada por v_1 , a população não mais dela se afasta.

Porém, é extremamente improvável que, dada uma distribuição etária inicial $x^{(0)}$, para um certo k tenhamos $x^{(k)} = L^k x^{(0)}$ exatamente igual a um múltiplo de v_1 , de modo que o conceito de estabilidade parece, à primeira vista, pouco útil.

No entanto, veremos agora que, em certo sentido que será tornado preciso a longo prazo, o vetor $x^{(k)}$ tende a se tornar estável, isto é, se aproxima de um múltiplo de v_1 . O que vai ser mostrado é que, qualquer que seja a distribuição etária inicial $x^{(0)}$, o vetor $x^{(k)} = L^k x^{(0)}$ se aproxima, para grandes valores de k , de $c_1 \lambda_1^k v_1$ (mais precisamente, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_1^k} x^{(k)} = c_1 v_1$). Isto significa que a estrutura etária da população vai se aproximando, com o correr do tempo, da estrutura etária definida pelo autovetor v_1 . Esta estrutura é a chamada estrutura estável associada aos parâmetros $f_1, \dots, f_n, s_1, \dots, s_{n-1}$.

Por outro lado, quando $x^{(k)}$ se aproxima de $c_1 \lambda_1^k v_1$, a razão entre

as populações totais P_{k+1} e P_k se aproxima de $\frac{\sum_{i=1}^n c_i \lambda_1^{k+1} v_{1,i}}{\sum_{i=1}^n c_i \lambda_1^k v_{1,i}} = \lambda_1$,

e portanto a taxa geométrica anual de crescimento se aproxima de $\lambda_1^{1/T} - 1$, onde T é o período da projeção. Por este motivo, o número $\lambda_1^{1/T} - 1$ é chamado taxa geométrica anual *intrínseca* (ou estável) de crescimento.

Em primeiro lugar, observemos que, para ter um resultado deste tipo, é necessário que o autovalor λ_1 seja estritamente dominante, isto é, $\lambda_1 > |\lambda|$, para qualquer outro autovalor λ .

Por exemplo, se $L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \end{bmatrix}$, então

$p(\lambda) = \det(\lambda I - L) = \lambda^3 - 1$, de modo que todos os autovalores têm módulo 1 (observe que L é diagonalizável no campo complexo).

Temos $L^2 = \begin{bmatrix} 0 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $L^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Portanto, $L = L^4 = L^7 = \dots$, $L^2 = L^5 = L^8 = \dots$, $I = L^3 = L^6 = \dots$. Logo, $x^{(0)} = x^{(3)} = x^{(6)} = \dots$, $x^{(1)} = x^{(4)} = x^{(7)} = \dots$, $x^{(2)} = x^{(5)} = x^{(8)} = \dots$, isto é, a população oscila entre $x^{(0)}$, $x^{(1)} = Lx^{(0)}$ e $x^{(2)} = L^2x^{(0)}$, não havendo, pois, estabilidade.

Tal matriz L poderia descrever a evolução da população de hipotéticos animais que vivessem no máximo três anos, digamos: três quartos dos que têm de 0 a 1 ano sobrevivem para estar, um ano depois, no

grupo de 1 a 2 anos e, destes, dois terços sobrevivem para estar, um ano depois, no grupo de 2 a 3 anos, quando então cada um gera filhos de modo que dois sobrevivam de maneira a estar, no ano seguinte, no grupo de 0 a 1 ano.

Mas, em se tratando de demografia humana, isto não ocorre (ver observação 2). Por isto, iremos supor, daqui por diante, que λ_1 é estritamente dominante.

A maioria dos estudiosos de demografia matemática só aborda o estudo da estabilidade no caso em que a matriz L é diagonalizável, isto é, tem n autovalores distintos (ver teorema 8). É que este é o caso freqüente nas aplicações, e a demonstração fica facilitada. Como diz Keyfitz (6): "The roots λ_j are always distinct in demographic applications. This is true at least empirically, though the conditions under which it is true mathematically are not expressible in elementary terms".

Vamos aqui tratar tanto do caso diagonalizável quanto do caso geral.

5.1 — O caso diagonalizável

Considere uma matriz de Leslie L diagonalizável. De acordo com o teorema 8 da seção 4, L , que é de ordem n , tem n autovetores linearmente independentes v_1, \dots, v_n , correspondentes aos autovalores distintos $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Situando-se no caso estritamente dominante (ver seção 4), temos também que $\lambda_1 > |\lambda_i|$, para $i = 2, \dots, n$. Pelo teorema 6, os subespaços unidimensionais W_i de \mathbb{R}^n , definidos por $W_i = \{x \in \mathbb{R}^n; Lx = \lambda_i x\}$ são precisamente os subespaços gerados pelos v_i , isto é, $Lx = \lambda_i x$ ocorre se e só se x é um múltiplo de v_i . Como os v_i formam uma base de \mathbb{R}^n , então todo vetor x de \mathbb{R}^n se escreve de modo único da forma $x = c_1(x)v_1 + \dots + c_n(x)v_n$, onde escrevemos $c_i(x)$ para ressaltar que os coeficientes dependem de x . Definamos então, para $i = 1, \dots, n$, as transformações lineares $f_i(x) = c_i(x)v_i$ (nota-se que cada f_i é a projeção de \mathbb{R}^n sobre o subespaço W_i , associada à decomposição dada pelos W_i 's). Observamos quatro propriedades das f_i :

$$1.^a) \quad f_i \circ f_i = f_i.$$

$$\text{De fato, } f_i(f_i(x)) = f_i(c_i(x)v_i) = c_i(x)f_i(v_i) = c_i(x)v_i = f_i(x).$$

O segundo passo vem da linearidade de f_i , e o terceiro do fato de que a projeção de v_i sobre W_i é o próprio v_i .

$$2.^a) \quad f_i \circ f_j = 0, \text{ para } i \neq j.$$

$$\text{De fato, } f_i(f_j(x)) = f_i(c_j(x)v_j) = c_j(x)f_i(v_j) = c_j(x)0 = 0.$$

$f_i(v_j) = 0$, pois a única decomposição de v_j na forma

$$\sum_{i=1}^n c_i(v_j)v_i \text{ é } v_j = v_j.$$

3.a) $f_1(x) + \dots + f_n(x) = x$, para cada x .

Isto vem da própria definição das f_i e dos c_i .

4.a) $Lx = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x)$, para cada x .

$$\begin{aligned} Lx &= L \left(\sum_{i=1}^n c_i(x) v_i \right) = \sum_{i=1}^n c_i(x) L v_i = \\ &= \sum_{i=1}^n c_i(x) \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i(x) v_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x). \end{aligned}$$

Por outro lado, consideremos a base canônica de \mathbb{R}^n formada pelos valores e_1, \dots, e_n , onde $e_1 = [1, 0, \dots, 0]^t, \dots, e_n = [0, 0, \dots, 1]^t$, e formemos a matriz E_i , cujas colunas são $f_i(e_1), \dots, f_i(e_n)$. (Em particular, todas as colunas de E_i são múltiplas do vetor v_i). Dado então um vetor arbitrário $x = [x_1, \dots, x_n]^t = \sum_{j=1}^n x_j e_j$, verifica-se que

$$E_i x = [f_i(e_1), \dots, f_i(e_n)] [x_1, \dots, x_n]^t = \sum_{j=1}^n f_i(e_j) x_j$$

Pela linearidade das f_i , temos:

$$E_i x = \sum_{j=1}^n f_i(x_j e_j) = f_i \left(\sum_{j=1}^n x_j e_j \right) = f_i(x),$$

ou seja E_i é a matriz que representa a transformação linear f_i na base canônica de \mathbb{R}^n . Então as 4 propriedades podem também ser escritas:

1.a) $E_i^2 = E_i$

2.a) $E_i E_j = 0$, para $i \neq j$

3.a) $E_1 + \dots + E_n = I$

4.a) $L = \sum_{i=1}^n \lambda_i E_i$,

enquanto a definição das f_i pode ser refraseada como:

5.a) $x = \sum_{i=1}^n c_i(x) v_i$ se e só se $E_i x = c_i(x) v_i$.

(O leitor familiarizado com álgebra linear reconhecerá aqui um caso particular do teorema espectral (5). A propósito, a equação 4.a é dita a “decomposição espectral da matriz L ”).

Vamos obter ainda duas propriedades da decomposição de L nas matrizes de projeção E_i .

$$L E_i = \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j E_j \right) E_i = \sum_{j=1}^n \lambda_j E_j E_i, \text{ pela 4.a.}$$

Porém, nesta soma todas as parcelas em que $j \neq i$ são nulas, por 2.^a). Logo, ela se reduz a $\lambda_i E_i^2 = \lambda_i E_i$, por 1.^o). Portanto:

$$6.a) \quad LE_i = \lambda_i E_i$$

Finalmente, a decomposição dada por 4.^a) é um caso particular de:

$$7.a) \quad L^m = \sum_{i=1}^n \lambda_i^m E_i \quad m = 1, 2, \dots$$

Isto se demonstra por indução sobre m . Para $m = 1$ é a própria 4.^a). Supondo-a verdadeira para um certo m , temos:

$$L^{m+1} = L \cdot L^m = L \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^m E_i \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^m LE_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i^m \lambda_i E_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{m+1} E_i.$$

Podemos então, agora, verificar a estabilidade a longo prazo no caso diagonalizável. Seja $x^{(0)}$ um vetor *arbitrário* de distribuição etária inicial. Como v_1, \dots, v_n é uma base, então existem escalares c_1, \dots, c_n tais que $x^{(0)} = \sum_{i=1}^n c_i v_i$.

Então, por 5.^a), $E_i x^{(0)} = c_i v_i$, e, portanto,

$$x^{(m)} = L^m x^{(0)} = \sum_{i=1}^n \lambda_i^m E_i x^{(0)} = \sum_{i=1}^n \lambda_i^m c_i v_i, \text{ pela propriedade 7.a).}$$

Logo

$$\frac{x^{(m)}}{\lambda_1^m} = c_1 v_1 + \sum_{i=2}^n \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^m c_i v_i.$$

Como λ_1 é estritamente dominante, então $\left| \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right| < 1$, de modo que $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^m = 0$, e, portanto:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{x^{(m)}}{\lambda_1^m} = c_1 v_1.$$

Lembrando que os múltiplos de v_1 são justamente as únicas distribuições etárias estáveis, temos o:

Teorema:

se a matriz de Leslie L de ordem n tem n autovalores distintos e o autovalor principal é dominante, então para qualquer distribuição etária inicial $x^{(0)}$, existe e é estável o $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{x^{(m)}}{\lambda_1^m}$, onde λ_1 é o autovalor principal e $x^{(m)} = L^m x^{(0)}$.

Observação: os conceitos e teoremas desta seção são ilustrados com exemplos na seção 7.

5.2 — O caso não-diagonalizável

O título desta seção se deve apenas à ênfase, já que na realidade ele se aplica ao caso geral, diagonalizável ou não.

Tomemos a matriz de Leslie L de ordem n e seu polinômio característico $p(\lambda) = \lambda^n - c_1\lambda^{n-1} - \dots - c_n$. Pelo teorema de Cayley-Hamilton (ver [5]), a matriz L satisfaz à equação $p(L) = 0$, isto é,

$$L^n = c_1 L^{n-1} + \dots + c_{n-1} L + c_n I = \sum_{k=1}^n c_k L^{n-k}.$$

Fixemos um natural $m \geq n$, ponhamos $m - n = s \geq 0$ e multipliquemos por L^s :

$$L^{s+n} = \sum_{k=1}^n c_k L^{s+n-k}.$$

Se designarmos por $a_p^{(i,j)}$ o elemento de i -ésima linha e j -ésima coluna da matriz L^p , e levarmos em conta que as operações de adição de matrizes e de multiplicação de um escalar por uma matriz se dão termo a termo, vem que:

$$a_{s+n}^{(i,j)} = \sum_{k=1}^n c_k a_{s+n-k}^{(i,j)}.$$

Isto vale para cada $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, n$. Vamos fixar um par (i, j) e omitir provisoriamente a alusão aos índices i e j para avaliar a notação. Temos então a equação de diferenças finitas:

$$a_{s+n} = \sum_{k=1}^n c_k a_{s+n-k}.$$

Como $s + n = m$, a equação fica:

$$a_m - c_1 a_{m-1} - c_2 a_{m-2} - \dots - c_{n-1} a_{m-n+1} - c_n a_{m-n} = 0 \quad (*).$$

Supondo $c_n \neq 0$ (ver § 2), esta é uma equação linear homogênea de ordem n . Usaremos agora alguns fatos conhecidos sobre equações de diferenças finitas (ver, por exemplo, [7]).

A pesquisa de soluções da forma $a_m = \lambda^m$, com $\lambda \neq 0$, conduz à equação característica:

$$\lambda^m - c_1 \lambda^{m-1} - \dots - c_n \lambda^{m-n} = \lambda^s (\lambda^n - c_1 \lambda^{n-1} - \dots - c_n) = 0,$$

isto é:

$$\lambda^s p(\lambda) = 0.$$

Sendo c_n e λ diferentes de 0, a equação característica se reduz a

$$p(\lambda) = 0.$$

Sejam então $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$ as raízes distintas de $p(\lambda)$, e $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q$, respectivamente, suas multiplicidades, onde $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_q = n$. Sendo λ_1 a única raiz positiva, isto é, o autovalor principal de L , temos $\mu_1 = 1$. Então as seqüências de termos gerais

$$\lambda_1^m, \lambda_2^m, m\lambda_2^{m-1}, \dots, m^{\mu_2-1}\lambda_2^m, \dots, \lambda_q^m, m\lambda_q^{m-1}, \dots, m^{\mu_q-1}\lambda_q^m,$$

formam um conjunto de soluções linearmente independentes da equação (*), de modo que podemos garantir que existem n números $y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \dots, y_2^{(\mu_2)}, \dots, y_q^{(1)}, \dots, y_q^{(\mu_q)}$, tais que:

$$a_m = y_1^{(1)} \lambda_1^m + \sum_{t=2}^q \sum_{r=1}^{\mu_t} y_r^{(t)} m^{r-1} \lambda_t^m.$$

Como este é o i -j-ésimo elemento da matriz L^m , então

$$\frac{a_m}{\lambda_1^m} = y_1^{(1)} + \sum_{t=2}^q \sum_{r=1}^{\mu_t} y_r^{(t)} m^{r-1} \left(\frac{\lambda_t}{\lambda_1} \right)^m$$

é o i -j-ésimo elementos da matriz $\frac{L^m}{\lambda_1^m}$.

Situando-se no caso estritamente dominante (ver § 4), $\left| \frac{\lambda^t}{\lambda_1} \right| < 1$, o que acarreta que $\lim_{m \rightarrow \infty} m^{r-1} \left(\frac{\lambda^t}{\lambda_1} \right)^m = 0$, para cada r e t (ver apêndice 1). Portanto existe $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_m}{\lambda_1^m}$ e, conseqüentemente, existe também a matriz $E = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{L^m}{\lambda_1^m}$.

Observemos agora que $\frac{L^{m+1}}{\lambda_1^{m+1}} = \frac{L}{\lambda_1} \cdot \frac{L^m}{\lambda_1^m}$; fazendo $m \rightarrow \infty$, conclui-se que $E = \frac{L}{\lambda_1} E$, isto é, $LE = \lambda_1 E$ (da mesma forma, concluiríamos que $EL = \lambda_1 E$). Isto é, as colunas da matriz E são autovetores de L correspondentes ao autovalor λ_1 . Em particular, pelo teorema 7, as colunas de E são proporcionais (o mesmo acontece com as linhas).

Por outro lado, a propriedade $LE = \lambda_1 E$ acarreta, por indução, que $L^m E = \lambda_1^m E$, para cada m natural.

Além disto, a matriz E goza da propriedade $E^2 = E$, pois

$$EE = \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{L^m}{\lambda_1^m} \right) E = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{L^m E}{\lambda_1^m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lambda_1^m E}{\lambda_1^m} = E.$$

Finalmente, se $x^{(0)}$ é uma distribuição etária inicial qualquer,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{x^{(m)}}{\lambda_1^m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{L^m x^{(0)}}{\lambda_1^m} = E x^{(0)},$$

enquanto $L(Ex^{(0)}) = LEx^{(0)} = \lambda_1 Ex^{(0)}$ prova que $Ex^{(0)}$ é estável, isto é, é um múltiplo de v_1 .

Teorema:

Se na matriz de Leslie L , o autovalor principal λ_1 é dominante, e $f_n \neq 0$, então, para qualquer distribuição etária inicial $x^{(0)}$, existe e é estável o $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{x^{(m)}}{\lambda_1^m}$, onde $x^{(m)} = L^m x^{(0)}$.

Nota-se que este teorema inclui como caso particular o teorema de 5.1. Porém as considerações de 5.1 permanecem com interesse próprio, como ilustram os exemplos da seção 7.

6 — A MATRIZ DE LESLIE NA PRÁTICA DEMOGRÁFICA

6.1 — Cálculo dos termos da matriz

Para obter as informações necessárias para avaliar a fecundidade e a mortalidade específicas por idades em populações humanas, vigentes em um certo ano, é preciso contar com declarações de idade confiáveis. Ora, a prática tem mostrado que nestas declarações existe uma atração pelas idades “terminadas em 5”. A distorção provocada por esta atração é compensada se usarmos grupos de idade quinquenais e por esta razão a largura das faixas etárias e, conseqüentemente, o período T da projeção é usualmente escolhido igual a 5 anos.

Para calcular os s_i , isto é, a proporção esperada de mulheres da i -ésima classe de idade que sobrevivem de modo a passar para a $(i+1)$ -ésima classe, temos que dispor de probabilidades de sobrevivência conforme as idades. Imaginemos primeiro que esteja à nossa disposição uma função contínua da idade $s(x)$ que dê a probabilidade de que uma mulher sobreviva até a idade x . Tal função chama-se função de sobrevivência. Então a probabilidade de que uma mulher atinja a i -ésima classe de idade é o valor médio da função s no intervalo $[5(i-1); 5i]$, isto é, $\frac{1}{5} \int_{5(i-1)}^{5i} s(x) dx$, e, portanto, a probabilidade condicional de que uma mulher, tendo chegado à i -ésima classe, venha a atingir a $(i+1)$ -ésima, é dada por:

$$s_i = \left(\int_{5i}^{5(i+1)} s(x) dx \right) / \left(\int_{5(i-1)}^{5i} s(x) dx \right),$$

após cancelar o fator comum $1/5$.

Na prática, em vez da função $s(x)$, utiliza-se uma *tábua de vida* (ver [6]), a qual fornece, para cada idade x , o número l_x de sobreviventes de um grupo inicial fictício de l_0 mulheres. Neste caso, o

quociente l_x/l_0 é uma estimativa de $s(x)$. Após simplificar l_0 , ficaríamos com:

$$s_i = \left(\int_{\delta i}^{\delta(i+1)} l_x dx \right) / \left(\int_{\delta(i-1)}^{\delta i} l_x dx \right).$$

Nas tábuas de vida a função ${}_nL_x = \int_x^{x+n} l_t dt$ já se encontra tabulada, de modo que a expressão final fica:

$$s_i = \frac{{}_5L_{\delta i}}{{}_5L_{\delta(i-1)}}. \quad (1)$$

Estas razões são chamadas, no contexto de tábuas de vida, de *razões de sobrevivência*.

Finalmente, abordemos o cálculo dos f_i . Como vimos no § 2, os f_i são os números tais que $x_i^{(k+1)} = \sum_{i=1}^n f_i x_i^{(k)}$, onde $x_i^{(k+1)}$ é o número de mulheres que, na época $5(k+1)$, estão no grupo de idade de 0 a 5 anos. Estas são as sobreviventes dos nascimentos ocorridos nos últimos 5 anos. Sejam F_1, F_2, \dots , as taxas anuais específicas de fecundidade feminina por faixa etária, isto é, F_i é o número anual médio de filhas que tem uma mulher do i -ésimo grupo etário. No ano $5k$, os nascimentos serão $\sum_{i=1}^n F_i x_i^{(k)}$, enquanto no ano $5(k+1)$, serão $\sum_{i=1}^n F_i x_i^{(k+1)}$, já que estamos supondo a fecundidade invariável no tempo. Como não temos informação sobre a estrutura etária ano a ano, mas somente quinquenal, estimamos os nascimentos anuais nos últimos cinco anos como a média destes dois últimos números, e, portanto, os nascimentos nos últimos cinco anos são dados por:

$$\bar{s} \cdot \frac{\left(\sum_{i=1}^n F_i x_i^{(k)} + \sum_{i=1}^n F_i x_i^{(k+1)} \right)}{2} \quad (2)$$

O primeiro somatório pode ser escrito:

$$\sum_{i=1}^n F_i x_i^{(k)} = \sum_{i=1}^{n-1} F_i x_i^{(k)} + F_n x_n^{(k)}$$

No segundo somatório, a 1.^a parcela $F_1 x_1^{(k+1)}$ é nula, já que $F_1 = 0$, como fecundidade de mulheres de 0 a 5 anos. Por outro lado, para $i > 1$, podemos substituir $x_i^{(k+1)}$ por $s_{i-1} x_{i-1}^{(k)}$. Fazendo esta substituição, temos:

$$\sum_{i=1}^n F_i x_i^{(k+1)} = \sum_{i=2}^n F_i s_{i-1} x_{i-1}^{(k)} = \sum_{i=1}^{n-1} F_{i+1} s_i x_i^{(k)}.$$

A soma dos dois somatórios passa a ser:

$$\sum_{i=1}^{n-1} (F_i + s_i F_{i+1}) x_i^{(k)} + F_n x_n^{(k)},$$

a qual também pode ser escrita

$$\sum_{i=1}^n (F_i + s_i F_{i+1}) x_i^{(k)}, \quad (3)$$

se $F_{n+i} = 0$, o que de fato acontece se tomarmos n de modo que o n -ésimo grupo etário corresponda à maior idade fértil.

Substituindo (3) em (2), e levando em conta a expressão (1) dos s_i , obtemos para os nascimentos:

$$\frac{\bar{s}}{2} \sum_{i=1}^n \left(F_i + \frac{{}_5L_{5i}}{{}_5L_{5(i-1)}} F_{i+1} \right) x_i^{(k)}.$$

Por fim, para calcular os sobreviventes destes nascimentos, precisamos multiplicar o número de nascimentos pela probabilidade média de sobrevivência do grupo de 0 a 5 anos, isto é, por:

$$\frac{1}{5} \int_0^5 s(x) dx = \frac{1}{5} \int_0^5 \frac{l_x}{l_0} dx = \frac{{}_5L_0}{5l_0}.$$

Portanto,

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{i=1}^n \frac{{}_5L_0}{2l_0} \left(F_i + \frac{{}_5L_{5i}}{{}_5L_{5(i-1)}} F_{i+1} \right) x_i^{(k)},$$

de onde concluímos que:

$$f_i = \frac{{}_5L_0}{2l_0} \left(F_i + \frac{{}_5L_{5i}}{{}_5L_{5(i-1)}} F_{i+1} \right) \quad (4)$$

Em face das expressões obtidas para os s_i e os f_j , algumas grandezas calculadas na seção 4 assumem uma forma especial.

O polinômio característico da matriz de projeção é:

$$p(\lambda) = \lambda^n - \sum_{i=1}^n c_i \lambda^{n-i}$$

onde

$$c_i = f_i \cdot s_1 \cdot \dots \cdot s_{i-1} = \frac{{}_5L_0}{2l_0} \left(F_i + \frac{{}_5L_{5i}}{{}_5L_{5(i-1)}} F_{i+1} \right) \cdot \frac{{}_5L_5}{5L_0} \cdot \frac{{}_5L_{10}}{5L_5} \cdot \dots \cdot \frac{{}_5L_{5(i-1)}}{5L_{5(i-2)}}.$$

Feitas as simplificações, obtemos:

$$c_i = \frac{1}{2l_0} ({}_5L_{5(i-1)} F_i + {}_5L_{5i} F_{i+1}). \quad (5)$$

Lembrando que estamos supondo $F_{n+i} = 0$.

Também em virtude da expressão dos s_i e do teorema 6 do § 4, um autovetor relativo ao autovalor λ passa a ser:

$$\left[{}_5L_0 \frac{{}_5L_5}{\lambda} \frac{{}_5L_{10}}{\lambda^2} \cdot \dots \cdot \frac{{}_5L_{5(n-1)}}{\lambda^{n-1}} \right]^t, \quad (6)$$

Finalmente, vejamos como é fixado na prática, o tamanho da matriz de projeção. De um modo geral, estamos interessados em saber o que ocorre com todas as idades. Por isto é comum introduzir grupos quinquenais até 80 anos e um último grupo referente a “80 anos e mais”. Quando se introduz este último grupo não quinquenal, rompe-se o princípio básico da seção 2, de modo que a matriz deixa de ter a forma de uma matriz de Leslie, aparecendo um elemento não nulo na posição $n \times n$. Neste trabalho, que estuda matrizes de Leslie, nos limitaremos a grupos quinquenais, e tomaremos n de modo que o n -ésimo grupo etário seja o último em idade fértil. Assim fazendo, temos $f_n > 0$, o que garante a estabilidade (ver seção 5), e não afeta o que ocorre até a idade $5n$ (ver seção 2).

No caso brasileiro, por exemplo, o último grupo fértil, de acordo com o censo de 1970, é o de 55 – 60 anos, o que leva a uma matriz 12×12 . Na grande maioria dos casos a fecundidade dos grupos 50 – 55 e 55 – 60 é insignificante perante a dos grupos anteriores. Por isto também é muito comum na prática demográfica tomar uma matriz 10×10 , isto é, considerar como último grupo fértil o 45 – 50.

6.2 — Um exemplo no contexto brasileiro

Tomemos o caso brasileiro e, como ano 0, o ano do censo de 1970. Para efeito de um primeiro exercício, tomaremos como F_i a fecundidade expressa pelos filhos tidos no ano anterior à data do censo (sem nenhuma correção), multiplicada pela razão de masculinidade 0,489 (ver tabela 1). Esta fecundidade será chamada de “fecundidade corrente em 70”.

TABELA 1

FECUNDIDADE CORRENTE E SOBREVIVÊNCIA FEMININAS EM 1970

GRUPO ETÁRIO (i)	IDADE (anos)	FECUNDIDADE (F_i)	SOBREVIVÊNCIA $5^{L5}(i-1)$	POPULAÇÃO FEMININA $x_i^{(0)}$
1	0 – 5	0	4,36928	6 841 861
2	5 – 10	0	4,20692	6 659 536
3	10 – 15	0	4,17332	5 924 930
4	15 – 20	0,022484	4,13512	5 257 851
5	20 – 25	0,089303	4,07305	4 248 670
6	25 – 30	0,109795	3,99037	3 330 784
7	30 – 35	0,093294	3,89322	2 864 283
8	35 – 40	0,070184	3,78029	2 587 189
9	40 – 45	0,034869	3,64471	2 247 332
10	45 – 50	0,010648	3,48203	1 751 654
11	50 – 55	0,003887	3,28646	1 453 992
12	55 – 60	0,002402	3,03970	1 128 221

FONTES: IBGE — Censo Demográfico de 1970 e Tábuas Modelo Brasil-Nível 13-[9].

Por outro lado, a informação sobre filhos sobreviventes, supondo não diferenciada por sexo a mortalidade infantil, e baseada em conhecido processo de estimação (ver [8], cap. 2), autoriza a escolher como tábua de vida a de nível 13 dentre as tábuas modelo Brasil ([a]), de onde extraímos as medidas de sobrevivência (com $l_0 = 1$) constantes da tabela 1.

Daí tiramos os parâmetros s_i e f_i , que constam da tabela 2.

TABELA 2

ELEMENTOS DA MATRIZ DE PROJEÇÃO

i	s_i	f_i
1	0,962841	0
2	0,992013	0
3	0,990847	0,048670
4	0,984990	0,241286
5	0,979701	0,430088
6	0,975654	0,438714
7	0,970993	0,352693
8	0,964135	0,226771
9	0,955365	0,098400
10	0,943834	0,031277
11	0,924916	0,013345
12	—	0,005248

A matriz de projeção L é então construída com os f_i na primeira linha e os s_i na subdiagonal.

O autovalor principal de L é $\lambda_1 = 1,0939$, o que significa que a taxa geométrica anual de crescimento da população feminina com menos de 60 anos tende a se estabilizar em torno de $\sqrt[5]{\lambda_1} - 1$, isto é, 1,81%, que é a taxa intrínseca.

De fato, a aplicação sucessiva da matriz L ao vetor inicial de população $x^{(0)}$ (ver tabela 1) conduz a taxas geométricas de crescimento anuais em cada quinquênio iguais a, sucessivamente, (em %):

1,96 2,10 2,20 2,14 2,04 1,87 1,80 1,76 1,77 1,76
1,82 1,87 1,82 1,80 1,79 1,80 1,82 1,82 1,82 1,81,

e, a partir daí não mais se afastando do valor 1,81, atingido, pois, em 20 períodos de projeção, isto é, 100 anos.

O autovetor principal, normalizado de modo que suas componentes somem 100, fornece a estrutura estável:

$$v_i = [14,40 \ 12,67 \ 11,49 \ 10,41 \ 9,37 \ 8,40 \ 7,49 \ 6,65 \ 5,86 \ 5,12 \ 4,41 \ 3,73]^t.$$

A estrutura estável é atingida em 24 períodos, isto é, 120 anos, a partir da estrutura inicial:

[15,45 15,03 13,38 11,87 9,59 7,52 6,47 5,84 5,07 3,95 3,28 2,55]^t,
embora já em 45 anos a estrutura etária já se aproxima bastante do valor estável, sendo:

[14,40 12,52 11,28 10,33 9,55 8,69 7,60 6,39 5,25 5,09 4,86 4,03]^t,
e variando muito pouco a partir daí.

Uma simulação interessante a respeito desta matriz é a seguinte: se a fecundidade que foi tomada como vigente em 1970 (a saber, recordamos, a que corresponde à pergunta sobre os filhos tidos nos doze meses anteriores ao censo) fosse reduzida para 58,6% do seu valor, e a mortalidade continuasse a mesma que adotamos (a saber, a dada pelo nível 13 das tábuas-modelo Brasil), o autovalor principal assumiria o valor 1,0001, isto é, muito próximo de 1. Conseqüentemente, a taxa geométrica anual intrínseca se reduziria para quase 0, obtendo-se, pois, praticamente, uma população estável estacionária.

A estrutura etária estável associada, quase retangular, seria:

[9,49 9,13 9,06 8,98 8,84 8,66 8,45 8,20 7,91 7,55 7,13 6,59]^t,
corresponde aproximadamente à estrutura etária definida pela tábua de vida adotada (ver fórmula (6)).

Esta estabilidade seria atingida em 140 anos, quando então a população feminina de 0 a 60 anos, que em 1970 era de 44 296 224, teria alcançado apenas cerca de 58 milhões, valor em torno do qual já estaria girando desde o ano de 2000.

Outra especulação pertinente seria a seguinte: supondo que o padrão de fecundidade permanecesse invariavelmente igual ao adotado, que nível de fecundidade, mantido constante durante a década de 70 (e fixada a já citada mortalidade), reproduziria a população efetivamente encontrada em 1980?

Como estamos trabalhando só com a população feminina de 0 + 60 anos e no momento em que escrevemos ainda não é conhecida a estrutura etária em 80, vamos, para efeito de exercício, supor que se tenha mantido, de 70 para 80, a proporção de mulheres de 0 + 60 anos na população (residente) total, que era de 47,56% em 70. Aplicando este percentual à população total residente em 80, em número de 119 061 470, obtemos 56 624 839 como uma estimativa da população feminina de 0 + 60 anos em 80. Esta cifra é atingida, aproximadamente (na realidade, 56 625 440), quando a fecundidade original for multiplicada pelo fator 1,17.

Isto sugere que seja considerada como uma especie de “fecundidade média” da década 70-80 a que se obtém multiplicando por 1,17 a fecundidade corrente em 70 (ver tabela 3).

TABELA 3

FECUNDIDADE DA DÉCADA 70-80

IDADE (anos)	FECUNDIDADE
15 - 20	0,054
20 - 25	0,214
25 - 30	0,263
30 - 35	0,223
35 - 40	0,168
40 - 45	0,083
45 - 50	0,025

A taxa de fecundidade total (TFT) correspondente é 5,151.

Desde Brass (10), a fecundidade corrente (isto é, dada pela pergunta referente aos últimos doze meses) é considerada subestimada e, por isto, corrigida por um fator maior que 1 (ver [11]). Em (12) é usado, para o Brasil-70, o fator 1,323, conduzindo a uma TFT de 5,825, enquanto em (11) é usado o fator 1,319, obtendo 5,807 para a TFT. Considerando 5,807 como valor inicial e 5,151 como valor médio da TFT na década, uma grosseira projeção linear sugere que a taxa de fecundidade total em 1980 não deva estar muito longe de 4,503.

De qualquer forma, estas considerações, aliadas aos resultados que estão por vir do censo de 1980, podem servir para testar a validade da correção de Brass. Por exemplo, uma TFT corrente em 1980 sensivelmente superior a 4,5 pode indicar que a correção usual de cerca de 30% é exagerada.

Relembremos, a propósito, que o declínio da fecundidade em 70-80 é um fato confirmado por outras fontes (ver [13]), de modo que uma correção de mais de 17% já parece confirmada, o que vem em favor de Brass, pelo menos qualitativamente.

6.3 — Estimativa para o autovalor principal

O polinômio característico da matriz de projeção é

$$p(\lambda) = \lambda^n - \sum_{i=1}^n c_i \lambda^{n-i}, \quad \text{onde } c_i = f_i s_1 \dots s_{i-1} \quad (\text{ver §4}).$$

Se, numa certa época k as mulheres do i -ésimo grupo etário são em número de $x_i^{(k)}$, a própria definição de f_i implica que estas mulheres contribuirão com $f_i x_i^{(k)}$ filhas que sobreviverão até a época $(k+1)$. Lembrando que o período de projeção é igual à amplitude do grupo etário, vemos que f_i é o número médio de filhas sobreviventes que uma mulher tem enquanto está no i -ésimo grupo etário.

Por outro lado, o produto $s_1 \dots s_{i-1}$ é a probabilidade de que uma recém-nascida atinja o i -ésimo grupo etário. Portanto c_i é o número pro-

vável de filhos que uma mulher recém-nascida terá quando alcançar o i -ésimo grupo etário e, conseqüentemente, $R_0 = \sum_{i=1}^n c_i$ é o número médio de filhos que uma mulher terá ao longo de sua vida, supondo que vigorem as condições de fecundidade e mortalidade dadas pelas f_i e s_i , os quais estamos supondo constantes no tempo. Por este motivo R_0 é chamado *taxa líquida de reprodução*.

Quando f_i e s_i são expressos através das fórmulas (1) e (4) de 6.1, a taxa líquida de reprodução tem a seguinte expressão:

$$R_0 = \frac{1}{l_0} \left(\frac{1}{2} {}_5L_{10}F_3 + {}_5L_{15}F_4 + \dots + {}_5L_{50}F_{11} + \frac{1}{2} {}_5L_{55}F_{12} \right) \quad (1)$$

onde estamos supondo $F_i = 0$, para $i < 3$ ou > 12 .

Como $p(1) = 1 - R_0$, então $R_0 = 1$ é equivalente a $\lambda_1 = 1$ (lembramos que λ_1 é a única raiz positiva de $p(x) = 0$). Por outro lado $\lambda_1 = 1$ significa uma taxa geométrica intrínseca nula. Logo, a população é eventualmente estacionária se e só se a taxa líquida de reprodução for igual a 1.

A igualdade $\lambda_1^n - \sum_{i=1}^n c_i \lambda_1^{n-i} = 0$, que equivale a $\sum_{i=1}^n \frac{c_i}{\lambda_1^i} = 1$, tem também como conseqüência o fato de que, se $\lambda_1 > 1$, então para cada i , $\frac{1}{\lambda_1^i} < 1$ e, portanto, $R_0 = \sum_{i=1}^n c_i > 1$. Analogamente, se deduz que $\lambda_1 < 1$ acarreta $R_0 < 1$. Lembrando que $\lambda_1 - 1$ é a taxa geométrica intrínseca (por T anos), conclui-se que a população é:

- eventualmente crescente se e só se $R_0 > 1$;
- eventualmente estacionária se e só se $R_0 = 1$;
- eventualmente decrescente se e só se $R_0 < 1$.

Anderson (15) utiliza a taxa líquida de reprodução para obter uma cota inferior e uma estimativa para o autovalor principal λ_1 .

Pondo $w_i = \frac{c_i}{R_0}$ e $x_i = \lambda_1^{n-i}$, a igualdade

$$\lambda_1^n - \sum_{i=1}^n c_i \lambda_1^{n-i} = 0,$$

após ser dividida por R_0 , se escreve:

$$\frac{\lambda_1^n}{R_0} = \sum_{i=1}^n w_i x_i.$$

Mas, como $w_1 + \dots + w_n = 1$, uma clássica desigualdade (ver [16]) impõe que

$$\sum_{i=1}^n w_i x_i \geq \prod_{i=1}^n x_i^{w_i},$$

a igualdade só ocorrendo se $x_1 = \dots = x_n$.

$$\text{Logo, } \frac{\lambda_1^n}{R_0^n} \geq \prod_{i=1}^n (\lambda_1^{n-i})^{c_i} = \lambda_1 \left(n \frac{\sum_{i=1}^n c_i}{R_0} - \frac{\sum_{i=1}^n i c_i}{R_0} \right) = \lambda_1^n - \frac{R_1}{R_0},$$

onde $R_1 = \sum_{i=1}^n i c_i$. Daí tiramos:

$$\lambda_1 \geq R_0^{R_0/R_1}. \quad (2)$$

A igualdade só ocorreria se $\lambda_1 = \lambda_1^2 = \dots = \lambda_1^n$, isto é, se $\lambda_1 = 1$, caso em que, como já vimos, R_0 seria também 1. Fora pois deste caso, temos:

$$\lambda_1 > R_0^{R_0/R_1}.$$

Podemos também interpretar demograficamente R_1 . O quociente

$$\frac{R_1}{R_0} = \frac{\sum_{i=1}^n i c_i}{\sum_{i=1}^n c_i}, \text{ por causa da interpretação aludida dos } c_i, \text{ é um valor}$$

médio do índice que designa o grupo etário, ponderado pela fecundidade líquida. Como cada grupo tem largura T anos, se considerar cada um deles representado pela sua idade média, então ao i-ésimo grupo corresponderá a idade $\left(i - \frac{1}{2}\right) T$. Conseqüentemente, o número

$$\left(\frac{R_1}{R_0} - \frac{1}{2}\right) T \quad (3)$$

representará a idade média de fecundidade (feminina).

No caso brasileiro, estudado em (5), para uma matriz 12 x 12, obtemos os seguintes valores:

$$\text{Taxa líquida de fecundidade} = R_0 = 1,7076$$

$$R_1 = 10,3732$$

$$\text{Idade média de fecundidade} = \left(\frac{R_1}{R_0} - \frac{1}{2}\right) \cdot 5 = 27,87$$

$$R_0^{R_0/R_1} = 1,0921.$$

Devemos observar que se a fecundidade corrente em 1970 for multiplicada por 1,319 (ver [11]), R_0 passa a valer 2,252, enquanto a idade média de fecundidade permanece a mesma.

Notamos neste exemplo que a cota inferior de Anderson $\lambda^* = R_0^{R_1/R_0}$ é, na realidade, uma excelente aproximação para o autovvalor principal $\lambda_1 = 1,0939$.

De fato, o próprio Anderson (15) já observava que isto não é uma coincidência, quando λ_t está “próximo” de 1.

No nosso caso, já sabemos que $\lambda_t = (1 + r)^t$, onde r é a taxa geométrica anual intrínseca de crescimento. Pelo binômio de Newton vemos que

$$\lambda_t = 1 + rT + O(r^2), \quad (4)$$

onde o símbolo $f(\varepsilon) = O(g(\varepsilon))$ significa que $\frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)}$ permanece limitado quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Em populações humanas nacionais não se conhecem historicamente taxas anuais de crescimento superiores a 0,04. Portanto, se o período T de projeção não for grande (em geral não excede a 10 anos), podemos dizer que λ_t está “próximo” de 1, no sentido preciso da fórmula (4).

A justificativa deste fato é a seguinte:

Pondo $\lambda_t = 1 + \varepsilon$ na fórmula $\lambda_t^n = \sum_{i=1}^n c_i \lambda_t^{n-i}$, e desenvolvendo em potências de ε , obtemos:

$$1 + n\varepsilon + O(\varepsilon^2) = R_0 + \varepsilon(nR_0 - R_1) + O(\varepsilon^2),$$

de onde concluímos que

$$R_0 = 1 + \frac{\varepsilon}{1 + n\varepsilon} R_1 + O(\varepsilon^2).$$

Substituindo este valor, obtemos, sucessivamente:

$$\begin{aligned} \lambda_t - \lambda^* &= 1 + \varepsilon - \left[1 + \frac{\varepsilon}{1 + n\varepsilon} R_1 + O(\varepsilon^2) \right]^{\frac{1}{R_1} + \frac{\varepsilon}{1 + n\varepsilon} + O(\varepsilon^2)} \\ &= 1 + \varepsilon - \left(1 + \left[\frac{1}{R_1} + \frac{\varepsilon}{1 + n\varepsilon} + O(\varepsilon^2) \right] \left[\frac{\varepsilon}{1 + n\varepsilon} R_1 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + O(\varepsilon^2) \right] + O(\varepsilon^2) \right) \\ &= 1 + \varepsilon - 1 - \frac{\varepsilon}{1 + n\varepsilon} + \frac{\varepsilon^2}{(1 + n\varepsilon)^2} R_1 + O(\varepsilon^2) \\ &= \frac{n\varepsilon^2}{1 + n\varepsilon} + O(\varepsilon^2) \\ &= O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Isto é, λ^* é uma aproximação de λ_t da ordem de ε^2 ; no nosso caso, da ordem de r^2 . Como já vimos que r^2 na prática não excede 0,002, isto

confirma que λ^* é uma boa aproximação de λ_1 e seu cálculo não envolve a resolução da equação característica, uma equação algébrica de grau elevado.

7 — EXEMPLOS ILUSTRATIVOS

7.1 — Dois exemplos 3×3

Para ilustrar as propriedades das matrizes de projeção descritas nos parágrafos 4 e 5, o exemplo visto em 6.2 não é conveniente, já que se trata de uma matriz 12×12 , com 12 autovalores, alguns dos quais possivelmente complexos, com 12 matrizes E_i 12×12 , e assim por diante.

Vamos então tomar um exemplo 3×3 . Uma primeira possibilidade seria considerar a população feminina com idade até 45 anos e dividi-la em 3 faixas de 15 anos, isto é, o período de projeção seria de 15 anos. Por um raciocínio análogo ao que se fez em 6.1 com o período de 5 anos, obtemos a matriz:

$$L = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \end{bmatrix},$$

onde, agora: $f_i = \frac{{}_{15}L_0}{2l_0} \left(F_i + \frac{{}_{15}L_{15i}}{{}_{15}L_{15(i-1)}} F_{i+1} \right)$, para $i = 1, 2, 3$, com F_1, F_2, F_3 designando a fecundidade dos grupos de idade $0 \text{ — } 15$, $15 \text{ — } 30$ e $30 \text{ — } 45$, respectivamente. Analogamente, $s_i = \frac{{}_{15}L_{15i}}{{}_{15}L_{15(i-1)}}$.

Utilizando os mesmos dados acima mencionados, extraídos do censo brasileiro de 1970, obtemos:

$$f_1 = 0,8353 \quad f_2 = 1,7031 \quad f_3 = 0,9648 \quad s_1 = 0,9568 \quad s_2 = 0,9278.$$

Para esta matriz, obtemos um autovalor principal $\lambda_1 = 1,9178$ e um autovetor principal $[1 \quad 0,4989 \quad 0,2414]^t$, o que significa que a estrutura etária estável é $[57,46 \quad 28,67 \quad 13,87]^t$, enquanto a taxa geométrica anual intrínseca é $\sqrt[15]{\lambda_1} - 1 = 4,44\%$ (mais adiante comentaremos este valor).

Para se ter uma idéia da velocidade com que as características estáveis são atingidas, resolvemos aplicar a matriz L , não ao vetor inicial correspondente à população feminina brasileira de $0 \text{ — } 45$ anos em 1970, mas a um vetor inicial fictício $x^{(0)} = [1\ 000 \quad 2\ 000 \quad 3\ 000]$, correspondente a uma estimativa etária praticamente oposta à estável.

Obtemos então a evolução dada na tabela 1.

TABELA 1

EVOLUÇÃO DA POPULAÇÃO FICTÍCIA CITADA NO TEXTO

PERÍODOS DE PROJEÇÃO (15 anos)	DISTRIBUIÇÃO ETÁRIA			POPULAÇÃO TOTAL	DISTRIBUIÇÃO ETÁRIA PERCENTUAL			TAXA GEO- MÉTRICA DE CRESCI- MENTO ANUAL (%)
					(%)			
0	1 000	2 000	3 000	6 000	16,67	33,33	50,00	—
1	7 153	956	1 855	9 948	71,73	9,62	18,65	3,42
2	9 380	6 827	887	17 095	54,87	39,94	5,19	3,68
3	20 320	8 975	6 334	35 629	57,03	25,19	17,78	5,02
4	38 370	19 442	8 327	66 140	58,01	29,40	12,59	4,21
5	73 197	33 713	18 038	127 948	57,21	28,69	14,10	4,50
6	141 071	70 035	34 062	245 168	57,54	28,57	13,89	4,43
7	269 976	134 976	64 978	469 931	57,45	28,72	13,83	4,43
8	518 081	258 313	125 231	901 626	57,46	28,65	13,89	4,44
9	993 510	495 700	239 663	1 728 873	57,47	28,67	13,86	4,44
10	1 905 332	950 590	459 910	3 315 832	57,46	28,67	13,87	4,44

É interessante notar como muito rapidamente, isto é, em cerca de 45 anos, a estrutura etária se acomoda já não muito longe da estabilidade. Ao cabo de 90 anos a estabilidade já está quase atingida, e, a partir de 150 anos, a população feminina de 0 — 45 anos cresce geometricamente à razão de 4,44% ao ano com uma estrutura etária fixa.

Para ilustrar o teorema central de 5.1, bem como todos os elementos que intervêm na sua demonstração, vamos apresentar a decomposição espectral da matriz L .

Seus autovalores são:

$$\lambda_1 = 1,9178 \quad \lambda_2 = -0,5413 + 0,3919i \quad \lambda_3 = -0,5413 - 0,3919i.$$

Observemos que λ_2 e λ_3 são complexos conjugados.

Os autovetores correspondentes são:

$$\begin{aligned} v_1 &= [1 \quad 0,4989 \quad 0,2414]^t \\ v_2 &= [1 \quad -1,1597 - 0,8397i \quad 0,6204 + 1,8886i]^t \\ v_3 &= [1 \quad -1,1597 + 0,8397i \quad 0,6204 - 1,8886i]^t \end{aligned}$$

As matrizes E_1, E_2, E_3 (ver § 5.1) são:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0,5932 & 0,6711 & 0,2984 \\ 0,2959 & 0,3348 & 0,1489 \\ 0,1432 & 0,1620 & 0,0720 \end{bmatrix}$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0,2035 + 0,1047i & -0,3355 - 0,0673i & -0,1492 - 0,2947i \\ -0,1479 - 0,2923i & 0,3326 + 0,3599i & -0,0744 + 0,4671i \\ -0,0716 + 0,4492i & -0,0810 - 0,6755i & 0,4640 - 0,4646i \end{bmatrix}$$

Os elementos de E_3 são os conjugados dos respectivos elementos de E_2 .

Nota-se que as colunas de E_1 são múltiplas de v_1 , as colunas de E_2 são múltiplas de v_2 e as colunas de E_3 são múltiplas de v_3 .

O leitor paciente poderá verificar que

$$E_1 E_2 = E_2 E_1 = E_1 E_3 = E_3 E_1 = E_2 E_3 = E_3 E_2 = 0,$$

que

$$E_1^2 = E_1, E_2^2 = E_2, E_3^2 = E_3,$$

e que

$$\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3 = L.$$

Embora este exemplo servisse perfeitamente para os propósitos didáticos desta seção, ele não é bom demograficamente por sofrer o efeito de violenta agregação. Para ver isto basta citar que esta matriz acarreta uma taxa geométrica de crescimento anual que começa em 3,43% nos primeiros quinze anos e que vai se estabilizar em 4,44% no final de 8 períodos, isto é, 120 anos. Isto em contraste com a taxa estável de 1,81% encontrada no parágrafo anterior, quando foram usados 12 grupos quinquênais.

Para obter com os dados quinquênais uma matriz 3 x 3 vamos então utilizar um artifício devido a Keyfitz (6).

Tomemos primeiro uma matriz 9 x 9 correspondente a grupos quinquênais até 45 anos, sempre usando os dados mencionados em 6.2. Para isto, atribuímos às mulheres do grupo 40 + 45 o pequeno número de filhas tidas pelas do grupo 45 + 50.

Obtemos então a matriz L cuja primeira linha (os f_i) é:

$$0 \quad 0 \quad 0,0487 \quad 0,2413 \quad 0,4301 \quad 0,4368 \quad 0,3527 \quad 0,2132 \quad 0,0620$$

e cuja subdiagonal (os s_i) é:

$$0,9628 \quad 0,9920 \quad 0,9908 \quad 0,9850 \quad 0,9797 \quad 0,9757 \quad 0,9710 \quad 0,9641.$$

Se $\underline{x}^{(0)} = [x_1^{(0)}, \dots, x_9^{(0)}]^t$ é um vetor inicial de população, então, após 15 anos, isto é, 3 períodos de 5 anos, ele será transformado em $\underline{x}^{(3)} = \underline{L}^3 \underline{x}^{(0)}$.

Esta equação se escreve, por extenso:

$$\begin{array}{c}
 \underline{x}_1^{(3)} \\
 \underline{x}_2^{(3)} \\
 \underline{x}_3^{(3)} \\
 \dots \\
 \underline{x}_4^{(3)} \\
 \underline{x}_5^{(3)} \\
 \underline{x}_6^{(3)} \\
 \dots \\
 \underline{x}_7^{(3)} \\
 \underline{x}_8^{(3)} \\
 \underline{x}_9^{(3)}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{ccc|ccc|cc}
 0,0465 & 0,2372 & 0,4198 & 0,4215 & 0,3371 & 0,2020 & 0,0580 & 0 & 0 \\
 0 & 0,0465 & 0,2302 & 0,4079 & 0,4120 & 0,3313 & 0,1993 & 0,0576 & 0 \\
 0 & 0 & 0,0465 & 0,2305 & 0,4108 & 0,4172 & 0,3369 & 0,2036 & 0,0592 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0,9463 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0,9681 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0,9561 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 0,9416 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0,9282 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,9134 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right]
 \begin{array}{c}
 \underline{x}_1^{(0)} \\
 \underline{x}_2^{(0)} \\
 \underline{x}_3^{(0)} \\
 \dots \\
 \underline{x}_4^{(0)} \\
 \underline{x}_5^{(0)} \\
 \underline{x}_6^{(0)} \\
 \dots \\
 \underline{x}_7^{(0)} \\
 \underline{x}_8^{(0)} \\
 \underline{x}_9^{(0)}
 \end{array}
 \end{array}$$

Por outro lado, a matriz L que procuramos deve satisfazer a $x^{(1)} = Lx^{(0)}$, isto é,

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{bmatrix},$$

onde

$$\begin{array}{l}
 x_1^{(1)} = \underline{x}_1^{(3)} + \underline{x}_2^{(3)} + \underline{x}_3^{(3)} \quad x_1^{(0)} = \underline{x}_1^{(0)} + \underline{x}_2^{(0)} + \underline{x}_3^{(0)} \\
 x_2^{(1)} = \underline{x}_4^{(3)} + \underline{x}_5^{(3)} + \underline{x}_6^{(3)} \quad \text{e} \quad x_2^{(0)} = \underline{x}_4^{(0)} + \underline{x}_5^{(0)} + \underline{x}_6^{(0)} \\
 x_3^{(1)} = \underline{x}_7^{(3)} + \underline{x}_8^{(3)} + \underline{x}_9^{(3)} \quad x_3^{(0)} = \underline{x}_7^{(0)} + \underline{x}_8^{(0)} + \underline{x}_9^{(0)}
 \end{array} \tag{1}$$

estes dois sistemas traduzidos, obviamente, a agregação de cada seqüência de 3 grupos etários quinquenais no correspondente grupo de 15 anos.

A efetuação dos produtos matriciais indica que:

$$\begin{array}{l}
 \underline{x}_4^{(3)} = 0,9463 \underline{x}_1^{(0)} \quad \underline{x}_5^{(3)} = 0,9681 \underline{x}_2^{(0)} \quad \underline{x}_6^{(3)} = 0,9561 \underline{x}_3^{(0)} \\
 \underline{x}_7^{(3)} = 0,9416 \underline{x}_4^{(0)} \quad \underline{x}_8^{(3)} = 0,9282 \underline{x}_5^{(0)} \quad \underline{x}_9^{(3)} = 0,9134 \underline{x}_6^{(0)} \\
 x_2^{(1)} = s_1 x_1^{(0)} \quad x_3^{(1)} = s_2 x_2^{(0)}
 \end{array}$$

Levando em conta as equações dos sistemas (1) e fazendo as substituições, obtemos:

$$(x_1^{(0)} + x_2^{(0)} + x_3^{(0)}) s_1 = 0,9463 x_1^{(0)} + 0,9681 x_2^{(0)} + 0,9561 x_3^{(0)} \quad (2)$$

$$(x_4^{(0)} + x_5^{(0)} + x_6^{(0)}) s_2 = 0,9416 x_4^{(0)} + 0,9282 x_5^{(0)} + 0,9134 x_6^{(0)} \quad (3)$$

Observando-se o particionamento da matriz L apresentado anteriormente, nota-se que, fixo um vetor $\underline{x}^{(0)}$, os termos s_1 e s_2 , que ocupam na matriz L , respectivamente, as posições (2.1) e (3.2), dependem apenas dos correspondentes blocos (2.1) e (3.2) do particionamento de L .

Isto segue que um fato análogo possa ocorrer com f_1, f_2, f_3 . Vejamos que realmente isto ocorre.

A equação $x_i^{(1)} = f_1 x_i^{(0)} + f_2 x_2^{(0)} + f_3 x_3^{(0)}$ traduz o fato de que as mulheres que, após o primeiro período de 15 anos, estão no grupo de idade $0 \vdash 15$, isto é, as sobreviventes dos nascimentos ocorridos nos últimos 15 anos, provêm de três grupos originais: as que (no ano 0) tinham $0 \vdash 15$ anos, as que tinham $15 \vdash 30$ anos e as que tinham $30 \vdash 45$ anos.

Por outro lado, desenvolvendo cada parcela da soma

$$x_i^{(1)} = x_i^{(s)} + \underline{x}_2^{(s)} + \underline{x}_3^{(s)}$$

de acordo com o produto matricial $\underline{x}^{(s)} = \underline{L}^s \underline{x}^{(0)}$, temos que (onde a_{ij} é o termo geral de \underline{L}^s):

$$\begin{aligned} & f_1 x_i^{(0)} + f_2 x_2^{(0)} + f_3 x_3^{(0)} \\ = & a_{11} x_1^{(0)} + a_{12} x_2^{(0)} + a_{13} x_3^{(0)} + a_{14} x_4^{(0)} + a_{15} x_5^{(0)} + a_{16} x_6^{(0)} + a_{17} x_7^{(0)} + a_{18} x_8^{(0)} + a_{19} x_9^{(0)} \\ & + a_{21} x_1^{(0)} + a_{22} x_2^{(0)} + a_{23} x_3^{(0)} + a_{24} x_4^{(0)} + a_{25} x_5^{(0)} + a_{26} x_6^{(0)} + a_{27} x_7^{(0)} + a_{28} x_8^{(0)} + a_{29} x_9^{(0)} \\ & + a_{31} x_1^{(0)} + a_{32} x_2^{(0)} + a_{33} x_3^{(0)} + a_{34} x_4^{(0)} + a_{35} x_5^{(0)} + a_{36} x_6^{(0)} + a_{37} x_7^{(0)} + a_{38} x_8^{(0)} + a_{39} x_9^{(0)}. \end{aligned}$$

O termo $f_1 x_i^{(0)}$, por exemplo, que provém do grupo original $0 \vdash 15$, só pode depender de termos que envolvem $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}$ e $x_3^{(0)}$, que se referem aos três primeiros grupos quinquenais originais. Observações análogas valem para $f_2 x_2^{(0)}$ e $f_3 x_3^{(0)}$.

Temos pois a igualdade

$$f_1 x_i^{(0)} = \sum_{i=1}^3 a_{i1} x_i^{(0)} + \sum_{i=1}^3 a_{i2} x_2^{(0)} + \sum_{i=1}^3 a_{i3} x_3^{(0)}.$$

Levando em conta o sistema (1), fica ainda:

$$\begin{aligned} & (x_1^{(0)} + x_2^{(0)} + x_3^{(0)}) f_1 = \\ = & 0,0465 x_1^{(0)} + (0,2372 + 0,0465 x_2^{(0)}) + (0,4198 + 0,2302 + 0,0465) x_3^{(0)} \quad (4) \end{aligned}$$

Analogamente, obteríamos:

$$\begin{aligned} & (\underline{x}_4^{(0)} + \underline{x}_5^{(0)} + \underline{x}_6^{(0)})f_2 = \\ & = (0,4215 + 0,4079 + 0,2305) \underline{x}_4^{(0)} + (0,3371 + 0,4120 + 0,4108) \underline{x}_5^{(0)} + \\ & \quad + (0,2020 + 0,3313 + 0,4172) \underline{x}_6^{(0)} \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\underline{x}_7^{(0)} + \underline{x}_8^{(0)} + \underline{x}_9^{(0)})f_3 = \\ & = (0,0580 + 0,1993 + 0,3369) \underline{x}_7^{(0)} + (0,0576 + 0,2036) \underline{x}_8^{(0)} + 0,0592 \underline{x}_9^{(0)} \quad (6) \end{aligned}$$

As equações (2), (3), (4), (5) e (6) determinariam s_1, s_2, f_1, f_2, f_3 , dado um vetor $\underline{x}^{(0)}$ correspondente a uma distribuição etária inicial (nota-se que estas equações não se alteram se substituirmos $\underline{x}^{(0)}$ por um múltiplo seu). Para tornar a determinação dos coeficientes s_i e f_j independente de uma escolha arbitrária de um vetor inicial, vamos escolher como $\underline{x}^{(0)}$ um vetor estável para a matriz \underline{L} , isto é:

$$\underline{x}^{(0)} = [1 \quad 0,8857 \quad 0,8083 \quad 0,7368 \quad 0,6676 \quad 0,6017 \quad 0,5401 \quad 0,4825 \quad 0,4279]^t.$$

Com esta escolha de $\underline{x}^{(0)}$, determinam-se então:

$$f_1 = 0,3195 \quad f_2 = 1,0604 \quad f_3 = 0,3256 \quad s_1 = 0,9564 \quad s_2 = 0,9287.$$

$$\text{A matriz } L = \begin{bmatrix} 0,3195 & 1,0604 & 0,3256 \\ 0,9564 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9287 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{daí resultante}$$

produz resultados demograficamente muito superiores à primeira matriz 3 x 3 anteriormente apresentada.

Seu autovalor principal é $\lambda_1 = 1,2844$, o qual acarreta uma taxa geométrica anual intrínseca de 1,68%, bem mais de acordo com a de 1,81% obtida com a matriz 10 x 10, do que a de 4,44%, que decorria da outra matriz 3 x 3. O motivo é claro: a primeira matriz utilizava dados quinquenais, obtidos por agregação de quinquenais. A estrutura etária estável é $[43,80 \quad 32,62 \quad 23,58]^t$, dado pelo autovetor principal.

Os outros autovalores agora são reais: $\lambda_2 = -0,3951$ e $\lambda_3 = -0,5698$. Os autovetores v_1, v_2, v_3 são:

$$\begin{aligned} v_1 &= [1 \quad 0,7446 \quad 0,5384] \\ v_2 &= [1 \quad -2,4207 \quad 5,6899] \\ v_3 &= [1 \quad -1,6785 \quad 2,7358] \end{aligned}$$

As componentes espectrais da matriz L são:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0,5299 & 0,5346 & 0,1343 \\ 0,3945 & 0,3981 & 0,1000 \\ 0,2853 & 0,2878 & 0,0723 \end{bmatrix}$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} -0,5306 & 0,3985 & 0,4388 \\ 1,2888 & -0,9612 & -1,0612 \\ -3,0269 & 2,2627 & 2,4950 \end{bmatrix}$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1,0016 & -0,9323 & -0,5729 \\ -1,6828 & 1,5638 & 0,9613 \\ 2,7419 & -2,5501 & -1,5670 \end{bmatrix}$$

Novamente, é instrutivo verificar as propriedades tais como: $E_1 E_2 = 0$, $E_i^2 = E_i$, etc, e $\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3 = L$.

7.2 — Sobre o cálculo das matrizes E_i

As componentes espectrais E_i surgiram em 5.1 durante uma demonstração que nada mais é do que uma prova clássica do teorema espectral adaptada *ad hoc*. Apesar de a demonstração aí dada ser construtiva, ela exigiria a resolução de n sistemas lineares $n \times n$, não sendo nem prática nem numericamente a mais indicada.

De fato, nos exemplos dados no parágrafo anterior, usamos outro método. Vamos nos ater ao caso 3×3 para ilustrar.

Lembremos que a equação básica

$$L = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3$$

e as propriedades das matrizes E_i acarretam que

$$L^k = \lambda_1^k E_1 + \lambda_2^k E_2 + \lambda_3^k E_3,$$

para qualquer k natural, e, conseqüentemente:

$$\left(\frac{L}{\lambda_1}\right)^k = E_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k E_2 + \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^k E_3.$$

O fato então de λ_1 ser dominante ($\lambda_1 > |\lambda_2|$ e $\lambda_1 > |\lambda_3|$) implica que:

$$E_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{L}{\lambda_1}\right)^k.$$

Em geral, esta convergência é rápida. Nos dois exemplos 3×3 estudados o limite já é atingido com razoável aproximação para $k = 10$ e 16, respectivamente.

Chamando então de $A = L - \lambda_1 E_1$, temos também:

$$A^k = \lambda_2^k E_2 + \lambda_3^k E_3.$$

Se λ_2 dominar λ_3 , podemos empregar o mesmo raciocínio para determinar E_2 e, por subtração, obter E_3 . É o que faz Keyfitz (6).

Todavia, esta solução não serve para o primeiro caso tratado aqui, onde λ_2 e λ_3 são complexos conjugados e, portanto $|\lambda_2| = |\lambda_3|$.

Uma solução simples é considerar as equações matriciais, as quais

$$A = \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3$$
$$A^2 = \lambda_2^2 E_2 + \lambda_3^2 E_3,$$

as quais para cada par de elementos correspondentes de E_2 e E_3 , constituem um sistema linear 2 x 2.

No caso geral, o número de sistemas a resolver aumenta, mas a dimensão dos sistemas pode ser diminuída toda vez que houver uma dominância entre os autovalores (e há sempre pelo menos uma). Ora, é a dimensão do sistema que mais importa do ponto de vista da propagação de erros numéricos.

BIBLIOGRAFIA

- (1) BERNARDELLI, H., Population Waves, *Journal of Burma Research Society*, XXXI, 1941.
- (2) LEWIS, E. G., On the generation and growth of a population, *Sankhya*, VI, 1942.
- (3) LESLIE, P. H., On the use of matrices in certain population mathematics, *Biometrika*, XXXXIII, 1945.
- (4) LOTKA, A., *Théorie analytique des associations biologiques*, Paris: Hermann e Cie., 1939.
- (5) HOFFMAN, K., and KUNZE, R., *Linear Algebra*, Prentice-Hall, 1961.
- (6) KEYFITZ, N., *Introduction to the mathematics of population*, Addison-Wesley, 1968.
- (7) FORT, Tomlison, *Finite Differences and Difference Equations in the Real Domain*.
- (8) ONU, *Manual IV, Métodos de estimação de medidas demográficas básicas a partir de informações incompletas*, IBGE, 1978, Rio de Janeiro.
- (9) FRIAS, L. A. M., e RODRIGUES, P., *Brasil: Tábuas Modelo de Mortalidade e populações estáveis*, 1980, ABEP.
- (10) BRASS, W., et alii, *The Demography of Tropical Africa*.

- (11) CÂRNEIRO, J. P. Q., Sobre o método da razão P/F de Brass para estimativa da fecundidade, *Boletim Demográfico* (a ser publicado).
- (12) COSTA, M. A., *Componentes do Crescimento demográfico urbano, rural e total entre 1960/70.*
- (13) LEITE, V. M., *Níveis e tendências da mortalidade e da fecundidade no Brasil a partir de 1940, 1980, ABEP.*
- (14) FUNDAÇÃO INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA — *Censo Demográfico 1970, Brasil.*
- (15) ANDERSON, D. H., The application of a classical inequality to population mathematics, *American Mathematical Monthly*, 1979, p. 294-296.
- (16) KITCHEN, *Calculus of one variable*, 1968, Addison-Wesley. . . .

Bibliografia

PUBLICAÇÕES DE INTERESSE PARA A ESTATÍSTICA EDITADAS PELO IBGE NO PERÍODO DE ABRIL A JUNHO DE 1981 *

- Armazenagem a seco: uma avaliação da capacidade disponível a nível mesorregional.* Rio de Janeiro, 1981. 52 p., mapas, tab. (IBGE. Estudos e pesquisas, 6)
- ARMAZENAGEM E ESTOCAGEM A SECO E A FRIO — 1976-1977.** Rio de Janeiro, v. 2, 1981, t. 1: Região Norte.
- . t. 3: Pernambuco, Alagoas, Sergipe, Bahia.
- . t. 4: Minas Gerais.
- Atividade de simulação na área econômico-demográfica no IBGE.* Rio de Janeiro, 1979. 87 p., gráf., tab. (IBGE. Estudos e pesquisas 3)
- CADASTRO DOS ESTABELECIMENTOS DE SAÚDE: assistência médico-sanitária — 1976.** Rio de Janeiro, v. 1, 1981.
- Censo demográfico de 1980; resultados preliminares.* Rio de Janeiro, 1980, 79 p., tab. (Recenseamento Geral do Brasil 1980, 9)
- ESTATÍSTICAS DA SAÚDE: assistência médico-sanitária — 1976.** Rio de Janeiro, v. 1, 1981.
- ESTATÍSTICAS DO REGISTRO CIVIL — 1976-1977.** Rio de Janeiro, v. 3-4, 1980.
- INDICADORES CONJUNTURAIS DA INDÚSTRIA — 1981; produtos selecionados (relativos de produção física); produtos censitários (produção física)** Rio de Janeiro, 1981.
- Indicadores mesorregionais; características demográficas e sócio-econômicas.* Rio de Janeiro, 1979. 440 p., tab.
- Indicadores sociais para áreas urbanas / por / Lucia Elena G. de Oliveira, Rosa Maria Porcaro, Rosa Maria Massena.* Rio de Janeiro, 1977. 162 p., tab.
- Indicadores sociais: tabelas selecionadas 1979.* Rio de Janeiro, 1979. 146 p., tab.
- LEVANTAMENTO SISTEMÁTICO DA PRODUÇÃO AGRÍCOLA —**

* Preparado na Divisão de Informações Correntes do Departamento de Informação da Biblioteca Central do IBGE pela bibliotecária Isis Soares da Silva.

- 1981; pesquisa mensal de previsão e acompanhamento das safras agrícolas no ano civil. Rio de Janeiro, jun. 1981.
- Matriz de relações interindustriais: versão preliminar restrita às indústrias de transformação e extrativa mineral, Brasil — 1970.* Rio de Janeiro, 1976. 140 p.
- Matriz de relações intersetoriais: Brasil 1970.* Rio de Janeiro, 1979. 184 p., tab.
- ; versão final. 2.^a ed. rev., amp. Rio de Janeiro, 1979. 266 p., tab.
- MEIOS DE HOSPEDAGEM — 1978.** Rio de Janeiro, 1981.
- Métodos para preparar projeções de população por sexo e idade; Manual III — ONU.* Rio de Janeiro, 1978. 165 p., gráf., tab.
- Perfil estatístico de crianças e mães no Brasil. Rio de Janeiro, 1979.* 233 p., gráf., tab.
- PESQUISA INDUSTRIAL — 1977.** Rio de Janeiro, 1981, t. 1: Regiões Norte e Centro-Oeste; dados gerais.
- . t. 4: Região Sul; dados gerais.
- REGISTRO CIVIL DO BRASIL — 1978** (resultados preliminares) Rio de Janeiro, 1980.
- REVISTA BRASILEIRA DE ESTATÍSTICA.** Rio de Janeiro, v. 41, n. 164, out./dez. 1980.
- Sinopse preliminar do censo demográfico — 1980: Brasil.* Rio de Janeiro, 1981. 93 p., mapas, tab. (Recenseamento Geral do Brasil 1980, 9: v. 1, t. 1, n. 1)
- : *Rondônia, Roraima, Amapá.* Rio de Janeiro, 1981. 78 p., mapas, tab. (Recenseamento Geral do Brasil 1980, 9: v. 1, t. 1, n. 2)
- : *Acre.* Rio de Janeiro, 1981. 10 p., mapas, tab. (Recenseamento Geral do Brasil 1980, 9: v. 1, t. 1, n. 3)
- : *Amazonas.* Rio de Janeiro, 1981. 25 p., mapas, tab. (Recenseamento Geral do Brasil 1980, 9: v. 1, t. 1, n. 4)
- : *Pará.* Rio de Janeiro, 1981. 45 p., mapas, tab. (Recenseamento Geral do Brasil 1980, 9: v. 1, t. 1, n. 5)
- : *Maranhão.* Rio de Janeiro, 1981. 45 p., mapas, tab. (Recenseamento Geral do Brasil 1980, 9: v. 1, t. 1, n. 6)
- : *Piauí.* Rio de Janeiro, 1981. 36 p., mapas, tab. (Recenseamento Geral do Brasil 1980, 9: v. 1, t. 1, n. 7)
- : *Ceará.* Rio de Janeiro, 1981. 72 p., mapas, tab. (Recenseamento Geral do Brasil 1980, 9: v. 1, t. 1, n. 8)
- : *Rio Grande do Norte.* Rio de Janeiro, 1981. 49 p., mapas, tab. (Recenseamento Geral do Brasil 1980, 9: v. 1, t. 1, n. 9)
- : *Paraíba.* Rio de Janeiro, 1981. 55 p., mapas, tab. (Recenseamento Geral do Brasil 1980, 9: v. 1, t. 1, n. 10)
- : *Alagoas.* Rio de Janeiro, 1981. 35 p., mapas, tab. (Recenseamento Geral do Brasil 1980, 9: v. 1, t. 1, n. 12)

- : *Sergipe*. Rio de Janeiro, 1981. 26 p., mapas, tab. (Recenseamento Geral do Brasil 1980, 9: v. 1, t. 1, n. 13)
- : *Bahia*. Rio de Janeiro, 1981. 114 p., mapas, tab. (Recenseamento Geral do Brasil 1980, 9: v. 1, t. 1, n. 14)
- : *Espírito Santo*. Rio de Janeiro, 1981. 33 p., mapas, tab. (Recenseamento Geral do Brasil 1980, 9: v. 1, t. 1, n. 16)
- : *Rio de Janeiro*. Rio de Janeiro, 1981. 51 p., mapas, tab. (Recenseamento Geral do Brasil 1980, 9: v. 1, t. 1, n. 17)
- : *Paraná*. Rio de Janeiro, 1981. 109 p., mapas, tab. (Recenseamento Geral do Brasil 1980, 9: v. 1, t. 1, n. 19)
- : *Santa Catarina*. Rio de Janeiro, 1981. 65 p., mapas, tab. (Recenseamento Geral do Brasil 1980, 9: v. 1, t. 1, n. 20)
- : *Rio Grande do Sul*. Rio de Janeiro, 1981. 101 p., mapas, tab. (Recenseamento Geral do Brasil 1980, 9: v. 1, t. 1, n. 21)
- : *Mato Grosso do Sul*. Rio de Janeiro, 1981. 29 p., mapas, tab. (Recenseamento Geral do Brasil 1980, 9: v. 1, t. 1, n. 22)
- : *Mato Grosso*. Rio de Janeiro, 1981. 29 p., mapas, tab. (Recenseamento Geral do Brasil 1980, 9: v. 1, t. 1, n. 23)
- : *Goiás*. Rio de Janeiro, 1981. 69 p., mapas, tab. (Recenseamento Geral do Brasil 1980, 9: v. 1, t. 1, n. 24)
- : *Distrito Federal*. Rio de Janeiro, 1981. 11 p., mapas, tab. (Recenseamento Geral do Brasil 1980, 9: v. 1, t. 1, n. 25)

RBE: ÍNDICE ALFABÉTICO E REMISSIVO DE AUTORES E ASSUNTOS 1978-1980

O presente índice, elaborado na Divisão de Informações Correntes do Departamento de Informação da Biblioteca Central do IBGE, abrange a matéria publicada nos números 153-156, v. 39, 1978; 157-160, v. 40, 1979; 161-164, v. 41, 1980 da Revista Brasileira de Estatística.

De acordo com os padrões estabelecidos pela Associação Brasileira de Normas Técnicas — ABNT para citação de periódicos, o número do fascículo precede os das páginas inicial e final do artigo, separado dos mesmos por dois pontos (:). Ex.: 160:399-453 = fascículo 160, p. 399 a 453.

AUTORES

- Altmann, Ana Maria Goldani 160:399-453
Antunes, Ruy Donini 162:311-21
Arriaga, Eduardo E. 155:355-67
Barbosa, Jaci Gelabert 160:455-512
Barros, Ernani Thimoteo de 153:73-85; 154:193-262; 156:439-94
Cascaes, Maria 156:565-76
Cassinelli, Robert Robichez 162:171-99
——— *trad.* 153:87-106; 155:355-67
Castro, Mary Garcia 153:3-33; 154:127-92; 161:3-54
Cova, Hervey Guimarães 162:289-310

Cruz, Hélio Ventura da 162:267-87
Curi, Paulo Roberto 161:137-49
Dachs, José Norberto Walter 161:119-36
Ferreira, Carlos Eugênio de C. 160:399-453
Franco, Fernando Martins 153:45-57
Frias, Luiz Armando de Medeiros 159:243-81
Garcia, Carmen de Jesus 153:59-71
Gomes, Hulda Maria 157/158:217-9; 157/158:221-38
Henriques, Maria Helena F. T. 164:499-529
Hoyos, Arnaldo J. de 156:557-63
IBGE 155:303-28
Irwin, Richard 153:87-106
Jordan Filho, Leon 159:309-27; 161:151-61
Keller Filho, Thadeu 159:297-308; 164:551-8
Leite, Valéria da Motta *trad.* 154:267-97
Lorenz Karl M. 163:435-48
Madeira, João Lyra 154:127-92; 157/158:5-213
Mascolo, João Luiz 156:519-41
Massena, Rosa Maria Ramalho 160:365-98
Medeiros, Marly 159:283-95
Monteiro, Mario F. G. 163:337-56
Moreira, Lana Lima 161:55-117
Neves, Cesar das 153:45-57; 160:513-23
Oliveira, Luís Antônio Pinto de 162:171-99
Pedrosa, Armindo Alves 161:55-117
Pfeiffer, Dietmar 164:559-76
Poggio, Sara Zulema 163:379-434
Rato, Maria Helena da Cunha 156:495-517
Ring, Maria Aparecida Luchesi 156:543-56
Rodrigues, Paulo 159:243-81
Rossi, José Welisson 153:35-44; 154:263-6; 155:329-54; 160:513-23
Sant'Ana, Maristela A. A. 153:59-71
Silva, Lucinda da 157/158:215-6; 157/158:221-38
———, Nelson do Valle 160:349-64
Simões, Celso Cardoso da Silva 161:3-54; 162:201-16
Siqueira, Iêda 159:329-39; 164:485-97
Souza, Lúcia Ribeiro de 164:531-50
Sullivan, Jeremiah M. 154:267-97
Valente, Elvino 153:59-71
Vetter, David Michael 160:365-98; 162:217-66; 163:357-77

ASSUNTOS

Bibliografia

migração interna

Brasil 155:381-436

publicações comentadas 153:117-9; 155:377-80; 156:582-4;
160:526-7; 161:167-8

publicações de interesse para a Estatística editadas pelo IBGE
153:119-20; 154:298-300; 155:373-7; 156:579-81; 159:341-6;
160:525-6; 162:331-4; 163:449-50; 164:577-9

recenseamento

Brasil 163:451-82

trabalhos do Prof. João Lyra Madeira

publicados na Revista IRB 157/158:217-9

publicados no Mensário Estatístico Atuarial 157/158:221-38

Biologia

experimentos

aplicação de método estatístico 161:137-49

Congressos, Sessões, Simpósios, Comunicações etc.

calendário de reuniões internacionais programadas para 1978, 1979,
1980 153:109-13; 155:369-70; 161:163-5

ENDEF

Consumo alimentar — antropometria; dados preliminares tér-
mino da coleção 153:114-5

IBGE/BNH

convênio de cooperação técnica 155:371
mestrado em Estatística e Métodos Quantitativos
informações sobre o curso 155:371

Sessão da Comissão de Aperfeiçoamento das Estatísticas Nacionais,
13., São Domingos, 18/21 nov. 1977 153:114

Sessão do Instituto Internacional de Estatística, 42., Manilha, 4/14,
dez. 1979 156:577-8

Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística, 3., São Paulo,
24/28 jul. 1978 153:107-9

Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística, 4., Rio de Janeiro,
21/25 jul. 1980 161:165-6

Demografia

- crescimento populacional
 - e desenvolvimento econômico 157/158:-15-26; 157/158:195-213
 - e planejamento familiar
 - bases teóricas 157/158:5-13
 - modelos de análise 157/158:27-172
- informações censitárias
 - recuperação
 - modelo teórico 159:243-81

Desemprego

- e subemprego
 - urbano e rural
 - Brasil 156:543-56

Desigualdades Regionais

- análise de cluster
 - viabilidade da aplicação
 - Brasil 164:559-76

Educação

- população migrante e nativa
 - diferenciais de escolaridade
 - áreas metropolitanas
 - Sudeste, região 160:455-512

Estatística

- amostragem
 - função perda 162:311-21
- análise de regressão linear
 - cross-section/séries temporais
 - determinação da concentração de renda 160:513-23
- análise de regressão linear
 - estimação de parâmetros
 - efeitos da agregação 153:35-44
 - e variáveis binárias
 - utilização 155:329-54

Estatística

- uso do teste F 154:263-6
- análise de variância
- aplicação a experimentos biológicos 161:137-49
- análise exploratória
 - violência nas ruas urbanas 161:119-36
- avaliação das questões de exames vestibulares 162:289-310
- curso de graduação
 - mercado de trabalho para os recém-formados 156:565-76
- distribuição de freqüência
 - função fatorial
 - cálculo dos momentos 162:267-87
- índice da produção industrial
 - experiência do IBGE na elaboração 153:59-71
- modelo de Brass
 - estimativa da mortalidade infantil 154:267-97
- modelo estocástico
 - migração interna 164:485-97
- séries temporais
 - demanda de viagens aéreas
 - e depósito compulsório 153:45-57
- sistemas gaussianos
 - critérios de estabilidade
 - comparação 156:557-63
- Statistical Package for the Social Sciences — SPSS
 - utilização 162:217-66
- variáveis aleatórias com distribuição em função de potência caracterização 164:551-8
- variáveis aleatórias independentes
 - valores dos máximos
 - distribuição exata e assintótica das mudanças 159:297-308
- variáveis binárias
 - utilização em análise de regressão 155:329-54

Estatísticas Vitais

- natalidade
 - metodologia para obtenção de dados
 - Brasil 162:171-99

Família

- composição, tamanho e características econômicas do grupo
 - Regiões Metropolitanas 161:3-54
- e trabalho feminino 164:531-50

Família

planejamento
e crescimento populacional
bases teóricas 157/158:5-13

Fecundidade

análise demográfica 157/158:173-93
censos demográficos, registro civil
dados estatísticos
Brasil 160:399-453
uniões legais e consensuais
comportamento reprodutivo
América Latina 164:499-529

IBGE

índice da produção industrial
experiência na elaboração 153:59-71

Indicadores

acessibilidade espacial
setores de tráfego
tempo gasto nas viagens em coletivos
Rio de Janeiro, RJ 160:365-98
índice da produção industrial
experiência do IBGE na elaboração 153:59-71
Índice Nacional de Preços ao Consumidor — INPC
metodologia da construção 162:323-30
seguridade social
objetivos e utilização 161:151-61
sociais
propriedade interdisciplinar 153:3-33

Migração

interna
análise demográfica 157/158:173-93
bibliografia
Brasil 155:381-436
causas
modelo de regressão múltipla
Nordeste, região 159:329-39
censo demográfico
informações e pesquisas 154:127-92

Migração

interna

indicadores sociais 153:3-33

modelo estatístico 164:485-97

Mortalidade

análise demográfica 157/158:173-93

causas de óbitos

Brasil 163:337-56

censos demográficos, registro civil

Brasil 160:399-453

infantil

estimativa

modelo de Brass 154:267-97

população economicamente ativa

América Latina 154:193-262

segundo a renda familiar e o saneamento básico

Regiões Metropolitanas 162:201-16

taxas

recuperação de informações censitárias

Brasil 159:243-81

urbano-rural

sub-registro

países em desenvolvimento 155:355-67

Natalidade

obtenção de dados

metodologia

Brasil 162:171-99

Nupcialidade

níveis e tendências

variações espaciais intercensitárias

Brasil 160:349-64

taxas

estimativa

Santa Catarina 159:233-95

uniões legais e consensuais

América Latina 164:499-529

Pecuária

bovina

estrutura e crescimento do rebanho

Brasil 156:519-41

População

economicamente ativa

mortalidade

América Latina 154:193-262

vida média

América Latina 154:193-262

Brasil 156:439-94

estimativas e projeções

modelos cinemáticos e dinâmicos

aplicações práticas 157/158:27-172

estrutura etária

implicações econômicas

Brasil e Mundo 153:73-85

feminina

papel social e estrutura familiar 164:531-50

participação na força de trabalho 156:495-517; 163:379-434

migrante e nativa

diferenciais de escolaridade

áreas metropolitanas

Sudeste, região 160:455-512

residente

projeção

segundo as Grandes Regiões, as UF e o domicílio 155:303-28

tábuas de vida

Brasil 156:439-94

taxas nacionais de sobrevivência intercensitária

projeções

Estados Unidos 153:87-106

Recenseamento

bibliografia

Brasil 163:451-82

censo demográfico

evolução e estudos de população

Brasil 160:399-453

migração interna

Brasil 154:127-92

Recursos Humanos

programa de treinamento
avaliação do desempenho 163:435-48

Registro Civil

evolução
e estudos de população
Brasil 160:399-453

Renda

concentração
estudo
aplicação de teoria estatística 160:513-23
distribuição
e investimentos públicos 163:357-77
indicadores
Brasil 159:309-27

Revista Brasileira de Estatística

índice alfabético e remissivo (1977) 153:120-3
número especial
trabalhos do Prof. João Lyra Madeira 157/158:5-238

Setor Terciário

estrutura ocupacional e produto interno
análise do comportamento
Brasil 161:55-117

Trabalho

mão-de-obra
feminina 156:495-517; 163:379-434
e estrutura familiar 164:531-50
setor terciário
caracterização
Brasil 161:55-117
urbana e rural
Brasil 156:543-56

Trabalho (continuação)

mercado

recém-formados em Estatística 156:565-76

salários

mão-de-obra feminina e masculina 163:379-434

Transporte

aéreo

movimento de passageiros

e depósito compulsório

séries temporais 153:45-57

urbano

indicadores de acessibilidade espacial

Rio de Janeiro, RJ 160:365-98

Urbanização

investimentos públicos

e distribuição da renda 163:357-77

Vida

média

economicamente ativa

América Latina 154:193-262

Brasil 156:439-94

tábuas de

Brasil 156:439-94

Violência

dados estatísticos

análise exploratória 161:119-36

Vultos da Estatística Brasileira

João Lyra Madeira 157/158:215-6

IBGE

Presidente: Jessé Montello

Diretor-Técnico:

Marco Antonio de Souza Aguiar

Diretor de Geodésia e Cartografia:

Mauro Pereira de Mello

Diretor de Administração:

Aluizio B. de A. Mello

Diretor de Formação e Aperfeiçoamento de Pessoal:

Elias Paladino

Diretor de Informática:

Renato Galvão Flôres Júnior