

REVISTA BRASILEIRA DE ESTATÍSTICA

Órgão oficial do IBGE
e da Sociedade Brasileira de Estatística

A Revista não se responsabiliza
pelos conceitos emitidos
em artigos assinados

PUBLICAÇÃO TRIMESTRAL

ISSN 0034-7175

Pedidos de assinatura e número avulso ou atrasado para:

Diretoria de Administração: Av. Brasil, 15.671 — Lucas — Rio de Janeiro — Brasil
CEP — 21.241
Tel.: 391-7788

Livraria do IBGE: Av. Franklin Roosevelt, 146/loja — Centro — RJ — Brasil
CEP — 20.021
Tel.: 220-9147 / 220-8163
DDD: 011

SUMÁRIO

Artigos

- Alguns aspectos do mercado de trabalho rural em 1970
Iêda Siqueira 79
- Não estacionariedade em modelos de regressão: uma aplicação ao comportamento de depósitos em cadernetas de poupança
Edmundo Serebrenick 111
- Uma extensão do conceito de distribuição sem memória
Thadeu Keller Filho 139

Bibliografia

- Publicações de interesse para a Estatística editadas pelo IBGE no período de janeiro a março de 1981
Biblioteca Central do IBGE 157

Noticiário

- 43.^a reunião do Instituto Internacional de Estatística 161
- Congresso geral da IUSSP 163

ISSN 0034-7175

R. bras. Estat.	Rio de Janeiro	v. 42	n.º 166	p. 77 a 164	abr./jun. 1981
-----------------	----------------	-------	---------	-------------	----------------

Revista brasileira de estatística / Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística . — ano 1, n. 1(1940, jan./mar.)- . —

Rio de Janeiro : IBGE, 1940-

Trimestral.

Órgão oficial do IBGE e da Sociedade Brasileira de Estatística.

Continuação de : Revista de economia e estatística.

Índices : autor-assunto, v. 22-24(1961-1963) no v. 25, n. 1 ; v. 25-26 (1964-1965) no v. 27, n. 1 ; v. 27-28(1966-1967) no v. 29, n. 1 ; . Índices anuais de autor-assunto, publicados no n. 1 (jan./mar.) do ano seguinte (período 1968-1977, v. 29-38).

ISSN 0034-7175 = Revista brasileira de estatística.

1. Estatística — Periódicos. I. IBGE.

IBGE. Biblioteca Central
RJ-IBGE/81-41

CDD 310.5
CDU 31(05)

ALGUNS ASPECTOS DO MERCADO DE TRABALHO RURAL EM 1970

Iêda Siqueira *
IBGE/DESPO

SUMÁRIO

1. *Introdução*
 2. *Considerações metodológicas*
 3. *As dimensões latentes do mercado de trabalho rural e seus padrões especiais*
 - 3.1 — *Da população rural*
 - 3.2 — *Da população migrante rural-rural*
 - 3.3 — *Da população não migrante rural*
 4. *Comentários finais*
 5. *Bibliografia*
- Apêndice*
1. *Variáveis*
 2. *Matrizes*

1. INTRODUÇÃO

O interesse para que fosse desenvolvido o presente trabalho foi despertado pelo estudo *Áreas de Atração e Evasão Populacional no Brasil no Período 1960-1970* publicado pelo IBGE em 1979. Este estudo fornece “uma caracterização espacial do fenômeno dos aumentos e das

* A autora agradece à valiosa colaboração de Maria Beatriz Afonso Lopes e Maria da Consolação da Rocha Ferreira, a Hugo Carneiro e Mario Carreiro pela elaboração dos mapas e aos comentários críticos de Manoel Augusto Costa.

perdas de população sofridas pelos municípios e microrregiões brasileiras” (p. 5). Embora tenha um caráter exploratório descritivo e use como instrumento básico de análise apenas taxas decenais de migração, o estudo citado chama a atenção para a necessidade de melhor compreensão da inter-relação espacial entre as variáveis econômicas e demográficas que influem no processo migratório.

Como conseqüência, Becker, Montenegro, Siqueira e Bernardes (maio, 1979) propõem um enfoque para estudar as mudanças ocorridas na distribuição espacial da população, vinculando estas às modificações na organização dos espaços geoeconômicos por sua vez decorrentes da natureza do processo de desenvolvimento econômico do Brasil.

Em tal proposta as migrações são concebidas como “um processo de articulação de áreas componentes de um mercado de trabalho espacialmente heterogêneo” (p. 24), no qual as áreas de atração populacional são relacionadas à demanda e as de evasão à oferta da força de trabalho. Ressaltando que os fatores que moldam a estrutura da oferta e da demanda por força de trabalho não atuam separadamente no tempo e no espaço, bem como que sua atuação provoca distintos efeitos espaciais, Becker *et alii* mostram que é no espaço agrícola que esses efeitos são mais desiguais.

É desta última observação que decorre o objetivo do presente trabalho: identificar as componentes do trabalho rural e verificar os padrões espaciais que assumem através de um corte transversal fornecido por dados do Censo Demográfico de 1970.

2. CONSIDERAÇÕES METODOLÓGICAS

Uma das conseqüências do pressuposto que o processo de desenvolvimento econômico não é homogêneo no tempo e no espaço e que isto acarreta uma distribuição desigual da renda nacional por espaços geoeconômicos diferenciados, especialmente nos espaços predominantemente agrícolas, é que o efeito conjunto da oferta de mão-de-obra e dos rendimentos auferidos também assume variadas formas.

Entretanto, para objetivos de um planejamento global como, por exemplo, para a formulação de uma política nacional de emprego no setor primário, torna-se necessário sintetizar essa variação, conferindo-lhe uma ordem de grandeza e, concomitantemente, identificar quais as variáveis que mais estão influenciando no processo, além de ser altamente desejável que a desagregação desse fator comum ao sistema possa ser feita para as unidades espaciais que o compõem.

Neste trabalho procura-se verificar como se estava realizando em 1970 a conjugação, a nível nacional, da oferta de força de trabalho rural com a remuneração recebida por trabalhadores agrícolas segundo o tipo de vínculo que mantêm (emprego ou parceria) e da estabilidade desse vínculo na unidade de produção.

Para tal foram selecionados 25 indicadores simples: o número de homens no setor primário com 10 + 15, 15 + 20, 20 + 30, 30 + 40, 40 + 50, 50 e mais anos de idade (X 1, X 2, X 3, X 4, X 5, X 6), o número de homens com mais de 10 anos de idade com renda de ϕ + 1, 1 + 2, 2 + 3, 3 + 5, 5 e mais salários mínimos e sem rendimentos (X 7, X 8, X 9, X 10, X 11, X 12), o número de pessoas que só exerceram a ocupação habitual durante 9 + 12 meses do ano anterior ao censo (X 13), o número de empregados com 0 + 1, 1 + 2, 2 + 3, 3 + 5, 5 e mais salários mínimos e sem rendimentos (X 14, X 15, X 16, X 17, X 18 e X 19) e o número de parceiros com 0 + 1, 1 + 2, 2 + 3, 3 + 5, 5 e mais salários mínimos e sem rendimentos (X 20, X 21, X 22, X 23, X 24 e X 25). Tal desagregação foi efetuada para se constatar se determinadas faixas etárias estariam pesando mais na oferta de força de trabalho, bem como se o efeito de alguma classe de rendimentos se faria sentir mais ou menos acentuadamente (veja apêndice 1).

Estes 25 indicadores simples, como a maior parte dos dados usados nas ciências sociais, são correlacionadas uns com os outros; muitas vezes essa correlação é alta o suficiente para implicar uma redundância de informações (veja apêndice 2). Impõe-se, assim, a necessidade de identificação pelo menos das fontes linearmente independentes do sistema em estudo para que os analistas possam determinar com absoluta isenção as dimensões latentes da interação “oferta de força de trabalho—rendimentos”. Por este motivo decidiu-se aplicar aos dados o método das componentes principais, no qual cada componente principal é uma combinação linear das variáveis observadas; a primeira tem a variância máxima de todas as funções lineares deriváveis daquelas; a segunda também tem variância máxima, porém de todas as funções lineares das variáveis dadas que são ortogonais à primeira componente principal e assim sucessivamente até que se complete o número total de componentes, que é igual ao de variáveis. Além disso, também ordena as unidades de observação (as 361 microrregiões homogêneas) em cada componente principal, fornecendo, desse modo, um padrão espacial para cada uma delas.

Decidiu-se, então, aplicar esse método a segmentos e à totalidade do mercado de trabalho rural, isto é, aos não migrantes, aos migrantes rurais-rurais em todos os tempos de residência e à população rural total, já que as partes e o todo podem apresentar dimensões e padrões espaciais diferenciados.

3. AS DIMENSÕES LATENTES DO MERCADO DE TRABALHO RURAL E SEUS PADRÕES ESPACIAIS

3.1 — Da população rural

Os resultados da análise de componentes principais aplicados às variáveis anteriormente mencionadas para a população rural se encontram resumidos na tabela 1. Verifica-se por esta tabela que 83% da variância total são explicados pelas três primeiras componentes principais. A componente 1 especifica a importância do número de homens no setor primário, dos rendimentos auferidos e da ocupação habitual conjugada ao número de meses trabalhados. De todas as componentes, é a única que só apresenta sinais positivos. Explica 53% da variância dos dados considerados para a população rural total. No que concerne à estrutura desta componente, observa-se primeiramente que os coeficientes correspondentes ao efetivo de homens que estão entrando como aqueles que estão se retirando da força de trabalho apresentam um peso ligeiramente menor que os coeficientes referentes aos que se encontram nas demais faixas etárias. Quanto ao efeito da remuneração total (isto é, dos rendimentos mensais auferidos aos homens de 10 anos e mais de idade), nota-se que são aqueles sem rendimentos e os que recebem até 2 salários mínimos os que mais influenciam no mercado de trabalho. Percebe-se também, por meio da comparação do efeito dos rendimentos dos empregados com os dos parceiros, que a integração ao mercado de trabalho se faz principalmente sob forma de parceria, ou seja, que as relações informais de trabalho são mais relevantes num primeiro estágio que as de emprego formal.

A distribuição espacial da componente 1 é caracterizada por grande homogeneidade; as quatro classes superiores dos *scores* atribuídos a cada uma das microrregiões, conforme pode ser visto no mapa 1, se distribuem em faixas e bolsões. Os valores extremos positivos são encontrados no oeste do Paraná, em microrregiões que se caracterizam pelo predomínio das culturas de soja/trigo e pela policultura industrial. Uma primeira faixa de valores positivos se estende da campanha gaúcha até o extremo sul de Mato Grosso e oeste de São Paulo, abrangendo áreas de pecuária de corte, soja/trigo, milho/suínos, policultura industrial e café. Outra faixa se inicia na chapada Diamantina meridional, alongando-se em direção a Sergipe e englobando áreas de pecuária de corte, cacau, policultura alimentar e policultura industrial. A última faixa segue a direção leste-norte no Maranhão e nela predominam a rizicultura e a policultura alimentar. Quanto aos bolsões, se localizam no centro e no sul do Rio Grande do Sul (em áreas produtoras de fumo e arroz), nas microrregiões onde estão Curitiba e São Paulo (abastecedoras), Campinas (policultura industrial), Fluminense

TABELA 1

RESUMO DOS RESULTADOS DA ANÁLISE DE COMPONENTES
PRINCIPAIS PARA A POPULAÇÃO RURAL TOTAL

INDICADOR	VETORES		
	Componente 1	Componente 2	Componente 3
X 1.....	0,2248	-0,1922	-0,1041
X 2.....	0,2506	-0,1552	-0,1071
X 3.....	0,2505	-0,1527	-0,1047
X 4.....	0,2530	-0,1441	-0,0980
X 5.....	0,2507	-0,1431	-0,1461
X 6.....	0,2239	-0,1491	-0,2559
X 7.....	0,2254	-0,1378	-0,2564
X 8.....	0,2366	0,1043	0,0410
X 9.....	0,2161	0,1860	0,0688
X10.....	0,2016	0,2326	0,0458
X11.....	0,1788	0,2656	0,0731
X12.....	0,2548	-0,0927	-0,1137
X13.....	0,2535	-0,1034	-0,0629
X14.....	0,1631	0,0738	-0,2648
X15.....	0,1410	0,3465	-0,0595
X16.....	0,1015	0,3935	-0,0701
X17.....	0,0876	0,3838	-0,0593
X18.....	0,0860	0,3803	-0,0807
X19.....	0,1803	0,1812	-0,1468
X20.....	0,1684	-0,1556	0,1698
X21.....	0,1993	-0,0522	0,3737
X22.....	0,1886	-0,0246	0,4099
X23.....	0,1804	-0,0399	0,4019
X24.....	0,1710	0,0503	0,3304
X25.....	0,1478	-0,0833	0,2480
<hr/>			
RAIZ CARACTERÍSTICA.....	13,2081	5,0440	2,5195
<hr/>			
PERCENTAGEM DA VARIÂNCIA TOTAL.....	0,53	0,20	0,10
<hr/>			
PERCENTAGEM CUMULATIVA DA VARIÂNCIA.....	0,53	0,73	0,83

FONTE: Tabulações Especiais — Censo Demográfico — 1970, IBGE, Rio de Janeiro.

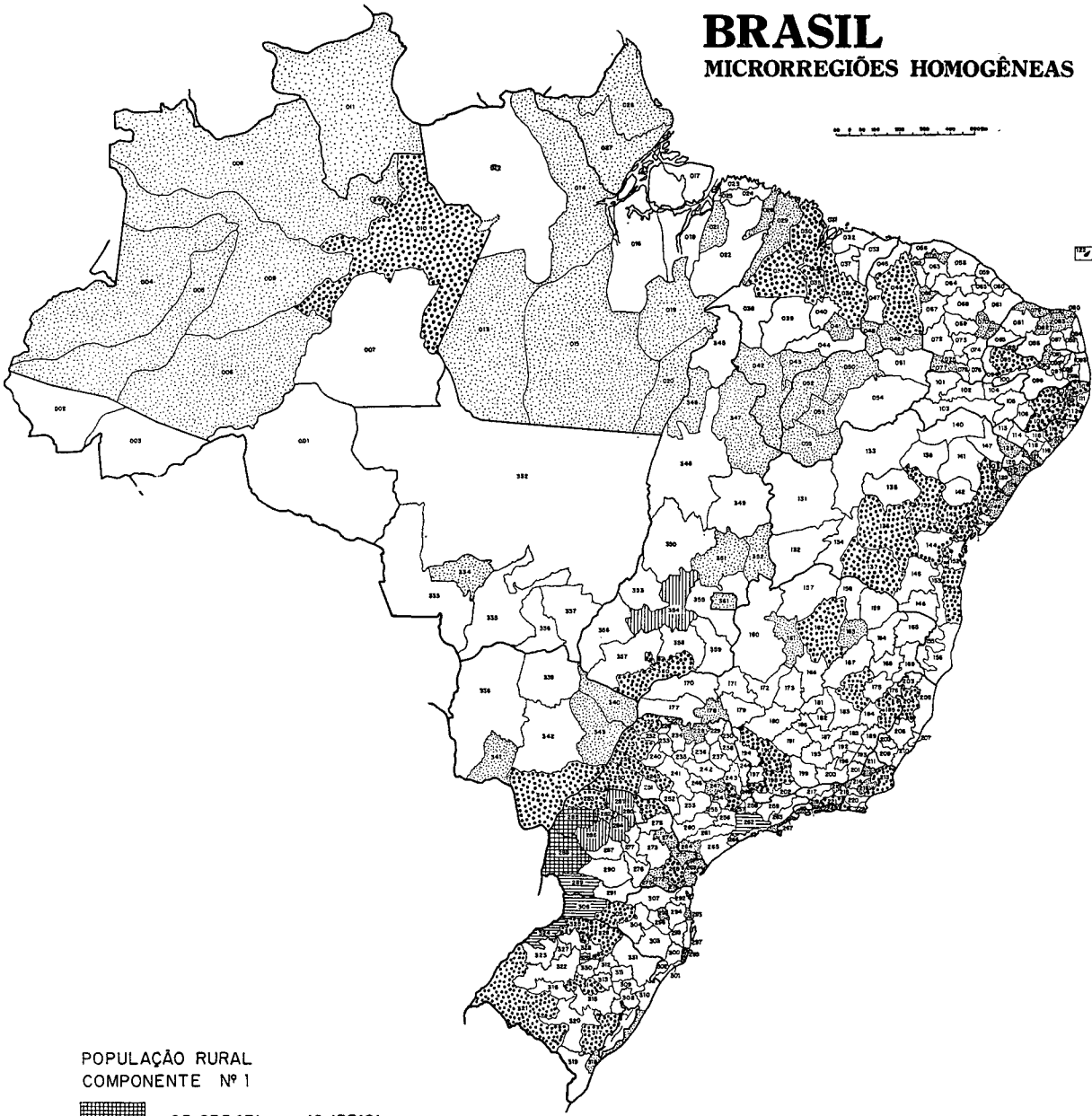
do Grande Rio (abastecedora), Açucareira de Campos, no Espírito Santo, Minas Gerais, no sul de Goiás. Um grande bolsão se inicia no nordeste de Alagoas prolongando-se pelo agreste e parte do litoral de Pernambuco, existem ainda dois outros bolsões: um no nordeste do Piauí e outro no sertão da Paraíba. Vale ainda ressaltar que os valores extremos negativos se localizam em microrregiões onde a agricultura é absolutamente inexpressiva ou inexistente: Guanabara, Fernando de Noronha e Costa Norte Paulista.

Quanto à componente 2, que explica 20% da variância total, caracteriza o efeito da remuneração no emprego, bem como o dos rendimentos superiores a 3 salários mínimos, embora os coeficientes dos últimos sejam mais baixos. Nesta componente as variáveis que se referem ao contingente de homens por faixas etárias no setor primário, bem como os sem rendimentos e a ocupação habitual \times número de meses trabalhados, aparecem com sinal negativo, além de todas (exceto uma) referentes à parceria. Fica, assim, demonstrado que, para a população rural total, num segundo estágio do mercado de trabalho, são as relações capitalistas formais, isto é, o emprego formal que adquire importância em detrimento das demais aqui consideradas.

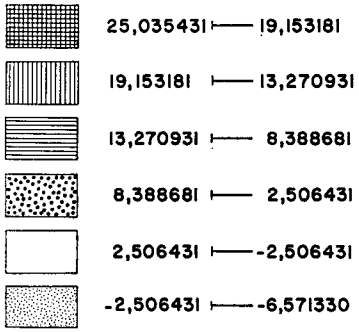
Também é bastante homogênea sua distribuição espacial, o que pode ser confirmado pelo exame do mapa 2. Os valores extremos positivos dos *scores* se localizam na Grande São Paulo, na Fluminense do Grande Rio (ambas microrregiões abastecedoras) e na Alta Noroeste de Araçatuba (pecuária de corte). As quatro primeiras classes, que são exclusivamente positivas, exibem localizações bem definidas no espaço nacional: nas microrregiões em que se encontram as capitais de Rondônia, Amapá, Maranhão, Pernambuco, Minas Gerais, Espírito Santo e Distrito Federal, com atividades produtivas que variam bastante, do extrativismo ao abastecimento. Uma estreita faixa contínua se inicia imediatamente a oeste da Guanabara, segue pelo vale do Paraíba, engloba a Grande São Paulo e se desvia para noroeste, bifurcando-se; suas principais atividades estão ligadas à pecuária de leite, à fruticultura, à policultura industrial, à produção de cana-de-açúcar, de café/leite, além do abastecimento. Bolsões são encontrados no Paraná (abastecimento e soja/trigo), em Santa Catarina (policultura industrial) e no Rio Grande do Sul (abastecimento, uva, soja-trigo/milho-suínos e pecuárias de corte); tanto no Paraná quanto no Rio Grande do Sul as microrregiões das capitais estão localizadas nestes bolsões. Uma faixa mais ou menos contínua cobre o norte do Maranhão, Piauí e termina no litoral noroeste do Ceará. Outra surge no litoral nordeste do Ceará, bifurcando-se em direção ao sertão da Paraíba e agreste de Pernambuco e em direção ao sertão do Ceará, englobando o sudeste do Piauí, entrando pela Bahia, cobrindo todo o centro-sul e estendendo-se na direção de Sergipe. Existem ainda um grande bolsão no noroeste de Minas

BRASIL

MICRORREGIÕES HOMOGÊNEAS



POPULAÇÃO RURAL
COMPONENTE Nº 1

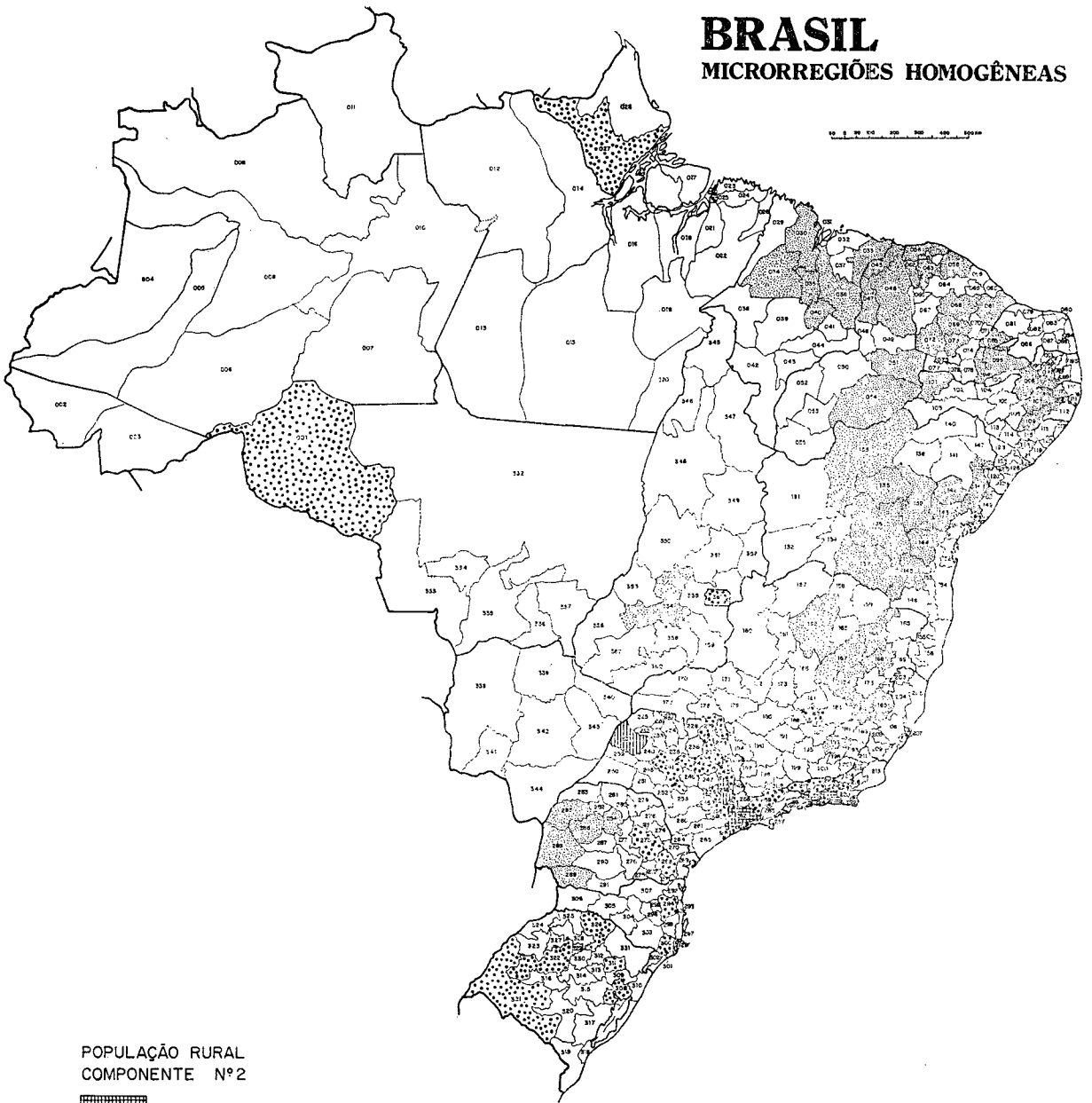


DLUS/8.01

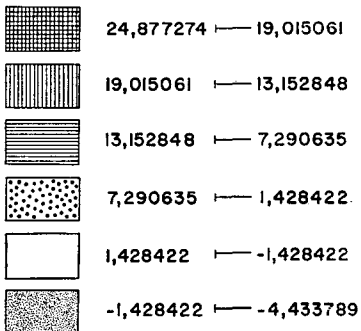
Mapa n.º 1

BRASIL

MICRORREGIÕES HOMOGÊNEAS

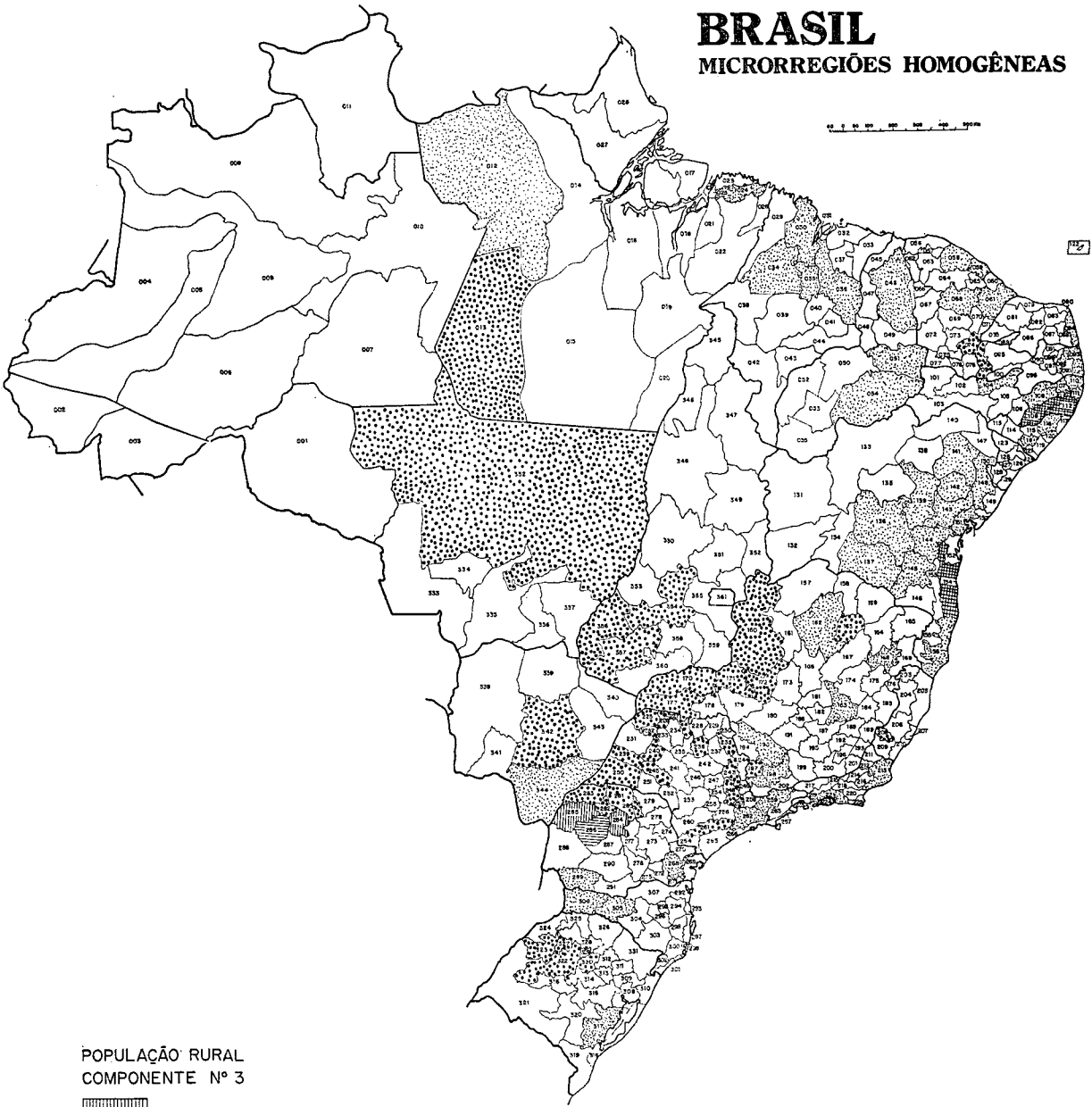


POPULAÇÃO RURAL
COMPONENTE Nº 2

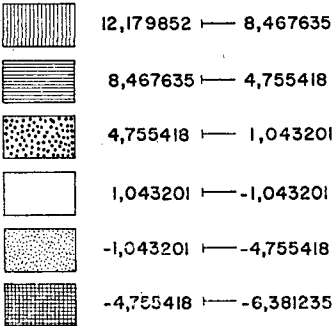


BRASIL

MICRORREGIÕES HOMOGÊNEAS



POPULAÇÃO RURAL
COMPONENTE Nº 3



DILCS/S 01

Gerais, outro que é a micro Mato Grosso de Goiás e finalmente outro grande no oeste do Paraná. Todas as demais microrregiões estão incluídas na classe restante.

Explicando 10% da variância total, a componente 3 identifica o efeito do regime de parceria no mercado de trabalho rural em todas as faixas de rendimentos.

A distribuição espacial desta componente é caracterizada, mais uma vez, pela grande homogeneidade. Seus *scores* extremos positivos se localizam no oeste do Paraná, em áreas de policultura industrial. Os valores mais elevados que surgem no Paraná se estendem pelo sudoeste de São Paulo (pecuária de corte e café), alongando-se pelo norte de São Paulo, Triângulo Mineiro e oeste de Minas Gerais (pecuária de corte, algodão, arroz, policultura alimentar). Há um bolsão no Rio Grande do Sul, manchas em São Paulo, Rio de Janeiro, Minas Gerais e Espírito Santo, além do sul de Mato Grosso. Uma grande mancha se inicia em Goiás, em microprodutoras de arroz e gado de corte e se alonga por todo o norte de Mato Grosso (extrativismo) e parte do oeste do Pará (policultura alimentar). Existe pequena mancha contínua no sertão produtor de algodão da Paraíba e Ceará. Uma categoria "intermediária" engloba 265 microrregiões que se distribuem por todas as unidades da Federação. A classe imediatamente inferior a esta surge em pequenas manchas na Região Sul: micro de Curitiba, oeste de Santa Catarina e sudoeste do Paraná. Na Região Sudeste em São Paulo (iniciando-se na Grande São Paulo e alongando-se para leste), na Fluminense do Grande Rio, no extremo oeste do Rio de Janeiro e em "ilhas" esparsas em Minas Gerais. Na Região Nordeste surgem os grandes bolsões: na Bahia, segundo a direção centro-sul-nordeste e no extremo sul, estando encravada entre essas duas, um bolsão da classe mais negativa. De forma semelhante, uma mancha se inicia no centro-sul de Alagoas em direção nordeste, encontra um bolsão da classe mais inferior em Pernambuco e a outra classe prossegue pelo norte de Pernambuco, litoral da Paraíba, Rio Grande do Norte e Ceará. Bolsões maiores aparecem no Piauí e Maranhão. Duas "ilhas" surgem no Pará (veja, para detalhes, o mapa 3).

Em síntese: o comportamento das variáveis analisadas para a população rural total demonstra que, num primeiro momento, o mercado de trabalho rural se estrutura pelo volume de homens engajados na atividade primária, que se integram ao trabalho pelo regime de parceria, da estabilidade da ocupação e do efeito dos rendimentos baixos. Num segundo momento é o mercado formal que se caracteriza por meio do efeito da remuneração superior a três salários mínimos dos que estão efetivamente empregados. Finalmente, no terceiro momento, ressurgem o efeito do regime de parceria, embora de maneira residual.

3.2 — Da população migrante rural-rural

A tabela 2 contém os resultados resumidos da análise aplicada aos migrantes em todos os tempos de residência. Verifica-se que três componentes principais explicam em conjunto 89% da variância.

De maneira muito semelhante ao que acontece para a população rural total, a componente 1 dos migrantes caracteriza o volume de homens no setor primário, o efeito dos rendimentos mensais e da ocupação habitual ligada ao número de meses trabalhados. São também muito relevantes o efeito do emprego não remunerado e o da parceria com rendimentos baixos (0 – 2 salários mínimos). Explica sozinha 72% da variância total.

É interessante observar que os coeficientes correspondentes a cada faixa etária dos homens em idades ativas apresentam a mesma ordem de grandeza, não indicando, portanto, que qualquer grupo de idade no segmento migrante do mercado de trabalho tenha maior peso na determinação dessa componente. Quanto ao efeito dos rendimentos mensais totais, como seria de se esperar, é maior nas categorias “sem rendimentos” e nas duas imediatamente superiores a esta (0 – 1 e 1 – 2 salários mínimos). Nota-se, entretanto, que não há grandes discrepâncias entre os coeficientes de X 7 a X 12, sendo apenas ligeiramente menores que os demais os de X 10 e X 11 (3 – 5 e 5 e mais salários mínimos).

Contudo, o que mais vale ressaltar nesta componente 1 é que os coeficientes das variáveis demonstram que, embora os migrantes estejam se integrando ao mercado de trabalho principalmente através do regime de parceria (em todas as categorias de rendimentos), também o estão fazendo através das classes de remuneração mais baixas (sem rendimentos, 0 – 1 e 1 – 2 salários mínimos) do emprego formal de modo mais acentuado que a população rural total.

Sua distribuição espacial (veja mapa 4) é das mais homogêneas no espaço nacional e seus valores extremos positivos se localizam no Paraná, em microrregiões cuja produção agrícola se liga à policultura industrial, à soja/trigo e à cafeicultura. Esses valores extremos formam uma mancha contínua no oeste do Paraná, diminuindo para leste. Valores bastante elevados formam uma faixa que se alonga do norte do Paraná e sul de Mato Grosso pelo oeste de São Paulo em áreas de pecuária de corte e café; estende-se também na direção sul, cobrindo o oeste de Santa Catarina (produção de milho/suínos) e parte do norte do Rio Grande do Sul em área de soja/trigo. Valores positivos se destacam em Goiás (arroz e pecuária de corte), Maranhão (arroz), Bahia (cacau), Espírito Santo (café), São Paulo (abastecedora) e Rio de Janeiro (abastecedora). As restantes 328 microrregiões se agregam

TABELA 2

RESUMO DOS RESULTADOS DA ANÁLISE DE COMPONENTES
PRINCIPAIS PARA MIGRANTES RURAIS-RURAIS DE TODOS
OS TEMPOS DE RESIDÊNCIA

INDICADOR	VETORES		
	Componente 1	Componente 2	Componente 3
X 1.....	0,2209	-0,1218	0,0699
X 2.....	0,2265	-0,0998	0,0975
X 3.....	0,2272	-0,0927	0,1482
X 4.....	0,2287	-0,0849	0,1514
X 5.....	0,2294	-0,0736	0,1410
X 6.....	0,2237	-0,0644	0,1794
X 7.....	0,2230	-0,0699	0,1228
X 8.....	0,2255	-0,0097	0,2236
X 9.....	0,2176	0,0463	0,2318
X10.....	0,2085	0,1176	0,2393
X11.....	0,2138	0,1255	0,0943
X12.....	0,2265	-0,0818	0,1201
X13.....	0,2284	-0,0798	0,1447
X14.....	0,1811	0,1021	-0,1097
X15.....	0,1695	0,2910	-0,0632
X16.....	0,1086	0,4856	-0,0396
X17.....	0,0715	0,5106	-0,0160
X18.....	0,0675	0,4949	-0,0469
X19.....	0,2042	0,1161	-0,1523
X20.....	0,2054	-0,1257	-0,1604
X21.....	0,2100	-0,1045	-0,2812
X22.....	0,1990	-0,0769	-0,3935
X23.....	0,1867	-0,0988	-0,4035
X24.....	0,1777	-0,0065	-0,3551
X25.....	0,1889	-0,0870	-0,2765
<hr/>			
RAIZ CARACTERÍSTICA.....	18,0211	2,9283	1,2007
<hr/>			
PERCENTAGEM DA VARIÂNCIA TOTAL.....	0,72	0,12	0,05
<hr/>			
PERCENTAGEM CUMULATIVA DA VARIÂNCIA.....	0,72	0,84	0,89

FONTE: Tabulações Especiais — Censo Demográfico — 1970, IBGE, Rio de Janeiro.

numa só classe intermediária entre valores positivos e negativos. Os valores mais negativos desta componente se localizam em micros cuja agricultura é inexistente ou muito pouco expressiva.

A segunda componente reflete a importância da remuneração de 1 a 5 salários mínimos no regime de emprego rural. Os coeficientes das variáveis X 15 a X 18 contrastam com aqueles referentes aos parceiros segundo as classes de rendimento e com os do contingente de homens no setor primário, os quais são todos levemente negativos. Justificam-se, assim, os coeficientes dos rendimentos totais, que só exibem alguma expressividade nas classes superiores a 3 salários mínimos. Esta componente explica de *per si* 12% da variância total da análise para os migrantes.

Com menor homogeneidade que a componente anterior, a distribuição pelo espaço nacional da componente 2 apresenta seus valores extremos positivos em duas microrregiões de São Paulo (Alta Noroeste de Araçatuba — produtora de café — e Grande São Paulo — abastecedora); em Rondônia (extrativismo) e no Rio de Janeiro (abastecedora). Esta dimensão estabelece um padrão para os valores intermediários que aparecem em grandes manchas contínuas nas Região Sul e Sudeste, mas também surgem no litoral do Nordeste e na Amazônia Legal (mapa 5).

A componente 3 apresenta uma estrutura que confere maior importância ao efeito dos rendimentos de 1 a 5 salários mínimos. Embora explique apenas 5% da variância total, cumpre notar que nela se tornam novamente positivos os coeficientes que correspondem ao efetivo de homens nas atividades primárias (especialmente para os que têm idade superior a 20 anos), bem como à variável “ocupação habitual \times número de meses trabalhados”.

Especialmente, os seus valores mais altos se distribuem por uma faixa mais ou menos contínua do norte do Rio Grande do Sul ao extremo sul de Mato Grosso, com uma bifurcação no Paraná em direção ao centro-sul de São Paulo. Outra faixa contínua se alonga do litoral e norte do Espírito Santo até o litoral sul da Bahia. Uma terceira segue do centro-oeste de Goiás até o litoral do Maranhão, estendendo-se a leste do Pará e uma quarta engloba Rondônia e parte do Acre. Manchas isoladas surgem em Minas Gerais, Bahia, Alagoas e Pernambuco. Esse padrão espacial surge no mapa 6.

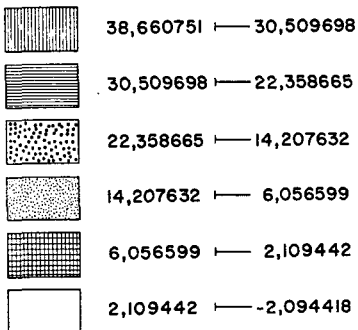
Para resumir o mecanismo de estruturação da população migrante no mercado de trabalho rural, segundo as variáveis aqui consideradas, pode-se dizer que no primeiro estágio a pressão demográfica não só faz com que a integração se processe por vias informais como também que a remuneração seja baixa. Num estágio posterior, contudo, se formalizam as relações de trabalho e o emprego com 1 a 5 salários

BRASIL

MICRORREGIÕES HOMOGÊNEAS



MIGRANTES RURAIS-RURAIS TTR
COMPONENTE N° 1

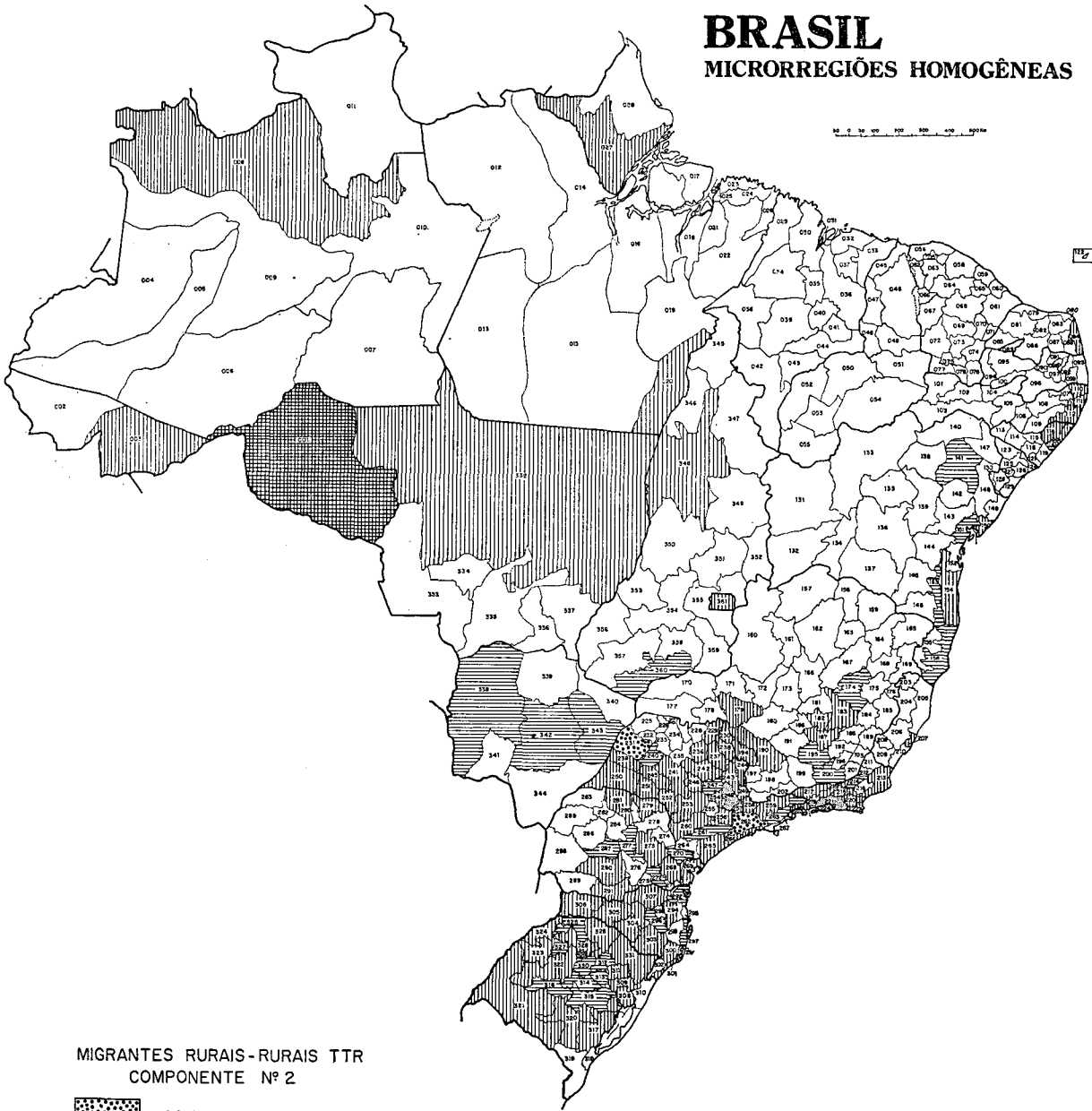


ILLUSTR. DI

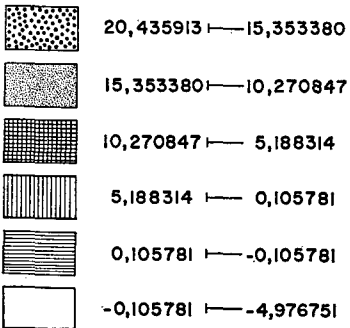
BRASIL

MICRORREGIÕES HOMOGÊNEAS

0 50 100 150 200 250 300 km



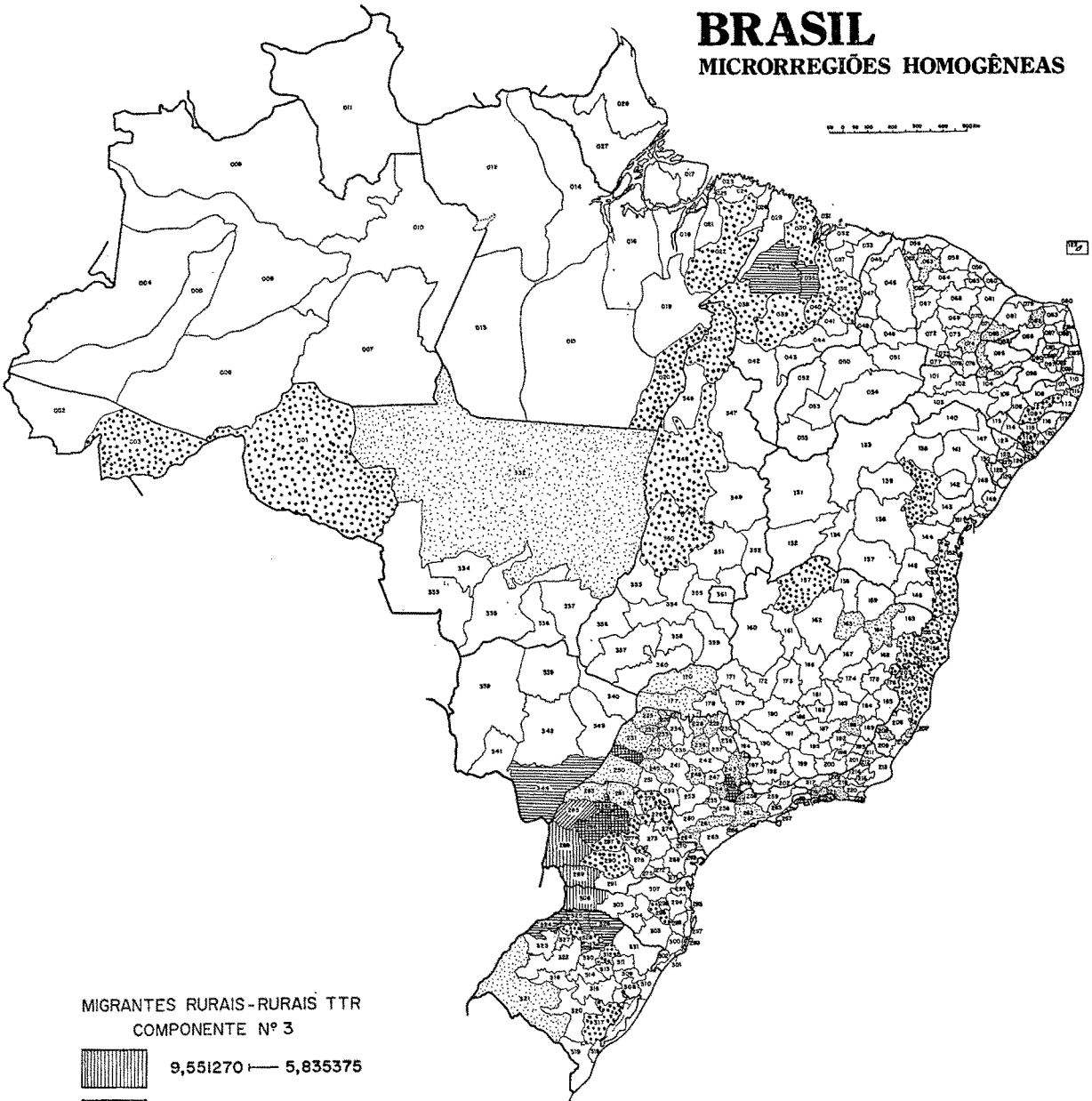
MIGRANTES RURAIS-RURAIS TTR
COMPONENTE Nº 2



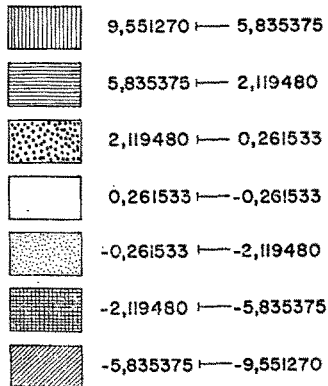
DILUS/78.01

BRASIL

MICRORREGIÕES HOMOGÊNEAS



MIGRANTES RURAIS-RURAIS TTR
COMPONENTE Nº 3



04/US/8.01

mínimos passa a ser o fator relevante. Num último momento a importância muda para os rendimentos totais em classes intermediárias independentemente da forma de relação de trabalho.

3.3 — Da população não migrante rural

O resumo da análise de componentes principais feita para os não migrantes rurais se encontra na tabela 3. Observa-se que três componentes principais explicam juntas 76% da variância.

A primeira componente caracteriza o contingente de homens alocados no setor primário segundo faixas etárias, sendo que os coeficientes das faixas etárias extremas são menores que os demais; também caracteriza o efeito dos “sem rendimentos” e dos rendimentos totais de 0 + 2 salários mínimos, da *proxy* da estabilidade e dos empregos com remuneração muito baixa (0 + 1 salário mínimo). Note-se que o vetor somente apresenta sinais negativos e foi caracterizado a partir dos valores dos coeficientes mais negativos. Esta componente explica 44% da variância total.

Uma possível explicação para a total localização do vetor no quadrante negativo talvez esteja ligada aos fracos (positivos e negativos) coeficientes de correção encontrados entre as variáveis que têm caráter demográfico e as de caráter econômico, especialmente as que se referem aos rendimentos mais elevados (veja apêndice 2). Em termos econômicos isto pode significar que o tamanho da população não migrante alocada no setor primário e sua distribuição por grupos etários estão forçando os rendimentos para baixo, dada a estrutura econômica existente.

A primeira vista, os valores positivos extremos da distribuição espacial se localizam em microrregiões nas quais a agricultura é inexistente (Fernando de Noronha, Guanabara e Distrito Federal). Entretanto, a classe que engloba os valores mais elevados se apresenta com 61 microrregiões; iniciando-se no noroeste de São Paulo, uma grande mancha contínua se estende pelo leste e norte de Mato Grosso, Rondônia, norte de Goiás, sul e nordeste do Pará e Amapá. Na mesma classe, em manchas isoladas: Roraima, Piauí, Maranhão, Ceará, Paraíba, Rio Grande do Norte, Sergipe, Minas Gerais, sul de Goiás, Espírito Santo, sul de São Paulo, Paraná e Santa Catarina — evidentemente, abrangendo os mais diversos tipos de produção agrícola. A classe imediatamente inferior a esta é a de maior frequência (244 microrregiões) e está presente em todas as unidades da Federação (exceto Rondônia, Roraima e Amapá); destaque-se que nesta categoria encontram-se tanto valores positivos quanto negativos. A terceira classe (32 microrregiões) surge, em pequenas manchas isoladas, em Santa Catarina, Paraná, São Paulo, Goiás, Pará, Piauí, Ceará, Pernambuco e Rio de Janeiro, além de apresentar certo agrupamento em Minas Gerais e

TABELA 3

**RESUMO DOS RESULTADOS DA ANÁLISE DE COMPONENTES
PRINCIPAIS PARA NÃO-MIGRANTES RURAIS**

INDICADOR	VETORES		
	Componente 1	Componente 2	Componente 3
X 1.....	-0,2233	-0,2363	-0,0332
X 2.....	-0,2706	-0,1716	-0,0047
X 3.....	-0,2742	-0,1683	-0,0047
X 4.....	-0,2760	-0,1565	-0,0145
X 5.....	-0,2742	-0,1537	-0,0483
X 6.....	-0,2576	-0,1634	-0,0851
X 7.....	-0,2613	-0,1774	-0,1006
X 8.....	-0,2295	0,1790	0,0098
X 9.....	-0,1981	0,2523	0,1138
X10.....	-0,1974	0,2574	0,1193
X11.....	-0,1529	0,2827	0,1572
X12.....	-0,2730	-0,1059	-0,0057
X13.....	-0,2730	-0,0958	-0,0191
X14.....	-0,2112	0,0090	-0,1998
X15.....	-0,1502	0,3173	-0,2031
X16.....	-0,1163	0,3438	-0,2097
X17.....	-0,1087	0,3340	-0,2095
X18.....	-0,1049	0,3158	-0,1793
X19.....	-0,1931	0,0681	-0,2776
X20.....	-0,1413	-0,1509	0,2202
X21.....	-0,1200	0,1205	0,3901
X22.....	-0,1023	0,1350	0,4251
X23.....	-0,1225	0,0725	0,3911
X24.....	-0,0746	0,1149	0,3170
X25.....	-0,0782	-0,0948	0,1163
<hr/>			
RAIZ CARACTERÍSTICA.....	11,0232	5,0605	2,9705
<hr/>			
PERCENTAGEM DA VARIÂNCIA TOTAL.....	0,44	0,20	0,12
<hr/>			
PERCENTAGEM CUMULATIVA DA VARIÂNCIA.....	0,44	0,64	0,76

FONTE: Tabulações Especiais — Censo Demográfico — 1970, IBGE, Rio de Janeiro.

formar uma faixa contínua paralela ao litoral da Bahia, bem como no norte e centro-sul do Rio Grande do Sul. As duas classes mais negativas aparecem como uma continuação da terceira tanto no Rio Grande do Sul como na Bahia, em Pernambuco e Minas Gerais, porém em São Paulo, no Rio de Janeiro, na Paraíba, no Maranhão e no Amazonas estão formando "ilhas" (veja o mapa 7).

Já a componente 2 indica uma estruturação na qual os efeitos dos rendimentos totais superiores a 2 salários mínimos e do emprego com mais de 1 salário mínimo são as variáveis mais relevantes, explicando 20% da variância total.

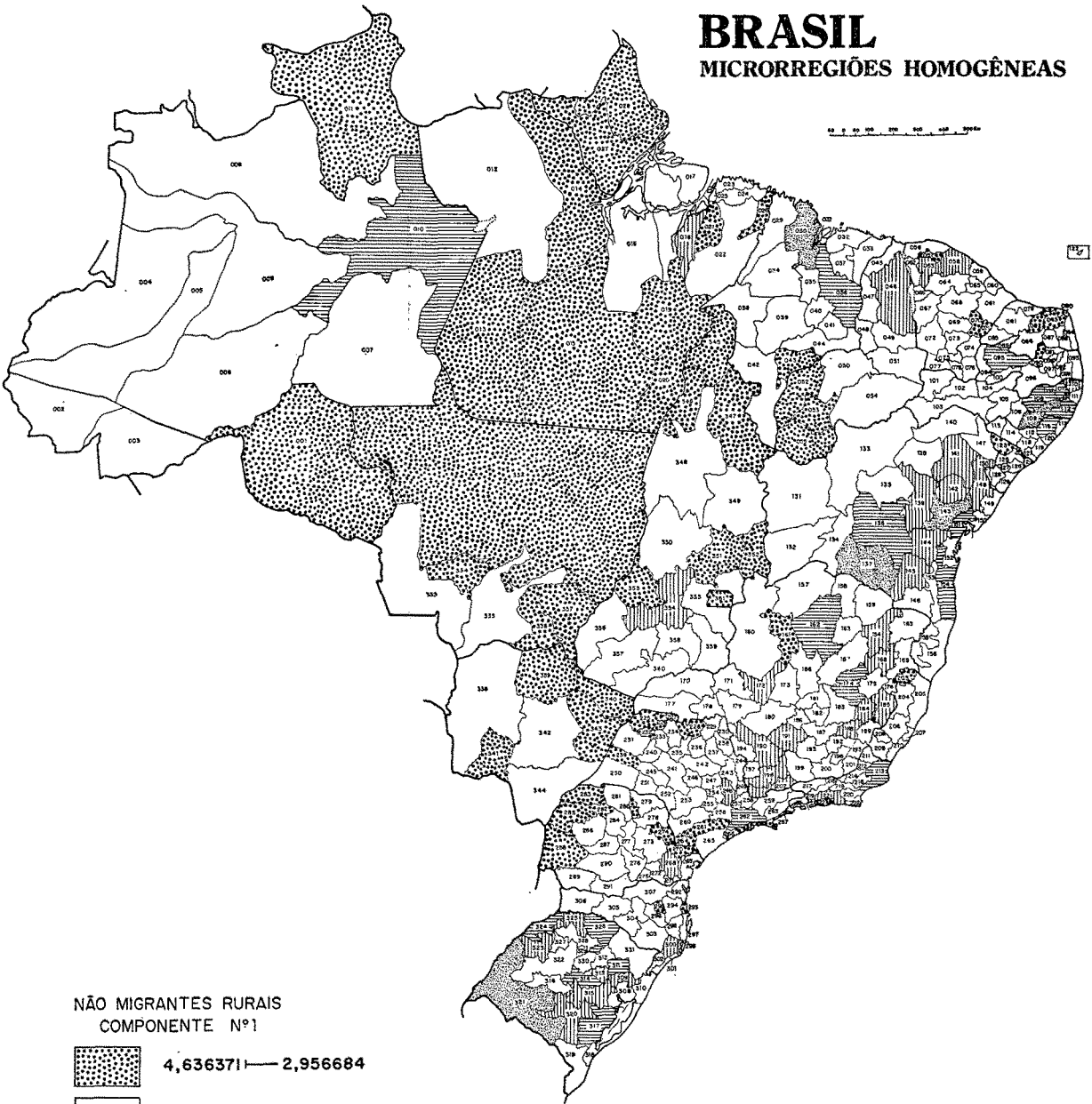
Para enfatizar que são estas variáveis que representam uma estrutura mais formal do mercado de trabalho, basta verificar que no mapa 8 os valores mais elevados se encontram justamente em torno das duas metrópoles nacionais (Grande São Paulo, Campinas, Fluminense do Grande Rio). Os valores da classe imediatamente inferior se localizam na campanha gaúcha e na microrregião vinicultora de Caxias do Sul. A terceira classe se estende em pequenas manchas pelas Regiões Sul e Sudeste, coincidindo, *grosso modo*, com áreas de agricultura comercial e também aparece em Belo Horizonte, na Bahia, no Maranhão e no Pará. A quarta classe é a de maior frequência (305 microrregiões), a qual engloba tudo que não é coberto pela última categoria, que se apresenta com uma mancha isolada em Minas Gerais, se estende do sul da Bahia na direção de Sergipe e do Piauí, englobando a porção sudeste deste estado. Uma pequena "ilha" em Alagoas, uma faixa contínua do agreste de Pernambuco alastrando-se pelo sertão da Paraíba, duas "ilhas" no Ceará e outra faixa do centro-norte do Piauí até o litoral do Maranhão encerram a distribuição espacial desta componente.

A terceira componente principal, por sua vez, identifica a parceria remunerada, explicando 12% da variância total. Sua distribuição espacial tem os valores extremos positivos nas microrregiões da Vertente Oriental do Caparaó (ES), Mata da Corda (MG) e Mato Grosso de Goiás (GO). As duas classes mais elevadas formam uma faixa que se estende de sul para norte no Rio Grande do Sul e formam uma pequena "ilha" no Paraná, isto na Região Sul. Em São Paulo existem três ocorrências isoladas e uma mancha no nordeste do estado que se estende por Minas Gerais. Ainda em Minas surge uma faixa que cobre, *grosso modo*, a Zona da Mata, penetrando no Espírito Santo, enquanto a oeste do estado uma faixa se alonga do Triângulo Mineiro para o norte e penetra em Goiás de leste para oeste. Na Região Nordeste há uma estreita faixa no sertão do Rio Grande do Norte e Ceará e uma "ilha" no nordeste do Ceará. Finalmente aparece no Amazonas a microrregião de Manaus. A classe intermediária contém 289 microrregiões e se encontra presente em todas as unidades da Federação. As duas classes inferiores se distribuem por uma faixa interrompida ao longo do litoral. Esta dimensão aparece no mapa 9.

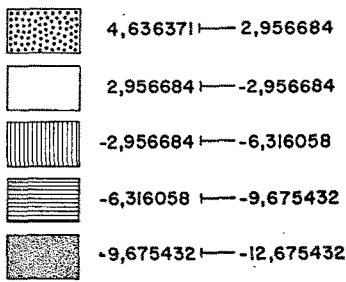
BRASIL

MICRORREGIÕES HOMOGÊNEAS

0 50 100 150 200 250



NÃO MIGRANTES RURAIS
COMPONENTE N°1



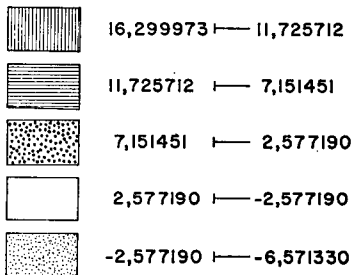
DILUS/8.01

BRASIL

MICRORREGIÕES HOMOGÊNEAS



NÃO MIGRANTES RURAIS
COMPONENTE N°2

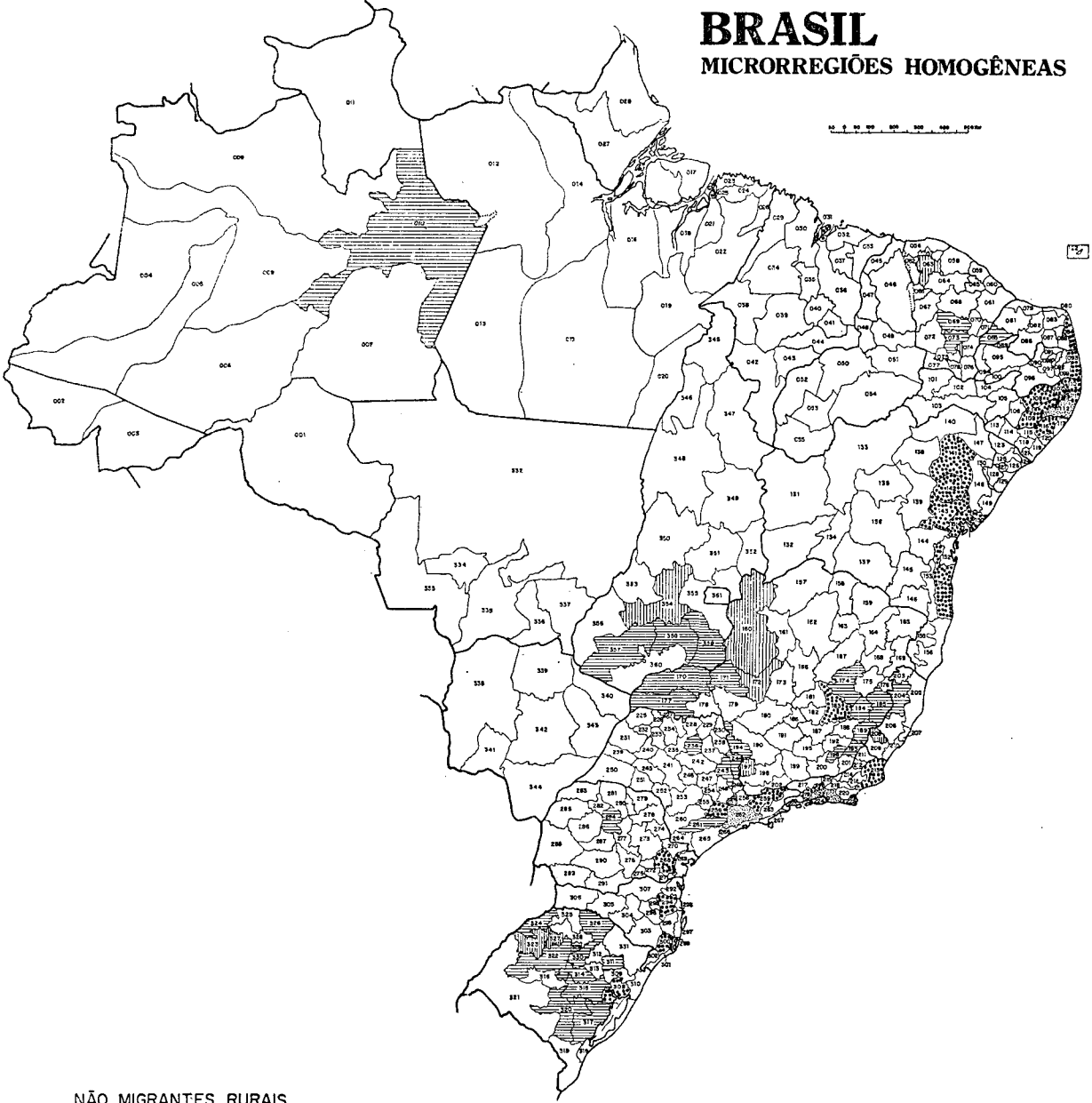


DILUS/2.01

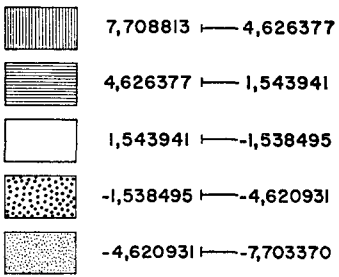
BRASIL

MICRORREGIÕES HOMOGÊNEAS

0 50 100 150 200 250 300



NÃO MIGRANTES RURAIS
COMPONENTE Nº3



DILUS/8.CI

Resumindo: os não migrantes rurais se estruturam no mercado, num primeiro momento, pelo volume de homens que estão nas atividades primárias e do emprego formal estável, porém com remuneração muito baixa. No segundo momento o emprego se torna o fator primordial, porém em todas as faixas salariais, o que se reflete nos rendimentos totais. Por último são os efeitos da remuneração da parceria que influenciam os mecanismos desse segmento do mercado de trabalho.

4. COMENTÁRIOS FINAIS

Com base exclusivamente nas variáveis aqui consideradas, verificou-se no decorrer deste estudo que, numa perspectiva dinâmica, o mercado de trabalho rural se desenvolve em três estágios, independentemente do segmento da população analisado.

No primeiro estágio emergem sempre como variáveis importantes na estruturação do mercado rural o número de homens em idades economicamente ativas no setor primário, o efeito dos rendimentos mais baixos e da estabilidade da posição na ocupação. Neste primeiro momento a diferenciação entre os grupos populacionais analisados se concretiza através do tipo de integração ao mercado, isto é, os migrantes rurais-rurais ingressam no sistema produtivo sob o regime de parceria, enquanto os não migrantes sob o regime de emprego, embora com salários muito baixos.

Estas são indicações de que, *ceteris paribus*, a oferta de mão-de-obra para as atividades agrícolas deprime o nível dos rendimentos rurais, o que permite que seja o fator terra o mais relevante neste estágio no dimensionamento do mercado de trabalho.

No estágio seguinte o regime de emprego em classes de rendimento mais elevadas predomina em todos os segmentos da população, mostrando, portanto, que, uma vez eliminados os efeitos do estágio anterior, formalizam-se as relações de trabalho, o fator capital passa a ser o mais importante na determinação do mercado e o nível de rendimentos do trabalho se eleva.

Finalmente, o mercado de trabalho rural se estrutura num terceiro momento para a população não migrante em função do regime de parceria, enquanto para a população migrante em função dos rendimentos auferidos, independentemente da posição na ocupação. Observe-se, porém, que este é um estágio residual e, de certa maneira, aparentemente contraditório do primeiro, indicando que o regime de parceria da população não migrante tem níveis de remuneração mais elevados.

Outro fato interessante que se pode observar no decorrer do trabalho é o alto grau de homogeneidade assumido pelas distribuições

espaciais de cada uma das componentes, mostrando que, levando-se em conta as posições extremas dos *scores*, uma política global de emprego rural pode ser efetivamente formulada.

Ainda tendo em vista contribuições para o desenho de um planejamento econômico e demográfico integrado, esta análise, na realidade, aponta a ordem em que um conjunto de variáveis deve ser abordado e em que medida. No caso, deve-se ressaltar que a pressão demográfica está se fazendo sentir no mercado de trabalho rural por meio de todas as faixas etárias, mas que é o nível de rendimentos que vai produzir efeitos concretos na estruturação deste mercado produtivo. Da mesma forma fica aparente que não é a migração rural-rural que está afetando o mercado de trabalho rural, pois as variáveis que o estruturam para este segmento populacional são as mesmas que estruturam o mercado como um todo. A fragilidade das relações de trabalho — o que se traduz pela importância conferida ao regime de parceria e do emprego com baixíssimos rendimentos constitui aspectos que também se destaca na análise.

5. BIBLIOGRAFIA

- BECKER, O.M.S., Montenegro, A.M.K e Bernardes, J.A. Mobilidade da Força de Trabalho: Principais Dimensões Sócio-Econômicas e Suas Implicações na Organização do Espaço. IBGE, Rio de Janeiro, maio 1979, mimeo.
- GAUDEMAR, J.P. *Mobilité du Travail et Accumulation du Capital*. F. Maspéro, Paris, 1976.
- IBGE. *Áreas de Atração e Evasão Populacional no Brasil no Período 1960-1970*. IBGE, Rio de Janeiro, 1979.
- MATHER, P. M. *Computational Methods of Multivariate Analysis*. John Wiley & Sons, New York, 1976.

APÊNDICE

1. VARIÁVEIS

1.1 — População total

- 1 — População total x situação de domicílio rural x setor primário x homens x 10 — 15 anos de idade.
- 2 — População total x situação de domicílio rural x setor primário x homens x 15 — 20 anos de idade.
- 3 — População total x situação de domicílio rural x setor primário x homens x 20 — 30 anos de idade.

- 4 — População total x situação de domicílio rural x setor primário x homens x 30 — 40 anos de idade.
- 5 — População total x situação de domicílio rural x setor primário x homens x 40 — 50 anos de idade.
- 6 — População total x situação de domicílio rural x setor primário x homens x 50 anos e mais de idade
- 7 — População total x situação de domicílio rural x 0 — 1 salário mínimo x homens x 10 anos e mais de idade.
- 8 — População total x situação de domicílio rural x 0 — 2 salários mínimos x homens x 10 anos e mais de idade.
- 9 — População total x situação de domicílio rural x 2 — 3 salários mínimos x homens x 10 anos e mais de idade.
- 10 — População total x situação de domicílio rural x 3 — 5 salários mínimos x homens x 10 anos e mais de idade.
- 11 — População total x situação de domicílio rural x 5 e mais salários mínimos x homens x 10 anos e mais de idade.
- 12 — População total x situação de domicílio rural x sem rendimentos x homens x 10 anos e mais de idade.
- 13 — População total x situação de domicílio rural x só ocupação habitual x 9 — 12 meses trabalhados.
- 14 — População total x situação de domicílio rural x empregados x 0 — 1 salário mínimo.
- 15 — População total x situação de domicílio rural x empregados x 1 — 2 salários mínimos.
- 16 — População total x situação de domicílio rural x empregados x 2 — 3 salários mínimos.
- 17 — População total x situação de domicílio rural x empregados x 3 — 5 salários mínimos.
- 18 — População total x situação de domicílio rural x empregados x 5 e mais salários mínimos.
- 19 — População total x situação de domicílio rural x empregados x sem rendimentos.
- 20 — População total x situação de domicílio rural x parceiros x 0 — 1 salário mínimo
- 21 — População total x situação de domicílio rural x parceiros x 1 — 2 salários mínimos.
- 22 — População total x situação de domicílio rural x parceiros x 2 — 3 salários mínimos.
- 23 — População total x situação de domicílio rural x parceiros x 3 — 5 salários mínimos.

- 24 — População total x situação de domicílio rural x parceiros x 5 e mais salários mínimos.
- 25 — População total x situação de domicílio rural x parceiros x sem rendimentos.

1.2 — Migrantes

- 1 — Migrantes x todos os tempos de residência x fluxo rural-rural x setor primário x homens x 10 — 15 anos de idade.
- 2 — Migrantes x todos os tempos de residência x fluxo rural-rural x setor primário x homens x 15 — 20 anos de idade.
- 3 — Migrantes x todos os tempos de residência x fluxo rural-rural x setor primário x homens x 20 — 30 anos de idade.
- 4 — Migrantes x todos os tempos de residência x fluxo rural-rural x setor primário x homens x 30 — 40 anos de idade.
- 5 — Migrantes x todos os tempos de residência x fluxo rural-rural x setor primário x homens x 40 — 50 anos de idade.
- 6 — Migrantes x todos os tempos de residência x fluxo rural-rural x setor primário x homens x 50 anos e mais de idade.
- 7 — Migrantes x todos os tempos de residência x fluxo rural-rural x setor ϕ — 1 salário mínimo x homens x 10 anos e mais de idade.
- 8 — Migrantes x todos os tempos de residência x fluxo rural-rural x 1 — 2 salários mínimos x homens x 10 anos e mais de idade.
- 9 — Migrantes x todos os tempos de residência x fluxo rural-rural x 2 — 3 salários mínimos x homens x 10 anos e mais de idade
- 10 — Migrantes x todos os tempos de residência x fluxo rural-rural x 3 — 5 salários mínimos x homens x 10 anos e mais de idade.
- 11 — Migrantes x todos os tempos de residência x fluxo rural-rural x 5 e mais salários mínimos x homens x 10 anos e mais de idade.
- 12 — Migrantes x todos os tempos de residência x fluxo rural-rural x sem rendimentos x homens x 10 anos e mais de idade.
- 13 — Migrantes x todos os tempos de residência x fluxo rural-rural x só ocupação habitual x 9 — 12 meses trabalhados.
- 14 — Migrantes x todos os tempos de residência x fluxo rural-rural x empregados x 0 — 1 salário mínimo.
- 15 — Migrantes x todos os tempos de residência x fluxo rural-rural x empregados x 1 — 2 salários mínimos.
- 16 — Migrantes x todos os tempos de residência x fluxo rural-rural x empregados x 2 — 3 salários mínimos.
- 17 — Migrantes x todos os tempos de residência x fluxo rural-rural x empregados x 3 — 5 salários mínimos.

- 18 — Migrantes x todos os tempos de residência x fluxo rural-rural x empregados x 5 e mais salários mínimos.
- 19 — Migrantes x todos os tempos de residência x fluxo rural-rural x empregados sem rendimentos.
- 20 — Migrantes x todos os tempos de residência x fluxo rural-rural x parceiros x 0 † 1 salário mínimo.
- 21 — Migrantes x todos os tempos de residência x fluxo rural-rural x parceiros x 1 † 2 salários mínimos.
- 22 — Migrantes x todos os tempos de residência x fluxo rural-rural x parceiros x 2 † 3 salários mínimos.
- 23 — Migrantes x todos os tempos de residência x fluxo rural-rural x parceiros x 3 † 5 salários mínimos
- 24 -- Migrantes x todos os tempos de residência x fluxo rural-rural x parceiros x 5 e mais salários mínimos.
- 25 -- Migrantes x todos os tempos de residência x fluxo rural-rural x parceiros x sem rendimentos.

1.3 — Não-migrantes

- 1 — Não-migrantes x situação de domicílio rural x setor primário x homens x 10 † 15 anos de idade.
- 2 — Não-migrantes x situação de domicílio rural x setor primário x homens x 15 † 20 anos de idade.
- 3 -- Não-migrantes x situação de domicílio rural x setor primário x homem x 20 † 30 anos de idade.
- 4 -- Não-migrantes x situação de domicílio rural x setor primário x homens x 30 † 40 anos de idade.
- 5 -- Não-migrantes x situação de domicílio rural x setor primário x homens x 40 † 50 anos de idade.
- 6 -- Não-migrantes x situação de domicílio rural x setor primário x homens x 50 anos e mais de idade.
- 7 -- Não-migrantes x situação de domicílio rural x 0 † 1 salário mínimo x homens x 10 anos e mais de idade.
- 8 -- Não-migrantes x situação de domicílio rural x 1 † 2 salários mínimos x homens x 10 anos e mais de idade.
- 9 -- Não-migrantes x situação de domicílio rural x 2 † 3 salários mínimos x homens x 10 anos e mais de idade.
- 10 — Não-migrantes x situação de domicílio rural x 3 † 5 salários mínimos x homens x 10 anos e mais de idade.
- 11 — Não-migrantes x situação de domicílio rural x 5 e mais salários mínimos x homens x 10 anos e mais de idade.

- 12 — Não-migrantes x situação de domicílio rural x sem rendimentos x homens x 10 anos e mais de idade.
- 13 — Não-migrantes x situação de domicílio rural x só ocupação habitual x 9 † 12 meses trabalhados
- 14 — Não-migrantes x situação de domicílio rural x empregados x 0 † 1 salário mínimo.
- 15 — Não-migrantes x situação de domicílio rural x empregados x 1 † 2 salários mínimos.
- 16 — Não-migrantes x situação de domicílio rural x empregados x 2 † 3 salários mínimos.
- 17 — Não-migrantes x situação de domicílio rural x empregados x 3 † 5 salários mínimos.
- 18 — Não-migrantes x situação de domicílio rural x empregados x 5 e mais salários mínimos.
- 19 — Não-migrantes x situação de domicílio rural x empregados x sem rendimentos.
- 20 — Não-migrantes x situação de domicílio rural x parceiros x 0 † 1 salário mínimo.
- 21 — Não-migrantes x situação de domicílio rural x parceiros x 1 † 2 salários mínimos.
- 22 — Não-migrantes x situação de domicílio rural x parceiros x 2 † 3 salários mínimos.
- 23 — Não-migrantes x situação de domicílio rural x parceiros x 3 † 5 salários mínimos.
- 24 — Não-migrantes x situação de domicílio rural x parceiros x 5 e mais salários mínimos.
- 25 — Não-migrantes x situação de domicílio rural x parceiros x sem rendimentos.

2. MATRIZES

2.1 — MATRIZ DE COEFICIENTES DE CORRELAÇÃO POPULAÇÃO RURAL

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	X11	X12	X13	X14	X15	X16	X17	X18	X19	X20	X21	X22	X23	X24	X25	
X 1	1,00																									
X 2	0,94	1,00																								
X 3	0,92	0,98	1,00																							
X 4	0,90	0,97	0,99	1,00																						
X 5	0,90	0,97	0,97	0,98	1,00																					
X 6	0,86	0,91	0,90	0,89	0,95	1,00																				
X 7	0,85	0,90	0,91	0,91	0,94	0,94	1,00																			
X 8	0,57	0,70	0,71	0,73	0,68	0,54	0,53	1,00																		
X 9	0,42	0,56	0,57	0,57	0,54	0,42	0,37	0,92	1,00																	
X10	0,34	0,48	0,49	0,50	0,48	0,38	0,33	0,84	0,95	1,00																
X11	0,20	0,35	0,37	0,39	0,37	0,28	0,28	0,71	0,82	0,88	1,00															
X12	0,87	0,95	0,94	0,94	0,94	0,89	0,85	0,78	0,68	0,60	0,44	1,00														
X13	0,87	0,94	0,93	0,94	0,93	0,84	0,81	0,79	0,68	0,60	0,46	0,93	1,00													
X14	0,40	0,51	0,50	0,52	0,57	0,58	0,67	0,38	0,34	0,37	0,46	0,48	0,51	1,00												
X15	0,08	0,19	0,20	0,22	0,23	0,18	0,23	0,64	0,68	0,70	0,74	0,31	0,28	0,52	1,00											
X16	-0,03	0,04	0,05	0,07	0,08	0,06	0,09	0,49	0,61	0,67	0,68	0,17	0,11	0,36	0,91	1,00										
X17	-0,05	0,01	0,01	0,04	0,04	0,02	0,06	0,40	0,53	0,64	0,63	0,12	0,08	0,31	0,78	0,93	1,00									
X18	-0,04	0,01	0,02	0,03	0,04	0,03	0,08	0,37	0,49	0,60	0,65	0,12	0,07	0,35	0,78	0,90	0,93	1,00								
X19	0,39	0,46	0,45	0,46	0,50	0,48	0,53	0,55	0,54	0,54	0,53	0,48	0,68	0,70	0,62	0,54	0,56	1,00								
X20	0,55	0,62	0,63	0,62	0,60	0,51	0,57	0,35	0,29	0,23	0,21	0,55	0,52	0,21	0,02	-0,05	-0,06	-0,07	0,19	1,00						
X21	0,53	0,59	0,60	0,61	0,55	0,37	0,40	0,63	0,54	0,45	0,42	0,56	0,62	0,23	0,25	0,10	0,08	0,06	0,32	0,66	1,00					
X22	0,48	0,52	0,51	0,53	0,49	0,33	0,33	0,57	0,53	0,46	0,44	0,50	0,57	0,22	0,26	0,13	0,12	0,10	0,32	0,57	0,94	1,00				
X23	0,47	0,50	0,50	0,51	0,48	0,34	0,34	0,52	0,48	0,43	0,41	0,48	0,53	0,19	0,22	0,10	0,07	0,06	0,29	0,56	0,86	0,91	1,00			
X24	0,38	0,43	0,43	0,45	0,41	0,28	0,28	0,52	0,51	0,50	0,55	0,43	0,49	0,23	0,35	0,24	0,24	0,22	0,35	0,42	0,68	0,73	0,72	1,00		
X25	0,46	0,47	0,47	0,47	0,45	0,37	0,34	0,36	0,32	0,25	0,22	0,46	0,45	0,09	0,08	0,01	0,01	0,00	0,32	0,53	0,58	0,58	0,54	0,44	1,00	

Análise de Componentes principais — 1

Ref. variáveis — lista 1

Fonte: Tabulações Especiais — Censo Demográfico 1970, IBGE.

-0,25 |—| 0,00 → fraca ρ negativa

+0,00 |—| 0,25 → fraca ρ positiva

0,26 |—| 0,50 → média ρ positiva

0,51 |—| 0,75 → forte ρ positiva

0,76 |—| 1,00 → fortíssima ρ positiva

2.2 — MATRIZ DE COEFICIENTES DE CORRELAÇÃO NÃO-MIGRANTES RURAIS

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	X11	X12	X13	X14	X15	X16	X17	X18	X19	X20	X21	X22	X23	X24	X25	
X 1	1,00																									
X 2	0,91	1,00																								
X 3	0,88	0,97	1,00																							
X 4	0,84	0,94	0,98	1,00																						
X 5	0,82	0,92	0,95	0,98	1,00																					
X 6	0,79	0,86	0,89	0,92	0,97	1,00																				
X 7	0,83	0,90	0,93	0,95	0,96	0,95	1,00																			
X 8	0,32	0,54	0,56	0,58	0,55	0,47	0,43	1,00																		
X 9	0,15	0,38	0,39	0,40	0,38	0,30	0,24	0,87	1,00																	
X10	0,15	0,37	0,38	0,39	0,38	0,31	0,25	0,80	0,94	1,00																
X11	-0,00	0,18	0,22	0,25	0,24	0,18	0,14	0,59	0,78	0,86	1,00															
X12	0,83	0,95	0,92	0,89	0,87	0,81	0,82	0,65	0,51	0,49	0,26	1,00														
X13	0,79	0,92	0,90	0,90	0,88	0,82	0,83	0,66	0,53	0,51	0,32	0,90	1,00													
X14	0,45	0,58	0,60	0,62	0,66	0,63	0,72	0,39	0,30	0,35	0,34	0,52	0,62	1,00												
X15	0,00	0,16	0,17	0,20	0,22	0,21	0,22	0,68	0,62	0,59	0,55	0,26	0,28	0,51	1,00											
X16	-0,07	0,05	0,05	0,08	0,10	0,10	0,09	0,56	0,58	0,56	0,50	0,17	0,15	0,33	0,89	1,00										
X17	-0,07	0,03	0,03	0,07	0,09	0,09	0,10	0,47	0,49	0,52	0,47	0,15	0,13	0,35	0,82	0,91	1,00									
X18	-0,05	0,04	0,05	0,08	0,09	0,08	0,10	0,42	0,44	0,47	0,50	0,12	0,13	0,35	0,75	0,82	0,85	1,00								
X19	0,40	0,49	0,48	0,49	0,53	0,54	0,58	0,44	0,31	0,32	0,25	0,52	0,50	0,71	0,60	0,53	0,53	0,47	1,00							
X20	0,44	0,52	0,52	0,52	0,49	0,46	0,52	0,09	0,09	0,10	0,07	0,43	0,37	0,21	-0,08	-0,10	-0,09	-0,09	0,01	1,00						
X21	0,09	0,25	0,25	0,25	0,19	0,11	0,13	0,45	0,49	0,45	0,45	0,27	0,26	0,08	0,20	0,13	0,13	0,14	0,02	0,41	1,00					
X22	0,05	0,17	0,17	0,17	0,15	0,10	0,08	0,32	0,47	0,46	0,47	0,19	0,18	0,07	0,15	0,12	0,12	0,13	-0,01	0,31	0,72	1,00				
X23	0,21	0,28	0,28	0,28	0,25	0,22	0,21	0,28	0,36	0,41	0,45	0,27	0,25	0,12	0,11	0,07	0,07	0,11	0,05	0,38	0,55	0,72	1,00			
X24	0,04	0,12	0,12	0,11	0,08	0,04	0,03	0,20	0,32	0,35	0,48	0,14	0,15	0,05	0,11	0,08	0,09	0,13	0,00	0,17	0,41	0,44	0,50	1,00		
X25	0,27	0,29	0,27	0,26	0,26	0,26	0,22	0,07	0,04	0,02	0,01	0,27	0,20	0,00	-0,04	-0,05	-0,06	-0,03	0,17	0,37	0,21	0,11	0,14	0,15	1,00	

Análise de Componentes Principais — 2

Ref. variáveis — lista 2

Fonte: Tabulações Especiais — Censo Demográfico 1970, IBGE.

-0,25 |—| 0,00 → fraca ρ negativa+0,00 |—| 0,25 → fraca ρ positiva0,26 |—| 0,50 → média ρ positiva0,51 |—| 0,75 → forte ρ positiva0,76 |—| 1,00 → fortíssima ρ positiva

2.3 — MATRIZ DE COEFICIENTES DE CORRELAÇÃO —
MIGRANTES RURAIS-RURAIS — TODOS OS TEMPOS
RESIDÊNCIA

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	X11	X12	X13	X14	X15	X16	X17	X18	X19	X20	X21	X22	X23	X24	X25	
X 1	1,00																									
X 2	0,98	1,00																								
X 3	0,96	0,99	1,00																							
X 4	0,94	0,98	0,99	1,00																						
X 5	0,92	0,97	0,98	0,99	1,00																					
X 6	0,88	0,93	0,95	0,96	0,98	1,00																				
X 7	0,91	0,95	0,97	0,98	0,98	0,96	1,00																			
X 8	0,91	0,94	0,95	0,95	0,92	0,92	0,90	1,00																		
X 9	0,84	0,87	0,87	0,88	0,88	0,88	0,81	0,96	1,00																	
X10	0,77	0,80	0,81	0,82	0,83	0,83	0,75	0,91	0,97	1,00																
X11	0,78	0,81	0,82	0,83	0,83	0,82	0,79	0,88	0,91	0,92	1,00															
X12	0,98	0,99	0,98	0,97	0,95	0,92	0,93	0,95	0,90	0,83	0,84	1,00														
X13	0,96	0,98	0,98	0,98	0,97	0,95	0,94	0,96	0,91	0,85	0,85	0,98	1,00													
X14	0,62	0,69	0,71	0,72	0,74	0,73	0,77	0,65	0,60	0,57	0,68	0,66	0,70	1,00												
X15	0,54	0,59	0,60	0,60	0,61	0,60	0,62	0,69	0,68	0,66	0,74	0,60	0,61	0,77	1,00											
X16	0,25	0,29	0,30	0,31	0,32	0,32	0,33	0,43	0,48	0,54	0,56	0,32	0,31	0,49	0,82	1,00										
X17	0,12	0,15	0,16	0,17	0,19	0,18	0,18	0,25	0,32	0,44	0,41	0,17	0,17	0,30	0,52	0,83	1,00									
X18	0,11	0,14	0,15	0,16	0,17	0,17	0,18	0,21	0,27	0,39	0,43	0,17	0,16	0,31	0,50	0,74	0,87	1,00								
X19	0,75	0,78	0,77	0,78	0,79	0,76	0,78	0,77	0,76	0,72	0,79	0,79	0,78	0,78	0,78	0,58	0,38	0,37	1,00							
X20	0,81	0,84	0,85	0,86	0,85	0,82	0,86	0,76	0,70	0,65	0,72	0,82	0,82	0,65	0,50	0,23	0,10	0,10	0,69	1,00						
X21	0,85	0,86	0,84	0,84	0,84	0,79	0,82	0,79	0,73	0,67	0,74	0,84	0,84	0,69	0,57	0,28	0,14	0,12	0,73	0,92	1,00					
X22	0,79	0,79	0,76	0,76	0,77	0,73	0,72	0,69	0,63	0,70	0,78	0,78	0,65	0,55	0,29	0,17	0,16	0,73	0,83	0,96	1,00					
X23	0,75	0,74	0,71	0,71	0,72	0,68	0,68	0,67	0,64	0,61	0,64	0,73	0,73	0,57	0,49	0,26	0,12	0,10	0,68	0,78	0,90	0,92	1,00			
X24	0,70	0,71	0,67	0,67	0,67	0,63	0,66	0,63	0,59	0,56	0,66	0,70	0,68	0,58	0,56	0,35	0,21	0,20	0,73	0,69	0,74	0,76	0,73	1,00		
X25	0,77	0,76	0,74	0,74	0,73	0,69	0,70	0,69	0,68	0,63	0,69	0,77	0,75	0,53	0,46	0,24	0,13	0,14	0,77	0,75	0,80	0,82	0,77	0,67	1,00	

Análise de Componentes Principais — 4

Ref. variáveis — lista 4

Fonte: Tabulações Especiais — Censo Demográfico 1970, IBGE.

0,00 —| 0,25 → fraca ρ positiva

0,26 —| 0,50 → média ρ positiva

0,51 —| 0,75 → forte ρ positiva

0,76 —| 1,00 → fortíssima ρ positiva

NÃO ESTACIONARIEDADE EM MODELOS DE REGRESSÃO: UMA APLICAÇÃO AO COMPORTAMENTO DE DEPÓSITOS EM CADERNETAS DE POUPANÇA*

Edmundo Serebrenick **
Banco Nacional da Habitação

SUMÁRIO

Resumo

1. *Introdução*
2. *As técnicas propostas*
 - 2.1 — *O modelo básico de regressão*
 - 2.2 — *Os resíduos recursivos e suas propriedades*
 - 2.3 — *Expressões recursivas*
 - 2.4 — *1.º teste BDE*
 - 2.5 — *2.º teste BDE*
3. *Aplicação das técnicas BDE: estudo do comportamento dos depósitos das cadernetas de poupança*

* Este artigo é um resumo da Tese de Mestrado do autor apresentada no Programa de Engenharia de Produção da COPPE/UFRJ, sob a orientação do professor Dr. Basílio de Bragança Pereira.

** O autor agradece ao CNPq pelo suporte financeiro, através de bolsa de estudos, que lhe permitiu concluir os créditos de mestrado; ao professor Dr. Basílio de Bragança Pereira, pela segura e dedicada orientação e ao economista Justiniano Leite de Castro, pelas sugestões e comentários.

- 3.1 — Apresentação
- 3.2 — Modelo utilizado
- 3.3 — Análise dos resultados
 - 3.3.1 — Resíduos de mínimos quadrados
 - 3.3.2 — Testes BDE
 - 3.3.3 — Vetor dos parâmetros
 - 3.3.4 — Regressão móvel
- 3.4 — Interpretação
- 3.5 — Estimação e simulação dos sub-modelos
 - 3.5.1 — Estimação
 - 3.5.2 — Simulação
 - 3.5.3 — Comparação entre os gráficos BDE resultantes das observações reais e os da simulação

4. Os programas de computador

Bibliografia

RESUMO

Este trabalho trata da aplicação das técnicas propostas por Brown, Durbin e Evans (1), destinadas ao estudo da estabilidade de modelos de regressão linear no tempo.

Resíduos recursivos com distribuição normal, independentes, com média zero e variância constante, são introduzidos, sendo apresentados testes baseados nas somas acumuladas simples e dos quadrados destes resíduos. Ênfase especial é dada ao uso de métodos gráficos devido ao poder visual dos testes de soma acumulada. Outra técnica baseada na estimação de regressões móveis é apresentada.

O uso das técnicas é ilustrado pela sua aplicação a um modelo de regressão linear representativo do crescimento dos depósitos das cadernetas de poupança no Brasil, sob o Sistema Financeiro da Habitação, nos seus dez primeiros anos de existência.

1. INTRODUÇÃO

O objetivo desse trabalho é descrever e aplicar um conjunto de técnicas para testar a constância das relações de regressão de modelos lineares no tempo e estimar os locais aproximados onde as relações se alteram. As técnicas a serem apresentadas são devidas a Brown, Durbin e Evans (1), justificando, assim, a designação de testes BDE

A primeira idéia, ao se procurar mudanças estruturais em modelos de regressão, é de se utilizar de alguma técnica de análise dos resíduos de mínimos quadrados. Entretanto, o gráfico desses resíduos ou do

quadrado desses resíduos contra o tempo não é um indicador sensível para detectar pequenas ou graduais mudanças nos coeficientes do vetor dos parâmetros. Colocado dessa maneira, o problema se assemelha com o da detecção de mudanças da média em um processo de controle industrial no qual a técnica de soma acumulada introduzida por Page (11, 12) é um indicador melhor da variação da média. Tal fato sugere a obtenção da soma acumulada dos resíduos de mínimos quadrados ou da soma do quadrado desses resíduos. Esses resíduos, entretanto, são correlacionados, sendo de difícil tratamento. A hipótese nula de constância das relações de regressão pode ser melhor investigada através das somas acumuladas simples e do quadrado dos resíduos recursivos a serem definidos na próxima seção. As estatísticas obtidas com esses resíduos, mediante aproximações, permitem o estabelecimento de barreiras de significância para os testes.

Outros testes para investigar a constância das relações de regressão são encontrados na literatura, destacando-se os devidos a Quandt (13), Chow (2) e Farley e Hinich (7, 8). A característica comum desses três testes é de, a partir de hipóteses previamente formuladas, valer-se de testes formais de significância para rejeitar ou não as hipóteses iniciais. Os testes BDE, por outro lado, são de grande utilidade quando, na maioria dos casos, o conhecimento das observações não permite o estabelecimento de hipóteses estatísticas alternativas. Os níveis críticos e o caráter visual desses testes de somas acumuladas mostram o comportamento do caminho amotral das suas estatísticas, apontando desvios significantes e não significantes das suas linhas médias, servindo para interpretar os dados e rejeitar ou não a hipótese de constância.

Uma vez constatada a instabilidade das relações do modelo, o exame gráfico dos componentes do vetor dos parâmetros é útil para detectar a origem das mudanças. Para confirmar a interpretação realizada é informativo obter os gráficos nos dois sentidos do tempo.

Brown, Durbin e Evans (1) apresentam também uma técnica baseada na obtenção de regressões móveis, estimadas pela adaptação às observações de um pequeno segmento com n sucessivas observações movendo-se ao longo da série. Os gráficos dos coeficientes destas regressões fornecem evidência complementar da instabilidade do modelo, indicando os locais aproximados das trocas de valor dos coeficientes. Também a variância residual destas regressões pode ser estimada e o traçado do seu gráfico ser utilizado para investigar a constância de σ^2 .

Em linhas gerais, a esquematização do trabalho é a seguinte: a seção 1 apresenta o trabalho e define os objetivos; a seção 2 apresenta as técnicas propostas; a seção 3 ilustra as técnicas apresentadas ao estudo dos depósitos das cadernetas de poupança no Brasil nos dez primeiros anos de sua existência sob o Sistema Financeiro da Habitação (SFH) e a seção 4 descreve, em linhas gerais, os programas de computador para o exemplo da aplicação dos testes.

2. AS TÉCNICAS PROPOSTAS

2.1 — O modelo básico de regressão

O modelo básico de regressão considerado é:

$$y_t = x_t' \beta_t + u_t \quad t = 1, 2, \dots, T$$

onde, no tempo t :

$$y_t \text{ — observação da variável dependente} \quad (1 \times 1)$$

$$x_t' \text{ — vetor das variáveis independentes} \quad (1 \times k)$$

$$\beta_t \text{ — vetor dos parâmetros} \quad (1 \times k)$$

$$u_t \text{ — erro do modelo, admitindo ser indep. } N(0, \sigma_t^2) \quad (1 \times 1)$$

O vetor β_t e σ_t^2 são escritos com o subscrito t para indicar que podem variar no tempo.

O vetor x_t é não-estocástico, excluindo-se, portanto, do estudo modelos auto-regressivos.

A hipótese H_0 de constância é:

$$\begin{aligned} \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta \\ \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma^2 \end{aligned}$$

Embora o maior objetivo seja de detectar diferenças entre os β 's, será exemplificada a técnica que permite investigar a constância do σ^2 .

2.2 — Os resíduos recursivos e suas propriedades

Os resíduos recursivos são definidos por:

$$w_r = \frac{y_r - x_r' b_{r-1}}{(1 + x_r' P_{r-1} x_r)^{1/2}} \quad r = k + 1, \dots, T \quad (1)$$

onde:

b_{r-1} = vetor da estimativa de mínimos quadrados de β , obtido com $r - 1$ observações — $(1 \times k)$

p_{r-1} = $(X_{r-1}' X_{r-1})^{-1}$ = matriz $(k \times k)$, onde:

X_{r-1} = matriz dos regressores com $r - 1$ observações — $((r - 1) \times k)$

y_r = observação recebida no instante r — (1×1)

x_r = vetor coluna da r -ésima linha de x_t — $(k \times 1)$

Sob a hipótese H_0 , w_{k+1}, \dots, w_T são variáveis aleatórias normais independentes com média zero e desvio padrão σ^2 . (Para verificação desta e das demais expressões recursivas, ver o trabalho original deste autor (14), cap. III ou Brown, Durbin e Evans (1).

2.3 — Expressões recursivas

As duas expressões apresentadas a seguir são utilizadas quando se deseja desenvolver uma forma recursiva da expressão $b_r = P_r X_r' Y_r$, na qual a estimativa b_r , após r observações, é uma soma linear da estimativa b_{r-1} , obtida após $r - 1$ observações, com um termo corretivo baseado na nova informação y_r , recebida no instante r .

$$P_r = P_{r-1} - \frac{P_{r-1} x_r x_r' P_{r-1}}{1 + x_r' P_{r-1} x_r} \quad (2)$$

$$b_r = b_{r-1} + P_r x_r (y_r - x_r' b_{r-1}) \quad (3)$$

A expressão recursiva para a atualização da soma dos quadrados dos resíduos de mínimos quadrados com r observações, S_r , é:

$$S_r = S_{r-1} + w_r^2 \quad r = k + 1, \dots, T$$

Além dos testes recursivos a serem apresentados na seção seguinte, um procedimento útil para se investigar a variação dos β_t é adaptar às observações um pequeno segmento de n sucessivas observações e mover este segmento ao longo da série.

As quantidades exigidas para cada novo segmento são obtidas, inicialmente, através da adição de uma nova observação no segmento anterior, eliminando-se, após, o efeito da primeira observação daquele segmento através das seguintes expressões análogas as três expressões anteriormente citadas:

$$P_{r-1} = P_r + \frac{P_r x_1 x_1' P_r}{1 - x_1' P_r x_1} \quad (5)$$

$$b_{r-1} = b_r - P_r x_1 (y_1 - x_1' b_r) \quad (6)$$

$$S_{r-1} = S_r - w_1^2 \quad (7)$$

onde o índice 1 representa a primeira observação do segmento anterior a ser eliminada no próximo segmento, e $r - 1$, o número de observações do segmento móvel.

2.4 — 1.º teste BDE

Seja o modelo de regressão linear:

$$y_t = x_t' \beta_t + u_t \quad t = 1, \dots, T$$

Se β_t é constante até o ponto $t = t_0$ e difere dessa constante para $t > t_0$, os resíduos recursivos w_r terão média zero de r até t_0 , divergindo desse valor em diante. Esse fato sugere algum exame gráfico para revelar o comportamento dos w_r através da soma W_r , definida por:

$$W_r = \frac{1}{\hat{\sigma}} \sum_{k+1}^r w_j \quad r = k+1, \dots, T$$

onde $\hat{\sigma}$ é a estimativa do desvio padrão baseada na estimação de uma única estrutura de regressão para todas as observações.

Das propriedades dos resíduos recursivos sob H_0 , a seqüência W_{k+1}, \dots, W_T é uma seqüência de variáveis normais com as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} E(W_r) &= 0 \\ V(W_r) &= (r - k) \\ \text{Cov}(W_r, W_s) &= \min(r, s) - k \end{aligned}$$

Um método apropriado para testar a significância dos W_r da sua linha de valor médio é obter duas linhas simétricas acima e abaixo de zero, tais que a probabilidade de ultrapassar uma ou ambas as linhas seja α o nível de significância especificado.

Para a formulação do teste, W_r é aproximado pelo processo de movimento browniano $\{Z_t, k \leq t \leq T\}$, de mesmas características de W_r onde, agora, o intervalo entre as observações tende a zero, o que equivale a considerar a soma W_r contínua.

A determinação das linhas de significância é feita em dois estágios:

i) É desejada a obtenção de curvas tais que a probabilidade do caminho amostral ultrapassar estas curvas em qualquer ponto, de $t = k$ a $t = T$, seja constante e igual a α . O desvio padrão de Z_t é $\sqrt{t - k}$. Conseqüentemente, as curvas deverão ser da forma $\pm \lambda \sqrt{t - k}$, sendo λ uma constante.

ii) Entretanto, são desejadas linhas retas. O procedimento proposto é escolher a família de linhas tangentes às curvas $\pm \lambda \sqrt{t - k}$, nos pontos da metade do caminho entre $t = k$ e $t = T$. Essas linhas passarão pelos pontos $(k, \pm a \sqrt{T - k})$ e $(T, \pm 3a \sqrt{T - k})$, onde $a = \frac{\lambda}{4}$ e suas equações serão:

$$y = \pm [a (T - k)^{1/2} + 2a (T - k)^{-1/2} (t - k)] \quad (8)$$

Deseja-se obter o valor de a nestas equações, tal que a probabilidade de Z_t atravessar uma linha dessa família seja $\frac{1}{2} \alpha$.

De acordo com o lema 3 de Durbin (5), que dá a probabilidade de um processo de movimento browniano ultrapassar uma linha reta num determinado intervalo, os autores do teste obtiveram os seguintes resultados para a e α :

$$\begin{array}{ll} \alpha = 0,01 & a = 1,143 \\ \alpha = 0,05 & a = 0,948 \\ \alpha = 0,10 & a = 0,850 \end{array}$$

O procedimento para o teste é o seguinte: é traçado o gráfico da soma acumulada W_r e se este gráfico cruzar uma das linhas, a hipótese H_0 é rejeitada.

2.5 — 2.º teste BDE

Este teste utiliza a estatística s_r definida por:

$$s_r = \frac{\sum_{k+1}^r w_j^2}{\sum_{k+1}^T w_t^2} \quad r = k + 1, \dots, T$$

Os s_r representam uma seqüência de números positivos monotonicamente crescentes, com $s_T = 1$.

Sob H_0 , s_r tem uma distribuição beta com $E(s_r) = \frac{r-k}{T-k}$ (Garbade 9). Este resultado sugere o traçado do par de linhas $\pm c_0 + \frac{r-k}{T-k}$, paralelas à linha $E(s_r)$, tais que a probabilidade do caminho amostral atravessar uma ou ambas as linhas seja o nível de significância α .

Para a determinação de c_0 é admitida, inicialmente, a diferença $(T-k)$ par. Neste caso, a distribuição conjunta das $s_{k+2}, s_{k+4}, \dots, s_{T-2}$ estatísticas é a mesma de uma amostra ordenada de $1/2 (T-k) - 1$ observações independentes de uma distribuição uniforme $(0, 1)$. Este resultado é conhecido na literatura (Durbin (4)).

Uma tabela de valores significantes da estatística

$$c^+ = \max_j [s_{k+z_j} - E(s_{k+z_j})],$$

onde $E(s_{k+z_j}) = \frac{m}{j}$, $j = 1, \dots, \overbrace{\frac{1}{2} (T-k) - 1}^m$ é encontrada em Durbin (6).

O procedimento proposto para o teste é considerar os valores tabelados, aproximações para os valores significantes das estatísticas:

$$c_i^+ = \underset{i=1, \dots, T-k-1}{m\acute{a}x} \left(s_{k+i} - \frac{i}{T-k} \right) \quad e$$

$$c_i^- = \underset{i=1, \dots, T-k-1}{m\acute{a}x} \left(\frac{i}{T-k} - s_{k+i} \right)$$

os quais representam os desvios máximos, positivo e negativo, de todo o conjunto das $T-k-1$ estatísticas $s_{k+1}, s_{k+2}, \dots, s_{T-1}$ e não apenas das $\frac{T-k}{2} - 1$ estatísticas.

Dado um nível de significância α , c_0 poderá ser obtido, entrando-se na tabela com $n = \frac{1}{2} (T-k) - 1$ e $\frac{1}{2} \alpha$. Se $T-k$ é ímpar, o procedimento proposto é interpolar linearmente entre os valores de $n = \frac{1}{2} (T-k) - \frac{3}{2}$ e $n = \frac{1}{2} (T-k) - \frac{1}{2}$.

Simulações executadas por outro autor mostraram que este teste dá resultados significantes mais freqüentemente que o teste exato daria, mas que a discrepância é muito pequena quando $(T-k)$ excede 30.

3. APLICAÇÃO DAS TÉCNICAS BDE: ESTUDO DO COMPORTAMENTO DOS DEPÓSITOS DAS CADERNETAS DE POUPANÇA

3.1 — Apresentação

A caderneta de poupança dentro do SFH foi instituída pela Resolução n.º 29/80 de 31-10-68 do Conselho Administrativo do Banco Nacional da Habitação e regulamentada pela Circular da Superintendência dos Agentes Financeiros n.º 02/19/69 de 03-01-69 do mesmo Banco.

No decorrer dos seus dez primeiros anos de existência várias foram as modificações introduzidas no seu mecanismo, através de diversos decretos-lei e resoluções do Conselho de Administração do BNH para o seu aperfeiçoamento.

O exemplo da aplicação tem por objetivo estudar a influência da regulamentação introduzida no ritmo da captação dos depósitos das cadernetas de poupança. Para tal é necessário formular um modelo matemático representativo da evolução dos depósitos para o traçado dos gráficos citados nas seções 1 e 2.

A aplicação consiste, basicamente, de 4 etapas: a primeira, de elaboração do modelo matemático; a segunda, de análise dos gráficos resultantes; a terceira, de interpretação da análise e a quarta, de esti-

mação e simulação dos submodelos de acordo com a interpretação realizada. A simulação é feita para comparação com os gráficos BDE resultantes das observações reais.

3.2 — Modelo utilizado

O modelo utilizado para os testes, foi:

$$y_t = a_0 + a_1 UPC1_t + u_t \quad t = 1, \dots, 42 \quad (9)$$

onde y_t = valor dos depósitos, em *UPC*, no último mês dos trimestres

$UPC1_t$ = valor "normalizado" da *UPC*, em Cr\$, obtido pela estimação da variável UPC_t , da curva,

$$UPC_t = b_0 \cdot b_1^{t-1} + u_t \quad t = 1, \dots, 42$$

onde UPC_t = valor da *UPC*, em Cr\$, no último mês dos trimestres

u_t = erro do modelo

t = índice representativo do último mês dos trimestres, variando de 1 (março/69) a 42 (junho/79).

A proporcionalidade postulada entre as variáveis y_t e UPC_t supõe (o que é razoável) que maiores valores da *UPC* refletem maiores depósitos no trimestre. A variável $UPC1_t$, conforme apresentada, é uma transformação da *UPC* objetivando melhorar o coeficiente de determinação da regressão.

Para estimação dos parâmetros do modelo utilizado foram obtidas as seguintes estatísticas, pela aplicação às observações, da rotina *SPSS* implantada no Núcleo de Computação Eletrônica da UFRJ.

$$R^2 = 0,98869$$

$$\hat{\sigma} = 35.497,07359$$

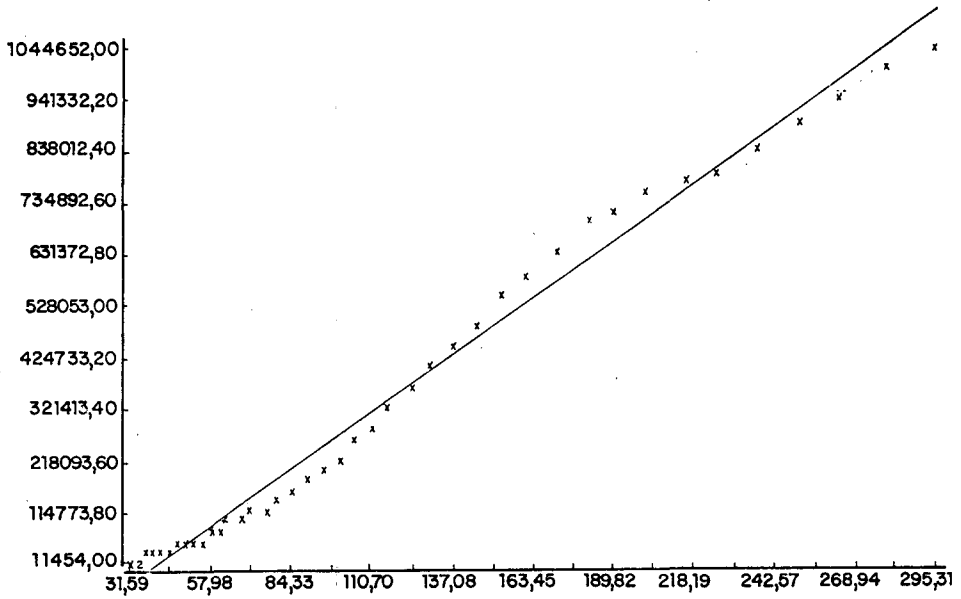
$$\hat{a}_0 = 162.968,12081$$

$$\hat{a}_1 = 4.285,48570$$

$$F = 3.495,72401 > F_{1,40} \quad (\alpha = 5\%)$$

O gráfico das observações, com a localização aproximada da reta de regressão, está representado na figura 1.

Figura 1



3.3 — Análise dos resultados

3.3.1 — Resíduos de mínimos quadrados

Gráfico 1

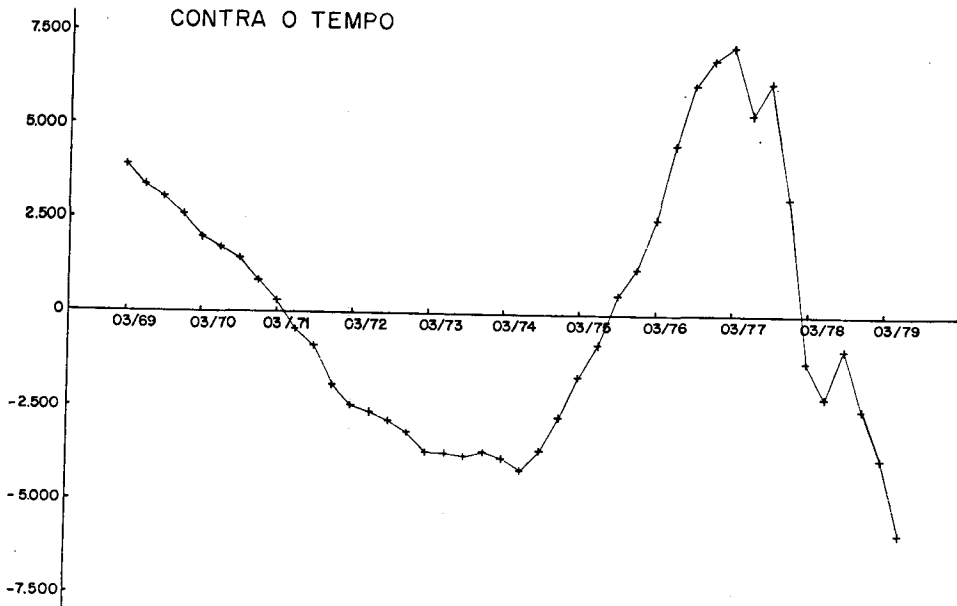
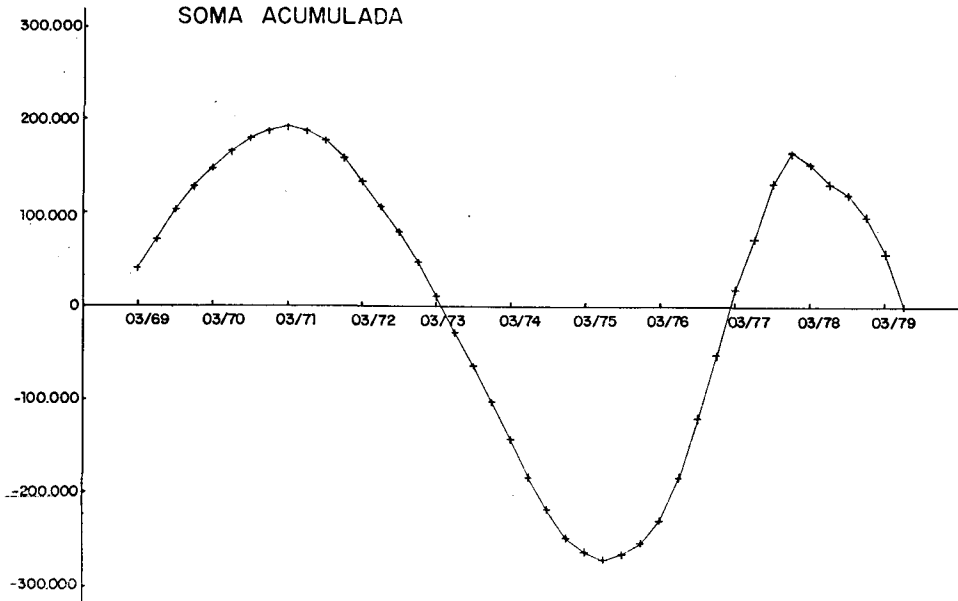


Gráfico 2



As características incomuns desses gráficos são a seqüência de alteração dos sinais dos resíduos do gráfico 1, ocorrendo com probabilidade $< 10^{-6}$ (Draper e Smith, p. 95-99 (3), e a forma contínua do gráfico 2. O modelo deve, portanto, ser considerado suspeito e serem procuradas as causas dessas anormalidades.

3.3.2 — Testes BDE

A análise visual do caminho amostral das estatísticas dos testes considera dois aspectos: mudanças de direção e os níveis críticos.

3.3.2.1 — Sentido direto

Gráfico 3

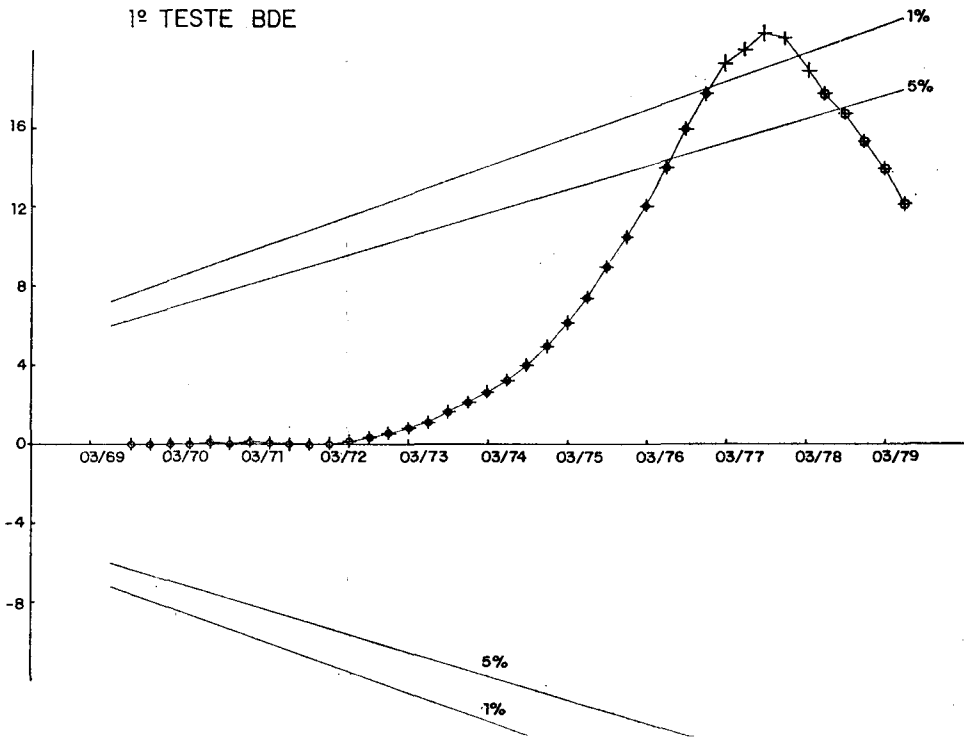
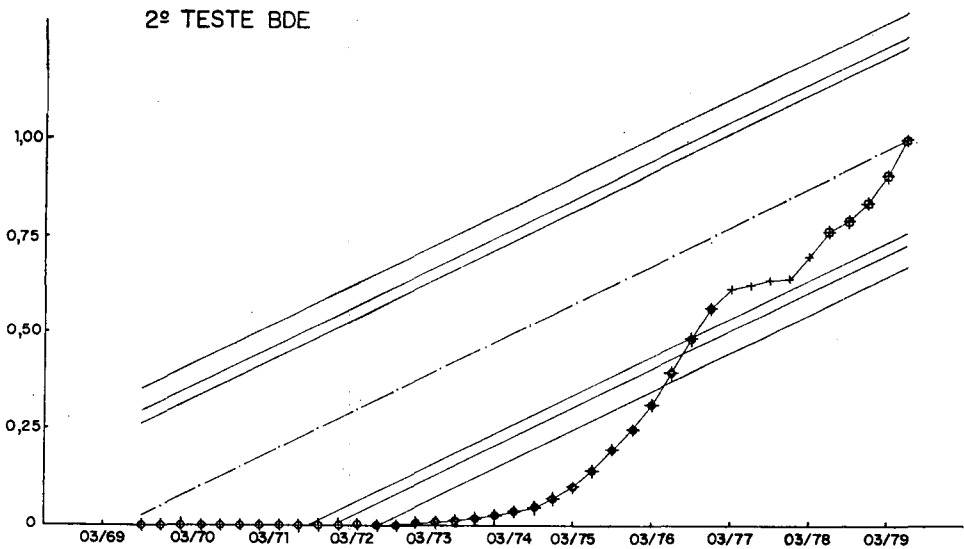


Gráfico 4



3.3.2.2 — Sentido inverso

Gráfico 5

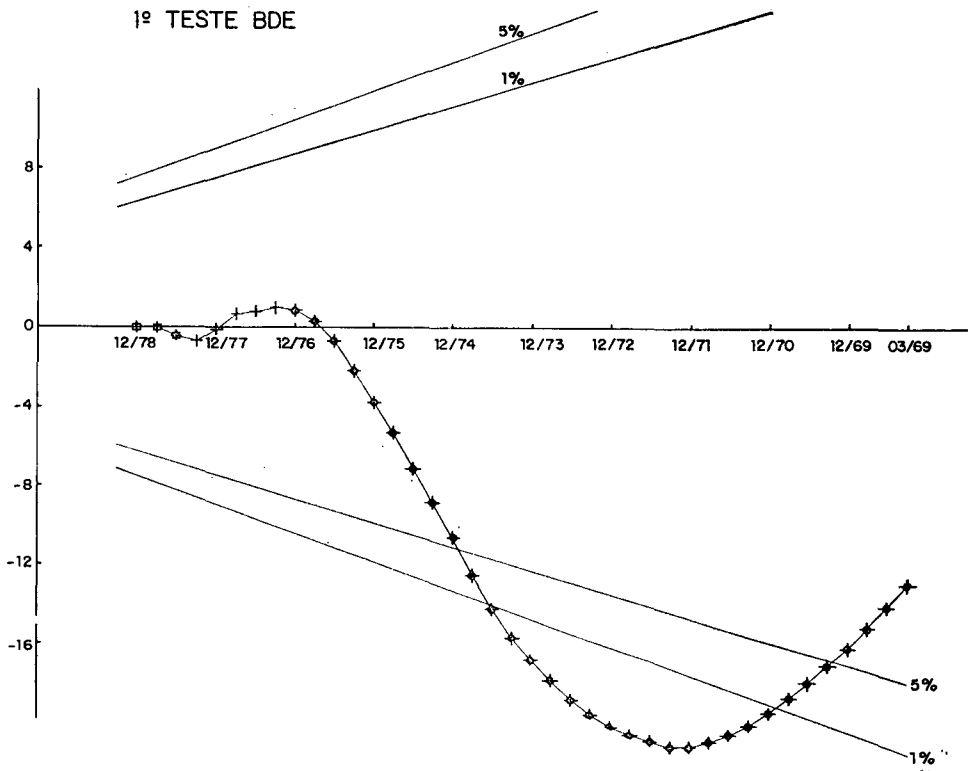
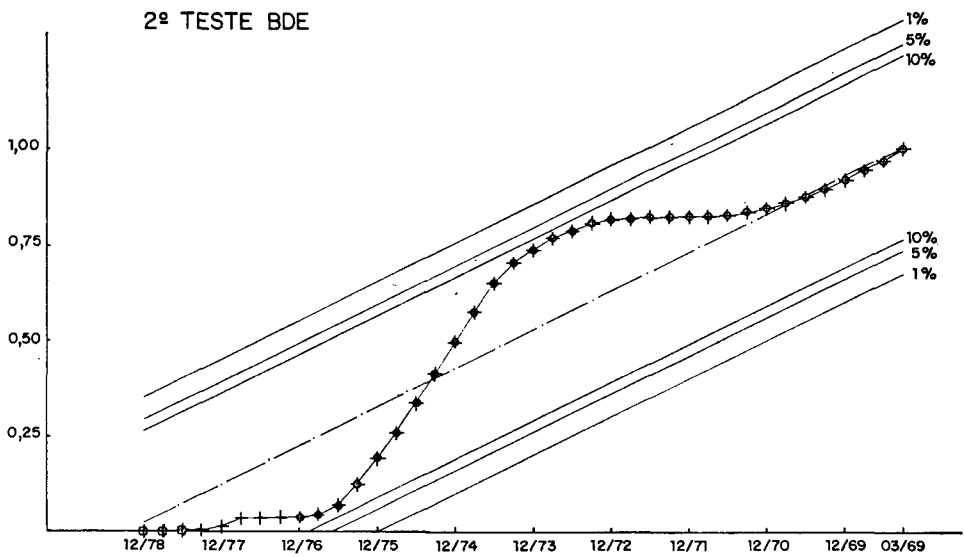


Gráfico 6



De acordo com a orientação citada, pode ser constatada a existência de 4 fases dos gráficos, em ambos os sentidos, conforme representado.

3.3.3 — Vetor dos parâmetros

As ordenadas dos gráficos a seguir representam, a cada $t = r$, os componentes \hat{a}_0 e \hat{a}_1 do modelo (9), obtidos com $r = 3, \dots, 42$ observações a partir de 03/69 (sentido direto) ou 06/79 (sentido inverso), até cada ponto referido no eixo das abscissas dos gráficos.

3.3.3.1 — Sentido direto

Gráfico 7

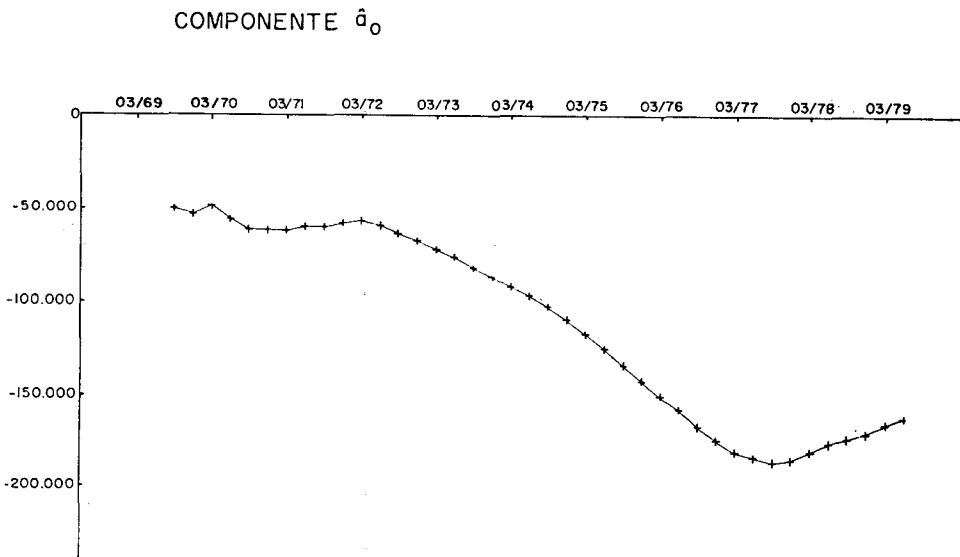
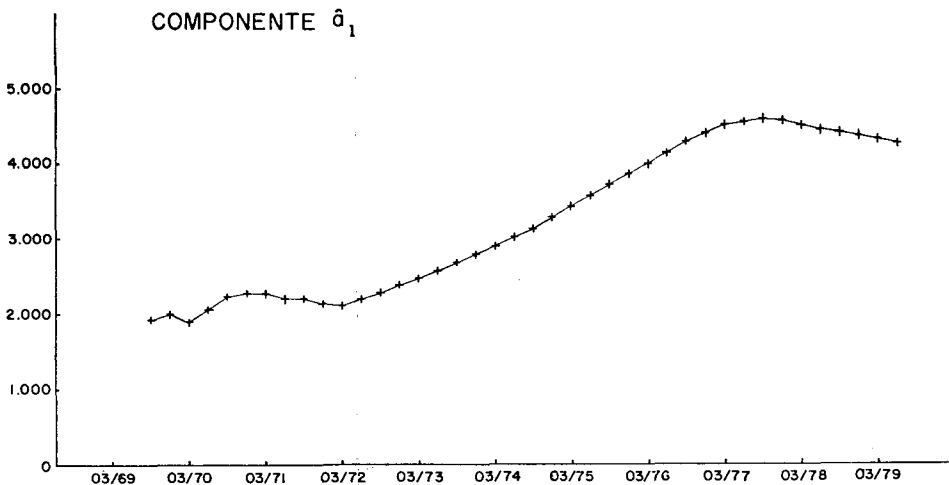


Gráfico 8



3.3.3.2 — *Sentido inverso*

Gráfico 9

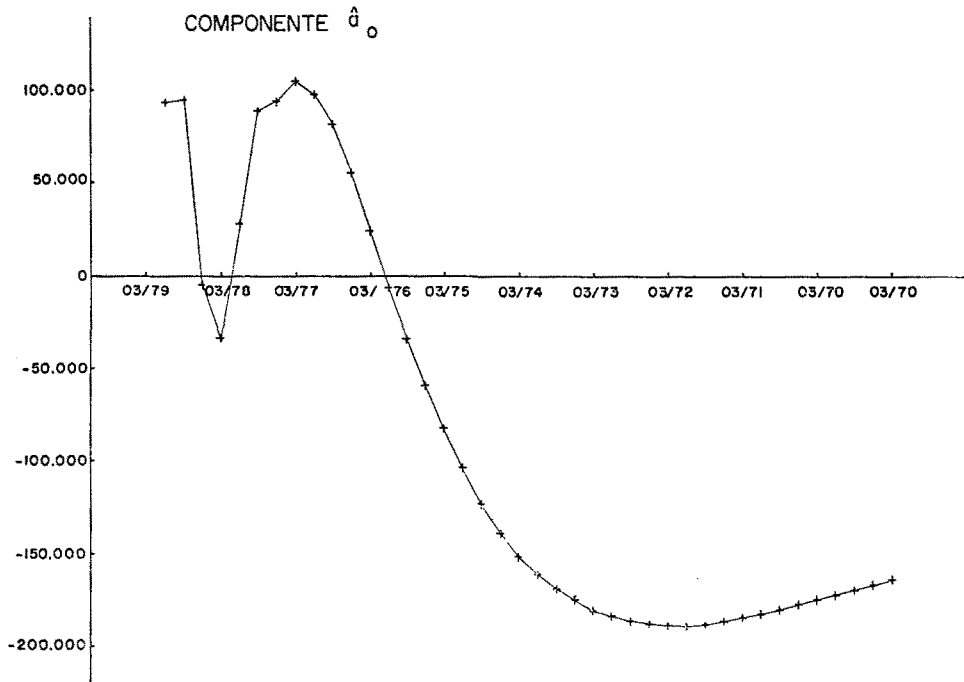
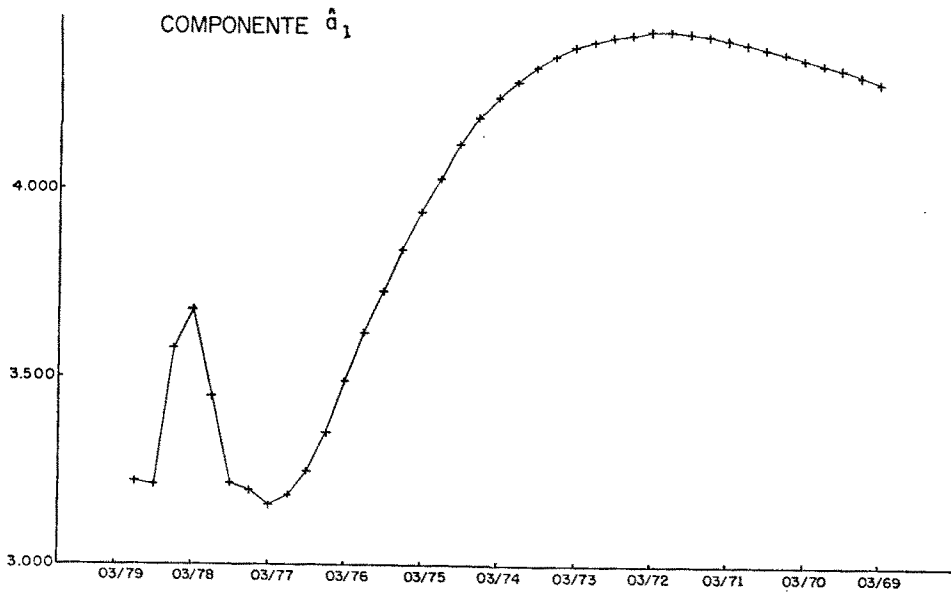


Gráfico 10



Os gráficos apresentados indicam nitidamente a variação que ocorre com ambos os componentes, podendo ser observada também a semelhança existente entre os gráficos, em cada sentido, devido à interligação de suas expressões analíticas. Os valores da parte final dos gráficos tendem a apresentar menores variações devido à influência do maior número de observações.

3.3.4 — Regressão móvel

As ordenadas dos gráficos a seguir representam os valores de \hat{a}_0 , \hat{a}_1 e $\hat{\sigma}^2$ referente à regressão móvel de comprimento 6, marcados no trimestre correspondente ao último ponto da regressão. Assim, pode-se interpretar que as variações observadas nos gráficos, de um ponto para outro, são devidas à influência da adição na última regressão móvel, da observação correspondente ao trimestre onde está referido o valor do gráfico.

Gráfico 11

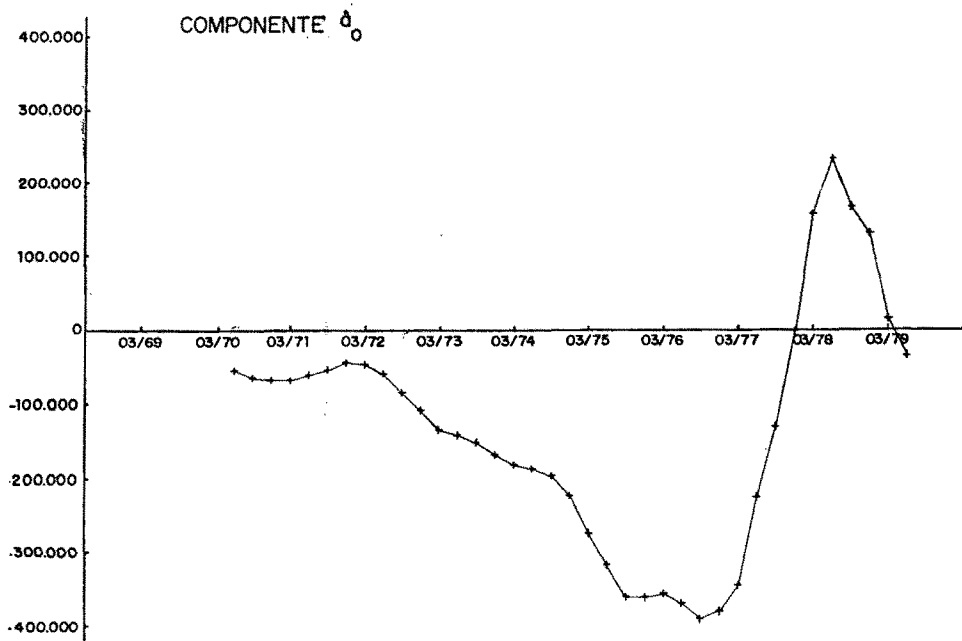
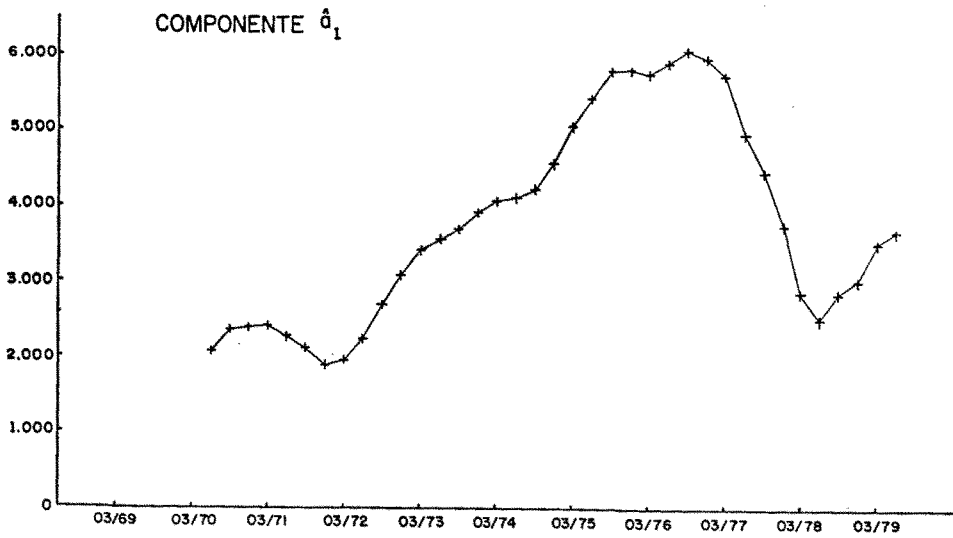
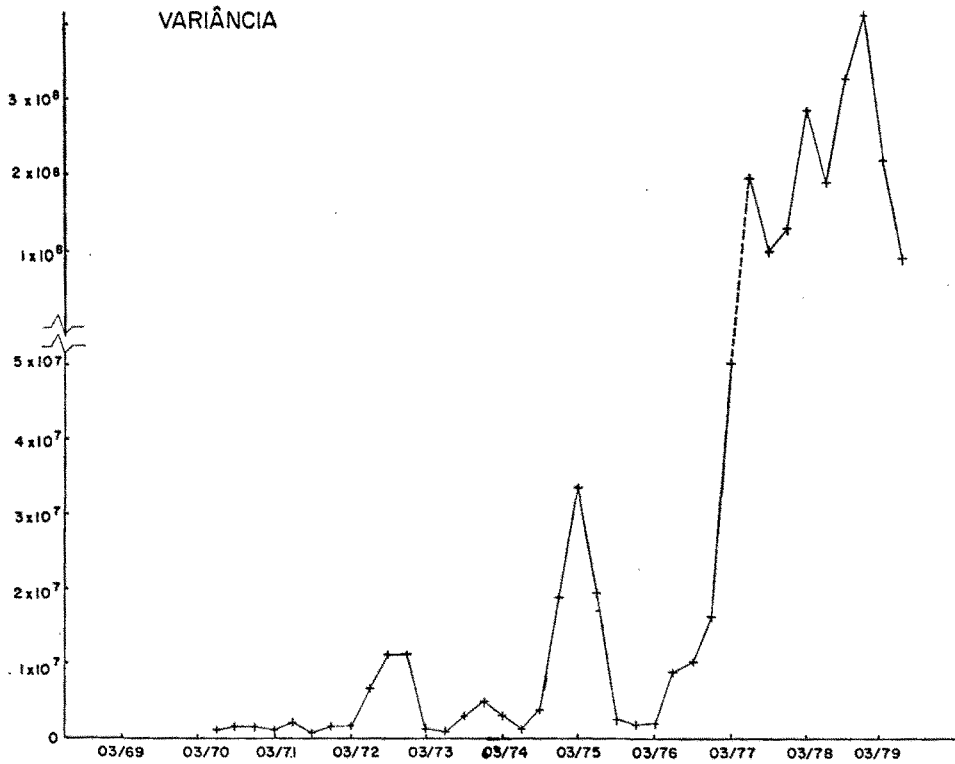


Gráfico 12



A variação existente nos gráficos indica a não-constância dos valores de $\hat{\alpha}_0$ e $\hat{\alpha}_1$ do modelo de teste e também auxilia a localização das mudanças de fase. A semelhança observável entre os gráficos é devido à relação existente entre suas fórmulas analíticas.

Gráfico 13



Este gráfico indica não ser constante a variância do modelo escolhido para os testes.

3.4 — Interpretação

Pode ser observada a existência de 4 fases dos gráficos. A primeira fase corresponde ao início da caderneta de poupança dentro do SFH, com vinculação dos antigos depósitos das cadernetas da Caixa Econômica Federal. Uma medida de estímulo fiscal à captação ocorrida nesta fase foi o Decreto-Lei n.º 1.188 de 21/07/71 que facultou às pessoas físicas o abatimento na renda bruta da importância correspondente a 20% do saldo médio anual mantido no ano-base em cadernetas de poupança. Todos os gráficos não assinalam qualquer desvio nesta época, indicando não ter sido a medida de impacto. Esse decreto-lei associado às inovações e à divulgação da nova caderneta caracterizou o primeiro crescimento dos depósitos. O gráfico 3 apresenta um desvio significativo a partir de 03/06/72. O gráfico 4 ultrapassa o nível crítico de 5% em 03/72. Os gráficos 11 e 12 apresentam-se, após um período de pouca variabilidade, com uma tendência acentuada a partir de 09/72, o mesmo acontecendo com os gráficos 7 e 8. A característica da passagem da 1.ª fase para a 2.ª fase é de ser suave e, portanto, ocorrendo naturalmente, sem ser devido à qualquer medida específica. O final da 1.ª fase dos depósitos de poupança será convencionalmente ocorrer em 06/72.

A segunda fase corresponde ao grande impulso experimentado pelos depósitos. Pode-se atribuir este crescimento a algumas altas taxas de correção monetária havidas (a maior, até então, foi de 13,474%, em 01/01/75) e à nova forma surgente de poupança, caracterizada, principalmente, pela facilidade de operação, sem exigência de depósito mínimo para abertura das contas e pela imediata liquidez dos depósitos. A primeira medida governamental desta fase corresponde ao Decreto-Lei n.º 1.338 de 23/07/74, alterando o Decreto-Lei n.º 1.188 e facultando às pessoas físicas a redução no imposto de renda devido, de 6% do saldo médio anual mantido nas cadernetas de poupança, de valor não superior a 400 UPC e 2% da parcela de saldo médio excedente a 400 UPC, ficando a tributação de juros limitada à parcela excedente a Cr\$ 2.500,00. Antes desse decreto-lei, maiores rendas proporcionavam maiores abatimentos fiscais, tendo-se tornado independente o abatimento da renda após a introdução do decreto-lei citado. Este decreto-lei reduziu o abatimento no imposto de renda dos grandes depositantes (saldo médio de 1.000 UPC) para cerca da quarta parte ao permitido com o decreto-lei anterior de acordo com o quadro 2, a seguir. Entretanto, devido ao Decreto-Lei n.º 1.338 ter atingido, de forma análoga, os outros papéis do mercado, a medida não causou impacto na captação, como pode ser observado nos gráficos 3 e 4, sem alteração do seu comportamento na

época. A Resolução do Conselho n.º 26/75 de 26/08/75, elevando o limite de garantia dos depósitos de poupança de 400 UPC para 1.000 UPC, teve a dupla finalidade de incentivar a realização dos depósitos pelo oferecimento de maior segurança aos poupadores e de distribuir, pelos demais agentes, os depósitos das caixas econômicas. O efeito localizado dessa medida não é assinalado por qualquer dos gráficos, indicando a mesma ter resultado no principal efeito de distribuir os depósitos. Os gráficos 11 e 12, a partir de 09/75 a 09/76, variam mais lentamente. Esse fato pode ser interpretado devido à proibição, a partir de 28/05/75, da caderneta de poupança a pessoas jurídicas de direito privado, com finalidade de lucro. Os gráficos 3 e 4 ultrapassam a barreira de 5% em 09/76. Entretanto, pelos gráficos 9, 10, 11, 12, o período de 03/77 parece ser mais indicativo para referenciar o início da terceira fase dos depósitos. Esta referência corresponde à ultrapassagem da barreira de 1% do gráfico 3. Portanto, o término da 2.ª fase dos depósitos das cadernetas de poupança será considerado em 12/76.

A terceira fase corresponde à recaída dos depósitos, devido à introdução do Decreto-Lei n.º 1.494 de 07/12/76, alterando o Decreto-Lei n.º 1.338, facultando às pessoas físicas a redução no imposto de renda devido, de 4% do saldo médio anual mantido nas cadernetas de poupança até 400 UPC e 2% da parcela de saldo médio excedente a 400 UPC, tributando os juros para qualquer valor de saldo médio. Esse decreto-lei de desestímulo específico para os grandes depositantes visou a evitar excessiva concentração dos depósitos por parte destes investidores, tornando a tributação dos juros maior que o abatimento do saldo médio, resultando num percentual líquido do incentivo negativo, conforme o quadro 2, a seguir. O caminho amostral do gráfico 3 se apresenta, de 03/77 a 12/77, além da barreira de 1%; no gráfico 4 o caminho amostral se afasta de sua linha média, dirigindo-se para as barreiras de significância; os gráficos 11 e 12 sofrem um desvio acentuado, de 03/77 a 06/78, e os gráficos 9 e 10 apresentam também um desvio de 03/77 a 03/78. Para a fixação do término desta fase deve ser observado o caminho amostral do gráfico 3, ultrapassando em 03/78 a barreira de 1%, e em 09/78, a de 5%. Deve ser observado a coincidência da existência de uma inflexão (mais visível no gráfico 4) no caminho amostral de ambos os gráficos 3 e 4, no ponto correspondente a 06/78, parecendo indicar serem os últimos cinco pontos pertencentes a um ramo independente destes gráficos. Há, ainda, o início de alteração dos gráficos 11 e 12 em 06/78. Fato análogo ocorre com os gráficos 9 e 10. Estas indicações sugerem a consideração do período de 03/78 para o término da terceira fase dos depósitos das cadernetas de poupança.

A quarta e última fase corresponde à recuperação dos depósitos devido a duas medidas de forte estímulo à captação, que foram o Decreto-Lei n.º 1.608 e a Resolução do Conselho 03/78, ambas datadas de 28/02/78. O Decreto-Lei n.º 1.608 alterou o de n.º 1.494, facultando

a redução no imposto de renda devido de 4% do saldo médio anual das cadernetas de poupança até 1.000 UPC, tornando o resultado do incentivo fiscal novamente positivo. A Resolução do Conselho n.º 03/78 modificou o critério do cálculo do saldo trimestral a ser beneficiado com a correção monetária e os juros a partir de 01/04/78, incentivando a realização dos depósitos durante os trimestres e não somente até o dia cinco dos primeiros meses destes. O efeito dessas medidas na recuperação dos depósitos é bem visível no caminho amostral dos gráficos 3 e 4, se dirigindo para suas linhas médias e também no comportamento dos demais gráficos.

Os desvios dos gráficos 5 e 6 também indicam as 4 fases distintas do comportamento dos depósitos de poupança, com a mesma localização aproximada das mudanças das fases.

A interpretação da variância não constante do modelo refletida no gráfico 13 é explicada pelo crescimento, mesmo em UPC, não constante da captação. Este fato, por sua vez, resulta do crescimento vegetativo dos depósitos de poupança e do fato conhecido das taxas de correção monetária se situarem abaixo das taxas de inflação. Assim, valores nominais em Cr\$ corrigidos pelas taxas de inflação correspondem a quantidades crescentes em UPCs. O maior desvio observado neste gráfico, no final de 1976 e início de 1977, é devido às variações anormais ocorridas na captação neste período.

São apresentados, a seguir, os quadros 1 e 2, da variação da influência dos decretos-lei nos percentuais do saldo médio anual dos depósitos mantidos nas cadernetas de poupança, dedutíveis do imposto de renda.

As seguintes considerações são feitas para a elaboração dos quadros:

1) Os depositantes com saldo médio de 400 UPC e 1.000 UPC são enquadrados nas alíquotas de 25% e 40%, respectivamente.

2) Os juros de Cr\$ 2.500,00 se referem a um saldo médio anual de $\frac{\text{Cr\$ } 2.500,00}{0,05868} = \text{Cr\$ } 42.603,95$, o qual, dividido pelo valor da UPC do último trimestre de 1974, ultrapassa 400 UPC. Para os anos-base de 1975 e 1976, os juros foram de Cr\$ 3.300,00 e Cr\$ 4.400,00, também correspondendo, nestes anos, a um saldo médio anual maior do que 400 UPC (Decreto-Lei n.º 1.338).

O fato de destaque no quadro 1, a seguir, é a não-alteração do percentual líquido de abatimento com a introdução do Decreto-Lei n.º 1.608.

Tal fato induz que a queda verificada nos depósitos após o Decreto-Lei n.º 1.494 não deve ter sido devido à faixa em consideração, já que para esta foi insensível o efeito do Decreto-Lei n.º 1.608 na recuperação dos depósitos, o que é confirmado para os depositantes com menores saldos médios com isenção de pagamento do imposto de renda.

QUADRO 1

SITUAÇÃO PARA DEPOSITANTES COM SALDO MÉDIO DE 400 UPC

DECRETO-LEI	ABATIMENTO DO SALDO MÉDIO NO IMPOSTO DE RENDA (A)	TRIBUTAÇÃO DE JUROS (B)	RESULTADO LÍQUIDO (A)-(B)
n.º 1.188 de 21/07/71	$0,20 \times 0,25 = 0,05$	isento	0,05
n.º 1.338 de 23/07/74	0,06	isento	0,06
n.º 1.494 de 07/12/76	0,04	$0,25 \times 0,05868 = 0,01467$	0,0253
n.º 1.608 de 28/02/78	0,04	0,01467	0,0253

QUADRO 2

SITUAÇÃO PARA DEPOSITANTES COM SALDO MÉDIO DE 1.000 UPC

DECRETO-LEI	ABATIMENTO DO SALDO MÉDIO NO IMPOSTO DE RENDA (A)	TRIBUTAÇÃO DE JUROS (B)	RESULTADO LÍQUIDO (A)-(B)
n.º 1.188 de 21/07/71	$0,20 \times 0,40 = 0,08$	isento	0,08
n.º 1.338 de 23/07/74	0,06*	$\frac{0,05868 (0,4 \times 600 + 0 \times 400)}{1.000} = 0,0141$	0,0459*
	$\frac{0,06 \times 400 + 0,02 \times 600}{1.000} = 0,036^{**}$		0,0219**
n.º 1.494 de 07/12/76	$\frac{0,04 \times 400 + 0 \times 600}{1.000} = 0,016$	$0,05868 \times 0,4 = 0,0235$	-0,0075
n.º 1.608 de 28/02/78	0,04	0,0235	0,0165

(*) Ano-base de 1974

(**) Anos-base de 1975 e 1976

A influência do Decreto-Lei n.º 1.338 para esta faixa de depositantes foi bem acentuada, constituindo-se, entretanto, de medida análoga às adotadas para os outros papéis do mercado. Já o Decreto-Lei n.º 1.494 afetou o crescimento dos depósitos de poupança por ter sido uma medida de estímulo específica para este tipo de investimento. O resultado líquido do incentivo, considerada a tributação de juros, ficou negativo. O Decreto-Lei n.º 1.608 contribuiu para a recuperação dos depósitos, tornando, novamente, o percentual líquido de abatimento, positivo.

Para a faixa de depositantes com saldo médio acima de 1.000 UPC, o Decreto-Lei n.º 1.608 permitiu o abatimento de 2% sobre a parcela de saldo médio excedente a 1.000 UPC. Para esta faixa, em relação à faixa de 1.000 UPC, o efeito do Decreto-Lei n.º 1.338 foi mais acentuado; o do de n.º 1.494 ligeiramente menos acentuado, o mesmo acontecendo com a recuperação, acentuando-se os efeitos com maiores valores de saldo médio.

Há, ainda, que mencionar o efeito dessas medidas sobre os depositantes de saldo médio entre 400 UPC e 1.000 UPC. Em relação à faixa de 1.000 UPC, a primeira e segunda quedas foram menos acentuadas, melhorando, ligeiramente, a recuperação.

3.5 — Estimação e simulação dos submodelos

De acordo com os resultados da análise, será feita uma estimação independente de cada submodelo segmentado pelo método dos mínimos quadrados e, após, serão simulados os submodelos segundo as regressões estimadas.

3.5.1 — Estimação

De acordo com a análise e interpretação dos gráficos da seção 3.3, as seguintes fases foram estabelecidas para os depósitos das cadernetas de poupança:

- 1.^a fase: 03/69 a 06/72
- 2.^a fase: 09/72 a 12/76
- 3.^a fase: 03/77 a 03/78
- 4.^a fase: 06/78 a 06/79

Para a estimação dos submodelos foi utilizada a rotina SPSSV5, implantada no computador Burroughs 6700 do NCE da UFRJ, obtendo-se as seguintes regressões significantes a 5%:

$$\hat{y}_t = - 59.074,59650 + 2.199,71238 \text{ UPC1}_t \quad t = 1, \dots, 14$$
$$R^2 = 0,99474$$
$$\hat{\sigma} = 1.742,26817$$

$$\hat{y}_t = - 289.144,73015 + 5.331,61900 \text{ UPC1}_t \quad t = 15, \dots, 32$$

$$R^2 = 0,99331$$

$$\hat{\sigma} = 14.593,76303$$

$$\hat{y}_t = 232.997,06396 + 2.531,08364 \text{ UPC1}_t \quad t = 33, \dots, 37$$

$$R^2 = 0,91115$$

$$\hat{\sigma} = 15.897,88617$$

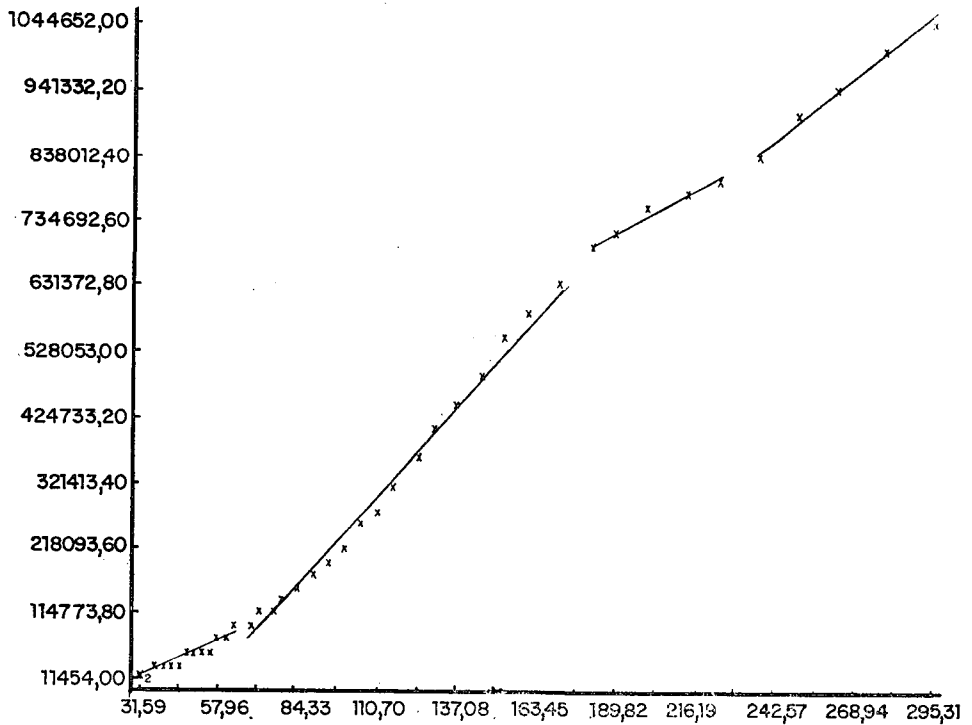
$$\hat{y}_t = - 5.242,35883 + 3.576,43490 \text{ UPC1}_t \quad t = 38, \dots, 42$$

$$R^2 = 0,98867$$

$$\hat{\sigma} = 10.113,67126$$

Na figura 2 estão representadas as quatro retas estimadas.

Figura 2



3.5.2 — Simulação

Para os modelos constituídos das regressões da seção anterior, de acordo com o PROGRAMA 3 foram traçados os gráficos BDE, apresentados a seguir.

3.5.2.1 — Sentido direto

Gráfico 14

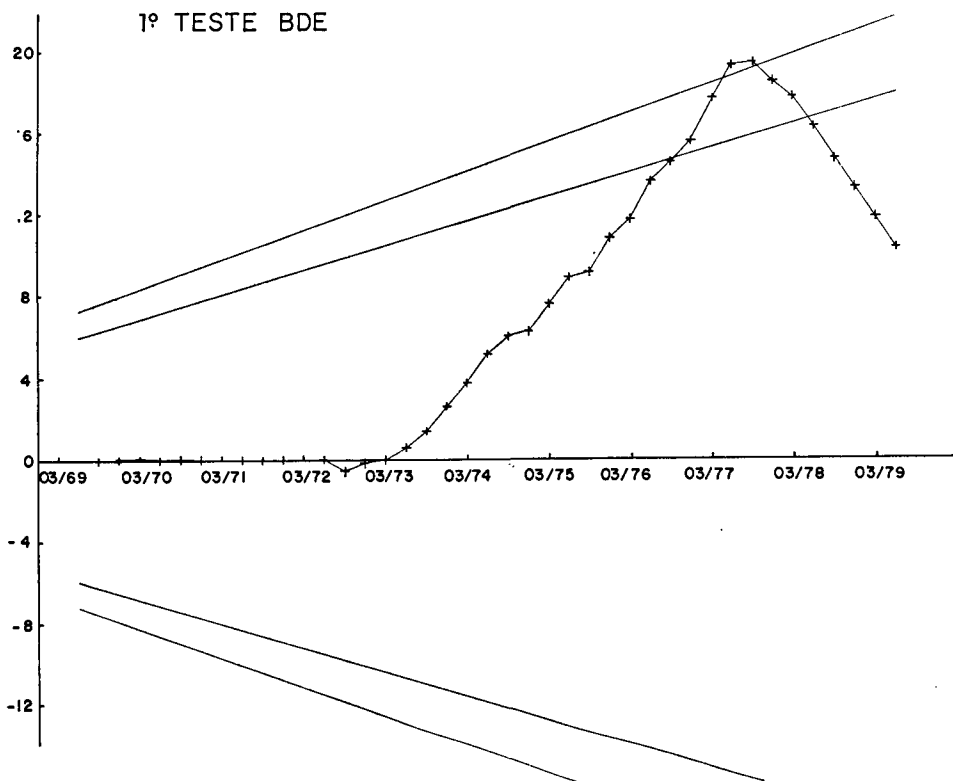
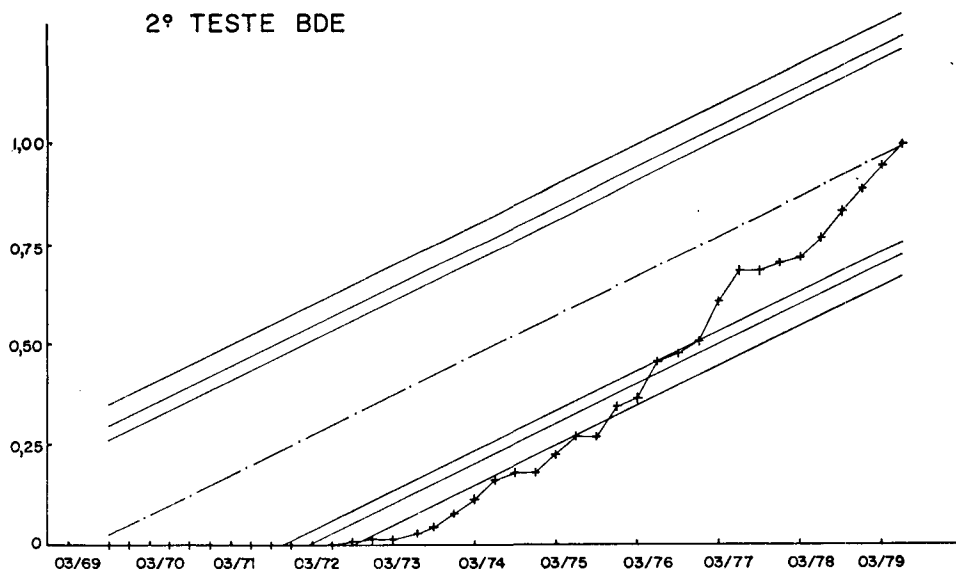


Gráfico 15



3.5.2.2 — Sentido inverso

Gráfico 16

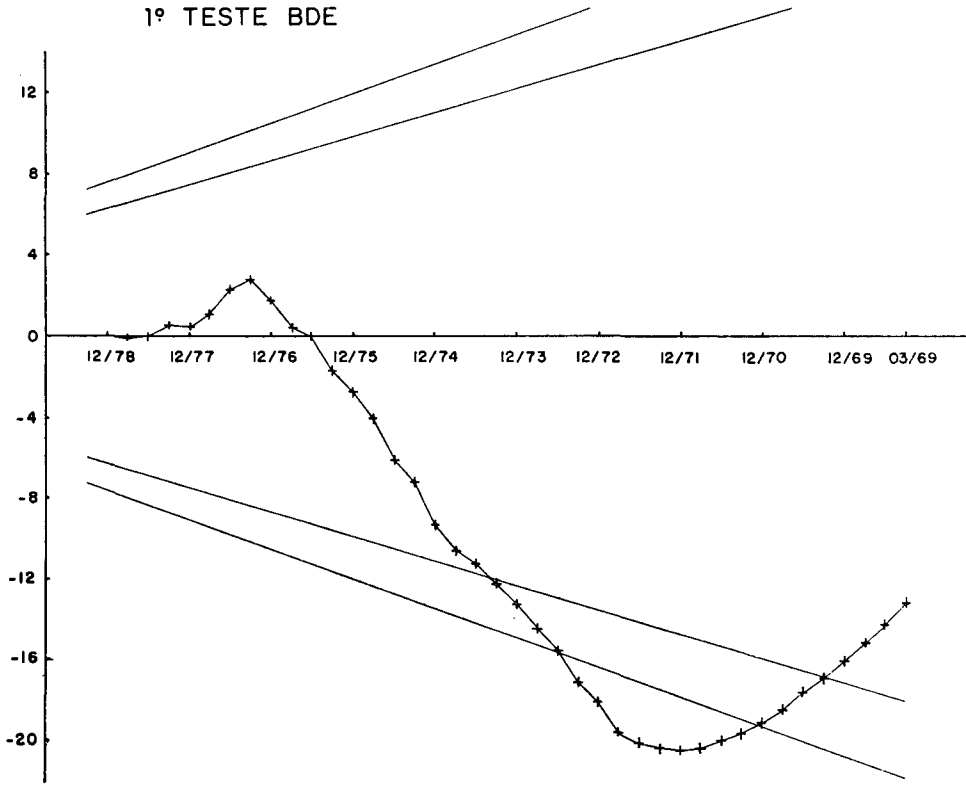
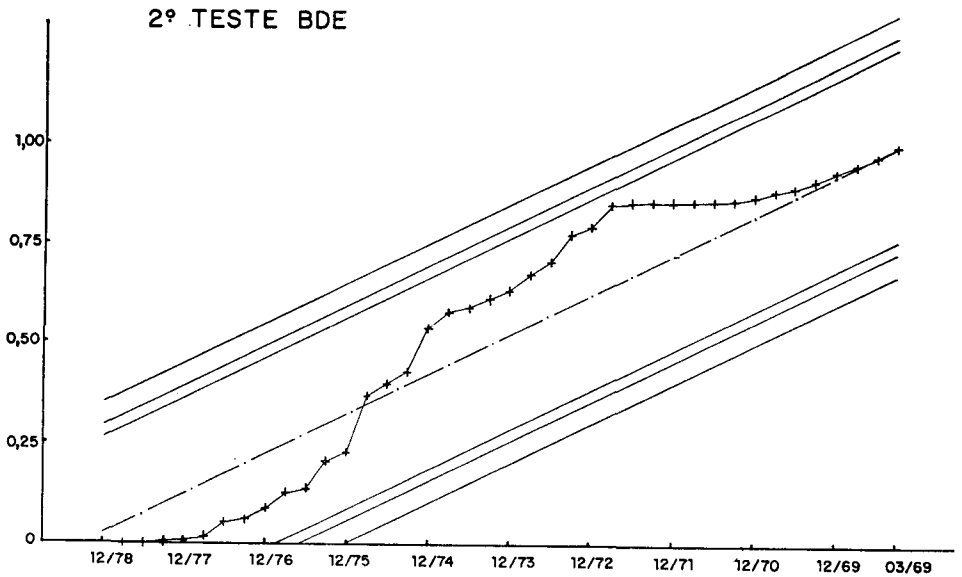


Gráfico 17



3.5.3 — Comparação entre os gráficos BDE resultantes das observações reais e os da simulação

Pode-se verificar pela comparação dos últimos gráficos com os obtidos com os dados reais a semelhança existente. Uma observação importante nesta comparação é referente ao aspecto dos gráficos em cada caso: enquanto que os primeiros apresentam-se com formas arredondadas, contínuas, os segundos apresentam-se com aspecto irregular, constituindo-se de poligonais abertas. Tal fato sugere serem os erros $u_i, u_j, i \neq j$, correlacionados.

Um teste conhecido na literatura para a hipótese de correlação positiva dos erros de um modelo de regressão linear é o de Durbin-Watson (Kendall, (10), p. 164-165), o qual consiste no cálculo da estatística d , definida por:

$$d = \frac{\sum_{i=2}^T (e_i - e_{i-1})^2}{\sum_{i=3}^T e_i^2}$$

onde e_i são os resíduos de mínimos quadrados da regressão.

Para corrigir o efeito da autocorrelação dos erros, Cox, discussão de [1], sugere deslocar as barreiras de significância do teste da soma acumulada dos resíduos recursivos, pela estimativa do fator de correção:

$$f_c = \left(1 + 2 \sum_{h=1}^{\infty} \rho_h \right)^{1/2}$$

onde ρ_h é a função de autocorrelação das observações. Entretanto, as propriedades desta modificação ainda não foram estudadas.

Para ilustrar os resultados até agora conhecidos, o PROGRAMA 4 calcula a estatística d e o fator de correção f_c , obtendo:

$d = 0,122$, rejeitando a hipótese dos erros serem não correlacionados;

$f_c = 0$, sugerindo a permanência da posição das barreiras de significância e, conseqüentemente, da interpretação realizada.

4. OS PROGRAMAS DE COMPUTADOR

Para a realização do trabalho foram elaborados três programas em linguagem FORTRAN, processados no Núcleo de Computação Eletrônica da UFRJ, sendo encontrados no trabalho original do autor ((14), apêndices 2, 3 e 4).

O PROGRAMA 2 é para calcular todos os resultados dos testes utilizando-se os dados reais de modo a serem traçados os gráficos para análise e interpretação. Neste programa as variáveis de entrada são os

vetores das variáveis independentes e dependentes, os níveis de significância para os testes e o comprimento da regressão móvel. As seguintes saídas são obtidas:

- a) listagem dos valores das variáveis;
- b) resíduos de mínimos quadrados da regressão única;
- c) soma acumulada dos resíduos de (b);
- d) valores da estatística do 1.º teste BDE entre as barreiras;
- e) idem, do 2.º teste BDE;
- f) componentes do vetor dos parâmetros;
- g) itens (d), (e) e (f), no sentido inverso, no tempo;
- h) regressão móvel: coeficientes dos parâmetros e variância residual.

O PROGRAMA 3 realiza a simulação do modelo com os resultados estimados na seção 3.5.1 e a geração artificial dos erros. Tem as mesmas saídas do PROGRAMA 2.

O PROGRAMA 4 calcula a estatística d de Durbin-Watson e o fator de correção f_c proposto por Cox. As entradas do programa são os vetores das observações e dos resíduos de mínimos quadrados.

Em complementação foram elaborados os PROGRAMAS 5 e 6.

O PROGRAMA 5 é uma preparação do PROGRAMA 2 para a saída dos resultados, em cartões, que alimentarão o PROGRAMA 6.

O PROGRAMA 6 consiste da rotina NCE/GRÁFICO implantada no NCE/UFRJ, que permite a obtenção dos gráficos do PROGRAMA 2 em tamanho A4, diretamente através do computador.

ABSTRACT

This work deals with methods of Brown, Durbin and Evans (1) for studying the stability over time of regression relationships.

Recursive residuals, distributed as random independent normal variables with zero mean and constant variance are introduced, and tests based on the cumulative simple sum and on the cumulative sum of the square of these residuals are developed. Special emphasis is given to the use of graphical methods owing to the visual power of the cumulative sum tests.

The cumulative sum techniques are applied to a regression linear model of savings accounts within the Financial Housing System, from their first ten years of existence.

BIBLIOGRAFIA

1. — BROWN, R. L., Durbin, T. e Evans, J. M. — "Techniques for Testing the Constancy of Regression Relationships Over Time", com discussão — *Journal of the Royal Statistical Society* — Série B, 37 (1975), 149-192.
2. — CHOW, G. C. — "Tests of Equality Between Subsets of Coefficients in Two Linear Regressions" — *Econometrica*, 28 (1960), 591-605.

- 3 — DRAPER, N. R. e Smith, H. — “Applied Regression Analysis” — Wiley Series in *Probability and Mathematical Statistics* — Nova York (1966).
- 4 — DURBIN, T. — “Tests of Serial Independence Based on the Cumulated Periogram” — *Bulletin of the International Statistical Institute*, 42 (1967), 1039-1048.
- 5 — DURBIN, T. — “Boundary Crossing Probabilities for the Brownian Motion and Poisson Processes and Techniques for Computing the Power of the Kolmogorov-Smirnov Test” — *Journal of Applied Probability*, 8 (1971), 431-453.
- 6 — DURBIN, T. — “Tests of Serial Correlation in Regression Analysis Based on The Periodogram of Least Squares Residuals” — *Biometrika*, 56 (1969), 1-15.
- 7 — FARLEY, J. U. e HINICH, M. J. — “Testing for a Shifting Slope Coefficient in a Linear Model” — *Journal of the American Statistical Association*, 65 (1970), 1320-1329.
- 8 — FARLEY, J. U., HINICH, M. J. e MC. GUIRE, W. T. — “Some Comparaisons of Test for a Shift in the Slopes of a Multivariate Linear Time Series Model” — *Journal of Econometrics*, 3 (1975), 297-318.
- 9 — GARBADE, K. — “Two Methods for Examining the Stability of Regression Coefficients” — *Journal of the American Statistical Association*, 72 (1977), 54-63.
- 10 — KENDALL, M. G. — *Time Series* — Griffin — Londres (1973).
- 11 — PAGE, E. S. — “Continous Inspection Schemes” — *Biometrika*, 41 (1954), 100-114.
- 12 — PAGE, E. S. — “Cumulative Sum Charts” — *Technometrics*, 3 (1961), 1-9.
- 13 — QUANDT, R. E. — “Tests of the Hipotesis that a Linear Regression Obeys Two Separate Regimes” — *Journal of the American Statistical Association*, 55 (1960), 324-330.
- 14 — SEREBRENICK, E. — “Técnicas para Testar a Constância das Relações de Regressão no Tempo” — Tese M. Sc. COPPE/UFRJ (1979).

UMA EXTENSÃO DO CONCEITO DE DISTRIBUIÇÃO SEM MEMÓRIA

Thadeu Keller Filho
PUC/RJ

SUMÁRIO

1. *Introdução*
 2. *Extensão do conceito de distribuição sem memória*
 - 2.1 — *Definições preliminares*
 - 2.1.1 — *suporte de uma variável aleatória*
 - 2.1.2 — *família de variáveis aleatórias com distribuição crescente no suporte*
 - 2.2 — *Distribuição sem memória segundo uma função*
 3. *Propriedades básicas das funções de perda de memória*
 4. *Caracterização das funções de perda de memória*
 - 4.1 — *Condições necessárias*
 - 4.2 — *Condições necessárias e suficientes*
 5. *Função de perda de memória de algumas distribuições*
 - 5.1 — *Observações preliminares*
 - 5.2 — *Distribuição exponencial*
 - 5.3 — *Distribuição de Pareto*
 - 5.4 — *Distribuição uniforme*
 - 5.5 — *Distribuição de Rayleigh*
 - 5.6 — *Distribuição logarítmica*
- Bibliografia*

1. INTRODUÇÃO

No domínio das variáveis aleatórias do tipo contínuo, o conceito de distribuição sem memória, característico das variáveis aleatórias exponenciais, decorre do fato de que uma variável aleatória X , não negativa, do tipo contínuo, possui distribuição exponencial se e somente se:

$$P \{X > x + y \mid X > x\} = P \{X > y\} \quad (1.1)$$

quaisquer que sejam $x > 0$ e $y > 0$.¹

Tal propriedade — dita markoviana — é que permite as aplicações usuais das variáveis aleatórias exponenciais na representação do tempo de espera de certos tipos de acontecimentos, em relação aos quais se admite que o tempo de espera futuro é independente do tempo de espera já decorrido. É ainda a propriedade markoviana que possibilita a representação, por meio de variáveis aleatórias exponenciais, do tempo de vida de determinados tipos de componentes de um sistema, quando é lícito supor que a ocorrência de avarias naquelas componentes é quase certamente devido a causas externas repentinas e não à fadiga ou ao desgaste.

Tendo em vista a propriedade markoviana, costuma-se dizer que uma variável aleatória exponencial possui *distribuição sem memória*. Utilizando uma imagem mais sugestiva, podemos dizer, em face de (1.1), que uma variável aleatória possui *distribuição sem memória aditiva* ou ainda que ela possui *distribuição sem memória, segundo a função de $g = x + y$* .

A observação anterior sugere que se possa estender o conceito clássico de distribuição sem memória, mediante a definição de propriedades análogas à (1.1), quando se substitui naquela expressão a função $g = x + y$ por outras funções — às quais denominaremos *funções de perda de memória* — escolhidas adequadamente para cada espécie de variável aleatória do tipo contínuo.

No presente trabalho apresenta-se uma extensão de conceito de distribuição sem memória, nos moldes da sugestão anterior. Após a conceituação desenvolvida inicialmente, apresentam-se as propriedades básicas das funções de perda de memória, relacionando-as com as correspondentes funções de distribuição. Apresentam-se, a seguir, as condições necessárias e as condições necessárias e suficientes para que uma dada função seja função de perda de memória de alguma variável aleatória real do tipo contínuo.

Apresentam-se, finalmente, algumas aplicações para ilustrar a utilização das propriedades demonstradas.

¹ Vide FELLER, W. — *An Introduction to Probability Theory* — Vol. II. John Wiley & Sons Inc. — (1966), p. 8.

2. EXTENSÃO DO CONCEITO DE DISTRIBUIÇÃO SEM MEMÓRIA

2.1 — Definições preliminares

2.1.1 — Suporte de uma variável aleatória

Considere-se uma variável aleatória real, X , com função de distribuição $F(\cdot)$, e represente-se por R o conjunto dos números reais e por R^* a extensão dos números reais. Chama-se *suporte* de X o conjunto

$$S = \{x \in R \mid 0 < F(x) < 1\} \quad (2.1)$$

Como $F(\cdot)$ é definida em R , monótona não-decrescente e contínua à direita, segue-se que S é um intervalo do tipo $S = (\alpha, \beta)$, onde:

$$\alpha = \text{Sup} \{x \in R \mid F(x) = 0\} \quad \beta = \text{Inf} \{x \in R \mid F(x) = 1\} \quad (2.2)$$

sendo, portanto, $\alpha \in R^*$ e $\beta \in R^*$

2.1.2 — Família de variáveis aleatórias com distribuição crescente no suporte

No que segue, designaremos por V a família de variáveis aleatórias reais do tipo contínuo, cuja função de distribuição é crescente em seu suporte. Assim, se X é uma variável aleatória real com função de distribuição $F(\cdot)$, tem-se que $X \in V$ se e somente se $F(\cdot)$ é crescente para todo $x \in R$ tal que $0 < F(x) < 1$.

2.2 — Distribuição sem memória segundo uma função

Seja $X \in V$ uma variável aleatória real de suporte S . Representa-se por C o conjunto $S \times S$, isto é:

$$C = \{(x,y) \in R^2 \mid 0 < F(x) < 1; \quad 0 < F(y) < 1\} \quad (2.3)$$

Seja, ainda, g uma função real definida em C . Diz-se que X possui *distribuição sem memória segundo a função g* se e somente se for:

$$P \{X > g(x,y) \mid X > x\} = P \{X > y\} \quad (2.4)$$

qualquer que seja $(x,y) \in C$.

Nesse caso, diz-se que g é a *função de perda de memória de X* .

3. PROPRIEDADES BÁSICAS DAS FUNÇÕES DE PERDA DE MEMÓRIA

Serão estabelecidas, a seguir, pelos teoremas 1 e 2, as propriedades fundamentais das funções de perda de memória. Veremos, em decorrência dos teoremas citados, que a cada variável aleatória $X \in V$ corresponde, univocamente, a uma função de perda de memória; veremos também que a recíproca não é verdadeira, uma vez que, se g é a função de perda de memória de uma variável aleatória real, existe uma família infinita de variáveis aleatórias que admite g como sua função de perda de memória.

Serão necessários, inicialmente, os seguintes lemas para facilitar as demonstrações:

3.1 — Lema 1:

Considere-se uma variável aleatória $X \in V$, de suporte S . Representem-se por $F(\cdot)$ e $F^{-1}(\cdot)$, respectivamente, a função de distribuição de X e sua inversa. Designemos por C o conjunto $C = S \times S$.

Então,

$$F^{-1} [F(x) + F(y) - F(x)F(y)] > x \quad (3.1)$$

para todo $(x,y) \in C$.

Demonstração:

I — Provemos, inicialmente, que $F^{-1}(\cdot)$ existe no ponto $F(x) + F(y) - F(x)F(y)$ para todo $(x,y) \in C$. Para isso basta provar que $0 < F(x) + F(y) - F(x)F(y) < 1$ para todo $(x,y) \in C$.

De fato, para $(x,y) \in C$ tem-se $0 < F(x) < 1$ e $0 < F(y) < 1$, o que implica

$$0 < F(y) [1 - F(x)] < 1 - F(x).$$

e, portanto,

$$0 < F(x) < F(x) + F(y) - F(x)F(y) < 1 \quad (3.2)$$

II — Por outro lado, como $X \in V$, a função $F^{-1}(\cdot)$ é crescente no intervalo $(0,1)$. Obtém-se, assim, utilizando a (3.2):

$F^{-1} [F(x) + F(y) - F(x)F(y)] > x$
para todo $(x,y) \in C$.

3.2 — Lema 2:

Seja $H(\cdot)$ uma função real definida no intervalo $[0,1]$, derivável e crescente no intervalo $(0,1)$. Então, existe $a > 0$ tal que

$$H(x) = 1 - (1 - x)^a \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3.3)$$

se e somente se:

$$H(x + y - xy) = H(x) + H(y) - H(x)H(y) \quad (3.4)$$

para $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$.

Demonstração:

I — Admita-se que $H(\cdot)$ satisfaz à igualdade (3.4)

a) Provaremos que, nesse caso, $H(0) = 0$ e $H(1) = 1$. De fato, decorre de (3.4):

$$\begin{aligned} \text{Para } x = 0 : H(0) &= H(0)H(y) \quad 0 \leq y \leq 1 \\ \text{Para } x = 1 : H(y) &= H(1)H(y) \quad 0 \leq y \leq 1 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Como $H(\cdot)$ é crescente no intervalo $(0,1)$, $H(y)$ não é constante para $0 \leq y \leq 1$. Tem-se, assim, necessariamente, $H(0) = 0$ e $H(1) = 1$.

b) Tendo em vista que $H(0) = 0$, podemos escrever, a partir de (3.4), para $0 < x < 1$ e $0 < y < 1$.

$$\frac{H(x + y - xy) - H(x)}{y(1-x)} = \left[\frac{H(y) - H(0)}{y} \right] \left[\frac{1 - H(x)}{1-x} \right]$$

Tomando, membro a membro, o limite à direita de zero, na variável y , tem-se:

$$\frac{d H(x)}{dx} = a \frac{1 - H(x)}{1-x} \quad 0 < x < 1 \quad (3.6)$$

onde a representa o limite à direita de $H(\cdot)$ no ponto zero.

Como $H(\cdot)$ é crescente no intervalo $(0,1)$ e, além disso, $H(1) = 1$, tem-se:

$$\frac{d H(x)}{dx} > 0 \quad \frac{1 - H(x)}{1-x} > 0 \quad \text{para } 0 < x < 1$$

e, portanto, $a > 0$

Retornando à (3.6), podemos escrever:

$$\frac{d [1 - H(x)]}{dx} = -a \frac{[1 - H(x)]}{(1-x)} \quad 0 < x < 1 \quad a > 0$$

Integrando-se essa equação diferencial, obtém-se, facilmente:

$$H(x) = 1 - (1-x)^a \quad 0 < x < 1; \quad a > 0$$

Lembrando, finalmente, que $H(1) = 1$ e $H(0) = 0$, conclui-se:

$$H(x) = 1 - (1-x)^a \quad 0 \leq x \leq 1; \quad a > 0$$

II — Reciprocamente, admita-se que $H(x)$ seja expressa por (3.3). Então, para $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$, vem:

$$\begin{aligned} H(x+y-xy) &= 1 - (1-x-y+xy)^a = 1 - (1-x)^a (1-y)^a \\ &= [1 - (1-x)^a] + [1 - (1-y)^a] - [1 - (1-x)^a] [1 - (1-y)^a] \\ &= H(x) + H(y) - H(x) H(y) \end{aligned}$$

3.3 — Teorema 1:

Considere-se uma variável aleatória $X \in V$, com função de distribuição $F(\cdot)$ e suporte S . Sejam, ainda, g uma função real, definida em $C = SxS$ e $F^{-1}(\cdot)$ a inversa de $F(\cdot)$. Então, X possui distribuição sem memória, segundo a função g , se e somente se:

$$g(x,y) = F^{-1} [F(x) + F(y) - F(x) F(y)] \quad (x,y) \in C \quad (3.7)$$

Demonstração:

I — Admita-se que g seja definida por (3.7). Tem-se, nesse caso, para todo $(x,y) \in C$:

$$P \{X > g(x,y) \mid X > x\} = \frac{P \{X > g(x,y); X > x\}}{P \{X > x\}}$$

Pelo Lema 1, tem-se $g(x,y) > x$ para $(x,y) \in C$, logo,

$$\begin{aligned} P \{X > g(x,y) \mid X > x\} &= \frac{P \{X > g(x,y)\}}{P \{X > x\}} \\ \frac{1 - F[g(x,y)]}{1 - F(x)} &= \frac{1 - F\{F^{-1}[F(x) + F(y) - F(x) F(y)]\}}{1 - F(x)} = \\ &= \frac{1 - F(x) - F(y) + F(x) F(y)}{1 - F(x)} = \frac{[1 - F(x)] [1 - F(y)]}{1 - F(x)} = \\ &= 1 - F(y) = P\{X > y\} \end{aligned}$$

Portanto, $g(x,y)$ é a função de perda de memória de X .

II — Reciprocamente, admita-se que X possui distribuição sem memória, segundo a função g . Nesse caso, tem-se, para todo $(x,y) \in C$:

$$\begin{aligned} P \{X > g(x,y) \mid X > x\} &= \frac{P \{X > g(x,y); X > x\}}{P \{X > x\}} = \\ &= P \{X > y\} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Admita-se, por absurdo, que exista $(x,y) \in C$ tal que $g(x,y) \leq x$. Ter-se-ia, então, de (3.8):

$$P \{X > y\} = \frac{P \{X > x\}}{P \{X > x\}} = 1$$

ou seja, $F(y) = P \{X \leq y\} = 0$ o que é absurdo, pois $(x,y) \in C$.

Deve-se ter, assim, $g(x,y) > x$ para todo $(x,y) \in C$.

Tendo presente tal fato, e retomando-se a (3.8), podemos escrever:

$$\begin{aligned} P \{X > g(x,y) \mid X > x\} &= \frac{P \{X > g(x,y)\}}{P \{X > x\}} = \\ &= P \{X > y\} \quad (x,y) \in C \end{aligned}$$

seguinte-se:

$$1 - F[g(x,y)] = [1 - F(y)] [1 - F(x)] \quad (x,y) \in C$$

e, finalmente,

$$g(x,y) = F^{-1} [F(x) + F(y) - F(x)F(y)] \quad (x,y) \in C$$

3.4 — Teorema 2:

Sejam X e Y variáveis aleatórias pertencentes à família V , dotadas do mesmo suporte S . Designemos por $F_x(\cdot)$ e $F_y(\cdot)$, respectivamente, as funções de distribuição de X e de Y . Representemos, ainda, por g_x e g_y , respectivamente, as funções de perda de memória de X e de Y .

Faça-se, finalmente, $C = SxS$.

Então, $g_x(x,y) = g_y(x,y)$ para todo $(x,y) \in C$ se e somente se existe $a > 0$ tal que

$$F_x(x) = 1 - [1 - F_y(x)]^a \quad x \in S \quad (3.9)$$

Demonstração:

I — Admita-se que existe $a > 0$ tal que $F(\cdot)$ pode ser escrita na forma (3.9). Assim, para $(x,y) \in C$, ter-se-ia:

$$\begin{aligned} & F_x(x) + F_x(y) - F_x(x) F_x(y) = \\ & = 1 - [1 - F_x(x)]^a + 1 - [1 - F_x(y)]^a - \{1 - [1 - F_x(x)]^a\} \{1 - [1 - F_x(y)]^a\} = \\ & = 1 - [1 - F_x(x)]^a [1 - F_x(y)]^a \end{aligned} \quad (3.10)$$

Mas, de acordo com (3.9), é fácil verificar que a função inversa de $F_x(\cdot)$ se expressa da seguinte maneira em termos da função inversa de $F_y(\cdot)$:

$$F_x^{-1}(\mu) = F_y^{-1} \left[1 - (1 - \mu)^{\frac{1}{a}} \right] \quad 0 < \mu < 1 \quad (3.11)$$

Com auxílio da (3.10) e da (3.11), podemos escrever:

$$\begin{aligned} g_X(x,y) &= F_X^{-1} [F_X(x) + F_X(y) - F_X(x) F_X(y)] = \\ &= F_Y^{-1} \left\{ 1 - \{1 - 1 + [1 - F_Y(x)]^a [1 - F_Y(y)]^a\}^{\frac{1}{a}} \right\} \\ &= F_Y^{-1} \{1 - [1 - F_Y(x)] [1 - F_Y(y)]\} = \\ &= F_Y^{-1} \{F_Y(x) + F_Y(y) - F_Y(x) F_Y(y)\} = g_Y(x,y) \end{aligned}$$

para $(x,y) \in C$.

II — Reciprocamente, admita-se que $g_X(x,y) = g_Y(x,y)$, para todo $(x,y) \in C$.

Nessa hipótese:

$$\begin{aligned} g_X(x,y) &= F_X^{-1} [F_X(x) + F_X(y) - F_X(x) F_X(y)] = \\ &= F_Y^{-1} [F_Y(x) + F_Y(y) - F_Y(x) F_Y(y)] = g_Y(x,y) \quad (x,y) \in C \end{aligned}$$

Segue-se, então, para $(x,y) \in C$:

$$F_X(x) + F_X(y) - F_X(x) F_X(y) = F_X F_Y^{-1} [F_Y(x) + F_Y(y) - F_Y(x) F_Y(y)] \quad (3.12)$$

Faça-se agora

$$H(\mu) = F_X F_Y^{-1}(\mu) \quad 0 < \mu < 1 \quad (3.13)$$

Observe-se que $H(\mu)$ é contínua e monótona crescente no intervalo $(0,1)$. Tem-se, então, $x \in S$:

$$H [F_Y(x)] = F_X(x) \quad (3.14)$$

Substituindo (3.13) e (3.14) em (3.12), vem:

$$\begin{aligned} & H [F_Y(x)] + H [F_Y(y)] - H [F_Y(x)] H [F_Y(y)] = \\ & = [H [F_Y(x) + F_Y(y) - F_Y(x) F_Y(y)] \quad (x,y) \in C \end{aligned}$$

Aplicando agora o lema 2, segue-se que existe $a > 0$ tal que

$$H [F_Y(x)] = 1 - [1 - F_Y(x)]^a \quad x \in S$$

ou, de acordo com (3.14):

$$F_X(x) = 1 - [1 - F_Y(x)]^a \quad x \in S$$

3.5 — Corolário 1:

Considere-se uma variável aleatória $X \in V$, de função de distribuição $F(\cdot)$, de suporte S e função de perda de memória g .

Sejam $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$ variáveis aleatórias independentes, de mesma distribuição que X . Considere-se a estatística de extremo:

$$Y_n = \text{Min}(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

Então, g é também a função de perda de memória de Y .

Demonstração:

É imediata, tendo em vista o teorema 2 e o fato de que a função de distribuição de Y_n tem por expressão: ²

$$F_Y(x) = 1 - [1 - F(x)]^n \quad x \in S$$

3.6 — Corolário 2:

Sejam X e Y variáveis aleatórias da família V , dotadas de mesmo suporte, $S = (\alpha, \beta)$, e de mesma função de perda de memória. Representem-se por $r_X(\cdot)$ e $r_Y(\cdot)$, respectivamente, as taxas instantâneas de falhas ³ de X de Y . Então, existe um $a > 0$ tal que $r_X(x) = ar_Y(x)$ para todo $x \in S$.

² Vide DAVID, H. A. — *Order Statistics* — John Wiley & Sons Inc. (1970), p. 7.

³ Vide MEYER, P. L. — *Probabilidade — Aplicação à Estatística* — Livros Técnicos e Científicos Editora, (1969), p. 242.

Demonstração:

Representando-se por $F_X(\cdot)$ e $F_Y(\cdot)$, respectivamente, as funções de distribuição de X e de Y , podemos escrever⁴:

$$1 - F_X(x) = \exp \left(- \int_{\alpha}^x r_X(u) du \right) \quad x \in S$$

$$1 - F_Y(x) = \exp \left(- \int_{\alpha}^x r_Y(u) du \right) \quad x \in S$$

Aplicando, agora, o teorema 2, existe $a > 0$ tal que

$$1 - F_X(x) = [1 - F_Y(x)]^a = \exp \left(- a \int_{\alpha}^x r_Y(u) du \right) \quad x \in S$$

Logo,

$$\exp \left(- \int_{\alpha}^x r_X(u) du \right) = \exp \left(- a \int_{\alpha}^x r_Y(u) du \right) \quad x \in S$$

o que implica

$$r_X(x) = a r_Y(x) \quad \text{para } x \in S$$

4. CARACTERIZAÇÃO DAS FUNÇÕES DE PERDA DE MEMÓRIA

4.1 — Condições necessárias

Teorema 3:

Considere-se uma variável aleatória, $X \in V$, com função de distribuição $F(\cdot)$ e com suporte $S = (\alpha, \beta)$. Represente-se por C o conjunto $S \times S$. Seja g uma função real definida em C . São condições necessárias para que g seja a função de perda de memória de X :

I — $g(x,y)$ é uma função simétrica

$$g(x,y) = F^{-1}(F(x) + F(y) - F(x)F(y)) = g(y,x)$$

$$\text{II — a) } \lim_{x \rightarrow \alpha^+} g(x,y) = g \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \beta^-} g(x,y) = \beta$$

$$\text{c) } \lim_{y \rightarrow \alpha^+} g(x,y) = x \quad \text{d) } \lim_{y \rightarrow \beta^-} g(x,y) = \beta$$

⁴ Vide MEYER, P. L. — *op. cit.*, p. 243.

Demonstração:

Obteve-se, inicialmente, que $F^{-1}(\cdot)$ é contínua em S . Além disso,

$$F(\alpha^+) = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} F(x) = 0 \quad F(\beta^-) = \lim_{x \rightarrow \beta^-} F(x) = 1$$

Logo,

$$F^{-1}(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F^{-1}(x) = \beta \quad F^{-1}(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F^{-1}(x) = \alpha$$

Tem-se, portanto:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow \alpha^+} g(x,y) &= F^{-1} \left\{ \lim_{x \rightarrow \alpha^+} [F(x) + F(y) - F(x) F(y)] \right\} \\ &= F^{-1} [F(\alpha^+) + F(y) - F(y) F(\alpha^+)] \\ &= F^{-1} (F(y)) = y \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow \beta^-} g(x,y) &= F^{-1} \left\{ \lim_{x \rightarrow \beta^-} [F(x) + F(y) - F(y) F(x)] \right\} \\ &= F^{-1} [F(\beta^-) + F(y) - F(y) F(\beta^-)] \\ &= F^{-1}(1^-) = \beta \end{aligned}$$

As demonstrações nos demais casos são imediatas, tendo em vista a simetria de g .

III — g é uma função crescente em cada variável x e y , para $(x,y) \in C$

Demonstração:

Observe-se que $F(x)$ é crescente para $X \in S$ e que $0 < 1 - F(y) < 1$ para $y \in S$. Assim, para todo $y \in S$ fixado a função

$$F(x) + F(y) - F(x) F(y) = F(x)[1 - F(y)] + F(y)$$

é crescente na variável x , para $x \in S$.

Observando, ainda, que $F^{-1}(v)$ é uma função crescente para $0 < v < 1$, segue-se que, fixado $y \in S$,

$$g(x,y) = F^{-1} [F(x) + F(y) - F(x) F(y)]$$

é uma função crescente na variável x , para $x \in S$. A demonstração é imediata no que respeita à variável y , dada a simetria de g .

$$\text{IV} \quad \frac{\partial g(x,y)/\partial y}{\partial g(x,y)/\partial x} = \frac{r(y)}{r(x)}$$

onde $r(\cdot)$ é a taxa instantânea de falhas de X .

Demonstração:

Represente-se por $f(\cdot)$ a densidade de probabilidade de X e observe-se que a taxa instantânea de falhas de X é definida por

$$r(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = - \frac{d \log_e [1 - F(x)]}{dx} \quad (4.1)$$

Então,

$$\frac{\partial F[g(x,y)]}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [F(x) + F(y) - F(x)F(y)] = f(x) [1 - F(y)] \quad (4.2)$$

Mas,

$$\frac{\partial F[g(x,y)]}{\partial x} = f[g(x,y)] \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} \quad (4.3)$$

Analogamente,

$$\frac{\partial F[g(x,y)]}{\partial x} = f(y) [1 - F(x)] \quad (4.4)$$

e

$$\frac{\partial F[g(x,y)]}{\partial y} = f[g(x,y)] \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \quad (4.5)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F[g(x,y)] / \partial y}{\partial F[g(x,y)] / \partial y} &= \frac{f[g(x,y)] \partial g(x,y) / \partial y}{f[g(x,y)] \partial g(x,y) / \partial y} = \\ &= \frac{f(y) [1 - F(x)]}{f(y) [1 - F(y)]} = \frac{r(y)}{r(x)} \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{\partial g(x,y) / \partial y}{\partial g(x,y) / \partial x} = \frac{r(y)}{r(x)}$$

4.2 — Condições necessárias e suficientes

4.2.1 — Teorema 4:

Seja X uma variável aleatória da família V , de suporte S . São condições necessárias e suficientes para que uma função real g , definida em $C = S \times S$ seja a função de perda de memória de X :

- a) g seja uma função simétrica
- b) $\partial g / \partial y$ possa ser colocada na forma $r(y) / r[g(x,y)]$ onde $r(\cdot)$ é a taxa instantânea de falha de X .

Demonstração:

I — Suponha-se que y seja a função de perda de memória de X . Então,

- a) g é simétrica, pelo teorema 3.
- b) De (4.4), (4.5), e do teorema 2,

Obtém-se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} &= \frac{f(y) [1 - F(x)]}{f[g(x,y)]} = \frac{f(y)}{1 - F(y)} \cdot \frac{[1 - F(y)] [1 - F(x)]}{f[g(x,y)]} \\ &= \frac{f(y)}{1 - F(y)} \cdot \frac{1 - [F(x) + F(y) - F(x) F(y)]}{f[g(x,y)]} \\ &= \frac{f(y)}{1 - F(y)} \cdot \frac{1 - F[g(x,y)]}{f[g(x,y)]} \\ &= \frac{r(y)}{r[g(x,y)]} \quad (x,y) \in C\end{aligned}$$

II — Admite-se que g satisfaça às condições (a) e (b). Então, de acordo com a condição (b), tem-se:

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = \frac{r(y)}{r[g(x,y)]} = \frac{f(y)}{1 - F(y)} \cdot \frac{1 - F[g(x,y)]}{f[g(x,y)]} \quad (4.6)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \log_e \{1 - F[g(x,y)]\}}{\partial y} &= - \frac{\partial F[g(x,y)]}{\{1 - F[g(x,y)]\} \partial y} = \\ &= - \frac{f[g(x,y)] \frac{\partial \sigma(x,y)}{\partial y}}{1 - F[g(x,y)]} \quad (4.7)\end{aligned}$$

Substituindo (4.6) em (4.7), vem:

$$\frac{\log_e \{1 - F[g(x,y)]\}}{\partial y} = - \frac{f(y)}{1 - F(y)} = \frac{d \log_e [1 - F(y)]}{dy}$$

Portanto,

$$\log_e \{1 - F[g(x,y)]\} = \log_e [1 - F(y)] + c(x) \quad (4.8)$$

Onde $c(x)$ é uma função de x que não depende de y . De acordo com a condição (a), podemos escrever, ainda, a partir de (4.8):

$$\log_e \{1 - F[g(x,y)]\} = \log_e [1 - F(x)] + C(y) \quad (4.9)$$

Logo,

$$\log_e [1 - F(y)] + c(x) = \log_e [1 - F(x)] + C(y), \text{ para todo } (x,y) \in S$$

A igualdade anterior se verifica e somente se:

$$C(x) = \log_e [1 - F(x)] \quad (4.10)$$

Assim, a (4.8) escreve-se:

$$\log_e \{1 - F[g(x,y)]\} = \log_e [1 - F(x)] + \log_e [1 - F(y)]$$

e, portanto,

$$1 - F[g(x,y)] = [1 - F(x)] [1 - F(y)]$$

seguinte-se:

$$F[g(x,y)] = F(x) - F(y) - F(x)F(y)$$

$$g(x,y) = F^{-1} [F(x) + F(y) - F(x)F(y)] \quad (x,y) \in S$$

Conclui-se, assim, que $g(x,y)$ é a função de perda de memória de X .

5. FUNÇÃO DE PERDA DE MEMÓRIA DE ALGUMAS DISTRIBUIÇÕES

5.1 — Observações preliminares

Apresentaremos, a seguir, a título de exemplo, a determinação das funções de perda de memória de algumas variáveis aleatórias clássicas pertencentes à família V , das variáveis aleatórias que possuem funções de distribuição crescente em seu suporte. Para cada variável aleatória, X , especificaremos:

- a) A função de distribuição, $F_x(\cdot)$, e sua inversa, $F_x^{-1}(\cdot)$;
- b) O suporte de X , $S = (\alpha, \beta)$, determinado de acordo com a definição dada em 2.1.1;
- c) A função de perda de memória de X , $g(x,y)$, determinada por meio da fórmula (3.7);
- d) As funções de distribuição, $\{F_{X_a}(\cdot); a > 0\}$, das variáveis aleatórias cuja função de perda de memória é $g(x,y)$, determinada por meio da fórmula (3.9).

5.2 — Distribuição exponencial

$$F_X(x) = 1 - e^{-bx} \quad x \geq 0 \quad b > 0$$

$$S = (0, +\infty)$$

$$F_X^{-1}(\mu) = -\frac{1}{a} \log_e(1 - \mu) \quad 0 < \mu < 1$$

$$g(x, y) = -\frac{1}{a} \log[1 - (1 - l^{-ax}) - (1 - l^{-ay}) +$$

$$+ (1 - l^{-ax})(1 - l^{-ay})] = x + y \quad x > 0; \quad y > 0$$

$$F_{X_a}(x) = 1 - [1 - (1 - l^{-bx})]^a = 1 - l^{-abx} \quad x \geq 0 \quad ab > 0$$

Assim, apenas distribuições exponenciais possuem função de perda de memória $g(x, y) = x + y \quad x > 0; \quad y > 0$

5.3 — Distribuição de Pareto

$$F_X(x) = 1 - x^{-b} \quad x \geq 1; \quad b > 0$$

$$S = (1, +\infty)$$

$$F_X^{-1}(\mu) = (1 - \mu)^{-\frac{1}{b}} \quad 0 < \mu < 1$$

$$g(x, y) = [1 - (1 - x^{-b}) - (1 - y^{-b}) + (1 - x^{-b})(1 - y^{-b})] - \frac{1}{b}$$

$$= xy \quad x > 1; \quad y > 1$$

$$F_{X_a}(x) = 1 - [1 - (1 - x^{-b})]^a = 1 - x^{-ab} \quad x > 1; \quad ab > 0$$

Assim, apenas a distribuição de Pareto possui funções de perda de memória $g(x, y) = xy \quad x > 1; \quad y > 1$

Convém notar que uma variável aleatória com distribuição de Pareto possui função de perda de memória multiplicativa. Tal propriedade justifica, de modo simples, o fato de que diversos modelos relativos à distribuição de rendas, em suas faixas mais elevadas, resultam, por aproximações assintóticas, em distribuições de Pareto⁵.

De fato, se a renda eventual X , de um indivíduo de certa população, possui distribuição de Pareto, então,

$$P\{X > xy \mid X > x\} = P\{X > y\} \quad x > 1; \quad y > 1$$

⁵ Vide CHAMPERNOWNE, D. G. — A Model of Income Distribution — *Economic Journal*, (1953).

SIMON, H. — On Class of Skew Distribution. — *Biometrika* (1955).

Isto significa que a probabilidade de que o indivíduo multiplique sua renda atual x por uma constante y ($y > 1$), independente do nível dessa renda atual.

Outras aplicações das distribuições de Pareto tem sido feitas à distribuição das empresas, por tamanho⁶, comportando interpretações análogas à mencionada para as distribuições de renda.

5.4 — Distribuição uniforme

$$F_X(x) = \frac{x-a}{b-a} \quad a < x < b$$

$$S = (a, b)$$

$$F_X^{-1}(\mu) = a + (b-a)\mu \quad 0 < \mu < 1$$

$$\begin{aligned} g(x, y) &= a + (b-a) \left[\frac{x-a}{b-a} + \frac{y-a}{b-a} - \frac{(x-a)}{b-a} \frac{(y-a)}{b-a} \right] \\ &= \frac{1}{b-a} [b(x+y) - xy - ab] \quad a < x < b; a < y < b \end{aligned}$$

$$F_{X_c}(x) = 1 - \left[1 - \frac{x-a}{b-a} \right]^c = 1 - \left(\frac{b-x}{b-a} \right)^c \quad a < x < b; a > 0$$

Assim, a família das variáveis aleatórias que admite (g, y) como função de perda de memória, é composta daquela com distribuição em função de potência de 2.^a espécie⁷.

5.5 — Distribuição de Rayleigh

$$F_X(x) = 1 - e^{-ax^2} \quad x > 0 \quad a > 0$$

$$S = (0, +\infty)$$

$$F_X^{-1}(x) = \left[-\frac{1}{a} \log_e(1-x) \right]^{\frac{1}{2}} \quad 0 < x < 1$$

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \left\{ -\frac{1}{a} \log_e [1 - (1 - e^{-ax^2}) - (1 - e^{-ay^2}) + \right. \\ &\quad \left. + (1 - e^{-ax^2}) \cdot (1 - e^{-ay^2})] \right\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

$$F_{X_b}(x) = 1 - [1 - (1 - e^{-ax^2})]^b = 1 - e^{-abx^2} \quad x \geq 0 \quad ab > 0$$

⁶ Vide STEINDL, J. — *Random Process and the Grow of Firms* — Charles Griffin & Co. (1965).

⁷ Vide KELLER, T. — Uma Caracterização das Variáveis Aleatórias com Distribuição em Função de Potência — *Revista Brasileira de Estatística*, n.º 164, (1980).

Assim, apenas as distribuições de Rayleigh possuem função de perda de memória $g(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

5.6 — Distribuição Logarítmica

$$F_X(x) = \log_e x \quad 1 < x < e$$

$$S = (1, e)$$

$$F_X^{-1}(\mu) = e^\mu \quad 0 < \mu < 1$$

$$g(x,y) = \exp \{ \log_e x + \log_e y - \log_e x \log_e y \}$$

$$= xy \exp (- \log x \log y) \quad 1 < x < e; \quad 1 < y < e$$

$$F_{X_a}(x) = 1 - (1 - \log_e x)^a \quad 1 < x < e; \quad a > 0$$

BIBLIOGRAFIA

1. CHAMPERNOWNE, D. G. — A Model of Income Distribution — *Economic Journal* (1953).
2. DAVID, H. A. — *Order Statistics* — John Wiley & Sons Inc. (1970).
3. FELLER, W. — *An Introduction to Probability Theory* — Vol. II John Wiley & Sons Inc. (1966).
4. KELLER, T. — Uma Caracterização das Variáveis Aleatórias com Distribuição em Função de Potência — *Revista Brasileira de Estatística*, n.º 164 (1980).
5. MEYER, P. — *Probabilidade — Aplicações à Estatística* — Livros Técnicos e Científicos Editora (1969).
6. SIMON, H. — On a Class of Skew Distribution — *Biometrika* (1955).
7. STEINDL, J. — *Random Process and the Growth of Firms* — Charles Griffin & Co. (1965).

Bibliografia

PUBLICAÇÕES DE INTERESSE PARA A ESTATÍSTICA EDITADAS PELO IBGE NO PERÍODO DE JANEIRO A MARÇO DE 1981 *

- ANUÁRIO ESTATÍSTICO DO BRASIL — 1980. Rio de Janeiro, v. 41, 1981.
- BOLETIM DEMOGRÁFICO. Rio de Janeiro, v. 10, n. 4, abr./jun. 1980; v. 11, n. 1, jul./set. 1980.
- Censo comercial: Ceará.* Rio de Janeiro, 1980. 214 p., tab. (Censos econômicos 1975, série regional v. 3, t. 7).
- . *Pernambuco.* Rio de Janeiro, 1980. 236 p., tab. (Censos econômicos 1975, série regional v. 3, t. 10).
- . *Bahia.* Rio de Janeiro, 1980. 312 p., tab. (Censos econômicos 1975, série regional v. 3, t. 13).
- . *Minas Gerais.* Rio de Janeiro, 1980. 480 p., tab. (Censos econômicos 1975, série regional v. 3, t. 14).
- . *Rio de Janeiro.* Rio de Janeiro, 1980. 190 p., tab. (Censos econômicos 1975, série regional v. 3, t. 16).
- . *São Paulo.* Rio de Janeiro, 1981. 510 p., tab. (Censos econômicos 1975, série regional v. 3, t. 17).
- . *Paraná.* Rio de Janeiro, 1980. 334 p., tab. (Censos econômicos 1975, série regional v. 3, t. 18).
- . *Santa Catarina.* Rio de Janeiro, 1980. 258 p., tab. (Censos econômicos 1975, série regional v. 3, t. 19).
- . *Rio Grande do Sul.* Rio de Janeiro, 1980. 330 p., tab. (Cen-

* Preparado na Divisão de Informações Correntes do Departamento de Informação da Biblioteca Central do IBGE pela bibliotecária Isis Soares da Silva.

- ... sos econômicos 1975, série regional v. 3, t. 20).
- . *Mato Grosso do Sul*. Rio de Janeiro, 1980. 170 p., tab. (Censos econômicos 1975, série regional v. 3, t. 21).
- . *Mato Grosso*. Rio de Janeiro, 1980. 156 p., tab. (Censos econômicos 1975, série regional v. 3, t. 22).
- EMPRESAS DE TRANSPORTE RODOVIÁRIO — 1978**. Rio de Janeiro, 1981.
- INDICADORES CONJUNTURAIS DA INDÚSTRIA — 1980-1981**. Brasil: produção física, emprego, salário, valor da produção, energia elétrica. Regional: produção física. Rio de Janeiro, 1980-1981. Mensal.
- LEVANTAMENTO SISTEMÁTICO DA PRODUÇÃO AGRÍCOLA — 1980-1981**; pesquisa mensal de previsão e acompanhamento das safras agrícolas no ano civil. Rio de Janeiro, ago. 1980 — maio 1981.
- . Prognóstico da produção agrícola para 1981 no Centro-Sul (Regiões Sul, Sudeste e Centro-Oeste) Rio de Janeiro, 1981.
- LIMPEZA PÚBLICA E REMOÇÃO DE LIXO — 1977**. Rio de Janeiro, v. 1, 1981.
- PESQUISA INDUSTRIAL — 1976**. Rio de Janeiro, 1980, t. 3: Região Sudeste.
- PESQUISA NACIONAL POR AMOSTRA DE DOMICÍLIOS — 1979**. Rio de Janeiro, v. 4, 1980-1981. t. 1: Região 1 — Rio de Janeiro.
- . t. 2: Região 2 — São Paulo.
- . t. 3: Região 3 — Paraná, Santa Catarina, Rio Grande do Sul.
- . t. 4: Região 4 — Minas Gerais, Espírito Santo.
- . t. 5: Região 5 — Maranhão, Piauí, Ceará, Rio Grande do Norte, Paraíba, Pernambuco, Alagoas, Sergipe, Bahia.
- . t. 6: Região 6 — Distrito Federal.
- . t. 7: Região 7 — Rondônia, Acre, Amazonas, Roraima, Pará, Amapá, Mato Grosso do Sul, Mato Grosso, Goiás.
- . t. 8: Brasil.
- . t. 9: Área Metropolitana — Rio de Janeiro.
- . t. 10: Área Metropolitana — São Paulo.
- PRODUÇÃO AGRÍCOLA MUNICIPAL — 1979**; culturas temporárias e permanentes. Rio de Janeiro, v. 6, 1980. t. 1: Rondônia, Acre, Amazonas, Roraima, Pará, Amapá.
- . t. 2: Maranhão, Piauí, Ceará, Rio Grande do Norte, Paraíba.
- . t. 4: Minas Gerais, Espírito Santo.
- . t. 5: Rio de Janeiro, São Paulo.

———. t. 6: Paraná, Santa Catarina, Rio Grande do Sul.

———. t. 7: Mato Grosso do Sul, Mato Grosso, Goiás, Distrito Federal.

———. t. 8: Brasil

PRODUÇÃO DA PECUÁRIA MUNICIPAL — 1979. Rio de Janeiro, v. 7, 1980, t. 3: Região Sudeste.

———. t. 4: Região Sul e Centro-Oeste.

———. t. 5: Brasil.

O quadro da mortalidade por classes de renda: um estudo de diferenciais nas regiões metropolitanas (núcleo e periferia) Rio de Janeiro, 1981. 52 p. (IBGE. Estudos e pesquisas, 9).

REVISTA BRASILEIRA DE ESTATÍSTICA. Rio de Janeiro, v. 41, n. 161-163, jan.-set. 1980.

43.^a REUNIÃO DO INSTITUTO INTERNACIONAL DE ESTATÍSTICA

Deverá realizar-se em Buenos Aires, no período de 30 de novembro a 11 de dezembro de 1981, a 43.^a reunião do International Statistical Institute e suas seções Bernoulli Society for Mathematical Statistics and Probability, International Association for Statistical Computing e International Association of Survey Statisticians. O programa provisório inclui 28 títulos, correspondentes aos seguintes temas:

Assuntos

Organizadores

- | | |
|--|---------------------------|
| 1. Three Special Lectures — named after recent honorary presidents Fisher, Mahalanobis and Rice (reunião plenária) | E. Malinvand (França) |
| 2. Code of Ethics for Statisticians (reunião plenária) | |
| 3. Recent Developments in the Field of Statistics in Latin America | Raúl P. Mentz (Argentina) |
| 4. Random Fields | E. B. Dynkin (EUA) |
| 5. Predictive Approach to Statistics | Seymour Geisser (EUA) |
| 6. Design of Experiments | |
| 7. Extreme Value Theory and Application | Janos Galambos (EUA) |
| 8. Recent Developments in Time Series | E. J. Hannan (Austrália) |
| 9. Econometrics | |
| 10. Statistical Meteorology | Richard H. Jones (EUA) |
| 11. Statistics and Stochastics in Forestry | Bertil Matérn (Suécia) |

- | | |
|--|---|
| 12. Conceptual and Theoretical Framework for Survey Sampling | Noel P. Purcell (Austrália) |
| 13. Analysis of Data Based on Complex Survey Designs | Gad Nathan (Israel) |
| 14. Evaluation of the Quality of Statistical Data | Barbara A. Bailar (EUA) |
| 15. Household Sample Surveys in Developing Countries with Emphasis on Non-Sampling Errors | Lamine Diop (Senegal) |
| 16. Graphical Methods for Statistical Analysis | Kazumasa Wakimoto (Japão) |
| 17. Small Computers: Their Appropriate Use in Statistics | John H. Maindonald (Nova Zelândia) |
| 18. Statistical Abilities of Computer Software | John A. Nelder (Reino Unido) |
| 19. Computing for Official Statistics — Time Series Oriented Data Bases | Klaus Neumann (República Democrática Alemã) |
| 20. Use of Administrative Records for Statistical Purposes | Jean-Louis Bodin (França) |
| 21. What are the Consequences of Errors in Official Statistics and How Should They Be Dealt With? | Maria E. Gonzales (EUA) |
| 22. The Dissemination of Official Statistics | John Boreham (Reino Unido) |
| 23. Energy Statistics | Lincoln E. Moses (EUA) |
| 24. Safety and Risk Assessment for Large Technological Systems | V. R. R. Uppuluri (EUA) |
| 25. Statistics in Insurance (co-sponsored by the International Actuarial Association) | Harald Bohman (Suécia) |
| 26. Large Scale Computing for Sample Surveys on a Continuing Basis | |
| 27. The Measurement and Analysis of Income Distribution — with emphasis on low-income populations and on measurement of the informal or hidden economy | Oscar Altimir (Chile) |
| 28. The Measurement and Assessment of Social Benefits | |

CONGRESSO GERAL DA IUSSP — 1981, MANILA (FILIPINAS)

A Associação Internacional de Estudo Científico da População realizará seu 19.º Congresso Geral em Manila, de 9 a 16 de dezembro de 1981, atendendo ao convite do Governo das Filipinas, através de sua Comissão de População.

O programa incluirá os seguintes tópicos e sessões:

2 sessões plenárias

Sessão de abertura: Reavaliação das Tendências Populacionais

Sessão de Encerramento: De Roma e Manila: como a Demografia mudou em 3 décadas.

30 sessões formais

A. Fertilidade: Tendências, Determinantes e Conseqüências

B. Fertilidade e seu Controle

C. Casamento e Família

D. Mortalidade

E. Migração e Distribuição Populacional

F. Demografia Econômica

G. Coleta de Dados e Metodologia

H. Projeções

I. Problemas Específicos da Demografia de Grupos Específicos

12 sessões informais

Sessões sobre diversos aspectos do campo populacional

As atas serão publicadas depois do Congresso. Para maiores informações e programa detalhado, escreva para: Bruno Rémiche, Secretário Executivo, IUSSP, Rue Forgeur 5, 4000 Liège, Belgium.

Taxa de inscrição:

140 dólares — não associados

100 dólares — associados

20 dólares — acompanhante