REVISTA BRASILEIRA DE ESTATÍSTICA

Órgão oficial do IBGE
e Sociedade Brasileira de Estatística

Endereço:

Av. Beira Mar 436 — 10 º andar
Rio de Janeiro, RJ — Brasil — Tel: 242-4466

Preço:

assinatura anual: Cr$ 90,00
número avulso: Cr$ 25,00

SUMÁRIO

Artigos

Transcrições

Vultos da Estatística Brasileira

Bibliografia

Noticiário

R. bras. Estat.	Rio de Janeiro	v. 40	n.º 157/158	p. 1 a 240	jan./jun. 1979

Revista Brasileira de Estatística / Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. — Rio de Janeiro : IBGE, 1940, jan /mar. (A.1, n.) —

Trimestral.

Órgão oficial do IBGE e Sociedade Brasileira de Estatística.

Variações na denominação do editor : Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, Conselho Nacional de Estatística, Diretoria de Documentação e Divulgação 1936-1967. — Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, Instituto Brasileiro de Estatística, Diretoria de Documentação e Divulgação, 1967-1969. — Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, Instituto Brasileiro de Estatística, Departamento de Divulgação Estatística, 1969-1973. — Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, Departamento de Divulgação Estatística, 1973-1977. — Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, Diretoria de Divulgação, Centro Editorial, Departamento de Editoração, 1977-

Substitui "Revista de Economia e Estatística" do Serviço de Estatística da Produção, Ministério da Agricultura, 1936, jul(v. 1)-1939, abr.(v. 4) — Mensal.

Apresenta Índices anuais e Índices acumulados nos v. 25(v. 22-24, 1961-1963); v. 27(v. 25-26, 1964-1965); v. 29(v. 27-28, 1966-1967)

1. Estatística — Periódicos. I. IBGE.

IBGE. Biblioteca Central
RJ-IBGE/78-18

CDD 310.5
CDU 31(05)

O presente número da REVISTA BRASILEIRA DE ESTATÍSTICA reveste-se de características especiais. Com o objetivo de atualização de edições, reúne, em um só volume, os dois primeiros trimestres de 1979 e é dedicada ao professor João Lyra Madeira, eminente demógrafo do IBGE, recentemente falecido.

As reproduções de artigos do mencionado Autor, feitas a partir de números anteriores da RBE, não sofreram quaisquer modificações, procurando-se resguardar os aspectos de documento, em que pese algum prejuízo quanto à feição gráfica.

Com referência à Bibliografia do Prof. Lyra Madeira, oportunamente, a RBE divulgará os trabalhos editados em publicações do IBGE.

A RBE divulga, a seguir, na íntegra, o documento oficial elaborado para Conferência Regional Latino-americana de População, pelo representante brasileiro

BASES TEÓRICAS DE UMA POLÍTICA DEMOGRÁFICA

Prof JOÃO LYRA MADEIRA

Prof. de Demografia da Escola Nacional de Ciências Estatísticas e Diretor do Centro Brasileiro de Estudos Demográficos do IBE

SUMÁRIO

1 — INTRODUÇÃO

1.1 — Serão focalizados inicialmente alguns aspectos básicos do desenvolvimento atual das regiões subdesenvolvidas, com a apresentação de certos fatos novos que se consideram importantes para qualquer decisão sôbre a adoção de uma política demográfica para a América Latina e em particular para o Brasil. Alguns dêsses aspectos já constituem lugar comum, mas, nem por isso, deixa de ter importância considerável a sua referência nesta introdução.

1.2 — O primeiro fato nôvo característico do mundo atual é o aumento "explosivo" de sua população e a enorme variedade de pressões e de tensões que êsse crescimento tem provocado Êsse fato não deve ser confundido com o superpovoamento. Há regiões subdesenvolvidas densamente povoadas e outras subpovoadas, cada uma apresentando seus próprios problemas. O que cabe salientar, como lembra G. Bouthoul, não é o patente excesso de população de alguns países e a escassez (menos evidente) de outros, mas o fato comum realmente importante, de uma alta *velocidade de crescimento* proveniente da natalidade elevada em combinação com uma mortalidade baixa, ainda em declínio[1]. Assim, apesar de dotado, já, de uma alta velocidade de crescimento, o movimento demográfico dêsses países ainda se acha em processo de aceleração. Ainda que essa aceleração não prossiga por muito tempo, a velocidade atual é extremamente elevada quando comparada com os padrões dos países econômicamente desenvolvidos, mesmo ao tempo em que iniciaram a fase de progresso que os conduziu às suas atuais posições É importante notar que a divergência apontada reside no crescimento natural, diferença entre a natalidade e mortalidade; a parcela de crescimento migratório tem no contexto do desenvolvimento econômico, sentido e feito completamente diversos dos do crescimento natural; o esquecimento dêsse fato tem sido, muitas vêzes, fonte de interpretações errôneas e discussões inúteis Assim os efeitos desfavoráveis freqüentemente atribuídos ao crescimento demográfico excessivo não resultam de uma alta *taxa de crescimento,* mas de uma elevada taxa de *crescimento natural.*

1 3 — O segundo aspecto, que também constitui um fato nôvo, é a consciência que as nações subdesenvolvidas adquiriram da imensa desigualdade na distribuição da riqueza e das tremendas diferenças que isso acarreta aos níveis de vida e a capacidade de mantê-los ou melhorá-los Os países se dividem a "grosso modo" em ricos e pobres, e as diferenças entre os dois grupos não só já é imensa como ainda está aumentando: os ricos têm maior capacidade para enriquecer, e, de fato, estão enriquecendo mais ràpidamente do que os pobres. É possível que em maior ou menor escala isso se tenha verificado também no passado: o fato realmente nôvo é que, em conseqüência do cinema, da televisão, do telégrafo, do desenvolvimento cada vez mais espetacular dos processos e meios de informação em massa provocado pelos satélites de comunicações, todos os povos do mundo têm, atualmente, completo conhecimento e perfeita consciência dêsses fatos.

Êsses novos meios de informações, que induzem à integração de tôdas as nações em uma comunidade mundial têm duas conseqüências imediatas Em primeiro lugar, o conhecimento das desigualdades gera sensações de injustiça, de insegurança, de angústia e de frustações, responsáveis, em grande parte, pelas atitudes de violência que se apoderaram do mundo atual. Em segundo lugar, conduz os povos subdesenvolvidos a adotarem padrões de consumo imediato mais elevados do que aquêles que naturalmente comportam os programas e anseios de desenvolvimento econômico, que, de outro lado. desejam promover. Como resultado, manifesta-se, freqüentemente, uma certa incompatibilidade de políticas em diferentes setores que cumpre tornar evidente afim de que os programas sejam reformulados conscientemente, em melhores condições de viabilidade.

1.4 — O terceiro aspecto a evocar, como fato nôvo, na evolução do mundo atual, modificando o *argumento histórico* em relação às regiões subdesenvolvidas de hoje, é a circunstância de que os atuais países dessas regiões não podem contar com as mesmas alternativas de exploração de novas terras de que dispunham os atuais países desenvolvidos à época em que se desenvolveram. Pode-se alegar, que, em futuro distante, o desenvolvimento tecnológico da exploração espacial terá como conseqüência colocar à disposição do homem novos recursos naturais de outros planetas do sistema solar Para não entrar em maiores discussões sôbre êsse aspecto nôvo e fascinante basta salientar que a solução dos problemas que estão atualmente fustigando os povos das regiões subdsenvolvidas não pode esperar tais eventualidades, ainda distantes; ela deverá ser encontrada antes que a Lua ou Marte possam ser explorados de forma efetiva e produtiva

2 — CONDIÇÕES GERAIS E ÍNDICE DE BEM-ESTAR

2.1 — Para que a comunidade dos povos da Terra possa ser realmente feliz, será necessário, face à consciência generalizada dos fatos em escala mundial a que se referiu anteriormente, que as condições de vida de tôdas as nações sejam, em cada época, aproximadamente idênticas: que não exista o conhecimento de uma extraordinária riqueza de uns ao lado da extrema pobreza de outros. Todavia, os recursos naturais de cada país ainda constituem fator limitativo das suas possibilidades finais. É possível que em futuro mais ou menos remoto tôdas as nações venham a ter livre acesso aos recursos naturais da Terra e do próprio Sistema

[1] A tendência crescente já observada da adoção espontânea de métodos de planejamento familiar deverá proporcionar, em futuro breve, uma reversão dêsse movimento

Solar. Caberia aos povos menos desenvolvidos recuperar a diferença que os separa dos mais avançados e em seguida manter, daí por diante, o mesmo rítmo de progresso. De fato, qualquer diferencial no ritmo de progresso, com caracter permanente, por pequeno que seja, se traduzirá a longo prazo, em uma considerável pobreza de uns em relação aos outros. Essa consciência sôbre um rítmo de progresso comum provàvelmente sempre existiu em tôdas as comunidades antigas; apenas as dimensões e os limites da comunidade, para êsse efeito, são hoje muito mais amplos, transbordando dos quadros nacionais O problema atual deve ser encarado, para a América Latina, não dentro dos limites de cada cidade ou de cada país, isoladamente, mas deverá abranger, na sua formulação e na sua solução, tôda a comunidade americana, considerada, por sua vez face aos propósitos e anseios da comunidade mundial.

2 2 — Tendo em vista as limitações decorrentes das disponibilidades de recursos naturais não se pode esperar, nas atuais condições do mundo, uma igualdade de padrões de vida No entanto, cada país deverá promover o seu desenvolvimento procurando superar, tanto quanto possível, essas limitações A primeira coisa em que se deve pensar para definir uma política de bem estar econômico-social é no estabelecimento de um índice adequado dêsse bem estar Muitas variáveis devem ser incorporadas a êsse índice, tais como, o produto bruto por habitante (ou a renda "per capita"), a vida média ao nascer, a proporção de óbitos devidos a causas endógenas sôbre o total de óbitos, as proporções de alfabetizados, o estoque de educação (número médio de anos aprendizagem e treinamento profissional), o tempo dedicado ao lazer, a segurança no futuro etc. Cada uma dessas variáveis conta uma parte da história do bem estar; muitas repetem, em parte, a mesma coisa. Mas, através de uma análise fatorial de um quadro de correlações entre um grande número de variáveis que tenham a ver algo com essa história, e que representam "performances" finais (e não fatôres intermediários) será possível estabelecer um índice composto, constituído por uma função linear das componentes principais (Hotelling) do processo de evolução econômico-social

2 3 — O estabelecimento dêsse índice não é coisa fácil, e exige dados estatísticos que muitas vêzes não estão disponíveis. Se porém deixamos de parte tôda discussão sôbre o conceito de bem-estar econômico-social e a maneira prática de medir as suas variações pode-se admitir, para os efeitos de uma discussão prévia, que o produto bruto médio por habitante constitua um bom índice, do bem-estar econômico-social. Representando-o por p, o produto bruto por P e a população por N resulta:

$$p = P/N \qquad (1)$$

ou, subdividindo-o em três fatôres,

$$p = (P/A)\ (A/n)\ (n/N) \qquad (2)$$

sendo A o número de pessoas em atividade e n a população entre 15 e 65 anos de idade. Denominando P/A de rendimento produtivo, representado por r; A/n de coeficiente de atividade econômica, representado por a, e n/N de fração produtiva da população, representada por $1 - f$ onde f é a fração improdutiva, obtém-se

$$p = r.a.(1\text{-}f) \qquad (3)$$

As expressões (1), (2) e (3) servirão de base à análise que se fará em capítulo posterior. Os valôres do P devem ser expressos em moeda estável.

Uma observação importante vem a baila desde logo: para o estabelecimento de uma política demográfica, não se trate de discutir o problema teórico da possibilidade de um progresso econômico e ritmo acelerado de crescimento natural, mas de fixar o ritmo de crescimento de cada população e a sua possível distribuição entre o crescimento natural e migratório, compatível com o crescimento econômico programado ou simplesmente desejado. Pode-se partir do pressuposto de que cada nação pretende se integrar no ritmo de progresso da comunidade e manter a sua taxa de participação relativa no produto bruto conjunto, o que significa, por outras palavras, que a comunidade deseja manter a renda "per capita", senão exatamente igual em todos os países, mas, pelo menos, variando dentro de estreitos limites. De acôrdo com (1), se o índice de progresso de um determinado país apresenta uma tendência a declinar, isso quer dizer que a sua participação no produto bruto global está diminuindo, o que pode acontecer, ou porque o seu próprio produto interno (P) esteja crescendo mais lentamente do que as dos demais, ou porque a sua população esteja aumentando mais ràpidamente Ainda que, internamente, o produto cresça mais ràpidamente, do que a população, o que em geral se apresenta como sinal de progresso, o fato é que, dentro da comunidade considerada, êsse país estaria sofrendo um empobrecimento relativo.

2.4 — Assim, o crescimento de p tem de ser considerado em relação à média de uma comunidade, ou dentro de um programa em que êsse crescimento médio tenha sido prefixado Cabe à estatística o papel de comparar os resultados obtidos com as metas projetadas a fim de que na forma de ação "feed-back" possam ser adotadas as medidas corretivas que forem julgadas mais adequadas e oportunas: modificação dos programas ou intensificação das ações para cumpri-lo. Muitas das discussões havidas nos últimos 100 ou 150 anos a respeito da política demográfica mais adequada resultam em grande parte do fato de que alguns (e os marxistas extremados estão enquadrados nesse grupo) focalizam apenas as medidas que tendem diretamente a aumentar o numerador enquanto outros (onde se enquadram os maltusianos extremados) discutem apenas as que afetam diretamente o denominador, fazendo-o crescer lentamente Os que escolhem P como variável principal do processo julgam, coerentemente, que *todos os esforços se devem concentrar* sôbre as medidas tendentes a aumentar P; o resto virá como conseqüência Os que acham que a variável principal é N, teimam em preconizar políticas de ação direta e intensiva sôbre o crescimento demográfico, como as mais adequadas para o caso

3 — CARACTERÍSTICAS DO PROGRESSO ECONÔMICO ATUAL

3 1 — Uma parcela importante do bem-estar econômico-social está associada ao progresso econômico. Êsse progresso resulta, por sua vez, de uma combinação adequada de trabalho, recursos naturais e capital, tem-se caracterizado não só por aumento considerável da proporção de capital, em relação ao trabalho, mas, principalmente, pela alteração das estruturas do capital e do trabalho. A estrutura do capital pode ser estabelecida através da subdivisão em diferentes tipos, de gradação quase imperceptível. Todavia, para uma apresentação de caráter sumário pode-se considerar, apenas, duas grandes classes: o capital equipamento e o capital técnico incluindo "know-how" ou ainda, capital equipamento e capital humano. O primeiro vem sofrendo modificações permanentes de estrutura segundo as proporções existentes nas diferentes formas desde o equipamento energia (máquinas a vapor, etc.) ao equipamento operador (máquinas operatrizes) até ao equipamento processador (máquinas lógicas, computadores, etc.) dos modernos métodos de automação. Do mesmo modo, o capital humano se modifica permanentement em função do tipo e do tempo de for mação e aprendizado que se incorpor ao trabalhador, através do sistema edu cacional. A estrutura do trabalho po sua vez pode ser caracterizada, a "gros so modo" pela subdivisão em trabalh intelectual, especializado e genérico. (trabalho genérico é simplesmente un trabalho não especializado resultant da execução manual de tarefas simple e da utilização da fôrça física do ho mem.

3.2 — As proporções existentes en cada uma dessas classes caracterizan uma determinada estrutura do traba lho. Com o progresso econômico ten havido uma passagem gradativa d execução do trabalho genérico do ho mem para os equipamentos por êle in ventados e fabricados. Cada vez mai o homem está sendo intensamente soli citado para os trabalhos de criaçã intelectual e para as tarefas altament especializadas O progresso tem sid na realidade um processo de liberaçã do homem como *"fôrça de trabalho* para transformá-lo em *"inteligência d ação"*. O que antigamente era executa do pela aplicação da fôrça e das habi lidades manuais é cada vez mais dei xado às máquinas programadas, libe rando trabalho humano dêsse tipo, exigindo maior parcela de trabalho in telectual. E isso trouxe e continuar a trazer como conseqüência uma drás tica redução da jornada de trabalho Antigamente, todo o tempo possível er absorvido pelo trabalho; hoje o homen tem muito mais lazer, está muito mai livre para gozar as delícias que progresso lhe proporciona De cert forma, portanto, o progresso é um gran de criador de lazer, um dos mais im portantes bens econômicos Observe-s que as nações subdesenvolvidas nã podem partir do princípio da linha par seguir todo o caminho que foi trilhad pelos povos de hoje desenvolvidos, n fase de seu desenvolvimento; estã obrigados a tomar um veículo em mo vimento, em meio de caminho e quei mar várias etapas a fim de atingir trecho de estrada em que êles se en contram para poder acompanhá-los en sua marcha.

3.3 — Essa característica do pro gresso econômico atual é decisiva par o estabelecimento de uma política de mográfica Para fixar idéias podemo dizer que, como opção, é mais impor tante para o Brasil (e isso se aplica à maioria, se não à totalidade dos paíse subdesenvolvidos da América Latina) acrescentar anualmente mais de 20 ou 30 mil indivíduos de nível superior à sua população do que 100 ou 200 mi operários não especializados (trabalh genérico).

4 — COMPONENTES DA POLÍTICA ECONÔMICO-DEMOGRÁFICA E O PRODUTO MÉDIO POR HABITANTE

4.1 — Seria extremamente longo analisar as influências de tôdas as componentes de uma política econômico-demográfica que agem sôbre os três fatores que compõem a fórmula (3). Assim, o estudo se limitará, apenas, a uma análise sumária de alguns aspectos mais importantes, considerando cada fator de per si. O fator $r = P/A$ representa a produtividade média por trabalhador. Não vamos analisar os elementos de que depende essa produtividade. Trata-se aqui da seara dos economistas Dir-se-á tão sòmente que ela é uma resultante do modo por que está organizada tôda a economia do país, do capital existente sob a forma de equipamento e de capital humano, da estrutura e diversificação dêsse capital das relações jurídicas, dos têrmos de trocas internacionais, da mobilidade ocupacional, da legislação rural, etc. As suas variações no tempo dependem muito estritamente do montante de inversões que a comunidade decida (ou possa) realizar anualmente, e da rentabilidade social dessas inversões. Um crescimento demográfico rápido não só reduz o montante disponível das inversões (em equipamento, em formação técnica e educação básica, etc.), mas, também deprime a rentabilidade social dessas inversões, obrigando a uma maior proporção de inversões demográficas, de rentabilidade inferior, em detrimento das demais inversões de rentabilidade muito mais elevada, em têrmos de aumento do produto.

4 2 — O fator $a = A/n$ representa a proporção ativa na população de 15 a 65 anos Essa proporção é diretamente afetada pelas condições de saúde, aumentando o número de pessoas válidas e reduzindo o número anual de dias perdidos por doença, o qual não aparece explìcitamente na fórmula, mas pode ser considerado como incluído em A, se essa quantidade exprimir o *número médio* diário de pessoas que trabalham durante o ano O valor de a depende de todos os fatôres econômicos de caráter estrutural que afetem o volume de emprêgo mas, nos países subdesenvolvidos, êle pode ser consideràvelmente aumentado através de uma política sanitária eficiente e da criação de condições capazes de incentivar o trabalho feminino Observe-se, de passagem, que a generalização do trabalho feminino terá certamente como efeito deprimir a taxa de natalidade, reduzindo o ímpeto de crescimento da população dêsses países com todos os seus efeitos benéficos. A intensificação (ou redução) do ímpeto de crescimento da população poderá reduzir ou aumentar a de duas maneiras: na medida em que o desvio (ou liberação) de recursos da saúde pública para outros fins relacionados com êsse crescimento possa afetar o valor de A, mais do que o de n e na medida em que uma variação de A possa ser a conseqüência de uma variação do número de horas de trabalho feminino, em conseqüência de partos mais (ou menos) freqüentes. Quanto ao fator $1 - f = n/N$ êle está diretamente relacionado com a distribuição por idades da população. A experiência tem demonstrado e a aplicação dos modelos teóricos justificam o fato de que, em populações fechadas, essa proporção é pouco influenciada pelos níveis da mortalidade e depende essencialmente dos níveis da natalidade. Uma redução da natalidade aumentará ràpidamente o fator $1 - f$ da fórmula (3), exercendo, assim, em prazo relativamente curto, uma influência benéfica no sentido de aumentar p

4 3 — Se a população é aberta, as correntes migratórias têm, igualmente, um efeito sôbre $1 - f$; êsse se exerce porém em sentido contrário ao do anterior. Assim, um aumento da taxa de crescimento demográfico em virtude de correntes migratórias, que acrescem os contingentes das classes produtivas, têm um efeito favorável tendente a aumentar p, ao passo que o mesmo aumento da taxa de crescimento, devido a uma elevação da natalidade, tende a reduzir p Por êsse motivo é falacioso relacionar o progresso ou declínio econômico à taxa de crescimento demográfico sem especificar se se trata do crescimento natural ou do crescimento migratório. Em particular não é lícito pretender se justificar a idéia de que o crescimento demográfico dos países subdesenvolvidos não dificulta o seu progresso econômico, utilizando o exemplo do desenvolvimento econômico dos Estados Unidos onde uma parcela migratória considerável modifica totalmente o panorama econômico-demográfico O imigrante é mão-de-obra acabada; um nascituro é apenas uma promessa para os próximos 15 ou 20 anos, exigindo fortes inversões para a sua formação. A contribuição da Europa aos Estados Unidos, através das correntes migratórias, foi um fator decisivo para o seu desenvolvimento econômico Basta que se pense na redução dos custos da mão-de-obra resultante da substituição de 1.000 nascimentos por 1 000 imigrantes.

4 4 — Um exemplo, válido, em princípio, de desenvolvimento econômico acompanhado de crescimento demográfico natural elevado, é o que fornece o Japão, realizado em período re-

lativamente curto com seus próprios recursos internos, em capital e mão-de-obra. Todavia, durante êsse período a renda "per capita" japonêsa foi sempre sensìvelmente mais baixa e os salários mais vis que nos demais países em análoga fase de desenvolvimento econômico. Isso vem demonstrar duas coisas: primeiro, que não é impossível o desenvolvimento econômico associado a uma alta taxa de crescimento demográfico natural; segundo, que essa circunstância exige todavia grandes sacrifícios. Em programas de desenvolvimento futuro, ainda se tornará mais difícil essa associação. De fato, as proporções de trabalho intelectual e de mão-de-obra altamente especializada terão valôres cada vez maiores em relação ao trabalho genérico, o que dificilmente se conseguirá com uma taxa de crescimento natural excessiva: a qualidade ficará sacrificada em benefício da quantidade. Além disso, não será tão simples, face ao conhecimento em escala mundial das condições reinantes nos países altamente desenvolvidos a que nos referimos no início dêste trabalho, conseguir níveis de consumo capazes de deixar margens suficientes para um programa de inversões massiças além das exigidas pelo crescimento demográfico (residências, alimentação, roupa, etc) e do consumo supervalorizado (bens não essenciais). Assim, também aqui o argumento histórico não pode ser aplicado sem as devidas adaptações às novas condições.

5 — PROGRESSO ECONÔMICO-SOCIAL E NATALIDADE

5 1 — Há um aspecto do desenvolvimento econômico-social que deve ser levado em conta em todo programa de política demográfica. O próprio desenvolvimento econômico-social exerce uma forte influência no sentido de deprimir a fecundidade e, em conseqüência, de reduzir a taxa de natalidade e finalmente, o ritmo de crescimento, apesar do declínio que também provoca na taxa de mortalidade. Há um grande número de razões teóricas que justificam essa observação histórica, segundo as quais constitui um procedimento inteiramente racional (apesar da aparência em *contrário*) o de que, nas comunidades pobres, o número médio de filhos por casal seja superior ao das comunidades ricas, de modo que à medida que uma comunidade progride econômicamente, a natalidade deve declinar[2]. Êsse fato é freqüentemente apontado como argumento no sentido de que não é necessário preocupar-se com o crescimento excessivo da população uma vez que o próprio progresso econômico se encarregará de reduzi-lo.

5.2 — O argumento não é inteiramente válido por dois motivos: em primeiro lugar, ainda que o progresso econômico provoque um declínio da natalidade, o que se pretende na realidade é saber se êsse desenvolvimento poderá ser conseguido com uma taxa de crescimento natural excessivamente elevada. O argumento em foco visa, principalmente, a demonstrar que não haverá o risco de superpovoamento uma vez que, conseguido o progresso econômico a taxa de crescimento natural *tende a declinar*, mas fica por demonstrar que o progresso (em escala adequada) pode ser conseguido nessas condições. Mas, ainda que se admita essa possibilidade, não fica afastada a conveniência de uma ação mais direta no sentido de reduzir a taxa de crescimento natural uma vez que isso possa eventualmente apressar o declínio dessa taxa e agir favoràvelmente sôbre o progresso econômico-social. Basta salientar que a mortalidade também declina com o progresso econômico, como aconteceu em todos os países econômicamente desenvolvidos No entanto, uma ação vigorosa dos programas mundiais de saúde permitiu aos países subdesenvolvidos conseguir, em 15 ou 20 anos, declínios de mortalidade que os países econômicamente desenvolvidos levaram 100 anos para conseguir. Se não tivesse havido essa ação vigorosa, aquêles países ainda estariam esperando o seu desenvolvimento econômico para conseguir o declínio espetacular que registraram nas últimas décadas em seus níveis de mortalidade.

6 — POLÍTICA DEMOGRÁFICA

6.1 — Em princípio pode-se reconhecer como válida a conclusão de que um crescimento demográfico natural excessivo, dentro das atuais contingências históricas, poderá deprimir o produto médio por habitantes, ou, de modo mais geral, o índice de bem estar econômico-social. Uma política demográfica deve ser constituída por um conjunto de medidas que induzem as famílias a agirem de acôrdo com os interêsses do país no que se refere ao crescimento que suas decisões implicam em relação à população Êsse conjunto de normas deve fazer parte de uma

[2] Êsses aspectos foram amplamente desenvolvidos, nas apostilas do Curso de Demografia da ENCE, 1968.

política econômica global. Em têrmos da fórmula (3) o crescimento demográfico excessivo se manifesta pela redução dos três fatôres ali referidos: r, a e $(1 - f)$. Em r a sua ação resulta do fato de que o crescimento excessivo absorve recursos em inversões demográficas, de menor rentabilidade; sôbre a, porque dificulta a ação da política sanitária e reduz o trabalho feminino; sôbre $1 - f$ em virtude da estrutura etária desfavorável a que uma alta fecundidade conduz.

6.2 — Assim, tôdas as medidas que atuem no sentido de diminuir o ritmo de crescimento de N tenderão a incentivar o ritmo de aumento do produto médio por habitante. As demais medidas de caráter econômico-social têm por objetivo aumentar diretamente o valor de r melhorando a rentabilidade das inversões (em equipamentos, organização, "know-how", educação técnica, etc); indiretamente elas agem também sôbre o fator $1 - f$ pela ação que o desenvolvimento econômico-social por elas gerado exerce no sentido de deprimir o ritmo de crescimento de N Uma adequada política educacional exerce anàlogamente uma ação direta sôbre r melhorando a produtividade geral e indireta sôbre N, deprimindo, como no caso anterior, o ritmo de crescimento demográfico natural Uma política de planejamento familiar intensivo tem por objetivo agir diretamente sôbre o ritmo de crescimento de N. Assim, tôda política econômico-social-demográfica implica na destinação de recursos, segundo programas preestabelecidos, com o objetivo de aumentar p (ou o índice de bem estar econômico-social que fôr adotado).

6 3 — O aumento de p, gerado por um dado acréscimo elementar do montante aplicado no programa de ação A_1, constitui a resposta de p ao referido programa de ação Se se conhece, através de uma expressão matemática, de uma tabela ou apenas de um gráfico a resposta de p a cada programa de ação, para cada montante global aplicado torna-se possível estabelecer uma política racional devidamente justificada. Considere-se, para isso, dois programas: A_1, inversões em educação; A_2, inversões em um plano intensivo de planejamento familiar A parcela total de inversões é prefixada, devendo-se escolher qual a fração do total que deverá ser aplicada em cada programa É possível que a resposta de p ao programa A_1 seja sempre superior à do programa A_2, uma vez que o programa de educação (A_1) age diretamente aumentando r e indiretamente reduzindo N, (aumentando $1 - f$) ao passo que o programa A_2 só age sôbre êsse último fator, embora possa fazê-lo mais intensamente. Tudo depende portanto da resposta de p a cada programa. O ponto ótimo será aquêle que cada cruzeiro, aplicado em todos os programas concorrentes, produzem a mesma resposta em p, isto é, provoquem o mesmo acréscimo do produto médio por habitante (ou do índice de bem estar econômico-social que fôr adotado), na suposição, é claro, de que exista êsse ótimo. Do ponto de vista matemático o ponto ótimo é p, ponto de máximo da superfície de resposta aos diferentes programas Para que o sistema possa funcionar do ponto ótimo é necessário no entanto eliminar todos os atritos estruturais fazendo com que êle esteja em condições de se adaptar, tão ràpidamente e completamente quanto possível, às condições de equilíbrio.

6 4 — Em particular, para que o plano A_1 possa exercer o seu efeito indireto sôbre N, através do planejamento familiar espontâneo adotado pelos componentes da população em resposta aos incentivos proporcionados, é necessário que todos os casais estejam em condições de optar por um dado dimensionamento familiar e a sua opção possa ser realizada com um mínimo de eficiência aquém da qual deixa de ser efetiva. Para isso torna-se necessário adotar, como parte integrante do programa A_1, um mínimo de medidas no campo do programa A_2 Por outras palavras, se poderia estabelecer que o programa A_2 se refere tão-sòmente a uma política *intensiva* de planejamento familiar, compreendendo apenas aquelas medidas que se considerassem além do mínimo indispensável para o pleno efeito do programa A_1 em relação à sua influência indireta sôbre o declínio de N. Êsse mínimo se refere ao conjunto de medidas capazes de estabelecer, para todos os casais, opções *conhecidas* e *eficientes* no campo do livre exercício do planejamento familiar. Entre tais medidas podem ser incluídas: i) o abôrto legal; ii) livre produção, venda e divulgação de métodos e produtos anticonceptivos devidamente aprovados pela Saúde Pública; iii) educação sexual a partir das escolas primárias.

7 — POLÍTICA DEMOGRÁFICA E PESQUISA

7 1 — Dentro do panorama do mundo atual, nenhum país poderá fugir à contingência de adotar uma política de conjunto capaz de permitir-lhe melhorar (ou, no mínimo, manter) a cota parte, proporcional à população, de um produto bruto, mundial, cujo crescimento é afetado pelas políticas

nacionais restritivas da natalidade (sob forma espontânea ou sob pressão do Estado) que se generalizam cada vez mais. Isso não significa necessàriamente que todos os países devam promover uma política de planejamento familiar intensivo dos tipos adotados, por exemplo, no Japão ou na Índia; conseqüências análogas podem eventualmente provir de outros programas que, a par da implementação do planejamento voluntário, proporcionem outros efeitos, favoráveis ao desenvolvimento econômico.

7.2 — A pesquisa científica no campo econômico-demográfico terá papel extremamente importante na orientação das decisões nesse campo. Se se parte, como geralmente se faz, quando se resolve adotar "a priori" uma política intensiva de restrição da natalidade, do princípio de que êsse é o melhor caminho para incentivar o desenvolvimento econômico, procura-se adotar o programa mais eficiente do *ponto de vista do planejamento familiar,* isto é, aquêle que apresente maior influência sôbre o declínio da taxa de fecundidade, para um dado custo do programa Suponha-se que o resultado final de uma tal política seja a redução do ritmo de crescimento da população, fazendo declinar a taxa instantânea do crescimento natural do nível α para o nível $\alpha - \beta$. O valor de β mede a eficiência final da política de planejamento adotada, sendo preferível aquela que, para o mesmo custo, proporcionar um maior valor de β. Trata-se de um critério de subotimização natural para os partidários do planejamento indiscriminado (cujos aspectos éticos não estão aqui em discussão). Mas, o "desenvolvimentista" deseja simplesmente aumentar p de modo que poderá encontrar em uma outra política, — educacional, por exemplo — um melhor caminho para proporcionar um aumento do produto bruto e, indiretamente, *implementar o planejamento voluntário,* reduzindo o ritmo de crescimento da população. Seja o aumento da taxa instantânea de crescimento do produto bruto e δ o declínio da taxa de crescimento natural, devidos à nova política. Se $\delta < \beta$, a nova política será considerada menos eficiente, *do ponto de vista estrito do planejamento familiar;* mas, considerada do ponto de vista do desenvolvimento econômico ela poderá ser mais eficiente, sempre que $\gamma + \delta > \beta$, uma vez que, no primeiro caso, o produto médio por habitante crescerá a uma taxa igual a β e no segundo, a uma taxa superior, $\gamma + \delta$. Na realidade será necessário computar ainda o aumento indireto do produto resultante da liberação de recursos utilizados nas inversões de caráter demográfico, o que ocorre com intensidades diferentes nos dois casos; mas, de qualquer forma, a comparação não deverá ser feita entre δ e β, e sim entre os resultados finais sôbre *p,* provocados por um determinado gasto em cada programa. Por outras palavras, a consideração, pura e simples, da eficiência dos programas de planejamento familiar não é suficiente para as decisões a tomar; embora apresentem tais comparações a melhor solução com relação *à diminuição da natalidade,* êsses programas desviam recursos de outros que, sendo *menos eficientes* em relação a êsse subobjetivo, quando considerada uma política mais ampla, apresentam-se, finalmente, *mais eficientes,* em relação ao objetivo principal, que é o aumento do produto médio por habitante, em virtude de atuarem sôbre *P* e *N* ao mesmo tempo

7 3 — A decisão sôbre a adoção de um programa de planejamento familiar além do programa mínimo referido no final do capítulo 6 não pode ser tomada antes que a pesquisa demográfica se desenvolva o suficiente para permitir, pelo menos, algumas conclusões gerais sôbre os fatôres que afetam a fecundidade e a eficiência de diferentes programas, seja quanto aos seus efeitos diretos, seja em relação aos indiretos, em comparação com os respectivos custos. É possível que tais resultados só possam ser obtidos em sucessivas aproximações, aproveitando-se ainda tôda a experiência de que se disponha sôbre a aplicação de programas semelhantes em outros países De qualquer modo, parece-nos que duas conclusões se impõem: i) a adoção de um programa mínimo, do tipo indicado no final do parágrafo 6 4 parece indiscutível como condição indispensável para um progresso econômico dos países subdesenvolvidos da América Latina a fim de que pelo menos não se atrasem em relação à média dos países econômicamente desenvolvidos; ii) que sejam ampliadas as pesquisas demográficas nesses países a fim de se obterem elementos objetivos no sentido de permitir decisões sôbre políticas demográficas mais intensivas no campo do planejamento familiar; iii) a formação técnica para o máximo aproveitamento dos recursos humanos é obrigação cada dia mais importante a ser desempenhada pelo sistema educacional ao lado da ampliação da pesquisa científica em todos os campos

8 — RESUMO

O autor apresenta como fatos novos no mundo moderno que devem ser levados em conta na formulação de uma política demográfica: o aumento natural explosivo da população, a consciência que as nações adquiriram das imensas desigualdades na distribuição da riqueza com o conseqüente desejo de promover o desenvolvimento sem deprimir o consumo, em comparação com os países econômicamente desenvolvidos (na realidade duas metas incompatíveis) e por fim a inexistência de novas terras a explorar em larga escala, por parte das nações subdesenvolvidas.

Mostra a necessidade do estabelecimento de um índice de bem estar social (o produto médio por habitante é um índice dêsse tipo embora não completamente satisfatório). Procede em seguida a uma análise do progresso econômico atual no que diz respeito às exigências, muito mais drásticas, quanto à mão-de-obra altamente especializada e ao trabalho intelectual de alto nível e examina as influências da política demográfica sôbre os três fatôres em que decompõe o produto bruto por habitante

Conclui por fim que as diferentes políticas de planejamento familiar intensivo deslocam recursos de outros setores de modo que a subotimização de uma política de planejamento familiar pode não conduzir necessàriamente ao resultado mais satisfatório do ponto de vista do aumento do produto médio por habitante gerado por essa política. Como alternativa sugere que um plano de política educacional pode vir a ser mais eficiente do ponto de vista do aumento do produto por habitante, desde que se realizem certas condições mínimas no campo de planejamento familiar, (educação sexual e conhecimentos de métodos e facilidades com relação aos processos de anticoncepção) capazes de tornar mais rápidos os efeitos do progresso econômico sôbre a evolução demográfica, pela implementação do planejamento voluntário. Sugere ainda estudos e pesquisas a serem realizados para êsse objetivo, permitindo uma escolha ótima de inversões na qual se incluiriam programas de planejamento familiar, caso viessem a se mostrar eficientes tendo em vista o aumento do produto por habitante (ou do índice de bem estar que viesse a ser adotado)

MALTHUS, MARX E O PAPEL DA POPULAÇÃO NO DESENVOLVIMENTO ECONÔMICO

JOÃO LYRA MADEIRA
Professor de Demografia
da Escola Nacional de Ciências Estatísticas

1 Poucos economistas têm dado, ao problema demográfico, a importância que êle merece. Limitam-se, quase sempre, a considerar o desenvolvimento da população como um fator que independe do desenvolvimento econômico; assim, a população é um *dado* do seu problema Atribui-se aos demógrafos a tarefa de calcular o número de habitantes em determinadas épocas futuras a fim de se poder estimar a mão-de-obra, facultando-se aos economistas a estruturação dos seus planos econômicos, mediante a fixação através de processos de otimização e sub-otimização das inversões capazes de absorver, nos novos empregos criados, aquela mão-de-obra prevista Procedimento talvez aceitável para um país econômicamente desenvolvido mas inteiramente inadequado quando se trata de país subdesenvolvido

De fato, em um país subdesenvolvido o problema é o do desenvolvimento e êste é essencialmente um processo a longo prazo para o qual pouco adiantam os métodos aplicáveis a problemas de curto prazo. Além disso, o desenvolvimento terá de ser mais rápido do que o dos países econômicamente desenvolvidos a fim de se ganhar terreno para poder atingi-los. De outra forma os países subdesenvolvidos estarão progredindo ainda que, em têrmos absolutos, se verifique algum progresso econômico. O problema não é, apenas, progredir; é progredir adequadamente, da forma que resulte mais "econômica"

2 — Planejar as inversões necessárias para absorver uma mão-de-obra predeterminada é um procedimento que esquece o fato fundamental de que o crescimento demográfico e as inversões disponíveis são dois fatôres fortemente correlacionados, de modo que se torna inadequado, em um planejamento econômico, supor que a mão-de-obra *é dada*, projetando-se as inversões necessárias para uma população calculada a parte. De fato, se a população cresce muito ràpidamente, por exemplo (como é o caso dos países subdesenvolvidos) o plano econômico deverá prever inversões maciças para absorver a numerosa mão-de-obra calculada Acontece, porém, que, exatamente porque a população cresce muito ràpidamente, a capacidade de inversão torna-se escassa de modo que nunca poderão ser atendidas, por êste meio, as necessidades do processo de desenvolvimento rápido **. Assim, tendo em vista essas características de uma população subdesenvolvida, em rápido crescimento, resulta que as exigências de inversões serão terrìvelmente elevadas exatamente quando se tornam escassas as disponibilidades para inversões; existe, pois, um poderoso "feed-back" negativo que limita a capacidade de desenvolvimento dos países subdesenvolvidos. Deixando para examinar noutra oportunidade o modo do funcionamento dêsse "feed-back", vamos considerar, desde logo, alguns aspectos gerais do processo de desenvolvimento humano Para isso passamos em revista, com algumas modificações destinadas a ilustrar os nossos objetivos, a parábola dos 3 Malthus, bem conhecida entre os demógrafos.

3 — Suponhamos uma população, habitando um determinado território, em uma fase muito primitiva de desenvolvimento, vivendo exclusivamente da caça e da pesca. De início, quando um pequeno grupo ali se instalou, a caça

** Excluída, é claro, a hipótese de inversões estrangeiras maciças e a pesca eram abundantes; houve luta entre tribos rivais e finalmente uma delas dominou a situação e instalou-se na região. Com o passar o tempo o grupo inicial foi aumentando; a população tornou-se mais densa, passando a ocupar uma vasta área. A técnica da caça e da pesca foi se aprimorando para atender às exigências do crescimento demográfico: formaram-se, para isso, grupos de caçadores especializados Mas, aos poucos, nenhuma melhoria dos processos de caça e pesca fôra capaz de superar a escassez de alimentos que se tornava dia a dia maior. Surgiu então o "primeiro Malthus", sob a forma de um feiticeiro sábio que passou a pregar a necessidade da restrição da natalidade, a analisar as dificuldades crescentes, a mostrar como, em face das condições econômicas reinantes, a população estaria condicionada a um teto — que êle fixava em 2 milhões de habitantes — além do qual não haveria alimentos para todos, de modo que a fome se generalizaria. A população realmente atravessou uma fase de angústia e decadência, tendo-se desenvolvido um desassossêgo geral, manifestado através de sublevações em várias aldeias, que foram dificilmente dominadas, exigindo para isso instituições de um govêrno forte A população teve um período difícil. Mas os tempos passaram Aos poucos os mais espertos foram percebendo que a garantia de alimento podia ser conseguida sem a atividade da caça ou da pesca: alguns animais poderiam ser *criados*, e alguns vegetais *plantados*, o que seria suficiente para assegurar alimento farto. Foi então ultrapassada, por aquêle povo, a fase de *caça e pesca*, para urgir uma nova época promissora, estruturada econômicamente sôbre a *agricultura e a criação* Aquela mesma região que, condicionada à estrutura econômica da caça e da pesca, poderia alimentar 2 milhões de habitantes, no dizer do feiticeiro primitivo, ampliou muito as suas possibilidades, comportando, agora, dentro da nova estrutura econômica, talvez 10 ou 20 milhões de pessoas.

4 — O tempo continua a passar e a população tem nôvo surto de progresso, ultrapassando a casa dos 10 milhões de habitantes distribuídos em aldeamentos maiores e gozando de mais amplas comodidades As novas atividades são mais calmas e o trabalho mais sistemático e produtivo do que na velha fase da caça e da pesca. O comércio se desenvolve; a divisão do trabalho já é bem mais acentuada do que antigamente Torna-se evidente o progresso econômico conseguido com a nova estrutura da população. Nova corrida do tempo; a população atinge os 15 milhões Para manter o nível de vida conseguido, várias melhorias vão sendo acrescentadas gradativamente, e novos métodos de trabalho são instituídos. Mas, de qualquer modo, novos terrenos devem ser explorados: são os terrenos mais distantes e menos produtivos. O esfôrço de trabalho é cada vez maior para poder assegurar o alimento e as comodidades a que já se tinham habituado aquêles homens ainda rudes mas consideràvelmente mais desenvolvidos, econômicamente, do que os antigos caçadores As dificuldades aumentam, todavia; começam a surgir novos motivos de angústia Já não reina a mesma paz entre os indivíduos; os espíritos estão dominados pela preocupação do futuro, cheios de incertezas e rancores. Surge então um pregador, *um segundo Malthus*, que recomeça a fazer as mesmas advertências do antigo feiticeiro A população está crescendo e sempre tenderá a crescer mais ràpidamente do que as disponibilidades de alimento, diz êle, e assim estará caminhando para a fome e para o aniquilamento da civilização. O território não comportará, decididamente, mais de 20 milhões de habitantes Além dêsse total todo aumento será acompanhado de terríveis conseqüências; a Peste, a Fome e a Guerra seriam algumas dessas conseqüências se o homem não limitasse a sua prole através da abstinência sexual, completa, para alguns e parcial para outros *

5 — Mas o que tinha acontecido antes tornou a acontecer O homem descobriu novos processos de produção muito mais eficientes A revolução industrial permitiu ampliar consideràvelmente a potencialidade econômica da nação de modo que, com a nova estrutura econômica, os novos métodos de exploração industrial, que proporcionaram, inclusive, um espetacular aumento da produtividade agrícola, aquêle país, que comportava apenas 20 milhões de habitantes, tornou-se capaz de abrigar, no mesmo território, 100 milhões ou mais Com isso, acentuou-se, também, o crescimento da população

---

* O "verdadeiro" Malthus, o economista e clérigo inglês Thomas Malthus, surgiu na Inglaterra, nessa fase, tendo empregado sua doutrina no final do século XVIII O seu livro, intitulado *An Essay of Principle of Population* foi publicado, em primeira edição, em 1798 O que dissemos acima a propósito do 2.º Malthus é apenas a "grosso modo" o pensamento do verdadeiro Malthus

A nova estrutura econômica melhorou consideràvelmente as condições de vida e deu também ao homem um poder enorme sôbre a Natureza: hoje êle domina um número considerável de seus segredos e, o que é mais importante, descobriu e aperfeiçoou um método extremamente poderoso para interpretar a linguagem da Natureza e descobrir novos segredos ainda não revelados: o método científico.

Um dos segredos que o homem conseguiu dominar, em grande parte, foi o grande segrêdo da Vida e da Morte; embora ainda esteja prosseguindo nas suas descobertas nesse campo, devendo-se esperar para breve novas vitórias espetaculares, é evidente o papel que já desempenhou o domínio da Morte sôbre a aceleração de crescimento demográfico em todo o mundo nos últimos 100 anos, ou pouco mais, principalmente nos países subdesenvolvidos, nos últimos 30 anos.

Considerando a Terra como um todo, a espécie humana ameaça superlotá-la em poucos séculos; continuando a atual taxa de crescimento (que ainda tende a aumentar), teríamos, em 5 séculos, cêrca de 1 trilhão de habitantes sôbre a Terra (1).

Surge então (já no cenário mundial) um nôvo pregador; o 3.º Malthus. Não através de um indivíduo, mas através de uma corrente de pensamento que dia a dia se cristaliza, aconselhando a limitação da natalidade como o único meio de vencer a fome que ameaça a Terra.

6 — A fim de esclarecer o assunto consideremos agora um outro pregador importante — de repercussão maior sôbre as massas populares — que surgiu repentinamente no cenário mundial: Karl Marx. Enquanto Malthus (o verdadeiro Malthus) viveu a maior parte de sua vida no final do século XVIII e princípio do século XIX, Marx nasceu em 1816 e morreu em 1883; viveu, portanto, em grande parte, na 2ª metade do século XIX. Se quisermos precisar mais, utilizando o antigo hábito helênico, diremos que êle teve o seu "acmé" (2) por volta de 1860. A "grosso modo", portanto, Marx viveu meio século depois de Malthus; Por isso pôde apreciar melhor o princípio da Revolução Industrial.

Dentro da ampla estrutura da sua doutrina econômico-social o problema da população foi tratado de maneira especial. Marx percebeu a fato histórico essencial da evolução das sociedades humanas e analisou as fôrças que comandariam essa evolução. Não se limitou, como Malthus, a analisar o que se passa dentro de uma determinada estrutura econômica, mas desenvolveu a dinâmica do sistema procurando elucidar o processo pelo qual evoluiu essa estrutura. Para êle as fases da "caça e pesca", "agrícola pastoril" e "capitalista industrial" não constituem etapas isoladas e fixas, cada uma delas encerrada em seu próprio campo de fôrças em equilíbrio; tôdas elas são, apenas, fases intermediárias de um amplo processo de desenvolvimento econômico, que, partindo da caça e pesca, passa pela agricultura e pastoreio, seguindo através do capitalismo industrial, para prosseguir, fatalmente, através do socialismo e atingir o comunismo global, última etapa de uma sociedade sem classes. Critica, por isso, violentamente, as pregações dos "três Malthus" a que nos referimos, cada um dos quais raciocinava apenas dentro de uma estrutura econômica estática, a qual, para êle, Marx, constitui, como dissemos, mera etapa intermediária de um longo processo evolutivo, essencialmente dinâmico

Surge assim uma violenta discussão, que ainda prossegue até hoje, embora com menor intensidade, entre os partidários de Malthus e os seguidores de Marx, no que se refere à solução dos problemas econômicos e demográficos: os neomalthusianos, assimilando os receios de Malthus propõem soluções novas visando a reduzir o crescimento explosivo das populações, o principal responsável pelo subdesenvolvimento Por outro lado, os seguidores de Marx, desejando manter-se fiéis aos diagnósticos e prognósticos do mestre, continuam afirmando que nada deve ser feito com relação à limitação do crescimento demográfico; deve-se é desenvolver a capacidade produtiva das nações e proporcionar uma melhor distribuição do produto nacional e mundial. Por outras palavras, os chamados "neomalthusianos" insistem em que a solução do problema deve ser encontrada na regulação da população; os marxistas afirmam que a solução reside na promoção do desenvolvimento econômico em larga escala e na conseqüente mudança do regime social (que, segundo Marx, exigiria sempre uma revolução das massas trabalhadoras) indispensável para atingir a finalidade última da economia (3).

7 — A fim de analisarmos os aspectos econômicos ligados aos problemas demográficos, consideremos um exemplo ilustrativo Suponhamos uma ilha onde vivem, em luta pela vida, duas espécies animais: caprinos e lobos. Os caprinos tiram o seu alimento do meio (vegetação da ilha) e os lôbos se

alimentam, exclusivamente, de caprinos. É evidente que o equilíbrio que se estabelecerá, quase certamente, entre as duas espécies exige que, a longo prazo, o número de nascimentos, durante um período unitário, entre os daprinos, seja igual à soma do número de indivíduos comidos pelos lôbos com o de indivíduos mortos por outras causas, durante o mesmo período. Para facilitar vamos supor, inicialmente, sem restrição da generalidade, que todo caprino termina, finalmente, servindo de alimento aos lôbos, de modo que o equilíbrio entre as duas espécies exige que o número médio mensal de nascimentos na espécie caprina não seja inferior ao número médio mensal de indivíduos dessa espécie eliminados pelos lôbos. Isso pressupõe que a espécie caprina, cujo alimento é, por hipótese, farto, tenha possibilidades de defesa, utilizando-se para isso de esconderijos em que os lôbos não possam penetrar Do contrário, o mais provável é que os lôbos matassem cabras em excesso sôbre o número médio de nascimentos, tornando a espécie escassa ou fazendo-a desaparecer, acarretando, assim, o desaparecimento, também, da espécie lôbo (4). Qualquer que seja a forma porque isso ocorra, o fato é que, a longo prazo, o equilíbrio das duas espécies, na ilha, exigiria a satisfação da condição imposta: igualdade entre o número de nascimentos da espécie caprina e o número de cabras eliminadas pelos lôbos. Qualquer afastamento sistemático dessa igualdade traria, como conseqüências: ou a eliminação das duas espécies ou o desenvolvimento de ambas para uma nova posição de equilíbrio determinado, finalmente, pelo número máximo de cabras capazes de ser alimentada pela vegetação da ilha Concluímos, assim, que a espécie vegetal (recursos naturais) estabelece finalmente um limite máximo do número de cabras e lôbos capazes de viver naquela ilha. Quando a população de cabras atingisse o máximo compatível com os recursos naturais da ilha (e, ainda aqui, não poderia haver mais cabras do que aquelas que pudessem ser alimentadas pela capacidade de renovação da espécie vegetal de que elas tiram o alimento) então estaria, também, fixado o número máximo de lôbos, condicionado ao *número de nascimentos* dentro da espécie caprina, uma vez que foi admitido que todo indivíduo dessa espécie termina por servir de alimento aos lôbos Se essa última condição não fôsse satisfeita, e os indivíduos da espécie caprina, além de servirem de alimento aos lôbos, pudessem ser eliminados por outras causas (morte natural, acidente, caça, etc) então o número de lôbos ficaria determinado, a longo prazo, pela diferença entre a natalidade e a mortalidade decorrente dessas outras causas, dentro da espécie caprina Sendo D essa diferença (média a longo prazo) durante uma determinada unidade de tempo, e c o consumo médio por lôbo, durante a mesma unidade de tempo, o limite máximo da espécie lôbo, isto é o *número* máximo de lôbos existente em uma certa data, compatível com o equilíbrio das duas espécies, seria, *em média,* dado pelo quociente D/c. Quando êsse número fôsse ultrapassado, *em caráter permanente,* o número de unidades caprinas eliminadas pelos lôbos ultrapassaria o saldo entre os nascimentos e óbitos por outras causas, de modo que começaria a ser consumido o *capital* caprino. Em breve, como conseqüência disso, aquêle saldo entre nascimentos e óbitos se reduziria (por aumento da taxa de eliminação e conseqüente redução dos nascimentos) diminuindo assim a cota de "caprino por lôbo", suposta igual a c, de modo que, de duas uma: ou a espécie lôbo ficaria em breve reduzida por um aumento da mortalidade entre os lôbos (lôbos famintos) voltando a situação a um nôvo ponto de equilíbrio ou se reduzia gradativamente o número de cabras, ameaçando extinguirem-se ambas as espécies (ou, evetualmente, apenas a espécie lôbo).

Observe-se que, para os lôbos, a espécie caprina tem um duplo papel: em primeiro lugar cada indivíduo dessa espécie é um *bem de consumo* direto, único alimento existente na ilha Mas é, também, um *bem de capital;* uma "máquina que transforma as proteínas vegetais, não assimiláveis diretamente pelos carnívoros em proteínas animais capazes de serem assimiladas. A sobrevivência da espécie lôbo depende da escolha que façam seus componentes entre as duas alternativas: consumir o bem destruindo o capital ou deixar de consumi-lo, preservando-o para a produção futura

8 — Embora tenhamos nos referido, no exemplo anterior, a duas espécies apenas, é claro que êle constitui, de fato, um caso de equilíbrio entre *três* espécies, uma vez que, além das duas espécies animais consideradas, teremos de incluir, no equilíbrio geral, a espécie vegetal de que se alimentam os caprinos. Algumas conclusões gerais podem ser tiradas imediatamente:

a) o número de lôbos depende, em última análise, dos recursos naturais da ilha. De fato, o número máximo de lôbos está condicionado ao *crescimento* de que é capaz a espécie caprina e êste, para uma dada taxa de crescimento da espécie vegetal de que alimenta, isto é, dos recursos naturais da ilha;

b) os caprinos não eliminados pelos lôbos constituem bens de produção; representam "inversões" destinadas a aumentar a produção futura na qualidade de máquinas que fabricam carne utilizando vegetal como matéria-prima. Se os lôbos "resolverem" alimentar-se melhor aumentando a cota de caprinos "per capita" consumidos, automàticamente estarão reduzindo o montante das inversões e diminuindo, com isso, a capacidade de produção futura, porque haverá menos cabras para reprodução;

c) o crescimento da espécie lôbo exige o crescimento dos caprinos e dos vegetais a uma taxa não inferior a sua própria taxa de crescimento

9 — Consideremos, agora, a espécie humana, vivendo na ilha espacial, a Terra. Não entraremos aqui na discussão dos problemas relacionados com as possibilidades máximas de habitantes sôbre a Terra que depende, essencialmente da quantidade de energia recebida do Sol; limitar-nos-emos a citar Isaac Asimov, professor assistente de Biologia da Escola de Medicina da Universidade de Boston, no seu livro "Vida e Energia", Cap. 17 Diz êle: "A população do mundo é agora cêrca de $2,3 \times 10^9$ (o livro foi escrito há uns 15 anos; hoje essa população já ultrapassou a cifra de $2,3 \times 10^9$) e supondo que o consumo diário é de 2 000 quilo-calorias, a humanidade é mantida pelo consumo de 53.000 000 de quilo-calorias por segundo (número que se eleva atualmente a quase 70 milhões). Portanto mais de 1% da massa animal terrestre deve ser humana. Conclui-se que um aumento de 8 vêzes a população é o máximo que a vegetação terrestre pode manter, e mesmo então, se tôdas as espécies de animais forem extintas, e tôdas as plantas forem dedicadas à alimentação humana Se fizermos uso da fotossíntese realizada no oceano, êstes números aumentarão 650 vêzes, se as formas animais forem extintas e os homens se alimentarem de algas"

Em seguida acrescenta Asimov. "O máximo de homens que poder-se-ia manter na terra, a partir da energia solar é de $1,5 \times 10^{12}$, isto é, um e meio trilhão Se a terra tivesse essa população haveria apenas 100 metros quadrados para cada pessoa. Haveria cêrca de 50 pessoas por acre, mesmo na Groenlândia, Antártica ou deserto de Saara".

Note-se que êsse total indicado por Asimov não poderia ser ultrapassado fàcilmente, pois que resulta da capacidade de transformação da energia recebida do Sol (que é ínfima fração da energia irradiada, interceptada pela terra) a menos que fossem criados novos sóis artificiais por meio de reatores nucleares, ou melhorado o rendimento da transformação, o que, não sendo de todo impossível, não é nada fácil. Ora, tendo em vista a atual taxa de crescimento de 2% ao ano, com a qual a população dobra ao fim de 36 anos, êsse total seria atingido ao fim de uns 320 anos, isto é, por volta do ano 2286

Mas a densidade de 50 pessoas por acre, conforme salienta Asimov, é extremamente indesejável pois é mais de 30 vêzes a densidade da Ilha de Rhodes, uma das áreas mais densamente povoadas dos Estados Unidos Além disso, há uma outra circunstância a população de 1,5 trilhão de habitantes humanos supõe que tôdas as outras espécies animais fôssem extintas para sobreviver apenas o homem e as espécies vegetais. Ora, diz Asimov, "podemos concordar que não queremos acabar totalmente com a vida animal, com o gado e os peixes (as carnes formam uma parte muito desejável na dieta) e seremos incapazes de acabar com as pestes como os roedores e os insetos, e temos de nos resignar à vida animal não humana igual a cêrca de dez vêzes a nossa. A situação torna-se assim melhor e pior Melhor porque o máximo de população poderá ser no máximo 150.000 000 000 e a densidade da terra será de 5 pessoas por acre. Haverá mais espaço e uma dieta mais variável". Essa situação não constituirá uma melhor perspectiva (e êsse é o lado pior) uma vez que, com a atual velocidade do crescimento, êsse total já seria atingido dentro de uns 200 anos apenas, isto é, por volta de 2166. Se, no entanto, a taxa de crescimento da população da terra, em vez de 2% ao ano, como é atualmente, fôsse de apenas 1%, ela dobraria em 70 anos, de modo que aquêles totais seriam atingidos: o primeiro dentro de 630 anos (por volta de 2600) e o segundo em 385 anos (isto é, por volta de 2350) Para uma taxa de 0,5% teríamos para o primeiro caso, 1250 anos e para o segundo, 765 anos Mesmo nesse último caso, isto é, se a população de 150 000.000 000 fôsse atingida ao fim de 765 anos, a taxa de crescimento (0,5% ao ano) seria muito mais forte do que a verificada durante os últimos 765 anos, quando ela passou de uns 400 milhões para cêrca de 3 bilhões (mil milhões), com uma taxa anual, portanto, de 0,23% apenas.

10 — No exemplo dado, das duas espécies animais vivendo sòzinhas em uma Ilha, a espécie lôbo só tinha um único objetivo: alimentar-se para sobreviver Para êles, os indivíduos da espécie caprina só interessavam como ali-

mento. A distinção que fizemos considerando os caprinos não eliminados como constituindo "capital", resulta simplesmente do fato de que o lôbo só pode consumir os recursos naturais da ilha "vida caprino", de modo que os caprinos não consumidos ficam *automàticamente* incluídos na classe de "máquinas de carne", indispensáveis para atender necessidades futuras. Assim, um equilíbrio automático se estabelece entre o número de indivíduos das duas espécies, embora na prática, se verifique uma certa oscilação sistemática em tôrno de valôres médios como resultado da ação de "feed-back" que funciona nesse caso. De fato, é bem sabido que o equilíbrio estabelecido em conseqüência da ação de um "feed-back" é sempre do tipo oscilatório, em tôrno do ponto de equilíbrio. No caso da espécie humana a situação torna-se bastante mais complicada em conseqüência da capacidade do homem de agir sôbre o meio modificando-lhe as condições de habitabilidade, aumentando a produtividade do trabalho, etc De qualquer modo, porém, a vida de uma nação depende da existência de duas "espécies" de bens: de consumo e de produção, equivalendo a primeira aos caprinos comidos pelos lôbos em cada unidade de tempo e a segunda aos caprinos "poupados", durante aquêle mesmo intervalo. Mas há, ainda, uma diferença fundamental entre êsse caso e o dos lôbos; aqui o homem é quem produz as espécies de que se alimenta, e as máquinas de que se utiliza, ao passo que no caso anterior, os lôbos não têm a menor possibilidade de produzir caprinos O esquema apresentado pode adaptar-se melhor ao caso de uma sociedade primitiva que vivesse, por exemplo, exclusivamente da caça, da pesca, ou dessas duas atividades em conjunto, isto é, de um ponto de vista mais realista, uma sociedade que apenas utilizasse produtos das atividades primárias (indústria extrativa, caça e pesca), sob a sua forma mais primitiva. No esquema das populações humanas é ainda importante uma maior especificação das diferentes espécies de bens, geralmente englobadas em apenas duas classes, consumo e produção Embora se trate apenas de uma análise de caráter geral, convirá, quase sempre, especificar, pelo menos as seguintes espécies de bens:

a) bens de consumo para sobrevivência, C_s, destinados a manter a vida e a saúde da população, ao nível atual;

b) bens de consumo adicional, C_a, destinados a manter o atual padrão de vida além das necessidades estritas de sobrevivência;

c) bens de inversão demográfica ou populacional, K_p, destinados a prover a produção futura e atender, dentro do padrão de vida vigente, às necessidades de consumo (de sobrevivência e adicional) de acréscimo da população;

d) bens de desenvolvimento econômico, K_d, destinados a proporcionar o aumento da capacidade produtiva do sistema, com o objetivo de melhorar o padrão de vida da população

Note-se que êsses elementos representam *existências* ou *estoques* disponíveis em uma determinada época, prontos para serem utilizados no consumo ou no processo produtivo. O total de existências de bens de consumo é, pois,

$$C = C_s + C_a$$

e o de Bens de produção,

$$K = K_p + K_d$$

Tanto em K_p como em K_d supõe-se incluídos os recursos naturais de exploração imediata.

11 — O desenvolvimento econômico de uma Nação é o resultado da evolução das três (ou mais) "espécies" consideradas, isto é: população (N), capital (K) e bens de consumo (C). A produção de novos elementos das duas últimas espécies depende de aplicação da atividade produtiva (trabalho) da primeira, de modo que o resultado depende da escolha das alternativas: dedicando-se muitos recursos disponíveis de trabalho e capital à produção de mais bens de consumo sacrifica-se, em geral, em maior ou menor grau a produção de bens de produção (capital). Como parcela de capital demográfico (K_d) terá uma evolução determinada pelo crescimento da população, é claro que a parcela de K realmente sacrificada será o capital de desenvolvimento, K_d. Aqui surge o primeiro aspecto importante a ser considerado: o da interdependência das três variáveis consideradas na definição do desenvolvimento econômico. De fato, o crescimento da população é de fundamental importância Quando a fecundidade é elevada, o crescimento da população apresenta duas características decisivas: i) exige grandes parcelas de C e K_p, de modo que sacrifica, de uma maneira considerável, a contribuição para K_d; ii) compromete a contribuição futura para a formação de nôvo capital porque provoca uma distribuição por idades extremamente desfavorável, aumentando a proporção de elementos não produtivos na população. Êsse segundo aspecto pode ser grandemente obviado, mediante uma redução da fecundidade, compensada, se se desejar manter um maior ritmo de crescimento demográfico, por um aumento das correntes migratórias (imigração). Embora o assunto possa ser objeto de um tratamento matemático, não pretendemos utilizá-lo neste trabalho, onde apenas desejamos desenvolver algumas idéias gerais sôbre o problema. As considerações feitas são suficientes para permitir uma análise sumária dos pontos de vista natalista (marxistas) e antinatalistas (neomalthusianos) ora em franco debate. Pode-se ver que, pelo menos em face do quadro demográfico atual, dentro das atuais condições econômico-sociais, êsses dois pontos de vista são ambos estreitamente unilaterais. De fato, vejamos o que cada um dêles advoga, como solução para o desenvolvimento econômico. Os natalistas mais moderados afirmam que não é necessário preocupar-se com a evolução de N (população); êles advogam, essencialmente, uma ação direta e drástica sôbre o capital do desenvolvimento (K_d), preconizando inversões maciças de alta rentabilidade econômico-social. Foi êste, aliás, o programa da Rússia; e não se pode dizer que os seus propugnadores não tenham tido sucesso. Conforme salienta Warren W. Eason, titular da cadeira de Estudos Russos da Universidade de Siracusa, "Vinte cinco anos atrás a União Soviética encetou um programa de rápido desenvolvimento econômico sob um sistema de planejamento econômico nacional administrado por uma forma socialista de govêrno. Nos anos que se seguiram, taxas impressionantes de crescimento foram registradas por muitos setores econômicos e a estrutura da economia e da sociedade foi radicalmente alterada. Alguns progressos foram feitos no sentido de satisfazer as necessidades materiais da população, mas a ênfase primária foi colocada no desenvolvimento da indústria pesada" (5). Por outras palavras, o plano russo visou, essencialmente, agir sôbre K_d. Com relação à evolução da população não pretendemos fazer aqui uma análise completa das condições que vigoraram naquele país durante o período de desenvolvimento mais intenso. Todavia, citando ainda Eason, "Durante a maior parte do *tempo de paz,* após a Revolução, a taxa de aumento da população permaneceu no nível *moderadamente alto* (o grifo é nosso) entre um e meio a dois por cento ao ano, que é aproximadamente o mesmo das décadas anteriores à Revolução. Durante o período soviético como um todo — incluindo tanto os períodos de guerra como os de paz — a taxa média de crescimento foi cêrca de um por cento ao ano, o que está muito perto da taxa média de longo prazo, ao longo do último século e meio" (6). Note-se que o padrão de crescimento soviético afastou-se muito do padrão que predominou na maioria dos países econômicamente desenvolvidos do ocidente. De qualquer modo fica bem claro que o crescimento da população da Rússia tem sido relativamente moderado, não atingindo a 2% ao ano, mesmo se considerarmos apenas os tempos de paz onde, em conseqüência das guerras, as taxas são mais elevadas do que seriam se não tivesse havido êsses conflitos, pela norma seguida por todos os povos de substituir as mortes verificadas entre a população jovem; incluindo todos os períodos, a taxa foi da ordem de 1% apenas. Não se deve esquecer, também, que, embora não tendo realizado campanhas intensas contra a natalidade, os dirigentes soviéticos adotaram uma legislação pela qual o abôrto podia ser obtido livremente nas clínicas estatais. Por outro lado os anticoncepcionais sempre foram prontamente e livremente disponíveis nas farmácias. Por fim resta salientar a questão de se saber se um crescimento ligeiramente mais lento não teria permitido, ainda, um desenvolvimento mais rápido ou, pelo menos, acompanhado de menores sacrifícios. Embora não querendo nem mesmo sugerir que assim seria, *o contrário não está provado.* Examinemos agora o caso da China Comunista. O Censo de 1953 acusou uma população de 582,6 milhões que atualmente deve estar no final da casa dos 700 milhões, se não já na dos 800 milhões. Qual a reação dos dirigentes chineses em face dos resultados do censo de 1953? Conforme declara Lee A. Orleans, analista e pesquisador sênior da Biblioteca do Congresso dos Estados Unidos, nascido na Rússia e tido como grande especialista de assuntos chineses (7), "A reação inicial à publicação do registro censitário de 1953 foi de júbilo. Refletindo a ideologia marxista, deu-se ênfase ao aspecto das pessoas como produtores, mas não como consumidores. Em outras palavras, quanto maior a população, maior o número de mãos para o trabalho — mas não mencionava o número crescente de bôcas para alimentar, corpos a vestir e crianças a educar. Não passou muito tempo, entretanto, até que se manifestasse alguma preocupação na imprensa e nas intervenções dos dirigentes comunistas. A linha habitualmente adotada nessas declarações era a de que o número de crianças *deveria ser limitado* (o grifo é nosso) a fim de melhorar a saúde das mães e filhos, incrementar a educação das crianças e dar mais tempo às mães para o trabalho e o estudo. O contrôle da natalidade nunca foi tornado lei do lugar por proclamação oficial. Não obstante, em meados de 1956, tornou-se visível pela gradual intensificação da propaganda que o contrôle da natalidade era aceito como política do Estado. Clínicas de contrôle da natalidade foram estabelecidas nas cidades; equipes de pessoal médico foram enviadas ao campo para instruir os camponeses no uso dos diversos métodos anticoncepcionais; numerosos cartazes proclamaram a necessidade de limitar o tamanho da família. A esterilização e o abôrto foram liberados por lei e a idade legal para casamento foi elevada para 20 anos para os homens e 18 para as mulheres" (8). Mostra em seguida o autor acima citado como, no final de 1957, isto é, um ano e meio depois de iniciada a campanha de limitação, surgiu uma reação, de caráter evidentemente ideológico, à continuação dessa política. Isso se manifestou através de artigos publicados no jornal oficial do Partido Comunista, "atacando amargamente os "direitistas" por se aproveitarem da controvérsia sôbre população e contrôle da natalidade para lançarem assaltos contra o Partido e contra o socialismo" (9) Essa atitude dos mentores da política, abandonando o problema efetivo para se apegarem aos aspectos ideológicos da questão, fizeram com que se manifestasse uma mudança da atitude oficial. Conforme salienta, ainda o autor já citado, "Deve-se lembrar, entretanto, que, apesar do abandono da política em favor do contrôle da natalidade, a China não embarcou em uma política de estímulo à natalidade. Os meios de contrôle da natalidade continuaram a ser proporcionados em quantidades limitadas particularmente nas áreas urbanas; as clínicas de contrôle da natalidade continuaram a proporcionar a informações aos indivíduos interessados; e, tanto quanto saibamos, o abôrto e a esterilização não foram tornados ilegais, sendo disponíveis sob solicitação. *Depois de três anos de séria crise agrícola, os comunistas estão novamente discutindo as vantagens de reduzir o tamanho da família chinesa* (o grifo é nosso) A atual campanha, começada em 1962, tem um tom muito mais baixo, como ênfase colocada quase exclusivamente na elevação da idade do casamento" (10) Assim, verifica-se que apesar da fôrça que exercem as ideologias os dirigentes chineses estão sèriamente preocupados com o problema demográfico e convencidos de que é necessário "ajudar" o processo de desenvolvimento com um programa de limitação da natalidade. Na Rússia Soviética também houve uma ajuda, embora limitada, sob forma de facilidades para limitação da natalidade.

12 — Examinemos agora a outra tese, isto é, a tese antinatalista adotada pelos partidários do neomaltusianismo Também aqui não pretendemos fazer uma análise dos diferentes argumentos que podem ser argüidos em defesa da limitação da natalidade. Êsses argumentos são variados e foram fornecidos por nós em outras oportunidades (11), além de terem sido tratados exaustivamente em diferentes trabalhos de outros autores (12). Apenas vamos examinar alguns pontos básicos. Dizem os neomaltusianos mais radicais que as dificuldades dos países subdesenvolvidos resultam apenas do rápido crescimento demográfico Através de uma ação governamental decisiva no setor do planejamento familiar tôdas essas dificuldades seriam sanadas Creio sinceramente que nenhum neomaltusiano é bastante radicalizado para deixar de reconhecer a importância de outras variáveis do problema do desenvolvimento econômico dos países subdesenvolvidos. Todos êles aceitam, evidentemente, a existência de outros elementos importantes para a aplicação de um plano de desenvolvimento; a polêmica resulta, mais pròpriamente, do fato de que seus adversários negam a importância do desenvolvimento demográfico no planejamento econômico atribuindo-lhe apenas um papel passivo de "dado do problema". Essa atitude é adotada mesmo por aquêles que, favoráveis à natalidade livre, não são ideològicamente marxistas. Atualmente, muitos países (Índia, Japão, Pôrto Rico e outros) estão adotando políticas antinatalistas (isto é, de planejamento familiar) como parte integrante de seus planos econômicos. Do ponto de vista prático vários são os resultados já obtidos (13); mas parece ser o Japão um dos países que, em diferentes oportunidades, adotou uma posição mais decisiva sôbre o assunto, se bem que, nem sempre, através dos métodos adequados ou aconselháveis Assim, "durante o período de 140 anos que antecedeu a Restauração da era de Meiji, e que teve início em 1868, a população japonêsa estava estacionária no nível de cêrca de 32 milhões" (14). Vários outros trabalhos podem ser consultados a respeito do problema populacional dêsse país (15), bem assim da Índia, e de outros países subdesenvolvidos (16). O importante a salientar é a consciência cada dia mais clara da importância dos problemas demográficos na programação do desenvolvimento econômico, por parte das autoridades de várias culturas A própria Igreja Católica Romana, sempre radicalmente contrária à limitação voluntária da natalidade, já vê hoje a questão por um prisma diferente e, em face dos problemas econômicos e sociais do mundo atual, admite francamente a sua reformulação (17).

13 — Alguns fracassos locais e transitórios de políticas nacionais de limitação da natalidade têm sido, muitas vêzes, apontados como argumentos contrários à eficiência de tal política É muito citado (quase sempre com exagerada ênfase) o "fracasso" dessa política na Índia. Coloco entre aspas porque, da minha parte, não considero se possa afirmar, desde já, que tenha havido fracasso total; uma política de desenvolvimento é, como já dissemos, uma política a longo prazo É realmente estranhável como qualquer programa posto em prática é logo julgado com base em resultados incompletos de observações a curto e a curtíssimo prazo Não se deve esquecer que, freqüentemente, nos fenômenos econômicos, sociais, etc. os resultados de uma mesma política se apresentam, a longo prazo, em sentido contrário aos dos resultados a curto prazo Numerosos exemplos deveriam ser dados. Assim, a menos que os resultados, *rigorosamente* analisados estatìsticamente demonstrem, sem sombra de dúvidas, aspectos inconvenientes insuspeitados, a simples falta de resultados positivos imediatos na medida esperada não é suficiente para caracterizar o fracasso; procedendo assim, muitos economistas apenas mostram a sua formação profissional resultante do tipo de análise econômica geralmente utilizada nos últimos dois ou três decênios Por outro lado poucos são os políticos que têm serenidade e verdadeira compreensão dos problemas de que trata para resistirem à tentação de procurarem apenas os resultados imediatos, esquecendo-se daqueles que só se manifestam a longo prazo. Portanto um fracasso inicial (supondo que tivesse de fato ocorrido) deveria ser motivo para se intensificar a política, talvez com pequenas correções, mas não de abandoná-la Na própria Índia temos um exemplo recente. a matança de vacas para alimentar as multidões famintas deu lugar a uma reação de caráter religioso extremamente violenta. Isso não significa, porém, que se deva abandonar, definitivamente, a idéia de utilizar o imenso rebanho indiano para alimentação do povo Apenas indica que são necessárias precauções especiais Se algo deva ser feito será, certamente, no sentido de modificar os preconceitos religiosos dos indianos, o que só se conseguirá a prazo mais longo O fracasso da operação, no entanto, não significa, em absoluto, que se deva abandonar a idéia, será necessário, apenas, modificar-lhe a forma de execução As reações havidas contra a vacina, no Brasil, e em outros países. não constituíram motivos (felizmente!) para abandonar a adoção dessa medida em caráter obrigatório Êsse episódio das vacas constitui um exemplo muito mais extremo do que o do programa de limitação da natalidade. Ora, se aquêle fracasso na obtenção de alimento farto utilizando-se o gado vacum deve ser motivo para que os políticos indianos abandonem a idéia, muito menos será motivo para que outros países não devam utilizar a mesma política Portanto é inteiramente fora de propósito utilizarem-se os pretensos fracassos (ou mesmos autênticos fracassos) de uma política em determinado país, como argumentos contrários definitivos à adoção da mesma política em outros países. A alma de cada povo tem suas características próprias.

Parece-nos importante, também, dizer algumas palavras sôbre a frase comumente repetida pelos adversários de um programa de limitação da natalidade, segundo a qual, o problema brasileiro "é de desenvolvimento econômico e não de limitação da natalidade". Se não fôsse o sentido que realmente presumo entenderem os que assim se pronunciam, eu diria que, nessa forma, a frase é de sentido inteiramente exdrúxulo. Certamente o que querem dizer é que não é necessário adotar um programa de limitação da natalidade porque ela virá naturalmente com o desenvolvimento econômico. Sob essa forma a frase tem realmente sentido: *apenas está errada* (11). Se o desenvolvimento econômico é a resultante do crescimento do capital da comunidade, do seu consumo e do número de habitantes, não vemos porque se insiste em retirar as medidas de ação direta sôbre a população dos programas de desenvolvimento. Já vimos que o crescimento desmesurado da população pode comprometer sèriamente a formação de nôvo capital. Veremos que também pode contribuir fortemente ao contrário do que geralmente se afirma, para *escassear a mão-de-obra e deprimir o consumo* (11). A escassez de mão-de-obra resulta simplesmente da composição por idades extremamente desfavorável que acompanha inexoràvelmente (poderíamos dizer, matemàticamente) as populações de alta fecundidade (quando não há compensação de correntes migratórias ponderáveis). Assim, a alta fecundidade *acarreta* forçosamente uma elevada proporção de jovens a contra-partida disso é uma *baixa proporção* de adultos entre 15 e 65 anos isto é, na classe de idades econômicamente produtivas Assim, a mão-de-obra torna-se escassa, em quantidade, porque há, proporcionalmente, poucos adultos em comparação com os países de fecundidade mais moderada e com as necessidades de desenvolvimento; mas ela é escassa, também, em qualidade, porque o motivo da escassez em quantidade (o excesso de jovens) é também a causa de sérias dificuldades na aplicação de programas de ensino. Não é possível fazer tudo ao mesmo tempo: o ensino será forçosamente sacrificado, por maiores que sejam os esforços despendidos, se a população está abarrotada de jovens, e isso é tanto mais acentuado pelo já referido comprometimento da formação de capital, que se reflete, também, sôbre as condições do ensino. Quanto ao consumo, pode parecer que uma população que cresce ràpidamente se traduza, precisamente, em um aumento rápido do consumo. Mas não é assim, *obrigatòriamente,* como veremos. O crescimento rápido traz como conseqüência um aumento rápido do número de novas bôcas a alimentar, de novos corpos a vestir, de novas famílias a morar Mas, se cresce o consumo global o que cada um pode consumir pode resultar cada vez menor (e assim ocorre de fato) porque a capacidade aquisitiva é cada vez menor relativamente ao nível de vida médio das demais nações econômicamente desenvolvidas. O que é importante não é aumentar o consumo apenas pelo crescimento do número de pessoas na população mas fazer crescer *a capacidade aquisitiva ou de consumo individual.* É preciso melhorar a qualidade econômica das pessoas e não, simplesmente, o seu número Crescer ràpidamente, na sociedade, mais do que na família, é um meio de piorar as condições de vida; o consumo global aumenta mas, individualmente, êle torna-se cada vez mais reduzido Portanto, dizer-se que não é necessário adotar um programa de limitação da natalidade porque ela virá com o desenvolvimento econômico *está errado* uma vez que, sem êsse programa, *o desenvolvimento simplesmente pode não vir,* ou, pelo menos, pode não se processar *na velocidade que seria necessária conseguir* para se atingir, em tempo razoável, o nível econômico dos países desenvolvidos, que certamente não estarão dispostos a dar uma parada e esperar pelos demais companheiros menos afortunados

Quando se fala da urgente necessidade de programar ou coordenar as inversões não se está, em geral, pensando em um plano de socialização intensa do capital, simplesmente se imagina que a política do Govêrno, em matéria econômica, deve orientar-se de modo a proporcionar os incentivos necessários para que as inversões privadas se dirijam no sentido do maior interêsse público. Do mesmo modo, o que se pleiteia, em matéria de programas de limitação da natalidade, é que sejam proporcionados todos os conhecimentos, meios e facilidades, para que os casais possam planejar sossegadamente as suas famílias assegurando-se-lhes o melhor êxito possível Pode ser, simplesmente por essa forma, que a variável população venha a se integrar no plano econômico geral, os resultados práticos obtidos orientarão as ações corretivas da política a ser adotada cada ano, na forma de um legítimo "feed-back" regulador, única solução capaz de assegurar o êxito de qualquer programação, em qualquer setor

14 — O desenvolvimento econômico é um processo complexo, dependendo de grande número de variáveis entre as quais ocorrem numerosas ações e reações de realimentação ("feed back") capazes de reajustar o andamento futuro com base na experiência. O processo, de natureza cibernética, é pois análogo ao do equilíbrio biológico do ser vivo. Numa primeira aproximação podemos dizer que êsse processo resulta do crescimento simultâneo e competitivo de três "espécies" fundamentais: a população (N), o capital (K), e os bens de consumo (c). Como é natural entre espécies em competição não podemos simplesmente determinar os valores de C e K para um dado N, como em geral se supõe; o processo de desenvolvimento implica na evolução simultânea dessas três variáveis de modo que não é possível admitir-se que qualquer delas seja um dado do problema A rigor não é nem mesmo possível definir univocamente uma superfície S (fig. 1) de equação $\varphi(C, N, K) = 0$ sôbre o qual evoluiria o ponto M de coordenadas C, N, K representativo do sistema econômico-demográfico. De fato, para o mesmo conjunto de valôres C_0, N_0 e K_0 de C, N e K o ponto M pode variar de posição uma vez que dependem do modo pelo qual as variáveis atingiram êsses valôres. Se por exemplo, N crescer muito ràpidamente até atingir o valor N_0, a variável C também crescerá em geral ràpidamente ao passo que a variável K aumentará lentamente. Assim ao atingir C o valor C_0, K poderá ter outro valor diferente do que teria se N e C tivessem atingido, lentamente valôres N_0 e C_0 De qualquer modo, a cada conjunto N_0, C_0, K_0 podemos associar o valor de uma certa função $f(N_0, C_0, K_0)$ representativa do montante de bens e serviços que correspondem a êsse conjunto de valôres das variáveis Assim, o Produto Nacional "per capita" é uma função dêsse tipo geralmente utilizada para êsse fim. Todavia, ainda não é suficiente à função f associaremos ainda outra função $U(f)$ que denominaremos a *"função de utilidade de f"*, ou simplesmente a "utilidade *f*" O objetivo de um plano de desenvolvimento econômico é maximizar a função $U(f)$.

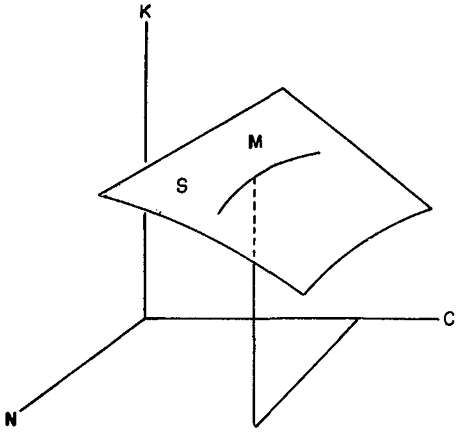


Fig 1

Dadas as inter-relações das variáveis C, N e K é evidente que não se pode agir apenas sôbre a variável K, como querem os marxistas ou sòmente sôbre N como preconizam os neomaltusianos radicais, as três variáveis podem e devem ser objeto de ações diretas Mas o resultado final vai depender, para cada variável, do tipo de reações das demais, de modo que essas reações devem estar previstas e as más influências incluídas no plano de desenvolvimento.

Um ponto, no entanto, é claro em relação aos países subdesenvolvidos: o rápido crescimento atual de N, sem paralelo no passado, terá um efeito deprimente sôbre a parcela de K_d de K (capital de desenvolvimento) o que dificultará o progresso futuro de modo que é extremamente importante agir sôbre N Para se compensar *em parte* êsse inconveniente só uma drástica redução do consumo (ação sôbre C) poderá ter algum efeito, e ainda assim com caráter duvidoso Por outro lado, é preciso não esquecer que a educação e a pesquisa científica são parcelas imprescindíveis do capital de desenvolvimento, sem as quais não será possível obter qualquer resultado durável Quando N cresce ràpidamente as despesas de educação básica e de consumo crescem desmedidamente não só porque aumenta o número de jovens, em valor absoluto, como, ainda porque cresce em valor relativo, isto é, aumenta a sua proporção na população Tudo isso dificulta enormemente o crescimento de K_d, dentro do ritmo necessário para o desenvolvimento econômico

Parece-nos pois imprescindível abandonar o radicalismo do ponto de vista e reformular o problema do desenvolvimento econômico dos países subdesenvolvidos (do Brasil em particular) mediante programas em que não se cogita apenas de agir sôbre K, mas também sôbre os outros fatôres, e, principalmente sôbre N

NOTAS E BIBLIOGRAFIA

(1) Veja-se: MADEIRA, João Lyra — Explosão demográfica mundial *Revista Brasileira de Estatística,* Rio de Janeiro, CNE, 24(103/104): 92-102, jul/dez. 1965

(2) Época de máxima atividade, apogeu do valor intelectual, que os gregos situavam, arbitràriamente, em tôrno dos quarenta anos.

(3) Não se deve inferir do exposto que todos os que são contrários à limitação da natalidade devam ser intitulados marxistas A Igreja Católica, por exemplo, também é contrária, por motivos diversos. Procuramos apenas caracterizar os dois pontos de vista opostos, salientando uma polêmica bastante conhecida, onde se atacaram mùtuamente os partidários de Marx e de Malthus.

(4) Um estudo matemático e completo da coexistência de espécies animais encontra-se em:

VOLTERRA, Vito — *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie* Paris, Gauthier-Villars, 1931

(5) EASON, Warren W. — "A População da União Soviética" *In Panorama da população mundial,* Rio de Janeiro, Ed Fundo de Cultura [s d], cap 18 (Panorama de Conhecimento)

(6) Idem, Ib.

(7) ORLEANS, Leo W. — "A População da China Comunista" *In. Panorama da população mundial,* Rio de Janeiro, Ed Fundo de Cultura [s d], cap 17 (Panorama de Conhecimento)

(8) Idem, Ib.

(9) Idem, Ib

(10) Idem, Ib

(11) *a*) MADEIRA, João Lyra — Explosão demográfica mundial. *Revista Brasileira de Estatística,* Rio de Janeiro, CNE, **24**(103):92-102, jul./dez. 1965

b) — Medicina e espécie humana. *Mensário estatístico atuarial,* Rio de Janeiro, IAPI, **14**(161): 11-4, maio 1966.

c) — População e economia. *Mensário estatístico atuarial,* Rio de Janeiro, IAPI, **14**(162): 22-9, junho 1966

d) — Perspectivas e alternativas para a população mundial do futuro *Boletim estatístico,* Rio de Janeiro, CNE, **23**(92):5-9, out/dez 1965

d') Perspectivas e alternativas para a população mundial do futuro. *Mensário estatístico atuarial,* Rio de Janeiro, IAPI, **13**(156): 9-12, dez 1965.

e) — Política demográfica e economia. *Mensário estatístico atuarial,* Rio de Janeiro, IAPI, **14**(159):32-6, mar. 1966.

f) — *Planejamento familiar.* [Rio de Janeiro, 1966] 30 f. [mimeogr.].

Trabalho de divulgação restrita que pode ser solicitado retamente ao autor (Telefones 27-6940 e 42-6574). Trata-se de um trabalho le 30 páginas datilografadas em espaço 3, contendo uma discussão entre 4 personagens: Frei Natalino, Balduino, Marcolino e Filodemo. Êste último apresenta os argumentos do autor.

(12) STRASSART, Joseph — *Les avantages et les inconvénients économiques d'une population stationnaire.* [s. l.] Faculté de Droit de l'Université de Liège, 1965.

Não conhecemos êsse livro, saído recentemente (1965), editado pela "Faculté de Droit de l'Université de Liège". Mas, pelo resumo que nos foi enviado, trata-se de uma análise exaustiva de todos os argumentos pró e contra a limitação da natalidade O autor não se pronuncia em favor de qualquer das teses, deixando ao próprio leitor a tarefa de julgar os argumentos. Provàvelmente a leitura dêsse livro dispensará recorrer a outras publicações, além da bibliografia que certamente deverá incluir.

(13) *a*) — Ver a coletânea referida em (5) e mais os seguintes livros que incluem ampla bibliografia:

b) — OSBORN, Fairfeld, organ. — *As pressões da população.* Coletânea organizada por —. [Rio de Janeiro] Ed. Zahar, s d

Coletânea organizada por Fairfeld Osborn contendo trabalhos dêsse autor além de outros como C. Darwin, A. J. Toynbee, André Maurois, J. Huxley e muitos outros.

c) — INTERNATIONAL CONFERENCE ON FAMILY PLANNING PROGRAMS, Chicago, 1965 — *Family planning and population programs.* Chicago, The University of Chicago Press. 1965.

Trata-se de uma publicação editada pelo "The Planning Committee for the Conference" sob os auspícios do "The Population Council" da "The Ford Foundation" e da "The Rockefeller Foundation" contendo os resultados da "International Conference on Family Planning Programs". Inclui 61 relatórios da Conferência.

(14) HONDA, Chikao — "A solução do Japão". In: OSBORN, Fairfeld, org. *As pressões da população.* [Rio de Janeiro] Ed. Zahar [s d.]

Chikao Honda, Presidente do Conselho de Pesquisas de Problemas Populacionais de Tóquio. Trabalho incluído na coletânea referida em (13)b. Ver também a referência (11)a

(15) TAUBER, Irene — "A população do Japão". *In: Panorama da população mundial,* [Rio de Janeiro] Ed. Fundo de Cultura [s. d] (Panorama de conhecimento)

Irene Tauber, pesquisadora Sênior de Demografia do Escritório de Pesquisa de População: Escola Woodrow Wilson de Assuntos Públicos e Internacionais da Universidade de Princeton; Vice-Presidente da União Internacional para o Estudo Científico da População, etc. Trabalho incluído na coletânea referida em (5). Ver também referência (11)a.

(16) *a*) — COALE, Ansley & HOOVER, Edgard — *População e desenvolvimento econômico.* Rio de Janeiro, Ed. Fundo de Cultura [s d] (Biblioteca Fundo Universal de Cultura).

É um estudo completo da população e economia da Índia.

b) — COOK, Robert C. — *A fertilidade humana Moderno dilema.* São Paulo, Ibrasa, 1960.

(17) *a*) — BOUTHOUL, Gaston — *La surpopulation* Paris, s.d. (Petite Bibliothèque Payot, 61).

MODELOS DE ANÁLISE DO CRESCIMENTO DEMOGRÁFICO

PROF. JOÃO LYRA MADEIRA

Diretor do Centro Brasileiro de Estudos Demográficos

Professor da Escola Nacional de Ciências Estatísticas

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

O presente trabalho constitui parte de um estudo geral sôbre metodologia das projeções demográficas. Aproveitou-se a oportunidade para dar ao texto um caráter didático, de modo que pudesse ser utilizado no Curso de Demografia da ENCE, na parte referente às projeções da população. Por outro lado pretende-se incluir o mesmo texto como parte de um Tratado Geral de Demografia, em nível superior, em preparação. A primeira parte, ora publicada, se refere apenas aos modelos cinemáticos globais. Posteriormente outras partes do trabalho serão divulgadas, incluindo os modelos cinemáticos estruturais, tanto determinísticos quanto estocásticos, destinados à aplicação no campo das projeções de população decorrentes de crescimento inter-regional, por classes de idade, por sexo, ocupação etc., tão importantes para os planos de desenvolvimento econômico. Outros tipos de modêlo, de caráter dinâmico, serão examinados também, mais adiante.

Por vários motivos, o presente trabalho tem um caráter mais voltado para as aplicações práticas, não se detendo na análise dos aspectos matemáticos que muitos problemas, nêle tratados, poderiam comportar. Um dos motivos dessa orientação é que essa análise e precisão matemáticas o alongariam demais e retirariam o caráter didático que a êle se pretendeu imprimir, no sentido de construir a base de um livro texto para o Curso de Demografia da ENCE.

1 — INTRODUÇÃO

1.1 — O presente trabalho tem por objetivo expor, em linhas gerais e sumárias, os diferentes tipos de modelos de análise demográfica aplicáveis aos estudos do crescimento de população, seja em caráter meramente descritivo do passado, seja com o objetivo de realizar previsões a curto, médio ou longo prazos. Êsses modelos têm sido objeto de cuidadoso estudo nos cursos da Escola Nacional de Ciências Estatísticas, desde 1954 (1), muito embora o seu completo desenvolvimento, principalmente sob a forma de análise matricial, só tenha sido dado em época bastante posterior àquela. Uma das finalidades dessa exposição é divulgar e desenvolver as bases técnicas para as estimativas e projeções de população, atendendo às necessidades dos órgãos encarregados dessas estimativas na Fundação IBGE e às conveniências didáticas do curso de Demografia da ENCE. De acôrdo com várias manifestações levadas ao plenário da 1.ª Conferência Nacional de Estatística (1.ª CONFEST), realizada na Guanabara em 1968, sob os auspícios da Fundação, foi atribuido ao CBED o encargo de estudar o problema das projeções de população, e estabelecer-lhes as bases teóricas face às contingências da realidade brasileira em matéria de estatísticas demográficas. Por outro lado, pretende-se colocar à disposição dos alunos da ENCE um livro texto do Curso de Demografia ali ministrado, incluindo o que há de mais recente na matéria e aproveitando os trabalhos da ENCE e do CBED.

1.2 — O presente trabalho contém os desenvolvimentos apresentados no curso da ENCE a partir de 1967 (embora já formulados em linhas gerais desde 1958) e constitui parte integrante de um Tratado Geral de Demografia em preparação.

2.1 — *Modelos cinemáticos e modelos dinâmicos*

2.1.1 — Na Mecânica Racional, o movimento é estudado, inicialmente, de um ponto de vista estritamente cinemático, isto é, sem a consideração das fôrças que provocam êsses movimentos e, principalmente, sem se preocupar com a origem dessas fôrças Até hoje, não se conhece exatamente a origem e a natureza profunda das fôrças gravitacionais, por exemplo Agem essas fôrças à distância e instantâneamente (Newton) ou são o resultado da estrutura do espaço, transmitindo-se através dêle com velocidade finita, igual a da luz (Einsten)? Tudo indica estar a segunda alternativa mais de acôrdo com a realidade observada, pelo menos em grande escala (movimentos dos astros ou dos corpos lançados ao espaço); mas nada se sabe de positivo quanto à natureza profunda dessas fôrças Será possível identificar o "graviton" (*) como partícula fundamental do campo gravitacional, assim como há tempos identificados os eletrons, os prótons, os neutrons, os neutrinos e os numerosos mesons? Só o futuro poderá decidir.

Tôda essa ignorância sôbre a gravidade não impede, no entanto, que se conheça como atua e quais os tipos de movimento que resultam para um corpo lançado ao espaço, em presença de numerosos outros corpos celestes existentes, embora a análise rigorosa, no caso de mais de dois corpos presentes, dê lugar a complexos problemas matemáticos que só por aproximação gradativa podem ser solucionados.

2 1.2 — Mas, em face da observação e da experiência, real ou abstrata, de movimentos retilíneos, uniformes ou acelerados, de movimentos circulares, elípticos, parabólicos, etc , foi possível desenvolver sistemàticamente, desde Galileu, a parte da Mecânica denominada Cinemática, cujo objetivo é estabelecer expressões e modelos matemáticos que permitam prever a *trajetória* de um corpo em face da *Velocidade suposta conhecida* (ou vice-versa), sem se preocupar com o exame das fôrças que seriam capazes de provocar ou estariam provocando aquelas velocidades. O desenvolvimento da Cinemática foi de grande ajuda ao surgimento da Dinâmica, não só provocou êsse surgimento como também estabeleceu prèviamente todos os modelos elementares de que iria se utilizar a Dinâmica no seu desenvolvimento posterior que conduziram as maravilhosas aplicações utilizadas pelo homem na exploração direta do cosmos e dos corpos celestes que nêle se encontram

Grande parte dos modelos empregados na análise do crescimento demográfico acha-se, ainda, na fase "Galileana"; êles apenas estabelecem a "trajetória" da população (isto é, evolução do número de habitantes) face a determinadas intensidades ou taxas de variação (velocidade de crescimento) observadas ao longo do tempo Nessas condições,

(*) Em pesquisas recentes, nos Estados Unidos, os físicos conseguiram detectar o "graviton" êles são válidos na medida em que aquelas intensidades se mantiverem, ou evoluirem segundo a lei admitida. A grande vantagem da cinemática utilizada na Mecânica Racional sôbre a cinemática das populações é que, ali, as condições supostas freqüentemente se mantêm inalteradas, pelo menos até onde a observação poderia detectar. No caso da população, essas condições, muitas vêzes, variam contínua e permanentemente, de maneira apreciável, exigindo modificações nos parâmetros do modêlo.

Quando se faz um cálculo da população do Brasil, para o período 1960-1970, baseado na constância da taxa de crescimento, ao nível observado na década anterior, está-se procedendo como chefe de estação que, anotando a hora de passagem do trem e tendo medido a sua velocidade desde a última parada (através do tempo de viagem e da distância percorrida) prevê que em cêrca de duas horas êle deverá estar em tal ponto da estrada, adiante da sua estação. É claro que se o maquinista fôr obrigado a alterar a velocidade, a parar durante o trajeto, por superveniência de causas excepcionais ou desconhecidas, a previsão não será cumprida. Nem por isso deixa de ter valor o tipo de cálculo levado a efeito pelo zeloso chefe de estação. Outra situação ocorre no seguinte exemplo: o navegador, face a sua posição atual e à velocidade do navio(em valor e direção) afirma que dentro de 15 minutos, *se continuar a viajar com a mesma rapidez, na mesma direção,* o barco se chocará contra o rochedo X, localizado no mapa em posição supostamente certa. Êsse cálculo tem um caráter de advertência. O que certamente acontecerá é que o navio *não irá se despedaçar contra o rochedo* porque o comandante ordenará ao pilôto que "mude de direção" em um ângulo de tantos graus, o suficiente para passar ao largo da pedra ameaçadora. A"profecia" não se terá realizado: não porque tenha havido êrro de previsão, mas porque ela fôra feita exatamente com o objetivo de pôr em marcha ações e dispositivos de correção capazes de evitar a ocorrência daquêle desastre. Freqüentemente pode ocorrer que as previsões demográficas tenham êsse mesmo caráter de advertência; apenas, aqui, não são muitas vêzes explícitos e evidentes os objetivos. As ações são tomadas por um grande número de indivíduos isoladamente, tornando-se freqüentemente desapercebidas; mas produzem o mesmo resultado.

Quando se diz que no ano 2.000 (ou antes) haverá fome no mundo, sempre se condiciona essa afirmativa à restrição: "se a população continuar a crescer como vem fazendo nos últimos 30 anos, e a produção de alimentos não aumentar sensìvelmente o seu atual rítmo de crescimento". Se, ao chegar o mundo ao "ano fatídico" se verificar no entanto que, a partir dos últimos 20 anos (a partir portanto de 1980), novos métodos e novas descobertas permitirem aumentar consideràvelmente o rítmo de crescimento da produção de alimentos (ou de bens de consumo geral) uma nova previsão poderá concluir ter sido superado o perigo da fome (pelo menos por mais 100 anos), face também a um declínio observado no rítmo de crescimento demográfico. Apesar de não ter ocorrido a fome prevista, ninguém poderá afastar a hipótese de que a previsão demográfica *tenha exercido precisamente a sua função,* alertando às autoridades que em face da advertência procuram orientar as pesquisas tecnológicas no sentido de novos métodos de produção mais eficiente e alertar os casais no sentido de reduzirem o rítmo da natalidade. Nêsse caso, a suposta "falha" na previsão teria sido, simplesmente, o resultado da influência propositadamente exercida no sentido de que cada um procurasse agir numa certa direção, corrigindo as tendências observadas que *se mantidas,* conduziriam à fome.

Portanto, mesmo que os *resultados finais sejam aparentemente errados,* as previsões demográficas continuarão a ser de grande utilidade; cabe aos demógrafos, estatísticos e matemáticos o estabelecimento dos *melhores* métodos de projeção, utilizáveis em cada caso, face aos dados disponíveis e aos recursos que puderem ser destinados à pesquisa e aos levantamentos no campo demográfico.

É bem possível que as previsões pessimistas sôbre o futuro da população da Terra — principalmente das regiões subdesenvolvidas — possam desencadear dispositivos de correção, induzindo os povos a reduzirem voluntàriamente a natalidade e melhorar a tecnologia.

2.1.4 — Os modelos globais destinam-se a estimar apenas totais sem especificar as parcelas. De modo geral é possível estimar uma população, em várias épocas, segundo diferentes níveis de especificação. Podemos, por exemplo, nos preocupar tão sòmente com a população total do País e, nesse caso, o modêlo utilizado seria, naturalmente, do tipo global. O mesmo tipo de modêlo se aplicaria à estimativa das populações de cada Estado ou de cada Município, das quais, por soma, se obteria a população do Brasil, desde que as estimativas das parcelas não constituissem um processo integrado mas, apenas, diversas estimativas independentes de totais parciais. No entanto, o modêlo deixaria de ser do tipo global se a estimativa das parcelas resultasse de um processo único, segundo o qual elas surgissem, juntamente com o total, através de critérios de distribuição por classes, resultantes de relações existentes entre elas, ou entre elas e os totais, como conseqüência da própria estrutura do modêlo, isto é, do conjunto de relações pelas quais êle é definido. Tal é, por exemplo, o caso das estimativas pelo método denominado das *componentes,* onde se estima a população por classe de idades tendo em vista as relações estruturais entre essas classes em face das tábuas de mortalidade e fecundidade. O mesmo ocorreria com a estimativa da população por Estado, se se levassem em conta as migrações inter-estaduais como elemento integrado no processo de cálculo; êsses modelos serão examinados mais adiante. Em contraposição aos modelos globais, êstes últimos se denominam modelos estruturais. É claro que o grau de decomposição da estrutura do processo evolutivo pode variar entre limites muito amplos. Assim, seria possível estimar a população do Brasil por Estado, segundo um modelo (estrutural) que levasse em conta apenas as correntes migratórias inter-estaduais, *obtendo-se totais por Estado* que, somados dariam a população do País. Nêsse caso o modêlo seria global ao nível do País, embora estrutural ao nível Estadual. Seria possível, no entanto, levar em conta as migrações internacionais, considerando-se, por exemplo, o "Brasil" e o "resto do mundo", tomando-se o modêlo estrutural também ao nível do País. Além disso, seria possível ainda estimar o número de habitantes por Estado, segundo classes de idades, aumentando-se, dêsse modo, o grau de "estruturação" do modêlo; dentro de cada classe de idade seria possível decompor a população segundo as classes de atividade, o que daria um grau de estruturação ainda mais elevado. Todavia, se cada uma dessas parcelas fôsse estimada isoladamente, e por somas fôssem obtidos os totais de cada nível de estruturação (totais por classes profissionais, por idade, por Municípios, etc.) não se teria um modêlo estrutural mas um modêlo agregado, que é tão sòmente uma variante dos modelos globais. O modêlo só é estrutural quando as relações entre as parcelas não forem de natureza puramente "contábil"; uma relação dêsse tipo, como por exemplo, aquela que obriga a que a soma das populações estaduais seja igual à população total do País, não caracteriza o modêlo estrutural. É necessário que resulte de fatôres que se acham correlacionados ou que interagem de um forma mais ou menos previsível, estabelecendo nexos lógicos entre os diferentes grupos que podem, assim, ser também expressos através de equações introduzidas no modêlo do mesmo modo que as equações do tipo "contábil".

Face a essas interações, os modelos estruturais já apresentam um certo caráter dinâmico, ao contrário dos modelos globais que são de caráter puramente cinemáticos.

Podemos aliás, dentro do critério já desenvolvido no curso anterior ministrado na ENCE, estabelecer a seguinte classificação quanto a êsse aspecto:

a) Modelos cinemáticos são aquêles em que tôdas as variáveis têm caráter exógeno;

b) Modêlo dinâmico é todo modêlo em que comparece, em qualquer das suas equações, pelo menos *uma* variável endógena, isto é, ligada a outra por uma relação endógena.

Em particular, tôdas as equações ou relações incluídas em um modêlo exprimindo interações ou reações de uma variável sôbre outra, ou sôbre ela própria, são relações endógenas que por si só permitem caracterizar o modêlo como modêlo dinâmico.

Além dessa forma de classificação, os modelos admitem, em geral, duas formas de apresentação: uma forma determinística, na qual as equações não incluem têrmo aleatório e se supõem aplicáveis às grandezas nela envolvidas de uma forma rigorosa, através das relações matemáticas do modêlo. Há uma segunda forma, denominada forma estocástica, em que as relações apresentam um ou mais têrmos aleatórios, de modo que são aplicáveis apenas à média do processo, ou permitem determinar a função de distribuição para cada valor dos parâmetros envolvidos. Assim, será possível estabelecer o tipo de processo estocástico a que dará lugar, seja diretamente, seja através dos momentos ou dos semi-variantes da família de funções de distribuição que definem aquêle processo.

2 2 — *Equações que definem os modelos globais determinísticos.*

2.2.1 — Os modelos globais determinísticos, de caráter cinemático, se exprimem mediante uma equação diferencial ordinária, que traduz o crescimento em têrmos de duas componentes

$$dN(t)/dt = r(t) \cdot N(t) + M(t) \qquad (2.2.1\text{-}1)$$

ou através de uma equação de diferenças equivalentes, que se pode colocar sob a forma

$$N_{t+h} = a_{t,h} N_t + M_t \qquad (2.2.1\text{-}2)$$

a qual, por subtração de N_t a ambos os membros, se transforma em

$$\Delta N_t = (a_{t,h} - 1)\, N_t + M_t \qquad (2\ 2.1\text{-}3)$$

Nessas expressões, o primeiro têrmo do segundo membro representa a parcela que se denomina de crescimento induzido, diretamente relacionada com o volume (*) da população e a segunda, aquela que é autônoma, isto é, independe dêsse volume. Freqüentemente, pode-se atribuir à primeira a função de representar o crescimento natural, dependente de fatôres e fôrças inerentes à mortalidade e à fecundidade e, portanto, relacionada pelo menos a "grosso modo" à massa (*) de população existente em cada instante; a segunda parcela, $M(t)$ ou M_t, representaria, dentro dêsse critério, crescimento devido às correntes migratórias, que podem variar de forma muito mais autônoma, em função de fatôres outros que não se relacionam tão diretamente, na sua ação conjunta, à massa populacional existente na época t.

Assim, nessa ordem de idéias, pode-se dizer que o 1.º têrmo do 2.º membro representa o crescimento natural e o 2.º têrmo, o crescimento migratório. Dentro dessa interpretação, os significados dos símbolos que comparecem nas equações (2 2 1-1) e (2 2.1-2) seria.

$N(t)$, população (número de habitantes) na época t
$r(t)$, taxa instantânea de crescimento natural
$a_{t,h}$, fator de crescimento natural durante o intervalo t, $t+h$
$M(t)$, M_t, corrente migratória na época t

2.2 2 — Na realidade a interpretação dada no parágrafo anterior é uma interpretação particular Pode-se, por exemplo, admitir que a

* Os têrmos volume e massa de população têm aqui o sentido de número de habitantes

parcela de crescimento natural dependa diretamente do volume da população, mas que o crescimento devido às correntes migratórias não seja totalmente independente dêsse volume. Para não sobrecarregar a exposição, vamos considerar, apenas, o caso de equação (2.2.1-1), isto é, do modelo contínuo, uma vez que o mesmo resultado será fàcilmente adaptável ao outro modelo. Pode-se supor que a corrente migratória $M(t)$ seja decomponível em duas parcelas: uma, de *migração induzida,* dependente de $N(t)$, representada por $M_i(t)$,

$$M_i(t) = \alpha(t) N(t) \qquad (2.2.2\text{-}1)$$

e outra, autônoma, $M_a(t)$, que não depende de $N(t)$, isto é,

$$M_a(t) = \beta(t) \qquad (2.2.2\text{-}2)$$

Assim, a equação (2.2.1-1) passará a ter o seguinte aspecto, se representarmos agora a função $r(t)$, da equação (2.2.1-1), por $r_v(t)$, denominada de taxa de crescimento natural ou vegetativo:

$$dN(t) / dt = \left[r_v(t) + \alpha(t)\right] N(t) + \beta(t) \qquad (2.2.2\text{-}3)$$

Pondo-se nessa equação,

$$r_v(t) + \alpha(t) = r(t) \qquad (2.2.2\text{-}4)$$

tem-se a expressão definitiva:

$$dN(t) / dt = r(t) N(t) + \beta(t) \qquad (2.2.2\text{-}5)$$

do mesmo tipo de (2.2.1-1).

É evidente que se poderia imaginar, também, apesar de ser de interpretação menos natural, que o crescimento vegetativo comportasse uma componente *induzida,* $r(t) N(t)$, e uma *autônoma,* $V(t)$, de modo que resultaria:

$$dN(t) / d(t) = r(t) \cdot N(t) + R(t) \qquad (2.2.2\text{-}6)$$

onde

$$R(t) = \beta(t) + V(t) \qquad (2.2.2\text{-}7)$$

Dentro dêsse esquema geral tanto a taxa de crescimento natural ou vegetativo $r_v(t)$ como a de crescimento migratório, $r_m(t)$, seriam decompostas em duas parcelas: a taxa de crescimento induzido e a de crescimento autônomo. Adotando novas notações poder-se-ia escrever:

$$r_v(t) = r_{v,i}(t) + r_{v,a}(t); \text{ onde } r_{v,a}(t) = V(t) / N(t)$$

$$r_m(t) = r_{m,i}(t) + r_{m,a}(t); \text{ onde } r_{m,a}(t) = \beta(t) / N(t)$$

Normalmente, pode-se considerar que a parcela autônoma do crescimento natural seja nula, reduzindo-se a taxa $r_v(t)$ ao têrmo induzido. Não seria impossível — embora pouco provável — que o crescimento da população, em que houvesse uma redução de natalidade ou um acréscimo de mortalidade (ou ambas as coisas) pudesse ser traduzido simplesmente, mediante parcela de caráter autônomo. Todavia, não nos parece que essa situação venha a ocorrer com freqüência; por outro lado, nesse caso, a componente autônoma teria um sentido meramente formal. Quando são nulas as contribuições autônomas, tanto migratória como natural, diz-se que é nulo o crescimento autônomo, havendo apenas crescimento induzido.

2.3 — *Solução do modêlo global e aplicações*: *Modêlo simples (sem componente autônoma)*.

2.3.1 — A equação (2.2.2-5) no caso de ser nula a componente autônoma, reduz-se à expressão que pode ser posta sob a forma

$$dN(t) \,/\, N(t) = r(t)\,dt \qquad (2.3.1\text{-}1)$$

cuja integral é imediata

$$N(t) = N(o) \cdot \exp.\ \phi(t) \qquad (2.3.1\text{-}2)$$

onde $\phi(t) = \int_o^t r(x)dx$, sendo $\exp x = e^x$. A função $\phi(t)$ denomina-se função de evolução, de variação ou de crescimento e exp. $\phi(t)$ é o fator contínuo de mesmo nome. Uma forma alternativa da (2.3.1-1) consiste em incluir a constante $N(o)$ na própria função $\phi(t)$. De fato, pondo

$$N(o) = e^c \qquad (2.3.1\text{-}3)$$

resulta

$$N(t) = \exp\ \bar{\phi}(t) \qquad (2.3.1\text{-}4)$$

onde

$$\bar{\phi}(t) = \phi(t) + C$$

2.3.2 — Se o modêlo adotado se apresentar sob a forma de equação de diferenças

$$N_{i+1} = a_i N_i \qquad (2.3.2\text{-}1)$$

obtém-se a partir daí, fazendo sucessivamente $i = 0,1, \ldots, t - 1$

$$N_1 = a_o\, N_o$$

$$N_2 = a_1\, N_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$N_t = a_{t-1}\, N_{t-1}$$

Efetuando o produto membro a membro e simplificando obtém-se

$$N_t = N_o \prod_{i=0}^{t-1} a_i \tag{2.3.2-2}$$

Essa solução pode ser posta ainda sob uma forma que apresenta uma perfeita analogia com a (2.3.1-1); para isso basta introduzir nôvo parâmetro λ_i definido pela relação

$$\lambda_i = lg_e \, a_i \tag{2.3.2-3}$$

Resulta dêsse modo:

$$\prod_{i=0}^{t=1} a_i = \exp \left(\sum_{i=0}^{t=1} \lambda_i \right)$$

Pondo $\sum_{i=0}^{t-1} \lambda_i = \psi_t$ tem-se finalmente

$$N_t = N_o \exp \, \psi_t \tag{2.3.2-4}$$

ou, ainda, efetuando a mesma substituiçãc (2.3.1-2),

$$N_t = \exp \, \overline{\psi}_t \tag{2.3.2-5}$$

onde $\overline{\psi}_t = \psi_t + C$.

2.3.3 — As fórmulas (4) do parágrafo anterior são do tipo inteiramente análogo às (2) do parágrafo 2.3.1; as duas conduzirão ao mesmo resultado se

$$\phi(t) = \psi_t \tag{2.3.3-1}$$

isto é,

$$\int_0^t r(x)\, dx = \sum_{i=0}^{t-1} \lambda_i \tag{2.3.3-2}$$

Devendo essa expressão ser válida para *qualquer t,* resulta que, para *t* inteiro deverá ser satisfeita a igualdade

$$\lambda_i = \int_i^{i+1} r(x)\, dx \qquad i = 0, 1, 2, \ . \tag{2.3.3-3}$$

que pode ser adotada como definição de λ_i, em função do $r(t)$. De forma aproximada resulta:

$$\lambda_i \cong r \left(i + \frac{1}{2} \right) \tag{2.3.3-4}$$

relação que, no caso de ser $r(t)$ constante se transforma em igualdade exata:

$$\lambda = r \tag{2.3.3-5}$$

2.3.4 — Analisemos os significados concretos de $r(t)$, a_t e λ_t nas expressões anteriores. A função $r(t)$ denomina-se taxa instantânea de variação da população; as populações são quase sempre crescentes, de modo que $r(t)$ será em geral uma taxa de crescimento. Todavia, isso é pouco relevante; mais adiante veremos que podem ser considerados certos modelos de populações decrescentes de grande interêsse prático (ver cap. II). A denominação *taxa instantânea* é pouco adequada; preferimos a denominação de *intensidade* de variação no instante *t*, muito embora apliquemos freqüentemente a 1a. expressão, dado o seu uso corrente. De acôrdo com a definição de $\phi(t)$ resulta para taxa de crescimento:

$$r(t) = \phi'(t) \qquad (2.3.4\text{-}1)$$

O coeficiente a_t, como se depreende da equação (2.3.2-1) representa a relação entre os números de habitantes de um ano para o do ano anterior. Denomina-se fator discreto de variação da população na época *t* e poderá ser anual, qüinqüenal, mensal, etc. Será fator de crescimento, quando superior à unidade e de decréscimo se inferior. Para $a_t = 1$ a população será estacionária. A diferença $a_t - 1$ é a taxa periódica (anual, mensal, etc.) de variação (crescimento se positiva e decréscimo quando negativo) da população considerada. Geralmente a_t é muito próximo de 1 e, como se verá posteriormente, a tendência, a longo prazo, é para que $a_t \to 1$. Na atualidade, são excepcionais os valores de a_t superiores a 1,035. Em 108 países cujos coeficientes de variação figuram em "Population Index" (Jan. 64), às págs. 120/124, apenas 3 têm fator de crescimento acima dêsse valor. A distribuição de a_t por países consta do Quadro I e está representada na fig. 1.

QUADRO I

Números de países (freqüência) com valôres de a_t nas classes indicadas

CLASSES Incl — Excl.	FREQÜÊNCIA (Países)	
	Absoluta	Relativa
0,99 ⊢ 1,00*	1	0,009
1,00 ⊢ 1,01	19	0,176
1,01 ⊢ 1,02	32	0,296
1,02 ⊢ 1,03	38	0,352
1,03 ⊢ 1,04	15	0,139
1,04 ⊢ 1,05	2	0,019
1,05 e mais**	1	0,009
TOTAIS	108	1,000

* República Democrática Alemã: a = 0,9945
** População indígena do Mali: a = 1,0553

A média dos valores, nessa distribuição, é igual a 1,0203, sendo que 52% dos países apresentam taxas de crescimento abaixo de 2% ao ano, isto é, coeficientes de variação não superiores a 1,02.

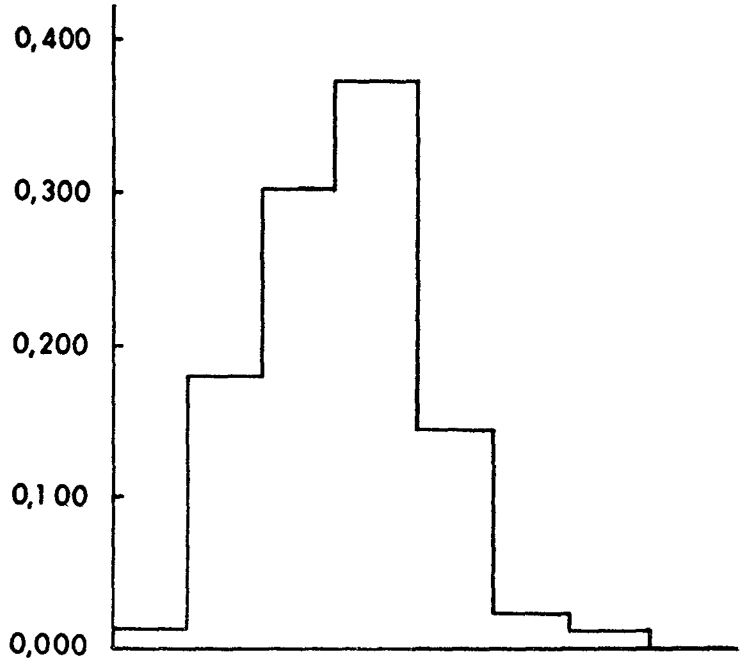


Fig. 1

A partir da relação (2.3.2-3) que define λ_t e função de a_t pode-se obter, numèricamente, uma boa aproximação do primeiro a partir do 2.º, sem o emprêgo daquela relação. De fato, dado que a_t é, geralmente, próximo de *1*, a_t — *1* será pouco diferente de *O*, de modo que é lícito o desenvolvimento em série, ràpidamente convergente:

$$\lambda_t = lg_e\, a_t = (a_t - 1) - \frac{(a_t - 1)^2}{2} + \ldots \cong (a_t - 1)\left(1 - \frac{a_t - 1}{2}\right) \qquad (2.3.4\text{-}2)$$

Em particular, para uma taxa anual de crescimento de 2%, $a = 1 + i = 1{,}02$ e a (2.3.4-2) fornece

$$\lambda = 0{,}02 \times 0{,}99 = 0{,}0198$$

resultado pràticamente exato, uma vez que

$$\lambda = lg_e a = 0{,}0198027$$

A diferença é inferior a 0,14%.

2.3.5 — Supondo-se uma variação contínua, pode-se definir a taxa central de variação (crescimento ou declínio), correspondente ao período h, denotada por $\bar{r}(t)_h$, mediante a expressão:

$$\bar{r}(t)_h = \Delta N(t)_h \Big/ \int_0^h N(t+z)\, dz \qquad (2.3.5\text{-}1)$$

onde $\Delta N(t)_h = N(t+h) - N(t)$. Do ponto de vista prático a integral do denominador pode ser substituída, quando necessário, por um valor aproximado numèricamente. De fato, podemos escrever

$$\int_0^h N(t+z)\, dz = h \cdot N(t+\theta h) \qquad (2.3.5\text{-}2)$$

onde $0 \leq \theta \leq 1$.

Na prática dois critérios principais podem ser utilizados a saber:

Critério a. Supõe-se que $N(t+\theta h)$ é a medida aritmética dos valores extremos da função $N(t)$, isto é, para o caso considerado:

$$N(t+\theta h) \cong (1/2)\, [N(t) + N(t+h)] \qquad (2.3.5\text{-}3)$$

Assim resulta:

$$\bar{r}(t)_h \cong \frac{2 \cdot \Delta N(t)_h}{h \cdot [N(t) + N(t+h)]} \qquad (2.3.5\text{-}4)$$

Critério b. Supõe-se que $N(t+\theta h)$ pode ser substituído pela média geométrica dos valores extremos da função $N(t)$, isto é, no caso considerado

$$N(t+\theta h) = \sqrt{N(t) \cdot N(t+h)} \qquad (2.3.5\text{-}5)$$

de onde resulta, para a taxa central, a expressão:

$$\bar{r}(t)_h \cong \frac{\Delta N(t)_h}{h \cdot \sqrt{N(t) \cdot N(t+h)}} \qquad (2.3.5\text{-}6)$$

No caso de um período $h = 1$ *a taxa* $\bar{r}(t)_1$ denomina-se simplesmente taxa central de variação (crescimento ou declínio) e representa-se pela notação $\bar{r}(t)$.

Considere-se, por exemplo, um intervalo unitário de tempo $(h = 1)$ e uma população cujo fator anual de crescimento é $a = 1{,}02$ (taxa anual de crescimento de 2%). Aditando-se por unidade a população no início do período, tem-se:

$$N(t) = 1 \qquad N(t+1) = 1{,}02$$

Adotando-se o "critério a" (fórmula 2.3.5-4) resulta:

$$\bar{r}(t) = 0{,}02/1{,}01 = 0{,}0198020$$

Se se preferir o "critério b", (fórmula 2.3.5-6) obtem-se então:

$$\bar{r}(t) = 0{,}02/1{,}0099505 = 0{,}0198030$$

o valor exato

$$\bar{r}(t) = 0{,}0198027$$

acha-se mais próximo da segunda estimativa, a cêrca de 7/10 do caminho entre as duas

Observação: Como ficou claro, a taxa de variação se obtem, em qualquer caso, subtraindo-se *1* do fator discreto de variação. Representando essa taxa por i_t, tem-se por conseguinte:

$$i_t = a_t - 1$$

ao passo que λ_t calculado pela (2.3.4-1) terá, em geral, um valor próximo de i_t. Por outro lado, quando a taxa $r(t)$ de variação instantânea, ou intensidade de variação da população é constante, então resulta (e sòmente nesse caso):

$$\lambda_t = r(t) = \bar{r}(t)$$

ou, melhor, uma vez que não dependem de t.

$$\lambda = r = \bar{r}$$

No caso geral, porém, $r(t)$ é a derivada da função $\phi(t)$ conforme a (2.3.2-1), sendo taxa a central, $\bar{r}(t)$, dada pela expressão (2.3.5-1) e λ_t pela fórmula de definição (2.3.2-3). Êsses pontos serão esclarecidos em exercícios. (Exercícios resolvidos n.º 1).

Aplicações

2 3.6 — Considere-se o seguinte exemplo prático: uma população de 60 milhões de habitantes apresenta uma taxa (instantânea) de natalidade de 45‰ e uma mortalidade de 30‰. Deseja-se calcular a população ao fim de 30 anos, nas duas hipóteses seguintes:

a) as taxas de mortalidade e de natalidade se mantêm, durante todo o intervalo considerado, nos mesmos níveis iniciais;

b) a taxa de natalidade se mantém no mesmo nível inicial, mas a de mortalidade sofre uma redução linear de 0,0004 anualmente.

Analisemos o caso da hipótese a) adotando a equação (2.3.1-2). Nesse caso, a intensidade instantânea de crescimento na época *t*, será constante:

$$r(t) = n(t) - m(t) = 0{,}045 - 0{,}030 = 0{,}015$$

donde, tendo em vista que a integral do expoente

$$\phi(30) = \int_0^{30} 0{,}015\,dt = 0{,}015 \int_0^{30} dt \qquad \text{se reduz a } 0{,}45:$$

$$P(30) = 60 \cdot e^{0{,}45} = 60 \times 1{,}56831 = 94{,}1$$

ou sejam, 94.100 000 habitantes, aproximadamente

Examinemos, agora, a hipótese b), com base na mesma equação (2 3 1-2). Teremos, nesse caso

$$n(t) = 0{,}045$$

$$m(t) = 0{,}030 - 0{,}0004\,t$$

Donde a taxa instantânea de crescimento.

$$r(t) = n(t) - m(t) = 0{,}015 + 0{,}0004\,t$$

A integral do expoente na expressão (2 3 1-2) será, então:

$$\phi(30) = \int_0^{30} r(t)\,dt = 0{,}015 \int_0^{30} dt + 0{,}0004 \int_0^{30} t\,dt = 0{,}015 \times 30 + 0{,}0004 \times 450 =$$

$$= 0{,}45 + 018$$

Logo:

$$P(30) = 60 \cdot e^{0{,}45} \cdot e^{0{,}18} = 94{,}1 \quad 1{,}19722 = 112{,}7$$

isto é, aproximadamente 112 700.000 habitantes Assim, a redução da mortalidade de 0,0004 anualmente implica em um aumento de 18,6 milhões de habitantes ao fim de 30 anos

2 3 7 — No exemplo dado no parágrafo anterior admitiu-se, implicitamente, que o crescimento da população fôsse devido, exclusivamente, ao excedente de nascimentos sôbre óbitos, isto é·

$$r(t) = \nu(t) - \mu(t) \qquad (2\ 3\ 7\text{-}1)$$

Pode-se introduzir, nesse mesmo modêlo, uma componente migratória induzida nesse caso, a componente *natural* ou *vegetativa,* representada pela diferença entre as taxas instantâneas de natalidade e mortalidade, será indicada por $r_v(t)$, isto é:

$$r_v(t) = \nu(t) - \mu(t) \tag{2.3.7-2}$$

e a componente migratória, por $r_m(t)$:

$$r_m(t) = i(t) - e(t) \tag{2.3.7-3}$$

A equação diferencial (2.3.1-1) teria, então, a forma:

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = r(t) = r_v(t) + r_m(t) \tag{2.3.7-4}$$

de modo que, a solução teria o mesmo aspecto formal

$$N(t) = N(0) \cdot e^{\phi(t)}$$

podendo-se, no entanto, agora separar a função do segundo membro em um produto de duas componentes

$$N(t) = N(0) \cdot e^{\phi_v(t)}\, e^{\phi_m(t)} \tag{2.3.7-5}$$

visto que

$$\phi(t) = \int_0^t r(x)\, dx = \int_0^t r_v(x)\, dx + \int_0^t r_m(x)\, dx = \phi_v(t) + \phi_m(t)$$

Considere-se, na expressão (2.3.7-5), apenas o primeiro fator, isto é, a expressão

$$N_v(t) = N(0) \cdot e^{\phi_v(t)} \tag{2.3.7-6}$$

Ela traduz o número de habitantes ao fim do tempo t, de uma população igual à população considerada, no instante 0, sujeita, apenas, à componente natural, $r_v(t)$; por outro lado, o saldo migratório total durante o período $O \vdash t$, para uma intensidade migratória igual à da população considerada, será dado pela integral

$$\int_0^t r_m(x)\, N(x)\, dx$$

de modo que, somando-se êsse resultado à (2 3.7-6) resulta, representando-o por $N_1(t)$:

$$N_1(t) = \int_0^t r_m(x)\ N(x)\ dx + N(0)\ e^{\phi_v(t)} \qquad (2.3.7\text{-}7)$$

Comparando-se (2.3 7-5), (2.3.7-6) e (2.3.7-7), resulta que

$$N_v(t) \lesseqgtr N_1(t) \lesseqgtr N(t), \text{ conforme } r_m(t) \lesseqgtr 0 \qquad (2.3.7\text{-}8)$$

o crescimento total da população considerada, durante o período $O \vdash t$, $N(t) - N(O)$, fica assim decomposto em três parcelas.

a) $V(t) = N_v(t) - N(O)$ crescimento natural

b) $M_d(t) = N_1(t) - N_v(t)$ crescimento migratório direto

c) $M_i(t) = N(t) - N_1(t)$ contribuição indireta das correntes migratórias

É evidente que

$$N(t) - N(0) = M_d(t) + M_i(t) + V(t) \qquad (2.3\ 7\text{-}9)$$

$M_d(t)$ e $M_i(t)$ são nulos se $r_m(t)$ for nulo e positivos ou negativos conforme essa taxa seja positiva ou negativa.

2 3.8 — Para ilustrar o exposto no parágrafo anterior, considere-se novamente o exemplo dado (hipótese a) e suponha-se que haja, também, uma componente migratória, representada por uma taxa constante

$$r_m(t) = 0{,}005$$

Resulta

$$\phi_v(30) = 0{,}45$$

$$\phi_m(30) = 0{,}005 \int_0^{30} dx = 0{,}005 \times 30 = 0{,}15$$

Por outro lado têm-se

$$\int_0^{30} r_m(t)\ N(t)\ dt = 0{,}005 \times 60 \int_0^{30} e^{0{,}020t}\, dt = 15\ \left[e^{0{,}60} - 1\right] = 12{,}33$$

Feitos os cálculos,

$$N_v(30) = 94{,}10,\ N_1(30) = 106{,}43,\ N(30) = 109{,}32$$

de acôrdo com (2 3 7-7) e (2 3 7-5)

Se, em lugar de haver um predomínio da imigração, houvesse excesso de emigração, de igual intensidade, resultaria:

$$r_m(t) = -0{,}005$$

O nôvo cálculo daria, então:

$$N_v\ (30) = 94{,}10; \quad N_I(30) = 81{,}77, \quad N\ (30) = 80{,}99$$

ainda conforme a (2.3.7-7) e a (2.3.7-5).

Assim, têm-se no primeiro caso (imigração > emigração), $r_m(t) > 0$

	(milhões)	‰
Crescimento total	49,32	1 000,0
Crescimento natural	34,10	691,0
Crescimento direto	12,33	250,0
Crescimento indireto	2,89	58,6

No segundo caso considerado (imigração < emigração), será $r_m(t) < 0$, de modo que resulta:

	(milhões)	‰
Crescimento total	20,99	1 000,0
Crescimento natural	34,10	1 624,6
Decréscimo migratório direto	12,33	587,4
Decréscimo migratório indireto .. .	0,78	37,2

Considerando-se a contribuição migratória total como constituída da soma das contribuições direta e indireta, verifica-se que essa contribuição, no exemplo dado, é de cêrca de 30,9% no primeiro caso, sendo que a contribuição indireta de 19,0% dêsse total e de 62,5% (!) no segundo, com uma contribuição indireta de uns 6% dêsse total.

MODÊLO COMPLETO

2.3.8 — O modêlo anterior é algo incompleto, uma vez que só considera a variação induzida. Se incluirmos a parcela de variação autônoma, teremos a equação (2.2.2-5),

$$dN(t)/dt = r(t) \cdot N(t) + \beta(t)$$

que sob forma de diferenças finitas seria

$$N_{t+1} = a_t \cdot N_t + \beta_t \qquad (2.3.8\text{-}1)$$

ou, subtraindo N_t de ambos os membros

$$\Delta N_t = (a_t - 1)\ N_t + \beta_t$$

O Apêndice 1 fornece as soluções da (2 2.2-5) e da (2.3 8-1), cujos aspectos formais são muito semelhantes.

De fato (ver Apêndice 1) a solução de (2.2.2-5) é dada pela expressão

$$N(t) = \left[N(0) + \int_0^t \beta(x)\, e^{-\phi(x)}\, dx \right] e^{\phi(t)} \qquad (2.3.8\text{-}1)$$

sendo possível decompor, como anteriormente, o crescimento total em suas diferentes parcelas. Supondo um crescimento natural e inteiramente induzido, a componente natural será

$$N_v(t) = N(0)\, e^{\phi_v(t)} \qquad (2.3.8\text{-}2)$$

onde

$$\phi_v(t) = \int_0^t r_v(x)\, dx$$

obtendo-se a contribuição direta e indireta das correntes migratórias mediante processo análogo ao utilizado no caso anterior (modêlo simples). Pondo-se,

$$N_1(t) = N_v(t) + \int_0^t M(x)\, dx \qquad (2\ 3.8\text{-}3)$$

onde $M(t)$ representa a intensidade migratória (saldo entre imigração e emigração) na época t, as mesmas expressões utilizadas no final do parágrafo 2.3 7 são válidas para o atual modêlo completo, permitindo a determinação das três componentes do crescimento: natural, migratória direta e migratória indireta

Anàlogamente, a solução de (2.2.1-2) pode ser posta sob a fórmula (Ver Apêndice 1, fórmula (A1-9).

$$N_t = \left[N(0) + \sum_{x=0}^{t-1} M_x\, e^{-\sum_{i=0}^{x} \lambda_i} \right] e^{\sum_{i=0}^{t-1} \lambda_i}$$

de tipo inteiramente similar a (2 3 8-1); de fato se fizermos

$$\sum_{i=0}^{t-1} \lambda_i = \psi_t$$

resultaria

$$N_t = \left[N_o + \sum_{x=0}^{t-1} M_x\, e^{-\psi_{x+1}} \right] e^{\psi_t}$$

2.3.9 — O Departamento Estadual de Estatística do Estado de São Paulo (5) vem utilizando, em projeções demográficas daquêle Estado, um método por êle intitulado "processo η". Em (5) encontra-se apenas a seguinte explicação:

"Eta (η)

Processo de cálculo que considera, além do saldo vegetativo (v_j) o saldo migratório (η) medido êste através de coeficientes médios encontrados com base nos parâmetros censitários.

Fórmula

$$P_t = P_o(1+\eta)^t + \left(1 + \frac{\eta}{2}\right) \sum_{j=o}^{t-1} (1+\eta)^{t-1-j} \cdot v_j$$

Verifica-se fàcilmente que essa expressão pode ser obtida a partir do modêlo (2.2.1-1) supondo uma corrente migratória exclusivamente induzida e um saldo vegetativo expresso apenas pela componente autônoma, $V(t)$, feitas as adequadas alterações de notação. De fato, se para equação diferencial do modêlo (2.2.1-1) for adotada a forma

$$dN(t)/dt = V(t) + \theta(t) \cdot N(t) \qquad (2.3.9\text{-}1)$$

onde $\Theta(t)$ é a taxa instantânea de migração na época t e $V(t)$ o saldo vegetativo, obtem-se, por integração

$$N(t) = \left[N(0) + \int_0^t V(x)\, e^{-\phi(x)}\, dx \right] e^{\phi(t)} \qquad (2.3.9\text{-}2)$$

na qual

$$\phi(t) = \int_0^t \Theta(z)\, dz$$

Ora, supondo constante a função migratória $\Theta(t)$

$$\Theta(t) = \Theta$$

a equação anterior se escreve

$$N(t) = N(0)\, e^{\theta t} + \int_0^t V(x)\, e^{\theta(t-x)}\, dx \qquad (2.3.9\text{-}3)$$

Substituindo-se agora a integral por uma soma de integrais de intervalo unitário, cada uma delas representada pelo valor da função no ponto central do intervalo, resulta

$$N(t) = N(0)\, e^{\theta t} + e^{\frac{1}{2}\theta} \sum_{j=1}^{t-1} e^{\theta(t-j-1)} \cdot V(j + 1/2) \qquad (2.3.9\text{-}4)$$

Fazendo-se agora as seguintes substituições de notação

$$\begin{array}{ll} V(j + 1/2) & \text{por } V_j \\ e^{\theta} & \text{por } (1 + \eta) \\ N(t) & \text{por } P_t \end{array}$$

resulta finalmente

$$P_t = P_o(1 + \eta) + (1 + \eta)^{1/2} \sum (1 + \eta)^{t-j-1} \cdot V_j \qquad (2.3.9\text{-}5)$$

a qual coincide com a expressão do "processo η" sempre que η seja suficientemente pequeno para que se tenha, aproximadamente,

$$(1 + \eta)^{1/2} \cong \left(1 + \frac{\eta}{2}\right)$$

A expressão que se obteria, com idênticas substituições na hipótese de uma componente migratória exclusivamente autônoma e um crescimento natural apenas induzido, seria

$$P_t = P_o(1 + r)^t + (1 + r)^{1/2} \sum_{j=0}^{t-1} (1 + r)^{t-j-1} \cdot K_j \qquad (2.3.9\text{-}6)$$

onde K_j representa o saldo migratório médio do ano $j \vdash j + 1$ e r a taxa anual (constante) de crescimento natural.

Do ponto de vista puramente formal seria possível aplicar a mesma expressão no caso em que as correntes migratórias comportassem uma componente induzida e uma autônoma. Nesse caso, r, seria a *taxa de crescimento* induzido, no qual se incluiria o crescimento natural e a componente induzida do crescimento migratório. Cabe no entanto fazer aqui uma observação: as correntes migratórias podem comportar uma parcela induzida; mas é certo que a parcela de migração autônoma é, em geral, importante. De fato, essa autonomia resulta do fato de que, grande parte da corrente migratória pode resultar de forças atrativas nem sempre diretamente relacionadas com o volume da população, ou de forças repulsivas originadas nos centros de emigração. Por outro lado, o crescimento natural é francamente induzido e, a menos que a taxa de natalidade esteja em franco declínio e/ou a de mortalidade seja crescente, o termo autônomo será pouco significativo. Assim, a expressão (2.3.9-6) parece-nos mais adequada, em geral, do que a (2.3.9-5) para exprimir o crescimento demográfico de regiões sujeitas a fortes migrações.

2.3.10 — Como exemplo de aplicação do modêlo completo, con sidera-se novamente o caso da população do exemplo dado no pará grafo 2.3.6 na hipótese *b*, acrescido o movimento natural ali referidc por uma corrente migratória que supomos representada por um saldı *imigratório constante,* de 300.000 imigrantes por unidade de tempc Assim, tem-se, nas unidades adotadas (milhões):

$$M(t) = 0{,}3$$

De acôrdo com o cálculo já feito,

$$N_v(30) = 60\ e^{0{,}63} = 112{,}66$$

Além disso, em face de (2.3.8-3):

$$N_1(30) = 112{,}66 + 0{,}3 \times 30 = 121{,}66$$

Para calcular $N(t)$, torna-se necessário determinar o valor da integra

$$0{,}3 \int_0^{30} e^{-\phi(x)} dx = 0{,}3\, I(30)$$

onde se tem

$$\phi(x) = \int_0^x r(z)\ dz = 0{,}15\ x + 0{,}002\ x^2$$

Um valor aproximado do $I(30)$ pode ser obtido decompondo-se ess integral em uma soma de integrais de intervalos unitários e substituind cada uma delas pelo valor da função no meio do intervalo. Dêsse modc

$$I\ (30) = \sum_{i=0}^{29} e^{-\phi(i+1/2)}$$

êsse cálculo acha-se feito no Quadro II pelo qual se obtém:

$$I(30) = 22{,}93$$

Dêsse modo,

$$N(30) = 125{,}58$$

De onde resultam as seguintes parcelas do crescimento da populaçã considerada:

	(milhões)	‰
Crescimento total	65,58	1 000,0
Crescimento natural	52,66	803,0
Crescimento migratório direto	9,00	137,2
Crescimento migratório indireto	3,92	59,8

QUADRO II

Cálculo da integral: $I(30) = \int_0^{30} e^{-\phi(x)}\,dx \cong \sum_{i=0}^{29} e^{-\phi(x+1/2)}$

$$\phi(x) = \int_0^x r(z)\,dz = 0{,}015\,x + 0{,}0002\,x^2$$
$$r(z) = 0{,}015 + 0{,}0004z$$

Y=x+1/2	0,015 Y	0,0002 Y^2	$\phi(Y) =$ $0{,}015Y + 0{,}0002Y^2$	$e^{-\phi(Y)}$
0,5	0,007 5	0,000 05	0,007 55	0,992 48
1,5	0,022 5	0,000 45	0,022 95	0,977 31
2,5	0,037 5	0,001 25	0,038 75	0,961 99
3,5	0,052 5	0,002 45	0,054 95	0,946 53
4,5	0,067 5	0,004 05	0,071 55	0,930 95
5,5	0,082 5	0,006 05	0,088 55	0,915 26
6,5	0,097 5	0,008 45	0,105 95	0,899 47
7,5	0,112 5	0,011 25	0,123 75	0,883 61
8,5	0,127 5	0,014 45	0,141 95	0,867 66
9,5	0,142 5	0,018 05	0,160 55	0,851 68
10,5	0,157 5	0,022 05	0,179 55	0,835 65
11,5	0,172 5	0,026 45	0,198 95	0,819 59
12,5	0,187 5	0,031 25	0,218 75	0,803 52
13,5	0,202 5	0,036 45	0,238 95	0,787 45
14,5	0,217 5	0,042 05	0,259 55	0,771 40
15,5	0,232 5	0,048 05	0,280 55	0,755 37
16,5	0,247 5	0,054 45	0,301 95	0,739 38
17,5	0,262 5	0,061 25	0,323 75	0,723 43
18,5	0,277 5	0,068 45	0,345 95	0,707 55
19,5	0,292 5	0,076 05	0,368 55	0,691 74
20,5	0,307 5	0,084 05	0,391 55	0,676 01
21,5	0,322 5	0,092 45	0,414 95	0,660 37
22,5	0,337 5	0,101 25	0,438 75	0,644 84
23,5	0,352 5	0,110 45	0,462 95	0,629 42
24,5	0,367 5	0,120 05	0,487 55	0,614 13
25,5	0,382 5	0,130 05	0,512 55	0,598 97
26,5	0,397 5	0,140 45	0,537 95	0,583 94
27,5	0,412 5	0,151 25	0,563 75	0,569 07
28,5	0,427 5	0,162 45	0,589 95	0,554 36
29,5	0,442 5	0,174 05	0,616 55	0,539 80
Total	—	—	—	22,932 93

Tempo médio de vida e período de ampliação

2.3.11 — Se se considera uma população fixa, de 10 milhões de habitantes, por exemplo, durante *um* ano, ter-se-á, ao todo, 10 milhões de anos vividos pelo conjunto de componentes do grupo, o que corresponde, em média, a 1 ano para cada um. Admitindo que a população varia durante o ano e considerando, mensalmente, o número de pessoas existentes, ter-se-á, em um mês i qualquer, uma população média do mês, indicada por $\overline{N}_i$ à qual corresponde um total de anos vividos, durante o mês, de

$$\frac{1}{12} \cdot \overline{N}_i$$

De modo geral, à população média de um período, $i \vdash i+1$, de amplitude Δt_i, corresponderá um tempo de vida total de $\overline{N}_i \; \Delta \; t_i$ anos, de modo que, durante um intervalo de tempo $O \vdash T$, o número de anos vividos pelo grupo será igual a

$$\sum_{i=0}^{T-1} \overline{N}_i \; \Delta \; t_i$$

A média, por habitante, ou *tempo médio de vida,* durante o período considerado, será

$$\frac{1}{N_0} \sum_{i=0}^{T-1} \overline{N}_i \cdot \Delta t_i$$

Se considerarmos, agora, uma variação contínua, o tempo total da vida, durante um período $O \vdash T$, é dado pela integral

$$\int_0^T N(t) \; dt$$

e o tempo médio de vida, por habitante, existente no início do período, será:

$$V(T) = \frac{1}{N(0)} \int_0^T N(t) \; dt \qquad (2.3.11\text{-}1)$$

O tempo médio de vida, por "habitante-ano" tem como valor:

$$v(T) = V(T)/T \qquad (2.3.11\text{-}2)$$

No caso do modêlo (2.3.1-1), resultará, substituindo-se $N(t)$ por $N(O)$ exp $\phi(t)$

$$V(T) = \int_0^T \exp \; \phi(t) \cdot dt \qquad (2.3.11\text{-}3)$$

Na hipótese de uma taxa instantânea r de variação constante, será $\phi(t) = rt$, de modo que se tem, nesse caso:

$$V(T) = \frac{1}{r} \; (e^{rT} - 1) \qquad (2.3.11\text{-}4)$$

Quando r é negativo (população decrescente) a expressão anterior pode ser escrita assim:

$$V(T) = \frac{1}{r}(1 - e^{-rT}) \qquad (2.3.11\text{-}5)$$

de modo que para $r < 0$, $V(T)$ terá limite finito para $T \to \infty$; indicando êsse limite por $\mathscr{C}$:

$$\mathscr{C} = V(\infty) = \lim_{T \to \infty} V(T) = 1/r \qquad (2.3.11\text{-}6)$$

Outro conceito, de algum interesse prático, é o "período de ampliação (ou redução)" k, definido como o tempo necessário para que a população fique multiplicada pelo número k. Êsse tempo, será a raiz real da equação

$$e^{\phi(t)} = k, \qquad \phi(t) = lg_e\, k \qquad (2.3.11\text{-}7)$$

No caso de uma taxa constante, a equação anterior se transformará em

$$e^{rt} = k \qquad (2.3.11\text{-}8)$$

ou, em têrmos do fator de variação, a:

$$a^{t} = k \qquad (2.3.11\text{-}9)$$

Assim, para $k > 1$, $r > 0$ e para $k < 1$, será $r < 0$. No primeiro caso tem-se o *período de ampliação k* e no segundo o *período de redução k*. Para k = 2 o primeiro denomina-se período de duplicação e o segundo, de redução à metade.

Como exemplo dão-se, no Quadro III, os períodos de duplicação correspondentes à algumas taxas de crescimento:

$$t_2 = \frac{1}{r}\, lg_e 2 = 0{,}6932/r$$

QUADRO III

Períodos de duplicação (anos) correspondentes a algumas taxas instantâneas de crescimento ($k = 2$)

r	t_2	r	t_2	r	t_2
0,000	∞	0,015	46,21	0,030	23,11
0,005	138,64	0,020	34,66	0,035	19,52
0,010	69,32	0,025	27,73	0,040	17,33

A taxa de crescimento da população brasileira entre 1950 e 1960 foi de cêrca de 3%, o que significa uma duplicação em pouco mais de 23 anos. Para o período 1960-70 houve um ligeiro declínio da taxa para 2,9% aumentando um pouco o período de duplicação (24,2 anos).

População subdividida em grupos

2.3.12 — Uma população pode ser subdividida em grupos (2 ou mais) tais como, por exemplo, urbano e rural, sexos masculino e feminino, diferentes classes de idade, etc. Seja $N(t)_i$ — $i = 1, 2, 3, \ldots, k$ — o número de componentes do grupo i, sendo $N(t)$ a população total considerada. Assim,

$$N(t) = \sum_{i=1}^{k} N(t)_i$$

pode-se verificar imediatamente que se cada grupo tiver uma função de variação $\phi_i(t)$, tal como foi definida anteriormente não existirá, em geral, uma função $\phi(t)$ para a população total satisfazendo a mesma definição e a relação anterior. De fato, suponhamos que existam apenas 2 grupos. Então deveria verificar-se, para qualquer t, a relação:

$$N(t)_1 \, e_{\phi_1}{}^{(t)} + N(t)_2 \, e_{\phi_2}{}^{(t)} = \left[N(t)_1 + N(t)_2\right] \cdot e^{\phi(t)}$$

Ora, essa relação só será válida, para qualquer t, se

$$\phi_1(t) = \phi_2(t) = \phi(t)$$

Do ponto de vista prático, no entanto, essa restrição pode não ter maior importância, tornando-se então legítimo representar a evolução de cada grupo e da população total por modelos do tipo (2.3.1-1) ainda que as funções de variação dos diferentes grupos não sejam idênticas. Dá-se a seguir um exemplo numérico para esclarecer o que foi dito.

A população do Estado da Guanabara pode ser subdividida em dois grupos: *naturais da Guanabara e não naturais da Guanabara.* O Quadro IV, a seguir, fornece os dados correspondentes aos três últimos Recenseamentos:

QUADRO IV

População da Guanabara nos três últimos Recenseamentos subdividida em naturais da GB e não naturais da GB

RECENSEAMENTO	NATURAIS DA GUANABARA	NÃO NATURAIS DA GUANABARA	POPULAÇÃO TOTAL
1/9/1940	872 972	891 169	1 764 141
1/7/1950	1 223 460	1 153 991	2 377 451
1/9/1960	1 819 310	1 462 598	3 281 908

Para cada grupo, bem como para a população total, pode-se adotar arbitràriamente uma expressão do tipo

$$N(t) = e^{\phi(t)}$$

Como existem apenas três Recenseamentos a serem utilizados, admitindo para $\phi(t)$ uma expressão trinomial do 2.º grau, isto é:

$$\phi(t) = at^2 + bt + c$$

não haverá graus de liberdade disponíveis, de modo que $c = lg_e.N^*(O)$, coincidindo o ponto O (origem dos tempos) com a data do 1.º Recenseamento utilizado, ou seja, 1.º de setembro de 1940. Feito o ajustamento para cada grupo, conforme indicado nos Quadros, foram obtidos, para os parâmetros a e b, os seguintes valores:

	Valor de a	*Valor de b*
População total	0,000068249	0,029674584
Naturais da Guanabara	0,000234888	0,032016696
Não naturais da Guanabara	— 0,000148523	0,027741850

A taxa de crescimento é a derivada da função $\phi(t)$ em relação a t, isto é:

$$r(t) = \phi'(t) = 2\ at + b$$

O parâmetro b representa a taxa de crescimento (instantânea) no ponto O (1.º de setembro de 1940) a 2.ª traduz a intensidade de variação dessa taxa (aceleração do crescimento). A fim de que os valores calculados se refiram ao meio de cada ano, foi feita uma transposição da origem para 1.º de julho de 1940, de modo que ficam ligeiramente alterados os valores de b acima indicados. Os resultados obtidos para $2a$ e b, com essa alteração, são os seguintes:

	Valor de a	*Valor de b*
População total da Guanabara	0,000136498	0,0296518
Naturais da Guanabara	0,000469776	0,0319384
Não naturais da Guanabara	0,000297047	0,0277914

Os Quadros V, VI, VII e VIII, fornecem os cálculos dos parâmetros e os números de habitantes ano a ano, de 1940 a 1960, correspondentes a cada um dos dois grupos considerados e a população total do Estado. Como se verifica, a soma das populações dos dois grupos não coincide com a população total (igualdade fundamental) a não ser, òbviamente, nos três anos utilizados para o ajustamento, dada a forma por que foi efetuado. De qualquer modo, nos demais anos, as diferenças são suficientemente pequenas para poderem ser ignoradas em muitas aplicações. O cálculo numérico pode ser feito a partir da população inicial $N^*(O)$, mediante aplicação reiterada da fórmula evidente:

$$N(t+1) = N(t)\ e^{\Delta\phi(t)}$$

sendo $N(0) = N^*(0)$

As diferenças primeiras da função $\phi(t)$ são fàcilmente determináveis, uma vez conhecida a sua expressão e os valores numéricos dos parâmetros a e b, para cada um dos grupos considerados. O valor $N^*(O)$ se refere a 1.º de julho de 1940, obtido fazendo-se na equação original t = = — 0,16667 o que transferiu aquele valor de 1.º de setembro de 1940 para 1.º de julho do mesmo ano:

QUADRO V

População presente do Estado da Guanabara

DATA DO CENSO	12 t	N*(t) (1 000 hab)	N*(t)/N*(O)	lg[N*(t)/N*(O)]	N(t) (1 000 hab)
1/9/1940	0	1 764,1	1,0000	0	1 764,1
1/7/1950	118	2 377,5	1,3477	0,1295932	2 377,5
1/9/1960	240	3 281,9	1,8604	0,2696063	3 281,9

$N(t) = N^*(0)\ e^{at^2+bt}$; $\qquad lg\left[N^*(t)/N^*(0)\right] = a't^2 + b't, \qquad a = a'/lge$

$b = b'/lge$

Equações: $(118/12)^2\ a' + (118/12)\ b' = 0{,}1295932$

$400\ a' + \quad 20\ b' = 0{,}2696063$

Donde

$a = 0{,}000068249 \qquad b = 0{,}029674584$

$r(t) = 0{,}000136498\ t + 0{,}02967458$ (Origem: 1-9-1940)

$r(t) = 0{,}000136498\ t + 0{,}02965183$ (Origem: 1-7-1940)

QUADRO VI

População dos naturais presentes do Estado da Guanabara

DATA DO CENSO	12 t	N*(t) (1 000 hab)	$N_1^*(t)/N_1^*(O)$	$lg[N_1^*(t)/N_1^*(O)]$	$N_1(t)$ (1 000 hab)
1/9/1940	0	873,0	1,0000	0	873,0
1/7/1950	118	1 223,5	1,4015	0,1465931	1 223,5
1/9/1960	240	1 819,3	2,0840	0,3188977	1 819,3

$N_1(t) = N^*(0)\ e^{a_1t^2+b_1t} \qquad lg\left[N_1^*(t)/N_1^*(0)\right] = a_1'\ t^2 + b_{1t}' \qquad a_1 = a_1'/lge$

$b_1 = b_1'/lge$

Equações. $(118/12)^2\ a_1' + (118/12)\ b_1' = 0{,}1465931$

$400\ a_1' + \quad 20\ b_1' = 0{,}3188977$

Donde:

$a = 0{,}000234888 \qquad b = 0{,}032016696$

$r_1(t) = 0{,}000469776\ t + 0{,}032016670$ (Origem: 1-9-1940)

$r_1(t) = 0{,}000469776\ t + 0{,}031938370$ (Origem: 1-7-1940)

QUADRO VII

População dos não naturais presentes do Estado da Guanabara

DATA DO CENSO	12 t	$N_2^*(t)$	$N_2^*(t)/N_2^*(0)$	$lg\,[N_2^*(t)/N_2^*(0)]$	$N_2(t)$ (1 000 hab)
1/9/1940	0	891,2	1,0000	0	891,2
1/7/1950	118	1 154,0	1,2949	0,1122362	1 154,0
1/9/1960	240	1 462,6	1,6412	0,2151615	1 462,6

$N_2(t) = N_2^*(0)\, e^{a_2 t^2 + b_2 t}$; $\qquad lg\left[N_2^*(t)/N_2^*(0)\right] = a_2' t^2 + b_2' t$

$$a^2 = a_2'/lg\ e$$

$$b_2 = b_2'/lg\ e$$

Equações: $(118/12)^2\, a_2' + (118/12)\, b_2' = 0{,}1122362$

$$400\ a_2' + 20\ b_2' = 0{,}2151615$$

Donde:

$$a = -0{,}000148523; \qquad b = 0{,}027741850$$

$r_2(t) = -0{,}000297047\ t + 0{,}02774185$ (Origem: 1-9-1940)

$r_2(t) = -0{,}000297047\ t + 0{,}02779136$ (Origem: 1-7-1940)

QUADRO VIII

Cálculo da população total da Guanabara ano a ano, comparada com a soma dos naturais e não naturais calculados diretamente — 1940-60

ANO	POPULAÇÃO EM 1.º DE JULHO (milhares de habitantes)				
	Total $N(t)$	Naturais $N_1(t)$	Não naturais da Guanabara $N_2(t)$	Soma $N_1(t)+N_2(t)$	Relação $\lambda(t) = \frac{N_2(t)}{N_1(t)}$
1940	1 755,5	868,4	887,1	1 755,5	1,0215
1941	1 808,4	896,7	912,9	1 809,6	1,0169
1942	1 863,2	926,5	937,3	1 863,8	1,0115
1943	1 919,9	957,7	962,9	1 920,6	1,0054
1944	1 978,6	990,4	989,9	1 980,3	0,9985
1945	2 037,7	1 024,7	1 015,5	2 040,2	0,9910
1946	2 102,5	1 060,7	1 043,3	2 104,0	0,9827
1947	2 167,7	1 098,5	1 069,8	2 168,3	0,9738
1948	2 235,1	1 139,0	1 097,4	2 236,4	0,9642
1949	2 305,0	1 179,8	1 125,6	2 305,4	0,9540
1950	2 377,5	1 223,5	1 154,0	2 377,5	0,9431
1951	2 452,6	1 269,4	1 182,9	2 452,3	0,9317
1952	2 530,2	1 317,8	1 212,0	2 529,8	0,9197
1953	2 610,9	1 368,5	1 242,5	2 611,0	0,9071
1954	2 694,5	1 421,9	1 271,5	2 693,4	0,8941
1955	2 781,1	1 478,1	1 301,7	2 779,8	0,8805
1956	2 870,9	1 537,3	1 332,2	2 869,5	0,8665
1957	2 963,9	1 599,5	1 363,0	2 962,5	0,8521
1958	3 060,4	1 665,0	1 394,2	3 059,2	0,8372
1959	3 160,4	1 734,9	1 426,5	3 161,3	0,8220
1960	3 264,3	1 806,8	1 457,5	3 264,3	0,8065

Algumas relações importantes quando há correntes migratórias

2.3.13 — Suponha-se conhecida, para uma certa população, a função de evolução, $\phi(t)$; a intensidade de crescimento no instante t, se obtém derivando essa função:

$$r(t) = \phi'(t)$$

No caso de uma população sujeita apenas à componente natural do crescimento (população fechada), a relação simples

$$r(t) = n(t) - m(t)^* \qquad (2.3.13\text{-}1)$$

permitirá, uma vez conhecida a função $r(t)$, determinar a natalidade se for conhecida a mortalidade e vice-versa:

$$n(t) = r(t) + m(t) \qquad (2.3.13\text{-}2)$$

$$m(t) = n(t) - r(t) \qquad (2.3.13\text{-}3)$$

Quando, além da componente natural, a população está sujeita a uma componente migratória (população aberta) a relação (2.3.1-2) terá a forma algo mais complicada

$$r(t) = n(t) - m(t) + i(t) - e(t) \qquad (2.3.13\text{-}4)$$

$$r(t) = r_v(t) + r_m(t) \qquad (2.3.13\text{-}5)$$

onde

$$r_v(t) = n(t) - m(t) \qquad (2.3.13\text{-}6)$$

é a componente natural e

$$r_m(t) = i(t) - e(t) \qquad (2.3.13\text{-}7)$$

é a componente migratória. Para se analisar mais de perto as relações que ocorrem, nesse caso, em lugar de (2.3.13-2) e (2.3.13-3) se forem considerados outros grupos, além da população total, imagine-se uma região R, que se supõe fechada, e seja G uma subregião de R, de modo que haja intensos movimentos migratórios entre G e $\overline{G}$, região complementar de G em relação a R. A região R pode ser, por exemplo, o Brasil, e G um dos Estados da União, ou uma região geo-econômica a ser estudada, R pode ser também a América Latina, ou até mesmo tôda a Terra ou o Sistema Solar, sendo G,

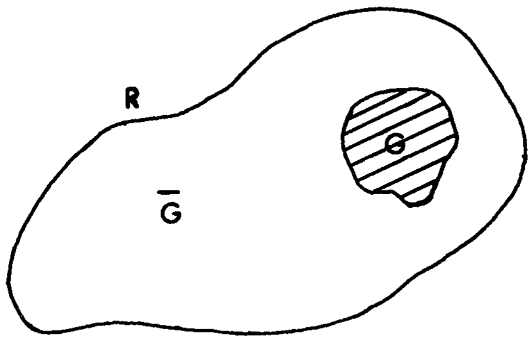


Fig. 2

* As notações n(t) e m(t) são utilizadas em lugar de v(t) e r(t) para indicar as taxas instantâneas No parágrafo essa notação será mudada

uma parcela qualquer dêsse todo. Os habitantes de G, na época t, constituem uma população que pode ser decomposta em dois grupos:

1) habitantes *naturais* de G, cujo número é $N_1(t)$
2) habitantes *não naturais* de G, cujo número é $N_2(t)$

A população total de G, $N(t)$, satisfará òbviamente à relação

$$N(t) = N_1(t) + N_2(t) \qquad (2.3.13\text{-}8)$$

A taxa de variação migratória (2.3.13-7), para a região G é definida em relação à população total, $N(t)$; no entanto, há conveniência em se considerar a parcela de imigrados e emigrados provenientes dos *naturais de G*, e definir, em relação à população $N_1(t)$, uma taxa de variação migratória.

$$g_m(t) = i_1(t) - e_1(t) \qquad (2.3.13\text{-}9)$$

onde $i_1(t)$ se refere aos naturais de G que retornam à sua região de origem e $e_1(t)$ aos naturais de G que saem dessa região, dentro da unidade de tempo adotada por base. Note-se que, embora com definições inteiramente análogas $r_m(t)$ é definida em relação à população total $N(t)$, ao passo que $g_m(t)$ se refere à população $N_1(t)$ que é apenas uma parte daquela. Considere-se, agora na região G, um terceiro grupo de indivíduos, constituído pelos *naturais* de G, ausentes dessa região, na época t(e portanto, *presentes* em $\overline{G}$). Pode-se denominá-lo, simplesmente, de naturais ausentes, sendo a população dêsse grupo, na época t, indicada por $N_3(t)$.

Nas relações que se estabelecem a seguir, com fins exclusivamente ilustrativos de um método de análise em modelos cinemáticos, admite-se como hipótese simplificadora, que a natalidade e a mortalidade dos três grupos considerados são iguais; fàcilmente, no entanto, poderá ser suprimida essa restrição, permanecendo, em princípio, o método de análise, com ligeira alteração dos resultados finais. Uma aplicação dessas fórmulas foi feita em (2).

2.3.14 — Uma circunstância óbvia porém fundamental para o método de separação das componentes do movimento demográfico da região G é a de que todos os nascimentos, provenham do grupo 1 ou do grupo 2, irão alimentar apenas os contingentes do primeiro grupo. Assim, a velocidade de variação dêsse grupo, no instante, t, será:

$$dN_1(t)/dt = n(t) \cdot N(t) - m(t)N_1(t) + g_m(t)N_1(t) \qquad (2.3.14\text{-}1)$$

Dividindo-se ambos os membros dessa igualdade por $N_1(t)$, substituindo-se $N(t)$ pela soma $N_1(t) + N_2(t)$ e o quociente $N_2(t)/N_1(t)$ por $\lambda(t)$, tem-se no primeiro membro, a taxa de crescimento $r_1(t)$ do grupo 1. Logo:

$$r_1(t) = \left[1 + \lambda(t)\right] \cdot n(t) - m(t) + g_m(t) \qquad (2.3.14\text{-}2)$$

Dessa igualdade obtém-se fàcilmente a fórmula

$$n(t) = K(t) \left[r_1(t) + m(t) - g_m(t)\right] \qquad (2.3.14\text{-}3)$$

onde

$$K(t) = 1/\left[1 + \lambda(t)\right] = P_1(t)/P(t) \qquad (2.3.14\text{-}4)$$

Outra relação que poderia ser utilizada com o mesmo fim é a que se obtém considerando-se a evolução do grupo 2. Uma vez que, no total do saldo migratório estão computados os naturais de G que emigram ou que imigram, (isto é, emigrantes anteriores que retornam à região G) o saldo migratório que irá afetar o grupo 2 é, tão sòmente, a diferença:

$$r_m(t) \cdot N(t) - g_m(t) \cdot N_1(t)$$

Tendo-se em conta, ainda, que o grupo 2 *não* é afetado pelos nascimentos (que passam a integrar o grupo 1) a velocidade de variação no instante *t*, para o grupo 2, será:

$$dN_2(t)/dt = r_m(t) \cdot N(t) - g_m(t) \cdot N_1(t) - m(t) \cdot N_2(t) \qquad (2.3.14\text{-}5)$$

Dividindo-se ambos os membros dessa igualdade por $N_2(t)$ e substituindo-se como anteriormente, $N(t)$ pela soma $N_1(t) + N_2(t)$ e o quociente $N_2(t)/N_1(t)$ por $\lambda(t)$, obtém-se, no primeiro membro, a taxa de crescimento $r_2(t)$. Logo:

$$r_2(t) = 1 + \left[1/\lambda(t)\right] r_m(t) - m(t) - \left[g_m(t)/\lambda(t)\right] \qquad (2.3.14\text{-}6)$$

Nessa expressão a natalidade figura implìcitamente através da taxa $r_m(t)$ que pode ser expressa mediante a (2.3.13-5), em têrmos de $r(t)$ e $r_v(t)$, esta última podendo ser representada pela diferença $n(t) - m(t)$. Com essas substituições e um pouco de álgebra chega-se exatamente à mesma fórmula.

2.3.15 — Considere-se, agora, o grupo 3, constituído pelos *naturais* de G, presentes em $\overline{G}$, na época t, isto é, ausentes da região de nascimento. A população dêsse grupo, indicada por $N_3(t)$ é acrescida pela diferença entre os números dos naturais de G entrados e saídos em cada período, isto é, $- g_m(t).N_1(t)$, diminuindo dos óbitos que nêle ocorrem; não interfere na variação dêsse grupo os nascimentos nêle verificados. Assim, a velocidade de variação da população do grupo 3, na época t, será

$$dN_3(t)/dt = - g_m(t) \cdot N_1(t) - m(t) \cdot N_3(t) \qquad (2.3.15\text{-}1)$$

Admitiu-se implìcitamente, que êsse grupo está sujeito à mesma taxa de mortalidade geral, *m(t)*; essa hipótese pode não se realizar na maioria dos casos práticos e, como ficou salientado no texto, deve ser detidamente analisada em cada situação e examinadas as possíveis conseqüências da sua admissão. Caso não haja base para adotá-la poderá ser admitida outra mortalidade no grupo considerado, o que não modifica a essência do nosso raciocínio.

Dividindo-se a ambos os membros da igualdade (1.13-1) por $P_3(t)$ obtém-se, no 1.º membro, a taxa de crescimento $r_3(t)$. Logo, fazendo

$$\mu(t) = N_3(t)/N_1(t)$$

resulta:

$$r_3(t) = \frac{g_m(t)}{\mu(t)} = m(t) \qquad (2.3.15\text{-}2)$$

e, portanto,

$$g_m(t) = \mu(t)\left[r_3(t) + m(t)\right] \qquad (2.3.15\text{-}3)$$

Algumas relações de interêsse podem ser obtidas a partir de (2.3.14-2) e (2.3.14-6). Da primeira, combinada com a (2.3.13-6) vem:

$$r_1(t) = r_v(t) + \mu(t) \cdot n(t) + g_m(t) \qquad (2\text{-}3.15\text{-}4)$$

e da segunda, mediante uma nova arrumação dos têrmos:

$$r_2(t) = r_m(t) - m(t) + \frac{1}{(t)}\left[r_m(t) - g_m(t)\right] \qquad (2.3.15\text{-}5)$$

Tendo em vista as expressões anteriores tiram-se ainda as seguintes relações:

$$r_1(t) = r(t) + \left[\lambda(t) \cdot m(t) + g_m(t) - r_m(t)\right] \qquad (2.3.15\text{-}6)$$

$$r_2(t) = r(t) - \left[n(t) + \frac{1}{\lambda(t)}\left\{g_m(t) - r_m(t)\right\}\right] \qquad (2.3.15\text{-}7)$$

Essas expressões mostram que, quando os dois grupos 1 e 2 são iguais, isto é $\lambda(t) = 1$, as taxas de crescimento $r_1(t)$ e $r_2(t)$ são simétricas em relação a $r(t)$; a primeira é superior de $n(t) + g_m(t) - r_m(t)$ e a segunda é inferior da mesma quantidade.

Aplicações especiais dos modelos

2.3.16 — *Uma tábua de sobrevivência do 1.º tipo* (em contraposição à tábua do 2.º tipo, é de um ponto de vista determinístico uma função que representa, em geral, sob forma tabular, o número de sobreviventes no x^{mo} aniversário, de um grupo de indivíduos pertencentes a uma mesma "geração", isto é, nascidos durante um determinado período de tempo (mês, ano, qüinqüênio etc.) em uma dada população.

De um ponto de vista não determinista a tábua do 1.º tipo é um processo estocástico de "morte pura" (pure death process). O têrmo geração significa, na terminologia usual, aquêle conjunto de indivíduos que, segundo se supõe, teriam estado sujeitos, durante a sua evolução, aos mesmos tipos de influências por parte dos fatôres determinantes do movimento de que participam. Assim, pode-se falar da "geração" dos nascidos, nos Estados Unidos, durante a 2.ª Guerra Mundial; da "geração" dos que se casaram no ano imediatamente posterior à 1.ª Guerra; da "geração" dos nascidos em determinado ano calendário, etc. Em lugar do têrmo "geração" utiliza-se também, como sinônimo, a expressão "cohorte", adotaremos na exposição que se segue, qualquer dos dois têrmos, indistintamente. Sendo a *sobrevivência* e a *mortalidade* dois conceitos que exprimem situações complementares, a tôda tábua de sobrevivência corresponderá uma determinada tábua de mortalidade; por isso também se pode utilizar, indistintamente qualquer das duas expressões, embora a tábua de sobrevivência se refira especialmente ao número dos que estão vivos, no x^{mo} aniversário e a de mortalidade aos que morrem entre os aniversários de ordem x e x + 1. Para facilitar as comparações, os números de sobreviventes de uma tábua exprimem aquêles que, por divisão proporcional, correspondem a um total de 1.000, 10.000 ou 100.000 (em geral 10^n) nascimentos, de modo que traduzem, também, a menos de um múltiplo de 10, as proporções dos que atingem cada idade exata x. Indicando-se, pois, por l_x o número de sobreviventes no x^{mo} *aniversário*, de um grupo inicial de $l_0 = 10^n$ nascimentos, então $10^{-n}l_x$ traduz a proporção dos que atingem aquêle aniversário.

Ao lado do número de sobreviventes em cada idade exata, e/ou do número de óbitos entre duas idades, a tábua de sobrevivência (ou mortalidade) pode concluir as taxas instantâneas de mortalidade além de outros elementos (ver Capítulo *Estudo das Tábuas de Mortalidade*), tais como as probabilidades anuais de morte ou de sobrevivência, a vida média, etc. A forma externa de uma tábua do 1.º tipo (Quadro IX) não permite distinguí-la da tábua do 2.º tipo.

QUADRO IX

Tábua de Sobrevivência

IDADE ANOS COMPLETOS	N.º DE SOBREVIVENTES l_x	N.º DE ÓBITOS $d_x = l_x - l_{x+1}$	PROBABILIDADE ANUAL DE MORTE $q_x = d_x/l_x$	PROBABILIDADE DE SOBREVIVÊNCIA $p_x = 1 - q_x$
0	100 000	15 400	0,15400	0,84600
1	84 600	3 100	0,03664	0,96336
2	81 500			.
.				
.				.
	.		.	.
x	l_x	d_x	q_x	p_x
x+1	l_{x+1}	d_{x+1}	q_{x+1}	p_{x+1}

O número de nascimentos $l_o = 10^n$, que constitui a "raiz" da tábua, pode ser assimilado a uma população que evolui a partir do instante do nascimento, que é aqui adotado como origem do tempo; assim, o número l_x dos sobreviventes que atingem a idade x não é outro senão o número de habitantes daquela população ao fim *do tempo* x. É óbvio que êsse tempo coincide, no caso, com a idade de cada componente do grupo, uma vez que, se adotou como origem a data do nascimento. Assim, a tábua de sobrevivência pode ser naturalmente assimilada ao modelo expresso pela equação de diferenças (2.3.2-1) ou pela equação diferencial (2.3.1-1) onde $a_t<1$ e $r(t)<0$. A primeira representa a probabilidade de sobrevivência na idade x, uma vez que pela própria equação (2.3.2-1) $a_x — l_{x+1}/l_x$; a segunda é a taxa instantânea de mortalidade, representada por $\mu(x)$, com sinal negativo.

De fato, como o grupo não é alimentado por novas entradas (natalidade nula) se representarmos o tempo por x (idade), resulta:

$$r(x) = 0 - \mu(x) = - \mu(x)$$

onde $\mu(x)$ indica a taxa instantânea de mortalidade na idade x. A equação (2.3.1-1) se exprime, agora, sob a forma:

$$dl_x/l_x = \mu(x) \,.\, dx \qquad (2.3.16\text{-}1)$$

e a solução (2.3.1-2)

passa a ser, para $\phi(x) = \int_0^x \mu(z)\, dz$

$$l_x = l_o e^{-\phi(x)} \qquad (2.3.16\text{-}2)$$

Essa expressão já é bastante conhecida, nas tábuas do 2.º tipo.

Sendo l_x/l_0 igual a $p(x)$, proporção de sobreviventes na idade x que, como se sabe, é a probabilidade de um recém-nascido atingir a idade x, a expressão anterior se escreverá:

$$p(x) = e^{-\phi(x)} \qquad (2.3.16\text{-}3)$$

Anàlogamente a proporção ${}_np_x$ dos indivíduos que tendo atingido a idade x, vivem n anos mais, e atingem a idade $(x + n)$, será:

$${}_np_x = p(x+n)/p(x) = e^{-\int_x^{x+n} \mu(z)\, dz} = e^{-\Delta\phi(x)} \qquad (2.3.16\text{-}4)$$

sendo $\Delta\phi(x) = \phi(x+n) - \phi(x)$

a qual, para $n=1$, se transforma na taxa anual de sobrevivência p_x (probabilidade anual de sobrevivência), de expressão conhecida

$$p_x = e^{-\int_x^{x+1} \mu(z)\, dz} \cong e^{-\mu(x+1/2)}$$

Anàlogamente, a taxa anual de mortalidade (probabilidade anual de morte) será:

$$q_x = 1 - p_x = 1 - e^{-\int_x^{x+1} \mu(z)\, dz} \cong 1 - e^{-\mu(x+1/2)} \qquad (2.3.16\text{-}5)$$

Todos êsses elementos já foram examinados, em têrmos de probabilidade, no estudo das tábuas de mortalidade do 2.º tipo.

2.3.17 — Se em lugar do modêlo (2.3.1-1) fôr adotado o tipo discreto definido pela equação de diferenças (2.3.2-1) resulta que em virtude de ser $a_t = a_x = p_x = 1 - q_x$, a equação do modêlo assumirá a forma:

$$l_{x+1} = p_x l_x = (1 - q_x) \cdot l_x \qquad (2.3.17\text{-}1)$$

e a solução (2.3.2-2) passará a ter a expressão

$$l_x = l_o \prod_{z=0}^{x-1} (1 - q_z) \qquad (2.3.17\text{-}2)$$

ou, com a substituição indicada em (2.3.2-3):

$$l_x = l_0 e^{\sum_{z=0}^{x-1} \lambda_z} \qquad (2.3.17\text{-}3)$$

Nesse caso, tem-se o conjunto de igualdades aproximadas, tendo em vista, ainda, a (2.3.16-6)

$$\lambda_x = lg_e\, (1 - q_x) \cong q_x(1 - q_x/2) \cong - \mu(x + 1/2) \qquad (2.3.17\text{-}4)$$

Das expressões anteriores conclui-se que o conhecimento das taxas anuais de mortalidade, q_x, ou das taxas instantâneas, $\mu(x)$, para tôdas as idades x, permite determinar tôda a tábua de sobrevivência (ou de mortalidade), através de (2.3.17-2) ou (2.3.17-3) no primeiro caso e de (2.3.16-2) no segundo.

2.3.18 — As aplicações que se seguem, nêste parágrafo e nos dois seguintes têm por objetivo principal familiarizar o leitor no uso dos modelos aqui desenvolvidos.

A mortalidade é um fenômeno de eliminação em que a taxa instantânea de variação (decréscimo), denominada, nesse caso, de taxa instantânea de mortalidade, depende geralmente do tempo decorrido (idade) a partir de uma origem prefixada (data do nascimento, etc.). Não deixa de apresentar, todavia, um grande interêsse prático, a consideração de uma lei de mortalidade em que a taxa instantânea é constante. Essa situação ocorre, de forma mais ou menos aproximada, na mortalidade por acidentes, no caso de material que é eliminado pelo uso (lâmpada, por exemplo) mas tem a sua máxima aplicação no fenômeno da *radioatividade,* que pode ser considerado como fenômeno de eliminação (de átomos) em virtude da transformação de núcleos de uma certa substância A (isotópo A) em núcleos de outra substância B (isótopo B), segundo processo que pode ser simbòlicamente representado pela forma

$$A \longrightarrow B$$

A desintegração do átomo é, aqui, assimilada à "morte" do átomo sendo a taxa instantânea ou intensidade de desintegração assimilada à taxa de mortalidade. O fenômeno é, assim, inteiramente análogo a da mortalidade humana se deixarmos de parte o envelhecimento. De fato, o processo de desintegração radioativa ocorre com uma intensidade rigorosamente constante, independentemente da idade da substância e de outras condições ambientais (temperatura, pressão, etc). Ao fim de um certo tempo que representaremos, de agora em diante, pela letra x, parte da substância A estará transformada em B, do ponto de vista da assimilação do fenômeno à mortalidade, os átomos de B podem, de forma expressiva, ser considerados como "cadáveres" dos átomos de A Seja, pois um certo número de átomos (população inicial) na época 0, $n(0)$ dos quais, restarão, ao fim do tempo $x>0$, um número $N(x) < N(O)$, calculável através da expressão.

$$N(x) = N(0)\, e^{\varphi(x)}$$

onde

$$\varphi(x) = -\int_0^x \mu(z)\, dz$$

Tendo em vista que, no presente caso, a taxa instantânea de desintegração, $\mu(x)$, é constante, teremos, representando-a de nôvo por r

$$\varphi(x) = -rx$$

Na equação anterior pode-se, ainda, substituir os números de átomos $N(o)$ e $N(x)$ pelas correspondentes massas, em gramas, $A(o)$ e $A(x)$, do modo que se tem:

$$A(x) = A(0)\, e^{-rx} \qquad (2.3.18\text{-}1)$$

Quanto à massa do corpo B, formada ao fim do tempo x ela resulta da aplicação do modêlo completo (2.3.8-1), com $B(o)=O$, supostas nulas a natalidade e a mortalidade. O corpo B forma-se, exclusivamente, a custa de correntes migratórias exógenas (átomos de A que se transformam em B). A equação do modêlo, sob a forma diferencial será:

$$dB(x) = r \cdot A(x)\, dx$$

Donde, por integração:

$$B(x) = m\left(1 - e^{-rx}\right) \qquad (2.3.18\text{-}2)$$

Note-se que êsse resultado poderia ser obtido simplesmente pela consideração de que sendo m a massa inicial de A, e $m\, e^{-1x}$ a massa remanescente ao fim do tempo x, a diferença

$$m - m\, e^{-rx} = m\left(1 - e^{-1x}\right)$$

será a massa de B que se formou nêsse intervalo.

A equação diferencial que exprime a variação de $B(x)$ deixa claro que essa variação é *autônoma* e não *induzida*, uma vez que depende da massa *exterior*, $A(x)$, e não de $B(x)$.

A constante r representa a intensidade com que os átomos de A se transformam em átomos de B, denominando-se, por êsse motivo, de taxa (instantânea) de desintegração. A vida média dos átomos da substância A será dada pela expressão (2.3.11-1), de modo que, representando-a por $\mathscr{T}$, resulta:

$$\mathscr{T} = \lim_{T \to \infty} \int_0^T e^{-rx}\, dx = \int_0^\infty e^{-rx}\, dx = 1/r$$

Por outro lado, denomina-se *período* do processo de desintegração da substância A, o tempo necessário para que uma certa massa dessa substância fique reduzida à metade: será, portanto, a sua *vida mediana.*

Representando-a por π, o seu valor é, portanto, a raiz real da equação

$$e^{-rx} = 1/2$$

De onde

$$\Pi = \frac{1}{r}\,(lg2/lge) = \mathscr{T} \cdot lg2/lge$$

ou seja, aproximadamente:

$$\pi = 0{,}6931\ \mathcal{T}$$

$$\mathcal{T} = 1{,}4428\ \pi$$

O Quadro seguinte fornece os parâmetros físicos acima definidos, para algumas substâncias. Note-se que figuram apenas uns poucos casos, a título ilustrativo, havendo substâncias radioativas cujos períodos são de horas, de minutos e até de frações de segundos

Parâmetros físicos de algumas substâncias radioativas

SUBSTÂNCIA (isótopo)	TAXA DE DESINTEGRAÇÃO (por ano)	VIDA MÉDIA $\mathcal{T} = 1/r$ (anos)	PERÍODO $\pi = 0{,}6391\ \mathcal{T}$ (anos)
Rádium 226	428×10^{-6}	2 338	1 620
Carbono 14	121×10^{-6}	8 253	5 720
Thório 230	87×10^{-7}	115×10^{3}	80×10^{3}
Urânio 235	98×10^{-10}	102×10^{7}	$70{,}7 \times 10^{7}$
Urânio 238	152×10^{-12}	658×10^{7}	456×10^{7}

FONTES: (Período) — Físico — Química de Farrington Daniels e Robert A Alberty (Trad Bras — 1960) pág 706 *Para o carbono* 14 — pág 733

2 3 19 — No parágrafo anterior, o exemplo de desintegração radioativa conduziu a expressões que seriam válidas para a espécie humana se a taxa instantânea de mortalidade fôsse independente da idade a população original seria a substância *A* e os cadáveres e esqueletos que se acumulariam nos cemitérios, a substância *B*. Poder-se-ia considerar êsse mesmo processo subdividido em três etapas a população original representando a substância *A*, que a uma certa taxa (dependente ou não da idade) se transformaria em cadáveres (substâncias *B*) que, por sua vez, se transformaria, ràpidamente, em esqueletos (substância C, suposta estável), isto é, não sujeita a nova transformação Um exemplo menos macabro, seria o de uma população de indivíduos solteiros (substância *A*) que fôssem "eliminados" por casamento transformando-se em casados (substância *B*) que por sua vez, passariam a categoria de "casados mortos" (substância *C*) Nesse caso haveria a interferência obrigatória de uma outra causa de eliminação agindo sôbre o grupo inicial (substância *A*) em virtude das mortes entre os solteiros, mas, em essência, o esquema geral seria o mesmo Outro exemplo seria, digamos, o de uma população de recém-nascidos (*A*) que passaria a trabalhadores *(B)* em seguida a inativos *(C)* e a mortos *(D)* Nesse caso o esquema seria algo mais complicado, mesmo que as diferentes taxas de eliminação fôssem constantes, mas nada de essencialmente nôvo seria incluído no modêlo.

Para ilustrar, de uma maneira simples, vamos considerar, portanto, o mesmo fenômeno da radioatividade, no caso de uma substância *A* que se transmuta em outra *B*, também radioativa, a qual pelo mesmo processo, se transforma em uma terceira, *C*, suposta estável. O esquema seria então:

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C$$

Supomos que, inicialmente, existe apenas a substância *A*, cuja massa $A(0)$ será igual a m, sendo nulas as outras massas iniciais:

$$B(0) = C(0) = 0$$

No exemplo do parágrafo anterior, a massa da substância inicialmente existente, vai desintegrando gradativamente, de modo que, ao fim do tempo x, haveria as seguintes quantidades:

$A(0)\, e^{-rx}$, da substância *A*

$A(0) - A(0)\, e^{-rx} = A(0)\left[1 - e^{-rx}\right]$, da substância *B*.

No exemplo considerado no presente parágrafo, no entanto, haverá, ao fim do tempo x, as seguintes massas:

$A(x)$, da substância *A*

$B(x)$, da substância *B*

$C(x)$, da substância *C*

as quais deverão satisfazer à equação fundamental de conservação (desprezada a massa que eventualmente se transforma em energia):

$$A(x) + B(x) + C(x) = m \text{ (massa inicial de } A) \qquad (2.3.19\text{-}1)$$

O nosso objetivo é determinar essas massas, mediante aplicação dos modelos demográficos, supondo conhecidas as taxas de desintegração:

$\alpha > 0$ da substância *A*

$\beta > 0$ da substância *B*

$\gamma = 0$ da substância *C*.

Ora, a substância *A*, transformando-se em *B* a uma taxa α, reduzir-se-á, ao fim do tempo *t*, a uma massa $A(x) < m$, dada pela equação:

$$A(x) = m\, e^{-\alpha x} \qquad (2.3.19\text{-}2)$$

À medida que a substância B vai se formando, ficará sujeita a um declínio instantâneo de intensidade $-\beta B(x)$; sendo alimentada, também, por uma corrente migratória de A para B, de intensidade igual a de transformação de A, isto é, $\alpha A(x)$. O modêlo de transformação de B será do tipo (2.2.1-1), de modo que se pode escrever:

$$\frac{dB(x)}{dx} = -\beta B(x) + \alpha A(x) \qquad (2\ 3.19\text{-}3)$$

Note-se que o aparecimento de átomos de B, por transformação de A em B, não pode ser considerada como um fenômeno de *natalidade*, pois, para isso, seria necessário que o número de átomos transformados fôsse dependente da massa de B, o que não ocorre; a transformação de átomos de A em B, depende da massa de A, devendo, portanto, ser considerada como uma corrente migratória autônoma do tipo estudado no modêlo (2 2.2). Substituindo-se o valor de $A(x)$ pela sua expressão, resulta:

$$\frac{dB(x)}{dx} = -\beta B(x) + m\,\alpha\, e^{-\alpha x} \qquad (2\ 3\ 19\ 4)$$

Essa é a equação diferencial do modêlo, cuja solução, supondo $B(O) = O$ será:

$$B(x) = e^{-\beta x} \int_0^x \alpha\, m\, e^{-(\alpha-\beta)z} dz \qquad (2.3.19\text{-}5)$$

De onde se obtém, por integração

$$B(x) = m\,\alpha\,(e^{-\beta x} - e^{-\alpha x})/(\alpha - \beta) \qquad (2\ 3.19\text{-}6)$$

Para $\beta = O$ recai-se na (2.3.18-2).

Quanto ao produto final, estável, C, êle não está sujeito a mortalidade ($\gamma = o$), nem à natalidade (pelas mesmas razões expostas em relação a B). Será, então, uma população que evolui exclusivamente em virtude de uma corrente migratória (átomos de B que se transformam em átomos de C). A equação diferencial do modêlo fica reduzida portanto ao têrmo migratório, de modo que se tem.

$$dC(x) = \beta\, B(x)\, dx \qquad (2\ 3.19\text{-}7)$$

substituindo $B(x)$ pela sua expressão (2.3.19-6), integrando e fazendo uma adequada arrumação dos têrmos:

$$C(x) = m + k_1 e^{-\beta x} - k_2 e^{-\alpha x} = m(1 - e^{-\alpha x}) + k_1(e^{-\beta x} - e^{-\alpha x}) \qquad (2.3.19\text{-}8)$$

onde

$$k_1 = m\alpha/(\beta - \alpha); \quad k_2 = m\beta/(\beta - \alpha) = k_1 + m$$

Da equação anterior tira-se:

$$\lim_{x \to \infty} c(x) = m$$

o que é evidente e exprime o fato óbvio segundo o qual, ao fim de um tempo infinito, tôda a massa de A estará transformada em C, "via B".

Como se verifica, a massa do corpo A tende assintòticamente a zero e a do corpo C tende assintòticamente a m, massa inicial de A. Quanto à massa B ela cresce a princípio, a partir de 0 até o valor máximo.

$$B_{max} = m(\alpha / \beta)^{\beta / (\beta - \alpha)} \qquad (2.3.19\text{-}9)$$

e em seguida decresce novamente, tendendo assintòticamente a zero quanto $t \to \infty$. Como resultados finais tem-se portanto:

$$\lim_{x \to \infty} A(x) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} B(x) = 0; \quad \lim_{x \to \infty} C(x) = m$$

EXERCÍCIO

1 — Traçar as curvas de evolução de A, B e C; determinar as coordenadas do ponto em que a massa de B é máxima. *Sugestão*: partir da equação: $-\beta B(x) + \alpha A(x) = 0$. Supor $\alpha = 0{,}001$ e $\beta = 0{,}005$ para a construção da curva.

2 — Discutir a solução para diferentes valores de α e β. Supor, por exemplo, $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$ e $\alpha > \beta$ e anotar os resultados.

2.3.20 — Um modêlo do mesmo tipo genérico analisado no parágrafo anterior, porém mais apto a ser aplicado a problemas realmente demográficos ou econômicos, pode ser expresso através de um esquema algo mais complexo (Fig. 3). Naquele admitiu-se que a substância A só poderia ser transformada em C de uma única maneira: "via B". Supõe-se, agora, que pode haver uma transformação direta de A em C, além disso, acrescenta-se a pequena complicação que consiste em admitir que a massa do corpo A sofre uma contribuição do exterior, de intensidade instantânea (constante) ν, de modo que poderá aumentar com o tempo, em lugar de declinar contìnuamente. Representamos por α_1 a taxa de transformação de A em B, por α_2 a

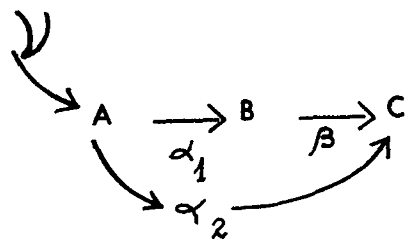


Fig. 3

de transformação direta de A em C e por β a do B em C, conforme esquema, representado simbòlicamente na Fig. 3; êle pode ser ilustrado com o seguinte exemplo concreto: os componentes de uma população A, constituida inicialmente de pessoas econômicamente ativas, passam gradativamente à inatividade, segundo a taxa α_1, e em seguida, morrem (transformando-se em C) segundo a taxa β. Além disso, os componentes de A podem passar diretamente a C, segundo a taxa α_2, a constante ν representa a taxa de *novos entrados* no grupo A. Êsse problema é, essencialmente, o de um seguro social geral em que a taxa ν representa a taxa de entrada em atividade, $A(x)$ a massa de ativos e $B(x)$ a de inativos; α_1 e α_2 são, respectivamente, as taxas instantâneas de invalidez e de mortalidade do grupo A, enquanto β é a taxa instantânea de mortalidade de inativos. A função $C(x)$ representa a massa de óbitos ocorridos até a época t Pondo

$$r = \nu - \alpha_1 - \alpha_2$$

as equações do modêlo são as seguintes.

$$\frac{dA(x)}{dx} = r\,A(x) \qquad , \quad A(0) = m > 0$$

$$\frac{dB(x)}{dx} = -\beta B(x) + \alpha_1 A(x), \quad B(0) \geqq 0$$

$$\frac{dC(x)}{dx} = \beta B(x) + \alpha_2 A(x), \quad C(0) = 0$$

A 1.ª equação é de integração imediata.

$$A(t) = me^{rt} \text{ onde } m = (o)$$

Substituindo essa expressão na 2.ª equação resulta

$$\frac{dB(x)}{dx} = -\beta B(x) + \alpha_1 m e^{rx} \qquad (2\ 3.20\text{-}1)$$

que é a equação do modêlo completo com

$$M(x) = \alpha_1 m e^{rx} = \alpha_1 A(x)$$

Integrando a (2.3 20-1) e arrumando os têrmos semelhantes obtém-se

$$B(t) = \frac{k}{m} A(t) - [k - B(o)]\, e^{-\beta t} \qquad (2\ 3\ 20\text{-}2)$$

onde

$$k = \frac{m\,\alpha_1}{r + \beta}$$

Há duas expressões limites de interêsse prático:

$$\lim_{r \to o} B(t) \quad \text{e} \quad \lim_{t \to \infty} B(t)$$

O segundo é de utilidade para $t > t_o$, valor finito suficientemente grande. Quando $r \to o$ tem-se $A(t) \to m$, de modo que

$$\lim_{r \to o} B(t) = k - [k - B(o)] \, e^{-\beta t} \qquad (2.3.20\text{-}3)$$

Por outro lado, a (2.3.20-2), para $t > t_o$

$$B(t) \cong \frac{k}{m} A(t) \qquad (2.3.20\text{-}4)$$

Qualquer das duas fornece

$$\lim_{\substack{r \to o \\ t > t_o}} B(t) = k = m \alpha_1 / \beta$$

As expressões de $B(t)$ e $A(t)$ substituidas na última equação diferencial, fornecem:

$$\frac{dC(x)}{dx} = \left(\alpha_2 + \frac{\beta k}{m}\right) A(x) - \beta \, [k - B(o)] \, e^{-\beta x}$$

Substituindo $A(x)$ pela sua expressão e integrando, vem.

$$C(t) = C(o) + (m \alpha_2 + \beta k) \, \frac{e^{rt} - 1}{r} - [k - B(o)] \, (1 - e^{-\beta t}) \qquad (2.3.20\text{-}5)$$

Cabe, igualmente, determinar

$$\lim_{r \to o} C(t) \quad e \quad C(t)_{t > t_o}$$

$$C(t)_{t > t_o} = C(o) + m \alpha_2 + \beta k) \, \frac{e^{rt} - 1}{r} - [k - B(o)] \qquad (2.3.20\text{-}6)$$

$$\lim_{r \to o} C(t) = C(o) + (m \alpha_2 + \beta k) \, t - [k - B(o)] \, (1 - e^{-\beta t}) \qquad (2.3.20\text{-}7)$$

uma vez que $\qquad \lim_{r \to o} \dfrac{e^{rt} - 1}{r} = t$

Para $t > t_o$, resulta, de (2.3.20-7):

$$\lim_{\substack{r \to o \\ t > t_o}} C(t) = C(o) + (m \alpha_2 + \beta k) \, t - [k - B(o)]$$

Ora, quando $r \to o$, $\beta k \to m \alpha_1$, de modo que·

$$\lim_{r \to o} C(t) = C(o) + m \, (\alpha_2 + \alpha_1) \, t - [k - B(o)] \, (1 - e^{-\beta t})$$

donde, para $t > t_o$:

$$\lim_{\substack{r \to o \\ t > t_o}} C(t) = C(o) + m(\alpha_1 + \alpha_2)\, t - [k - B(o)]$$

Exercício: Determinar o número de óbitos, $D(t)$, durante o ano

$$t \vdash t + 1$$

Ora,

$$D(t) = \Delta\, C(t)$$

de modo que, de (2.3.20-5) obtém-se:

$$C(t+1) - C(t) = (m\alpha_2 + \beta k)\, e^{rt} \frac{e^r - 1}{r} - [k - B(o)]\, e^{-\beta t} (1 - e^{-\beta})$$

isto é,

$$D(t) = \left(\alpha_2 + \frac{\beta k}{m}\right) A(t) \frac{e^r - 1}{r} - [k - B(o)]\, e^{-\beta t}(1 - e^{-\beta}) \qquad (2.3.20\text{-}8)$$

Assim, quando $t \to \infty$

$$D(t) = \left(\alpha_2 + \frac{\beta k}{m}\right) A(t) \frac{e^r - 1}{r} \qquad (2.3.20\text{-}9)$$

Por outro lado

$$\lim_{r \to o} D(t) = (\alpha_2 + \alpha_1)\, m - [k - B(o)]\, e^{-\beta t}(1 - e^{-\beta})$$

e, para $t > t_o$:

$$\lim_{\substack{r \to o \\ t > t_o}} D(t) = (\alpha_2 + \alpha_1)\, m$$

MODELOS GLOBAIS PARA POPULAÇÕES SUBDIVIDIDAS EM GRUPOS MODELOS INTER-REGIONAIS — MATRIZES DE PROJEÇÃO

2.3.21 — Foi feita, anteriormente, uma análise, em têrmos do modêlo ali proposto, do caso de uma população subdividida em vários grupos. Tratou-se especìficamente do caso de duas regiões, G e $\overline{G}$, referidas a uma região $R (= G + \overline{G})$, considerada como fechada aos movimentos migratórios com o exterior, isto é, sem correntes migratórias (ou com correntes de saldo nulo) de R para $\overline{R}$. No caso concreto ali estudado, G era o Estado da Guanabara e $\overline{G}$, o resto do Brasil, A região R era obviamente o Brasil, região considerada fechada (e que não é *totalmente* mas apenas *aproximadamente* verdadeiro) em relação às migrações internacionais.

É possível, no entanto, enfeixar as análises dêsse tipo em um esquema conciso e mais elegante, com o auxílio de um modêlo matricial Embora, na sua forma, êsse tipo de modêlo já se assemelha aos modelos estruturais, êles devem ser considerados, ainda, como modelos globais. Tais modelos são de grande utilidade para se proceder a análise global de uma população subdividida em diferentes regiões geográficas, grupos ocupacionais, etc No presente capítulo, o assunto será exemplificado dentro do contexto do crescimento demográfico regional; em capítulo posterior essa análise regional será tratada mediante o emprêgo de um modêlo estrutural.

As notações adotadas a seguir obedecerão aos seguintes princípios gerais destinados a facilitar a redação. as letras maiúsculas indicarão matrizes cujos elementos são as minúsculas correspondentes: assim, em geral, se fará, a menos que se indique explìcitamente o contrário, $A = (a_{ij})$; $B = (b_{ij})$, etc Em alguns casos serão utilizados tipos maiúsculos para indicar grandezas escalares como o número de óbitos, de nascimentos, etc ; nêsse caso, o tipo empregado será o da escrita manual (μ, β, etc) a fim de que a maiúscula tipográfica indique sempre uma matriz, dispensando-se, dessa forma, o emprêgo freqüente de tipos especiais

MODELOS DE CRESCIMENTO REGIONAL

2.3.22 — Suponha-se uma região R, fechada em relação aos movimentos migratórios exteriores (ou, pelo menos, com saldos migratórios pràticamente desprezíveis) durante todo o tempo considerado A região R poderia ser qualquer país, desde o final da primeira guerra mundial (excluidos aquêles que, como Israel, por exemplo, foram constituidos com base na transferência em massa de populações de outras regiões) para os quais cessaram, pràticamente, as trocas de populações.

Suponha-se o "país" R subdividido em m regiões ($m = 3$, Fig. 4). Para cada região haverá, durante o intervalo $t \vdash t + 1$, um certo número de nascimentos (β), de óbitos (μ), de entrados (ε), de saídos ($\mathcal{S}$) Assim, para a região k, a população ${}_k n_t$, no início do período $t \vdash t + 1$, estará relacionada com a população ${}_k n_{t+1}$, do início do período seguinte, pela relação contábil óbvia

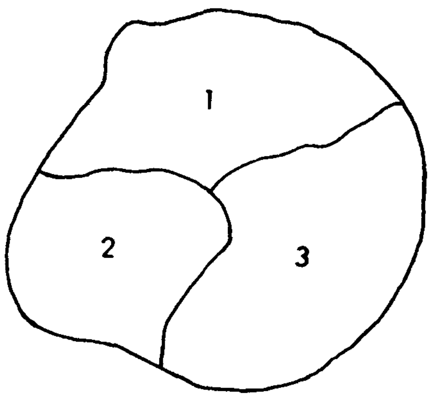


Fig. 4

$${}_k n_{t+1} = {}_k n_t + {}_k\beta_t - {}_k\mu_t + {}_k\mathcal{E}_t - {}_k\mathcal{S}_t$$

Suponha-se, para começar, que tôdas as parcelas relativas ao período $t \vdash t+1$, sejam proporcionais às populações existentes no início do período, com um coeficiente de proporcionalidade dependente de t, isto é, exprimam correntes induzidas

$$_k n_{t+1} = \left[1 + {_k b_t} - {_k q_t} + {_k e_t} - {_k s_t}\right] \cdot {_k n_t} \qquad (2.3.21\text{-}1)$$

onde, para o período $t \vdash t+1$ e para a região k, se tem:

$_k b_t = {_k \beta_t} / {_k n_t}$ é a taxa bruta de natalidade;

$_k q_t = {_k \mu_t} / {_k n_t}$ é a taxa bruta de mortalidade;

$_k e_t = {_k \mathcal{E}_t} / {_k n_t}$ é a taxa bruta de entrada (imigração);

$_k s_t = {_k \mathcal{S}_t} / {_k n_t}$ é a taxa bruta de saída (emigração).

Pondo-se:

$$_k a_t = 1 + {_k b_t} + {_k e_t} - {_k q_t} - {_k s_t} \qquad (2.3.22\text{-}2)$$

Resulta:

$$_k n_{t+1} = {_k a_t} \cdot {_k n_t}, \qquad k = 1, 2, \quad , m, \qquad t = 1,\ 2 \qquad (2.3.22\text{-}3)$$

onde o fator $_k a_t$ é o fator de projeção, ou fator multiplicativo da região k, durante o período $t \vdash t+1$. Assim, para cada região isoladamente é válido o modêlo global de crescimento induzido, de modo que haverá m equações do tipo indicado, as quais podem ser substituidas então por uma equação matricial única:

$$N_{t+1} = N_t \cdot A_t \qquad (2.3.22\text{-}4)$$

cuja solução será:

$$N_t = N_o \prod_{i=o}^{t-1} A_i \qquad (2.3.22\text{-}5)$$

inteiramente análoga à (2.3.2-1), mas cujos têrmos são matrizes, em lugar de grandezas escalares. A natureza dessas matrizes será examinada no parágrafo seguinte.

2.3.23 — Na equação (2.3.22-4) N_t é uma matriz $(1 \times m)$, isto é, de 1 linha e m colunas, ou seja, um *vetor linha* de m componentes, indicando a k^{ma} componente da população da região k isto é,

$$N_t = \left[{_1 n_t},\ {_2 n_t},\ \ldots\ ,\ {_m n_t}\right] \qquad (2.3.23\text{-}1)$$

Assim, N_o será o vetor representativo das populações das diferentes regiões no instante inicial. Os vetores N_o e N_t serão denominados de *composição da população,* no instante 0 (composição inicial) e no instante t, respectivamente. A matriz A_t é uma *matriz diagonal,* $m \times m$, onde os elementos diagonais (não nulos) são os fatores multiplicativos das diferentes regiões, no intervalo $t \vdash t + 1$:

$$A_t = \begin{bmatrix} {}_1a_t & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & {}_2a_t & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & {}_3a_t & & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & {}_ma_t \end{bmatrix} \qquad (2.3.23\text{-}2)$$

Essa matriz denomina-se de matriz de projeção, em virtude do fato de que, o produto do vetor N_t, composição da população no instante t, pela matriz A_t, reproduz o vetor N_{t+1}, composição da população no instante $t + 1$, imediatamente seguinte. Sendo diagonais tôdas as matrizes A_i que comparecem na solução (2.3.22-5), resulta imediatamente·

$$\prod_{i=o}^{t-1} A_i = \begin{bmatrix} \prod_{i=o}^{t-1} {}_1a_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \prod_{i=o}^{t-1} {}_2a_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \prod_{i=o}^{t-1} {}_3a_i & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & 0 & \prod_{i=o}^{t-1} {}_ma_i \end{bmatrix} \qquad (2.3.23\text{-}3)$$

Quando os fatores de projeção não dependem do tempo, a solução (2.3.22-5) se transforma em

$$N_t = N_o \cdot A^t \qquad (2.3.23\text{-}4)$$

onde a variável t passa de mero índice a expoente numérico, de modo que em virtude de ser diagonal a matriz A.

$$\prod_{i=o}^{t-1} A_i = A^t = \begin{bmatrix} {}_1a^t & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & {}_2a^t & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & {}_3a^t & & 0 \\ & . & . & . & \\ 0 & 0 & 0 & & {}_ma^t \end{bmatrix} \qquad (2.3.23\text{-}5)$$

onde ${}_ka$, é o fator (constante), de projeção da região k, é o k^{mo} elemento da matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} {}_1a & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & {}_2a & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & {}_3a & . & 0 \\ . & . & . & . & \\ 0 & 0 & 0 & & {}_ma \end{bmatrix} \qquad (2\ 3\ 23\text{-}6)$$

O mesmo esquema pode ser aplicado, òbviamente, quando se tratar de outros tipos análogos de subdivisão de uma população em grupos componentes (ocupacional, rural-urbano, grupos sociais, etc.)

2.3.24 — A matriz diagonal A_t tem como elementos não nulos (diagonais) os fatores de projeção dos diferentes grupos, os quais podem ser postos sob forma:

$$_ka_t = (1 - {_kq_t} - {_ks_t}) + ({_kb_t} + {_ke_t}) = {_kp_t} + {_kh_t} \qquad (2.3.24\text{-}1)$$

onde

$$_kp_t = (1 - {_kq_t} - {_ks_t})$$

representa a *probabilidade de permanência* na região k, e

$$_kh_t = {_kb_t} + {_ke_t}$$

é a *taxa de renovação* da mesma região, no intervalo $t \vdash t + 1$, em função dos nascimentos e dos entrados, provenientes de outras regiões (inclusive os que, anteriormente, emigraram da região k e que a ela retornam). Assim, pode-se decompor a matriz A_t da seguinte forma:

$$A_t = P_t + H_t \qquad (2.3.24\text{-}2)$$

onde P_t e H_t são matrizes diagonais constituidas pelas probabilidades de permanência e pelas taxas de renovação, respectivamente, das várias regiões consideradas. Quando as regiões são fechadas, as probabilidades de permanência se reduzem às probabilidades de sobrevivência, $1- {_kq_t}$ se, além disso, a mortalidade e a natalidade não forem diferentes, de uma região para outra, resulta:

$$P_t = p_t I$$

$$H_t = b_t I$$

onde $p_t = 1 - q_t$ sendo q_t a taxa de mortalidade na época t, b_t é a taxa de natalidade na época t e I é a matriz unidade.

2.3.25 — Na equação (2.3.21-4) considerou-se N_t um vetor de linha *m* componentes e A_t, uma matriz mXm. Mas é possível transpor aquela equação de modo que se obtém:

$$N'_{t+1} = A_t \cdot N'_t \qquad (2.3.25\text{-}1)$$

equação que se pode utilizar como ponto de partida, dispensando os sinais" ' " indicadores da transposição de matrizes, isto é, escrevendo-se simplesmente:

$$N_{t+1} = A_t \cdot N_t \qquad (2.3.25\text{-}2)$$

onde N_t e N_{t+1} são *vetores colunas,* isto é, matrizes mX1 e A_t uma matriz mXm, transposta da matriz de mesma denominação na equação (2.3.22-4); é indiferente o emprêgo dessa equação, ou de sua transposta. No presente trabalho adotaremos a forma inicial (2.3.22-4) embora a maioria dos autores dêm preferência à equação transposta.

Os motivos da nossa preferência resultam do fato de que o vetor N_o funciona como coeficiente a_t (fator de crescimento) na equação do modêlo global (2.3.2-1) que normalmente figura antes da variável (a função N_t). No caso do modêlo (2.3.2-1) é òbviamente indiferente a posição de a_t o que não ocorre com A_t na equação (2.3.22-4). Trata-se, no entanto, *de mera preferência.*

2.3.26 — Outro aspecto a considerar é o que se refere à forma da equação (2.3.22-4) com relação aos movimentos autônomo e induzido; na forma proposta, admitiu-se implìcitamente que todo o movimento é induzido. Pode-se, no entanto, adotar uma equação mais completa:

$$N_{t+1} = N_t \cdot A_t + R_t \qquad (2.3.26\text{-}1)$$

na qual R_t é um vetor da mesma natureza que N_t (linha ou coluna), representando a parte autônoma do movimento demográfico, traduzindo o produto $N_t.A_t$ a parcela induzida. A solução de (2.3.26-1) é, formalmente do mesmo tipo da de (2.2 1-2), com a diferença que, aqui, os elementos da solução são matrizes em vez de grandezas escalares (Ver Apêndice I, fórmula (A1-7)

$$N_t = \left[N_o + \sum_{z=o}^{t-1} \left(R_z / \prod_{i=o}^{z} A_i\right)\right] \prod_{i=o}^{t-1} A_i \qquad (2.3.26\text{-}2)$$

Tanto nessa solução como na do modêlo simples anterior, o produto de matrizes πA_i continua a ser uma *matriz diagonal,* de modo que na diagonal do resultado pode ser substituido o produto Π_{a_i} por

$$e^{\sum_{i=o}^{t-1} \lambda_i} = e^{\psi_t} \qquad (2.3.26\text{-}3)$$

e, no cálculo numérico, se for o caso, o somatório por uma integral e a função Ψ_t por sua correspondente na forma contínua $\varphi(t)$

2.3.27 — A título de ilustração será considerado a seguir um exemplo numérico para um caso de três regiões (m = 3) Para isso considere-se, no Brasil, as três seguintes regiões:

1 — Regiões Norte e Centro-Oeste
2 — Região Nordeste
3 — Regiões Leste e Sul

Adotando o ano de 1960 como origem ($t = 0$) resulta em milhares de habitantes:

$$N_o = [5\,489{,}4; \quad 15\,524{,}6; \quad 49\,105{,}1]$$

Os elementos diagonais da matriz A_t serão determinados desde que se conheçam as taxas de mortalidade, natalidade, imigração e emigração; todavia, o conhecimento do vetor N_t em duas épocas t e $t + h$ permitirá estabelecer um valor *médio* A, para o intervalo considerado. Assim, sendo conhecidas as populações das regiões 1, 2 e 3 (ou seja o vetor N_{10}) em 1970, é possível determinar o valor médio $A_{(10)}$ para o período 1960/1970. De acôrdo com o Censo de 1970, obtém-se:

$$N_{10} = [8\,616{,}0; \quad 19\,687{,}7; \quad 64\,423{,}7]$$

Donde o seguinte *Quadro*:

REGIÃO i	${}_in_{10} / {}_in_o$	$\sqrt[10]{{}_in_{10} / {}_in_o}$	$\sqrt[2]{{}_in_{10} / {}_in_o}$
1	1,56957	1,04611	1,25282
2	1,26816	1,02404	1,12613
3	1,31196	1,02752	1,14541

De onde se obtém as matrizes médias seguintes, para períodos decenais, $A_{(10)}$, qüinqüenais $A_{(5)}$ e anuais A:

$$A = \begin{bmatrix} 1{,}04611 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}02404 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}02752 \end{bmatrix} \qquad A_{(5)} = A^5 = \begin{bmatrix} 1{,}25282 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}12613 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}14541 \end{bmatrix}$$

$$A_{(10)} = A^{10} = \begin{bmatrix} 1{,}56956 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}26817 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}31196 \end{bmatrix}$$

O cálculo feito por meio dessas matrizes conduzem exatamente ao mesmo resultado que se obteria aplicando separadamente, a cada região, o modêlo global, com crescimento natural e migratório apenas induzido. As componentes autônomas poderiam ser introduzidas se fosse utilizado o modêlo (2.3.26-1). Assim, no caso do emprêgo da matriz A^5, resultaria:

$$\begin{array}{llll}
1960 & N_o & = [\ 5\,489{,}4, \quad 15\,524{,}6; \quad 49\,105{,}1] & \\
1965 & N_5 & = [\ 6\,877{,}2; \quad 17\,482{,}7; \quad 56\,245{,}5] & = N_o A^5 \\
1970 & N_{10} & = [\ 8\,615{,}9; \quad 19\,687{,}8; \quad 64\,424{,}2] & = N_5\, A^5 = N_o A^{10} \\
1975 & N_{15} & = [10\,794{,}2; \quad 22\,171{,}0, \quad 73\,792{,}1] & = N_{10} A^5 = N_o A^{15} \\
1980 & N_{20} & = [13\,523{,}2; \quad 24\,967{,}4; \quad 84\,522{,}2] & = N_{15} A^5 = N_o A^{20}
\end{array}$$

Para 1970 há uma diferença na decimal, decorrente de aproximação. A matriz A foi suposta constante (independente de t); seria no entanto possível aplicar a cada intervalo qüinqüenal (ou mesmo anual) uma matriz diferente. Para 1965, ter-se-ia, por exemplo: .... $N_5 = N_0 A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$, e assim por diante. Seria necessário, para determinar essas matrizes, que se fizesse uma estimativa do andamento das taxas de mortalidade (q), de natalidade (b) e do saldo migratório (e-s). Todavia, repetimos mais uma vez, o modêlo aqui utilizado constitui apenas, uma formulação matricial, para várias regiões, do modêlo global estudado anteriormente, do qual só difere em seu aspecto formal. De acôrdo com a previsão acima a população total do Brasil, a 1.º de julho de 1980 deverá ser de 123.012.800 habitantes, ou seja aproximadamente 123,0 milhões. O emprêgo das matrizes será ampliado nos modelos estruturais, que serão estudados mais adiante.

3 — APÊNDICE — 1

1 — Soluções das equações 1 e 2 do § 2.2.1 do texto.

Essas soluções são encontradas em qualquer bom compêndio de análise matemática. Apresentamos aqui um método de solução algo diferente, a título de exercício.

Em primeiro lugar consideremos a equação mais simples:

$$\frac{dN}{dt} = r(t) \cdot N(t) \qquad \textbf{(A1 — 1)}$$

cuja solução imediata resulta de se colocar essa equação sob a forma

$$\frac{dN(t)}{N(t)} = r(t)\ dt \qquad \textbf{(A1 — 2)}$$

$$lg_e\ N(t) = \int r(z)\ dz + c$$

Para uma integração entre limites 0 e t, resulta, fazendo $c = lg_e N(0)$:

$$lg_e\ [N(t)/N(0)] = \phi(t)$$

sendo

$$\phi(t) = \int_0^t r(z)\ dz$$

logo:

$$N(t) = N(0)\ e^{\phi(t)} \qquad \textbf{(A1 — 3)}$$

Se em lugar dessa equação considerarmos a equação algo mais complicada:

$$\frac{dN(t)}{dt} = r(t)\,N(t) + M(t) \tag{A1-4}$$

admitiremos que a sua solução possa ser posta sob uma forma análoga à de (A) sendo porém o coeficiente N(O) substituído por uma função de t, K(t), isto é,

$$N(t) = K(t) \cdot e^{\phi(t)} \tag{A1-5}$$

Determina-se então K(t) de modo a que a expressão (A1-5) seja solução de (A1-4)

Para isso deriva-se a equação (A1-5):

$$\frac{d\,N(t)}{dt} = \frac{d\,K(t)}{dt}\,e^{\phi(t)} + \phi'(t) \cdot K(t)\,e^{\phi(t)}$$

Substituindo em (A1-4) tendo em vista que $\phi'(t) = r(t)$, resulta:

$$\frac{d\,K(t)}{dt}\,e^{\phi(t)} + r(t)\,K(t)\,e^{\phi(t)} = r(t) \cdot N(t) + M(t)$$

Mas $N(t) = K(t)\,e^{\phi(t)}$ de modo que, simplificando,

$$\frac{d\,K(t)}{dt}\,e^{\phi(t)} = M(t)$$

De onde

$$\frac{d\,K(t)}{dt} = M(t)\,e^{-\phi(t)}$$

$$K(t) = K(0) + \int_0^t M(x)\,e^{-\phi(x)}\,dx$$

Portanto a solução A se reduz a:

$$N(t) = \left[K(0) + \int_0^t M(x)\,e^{-\phi(x)}\,dx\right] e^{\phi(t)} \tag{A1—6}$$

Falta apenas demonstrar que $K(0) = N(0)$. Ora isso é uma conclusão imediata, uma vez que para $M(x) = 0$, a equação (6) se reduz a

$$N(t) = K(0)\,e^{\phi(t)}$$

a qual deve coincidir com a (3) de modo que

$$K(0) = N(0)$$

2 — O mesmo tipo de artifício pode ser aplicado para se achar a solução da equação (2.2.1-2) ou à (2.3.8-1).

Supõe-se para isso que a solução é do tipo (2.3.2-2) do texto com o coeficiente N_0 substituído por K_t, isto é:

$$N_t = K_t \cdot \prod_{i=0}^{t-1} a_i \qquad \textbf{(A1—7)}$$

Substituindo essa solução na equação de diferenças (2.3.2-1) do texto, resulta:

$$K_{t+1} \cdot \prod_{i=0}^{t} a_i = K_t a_t \cdot \prod_{i=0}^{t-1} a_i + M_t$$

De onde:

$$(K_{t+1} - K_t) \prod_{i=0}^{t} a_i = M_t$$

ou:

$$K_{t+1} - K_t = M_t \Big/ \prod_{i=0}^{t} a_i$$

Pondo t = 0,1,2 .. t-1 resulta somando as t equações resultantes e simplificando:

$$K_t - K_0 = \prod_{x=0}^{t-1} M_x \Big/ \prod_{i=0}^{x} a_i$$

De modo que resulta por fim

$$N(t) = \left[K_0 + \prod_{x=0}^{t-1} M_x \Big/ \prod_{i=0}^{x} a_i \right] \prod_{i=0}^{t-1} a_i \qquad \textbf{(A1—8)}$$

O mesmo tipo de argumento anterior prova que $K_0 = N_0$; além disso, fazendo a substituição

$$\lambda_i = lg_e a_i \qquad\qquad a_i = e^{\lambda_i}$$

resulta

$$N_t = \left[N_0 + \sum_{x=0}^{t-1} M_x e^{-\sum_{i=0}^{x} \lambda_i} \right] e^{\sum_{i=0}^{t-1} \lambda_i} \qquad \textbf{(A1—9)}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS N.º 1

E.1 — A população do mundo cresceu de 1960 a 1967 segundo indicam os números do Quadro seguinte (Anuário Demográfico da ONU, 1967, pág. 97):

ANO	POPULAÇÃO (milhões) (*)
1960	3 005
1967	3 420

(*) Dados referentes ao meio de cada ano

Pede-se determinar

a) O fator de crescimento a_t, supôsto constante durante o intervalo considerado e a correspondente taxa anual de crescimento;

b) O valor de λ_t;

c) A taxa instantânea de crescimento r(t);

d) A taxa central de crescimento, $\bar{r}(t)$

Solução:

a) Sendo a_t constante, resulta, tomando-se a origem em 1960:

$$N^7 = N_0 \, a^7$$

De onde:

$$a = \sqrt[7]{N_7 / N_0} = \sqrt[7]{1{,}13810}$$

$$lg \; a = 1/7 \; lg. \; 1{,}13810 = 0{,}0561804/7 = 0{,}00802577$$

$$a = 1{,}018652$$

$$i = a - 1 = 0{,}018652 = 1{,}87\%$$

b) De acôrdo com a suposição feita

$$\lambda_t = \lambda = lg_e a = 0{,}018480 = 1{,}85\%$$

c) Sendo r(t) constante:

$$r = \lambda = 0{,}018480$$

d) Para r(t) constante resulta igualmente

$$\bar{r}(t) = r$$

A aplicação de uma das fórmulas aproximadas indicadas no texto seria desnecessária no presente caso uma vez que o conhecimento da taxa anual de crescimento

$$i = a - 1$$

permite calcular λ, r e $\bar{r}$, todos êles iguais ao logarítimo neperiano do fator de crescimento. Todavia, a título de curiosidade e como elemento de comparação, pode-se aplicar qualquer uma dessas fórmulas, para o caso de h = 7. Tem-se então:

$$N(t + 7\theta)_{arit.} = 3\,212{,}5$$

$$N(t + 7\theta)_{geom} = 3\,205{,}8$$

Sendo $\lambda N(t) = 415$, obtem-se:

Segundo o "critério a": $\bar{r} = 415/7 \times 3\,212{,}5 = 0{,}018455$

Segundo o "critério b": $\bar{r} = 415/\ 7 \times 3\,205{,}8 = 0{,}018493$

O valor exato

$$\bar{r} = 0{,}018480$$

está entre os dois, mais próximos do 2.º, mais ou menos aos 2/3 do caminho a contar do primeiro.

E.2 — Mostrar que

$$\lambda_t = \Delta\phi(t)$$

Solução

$$N(t) = N(0)\ e^{\phi(t)}$$

$$N(t + 1) = N(0)\ e^{\phi(t+1)}$$

Donde, por divisão:

$$\frac{N(t + 1)}{N(t)} = a_t = e^{\Delta\phi(t)}$$

Tomando os logarítmos neperianos resulta

$$\boxed{\Delta\phi(t) = lg_e\, a_t = \lambda_t} \qquad c.\ q.\ d$$

E.3 — Demonstrar que, quando a intensidade de variação independe de t, ela é igual à taxa central de variação, e que ambas são iguais a λ.

Solução:

Tem-se que demonstrar que, quando $r(t) = r$ (constante), será também:

$$\bar{r} = r$$

De fato, considere-se definição de r(t) quando essa grandeza é constante, resulta:

$$N(t+z) = N(t)\, e^{rz}$$

de modo que

$$\int_0^h N(t+z)\, dz = N(t) \cdot (e^{rh} - 1)/r$$

Por outro lado:

$$\Delta N(t)_h = N(t+h) - N(t) = N(t) \cdot (e^{rh} - 1)$$

Logo:

$$\bar{r} = \frac{N(t) \cdot (e^{rh} - 1)}{N(t) \cdot (e^{rh} - 1)/r} = r \qquad c.q.d.$$

Para demonstrar que r = λ basta escrever a igualdade evidente

$$N(t) \cdot a^h = N(t)\, e^{rh}$$

que resulta de exprimirmos N (t + h) pelas duas expressões indicadas no texto:

$$a = e^r$$

$$r = lg_e a = \lambda$$

E.4 — Determinar o êrro que se comete quando se calcula a taxa central de variação pela fórmula aproximada, associada ao "critério b" (média geométrica). De acôrdo com êsse critério, tem-se, representando a taxa assim obtida por $\bar{r}_g$:

$$\bar{r}_g = \Delta N(t)/h \sqrt{N(t) \cdot N(t+h)}$$

$$= N(t)\ (a^h - 1)/h\ N(t)\ a^{h/2} =$$

$$= N(t)\ (e^{rh} - 1)/h\ N(t)\ e^{rh/2}$$

onde a é o fator de crescimento por unidade de tempo, suposto constante Simplificando:

$$\bar{r}_g = (a^h - 1)/h\ a^{h/2} = (e^{rh} - 1)/h\ e^{rh/2}$$

Ora, o valor exato de $\bar{r}$, de acôrdo com a definição dada seria

$$\bar{r} = (e^{rh} - 1) \Big/ \frac{e^{rh} - 1}{r} = r$$

uma vez que $\Delta N(t)_h = N(t)\ (e^{rh} - 1)$ e $\int_0^h N(t+z)\ dz = N(t)\ (e^{rh} - 1)/r$

logo a relação entre $\bar{r}_g$ e $\bar{r}$ será:

$$\frac{\bar{r}_g}{\bar{r}} = \frac{e^{rh} - 1}{rh \cdot e^{rh/2}}$$

Assim, a diferença $\bar{r}_g - \bar{r}$ será:

$$\bar{r}_g - \bar{r} = \frac{e^{rh} - 1 - rhe^{rh/2}}{h \cdot e^{rh/2}}$$

E.5 — Determinar expressões aproximadas de r(t) passando por 3 e por 5 pontos das parábolas do 2.º e 4.º graus respectivamente. Aplicar ao caso de uma população sujeita a um fator de crescimento constante a = 1,02.

1.º caso — Passar uma parábola do 2.º grau por 3 pontos. Suponhamos que os pontos são eqüidistantes e que um intermediário se adota para origem. As populações serão então N(—), N(0), N(1), correspondentes às abscissas t = — 1, 0, 1. A parábola do 2.º grau será:

$$N(t) = at^2 + bt + c$$

Para t = — 1, 0, 1, resulta:

$$\begin{aligned} N(-1) &= a - b + c \\ N(0) &= c \\ N(1) &= a + b + c \end{aligned}$$

De onde se tira

$a = 1/2\ [N(1) - 2N(0) + N(-1)]$ (desnecessário para o problema)

$$b = 1/2\,[N(1) - N(-1)]$$

$$c = N(0)$$

A taxa instantânea de crescimento, no ponto t = 0 será:

$$r(0) = \frac{1}{N(t)} \left| \frac{dN(t)}{dt} \right|_{t=0} =$$

$$= \frac{1}{N(0)} \left| \frac{dN}{dt} \right|_{t=0}$$

Ora, $\dfrac{dN(t)}{dt} = 2\ \text{at} + b;\ \dfrac{dN(t)}{dt} = b = \dfrac{N(1) - N(-1)}{2}$

Tendo em vista que N(0) = c resulta finalmente:

$$r = \frac{N(1) - N(-1)}{N(0)}$$

Aplicação para o caso em que a = 1,02. É claro que o resultado independe do volume da população. Supondo que no instante t-1, a população é de 100 milhões de habitantes, tem-se:

$$N(-1) = 100,00$$
$$N(0) = 102,00$$
$$N(1) = 104,04$$

De onde

$$r = \frac{104,04 - 100}{2 \times 102} = \frac{4,04}{204} = 0,01980039$$

resulta pràticamente correto ($r = 0,0198027$).

2.º caso — Passar uma parábola do 4.º grau por 5 pontos.

Suporemos, igualmente, todos os pontos separados por intervalos iguais, sendo o do meio adotado como origem. Assim, são conhecidos os valores $N(-2)$, $N(-1)$, $N(0)$, $N(1)$, $N(2)$, sendo a parábola da forma

$$N(t) = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e$$

De onde o sistema de 4 equações a 4 incógnitas

$$N(-2) = 16a - 8b + 4c - 2d + e$$
$$N(-1) = a - b + c - d + e$$
$$N(0) = e$$
$$N(1) = a + b + c + d + e$$
$$N(2) = 16a + 8b + 4c + 2d + e$$

A derivada no ponto t = 0 é, evidentemente

$$\left| \frac{dN(t)}{dt} \right|_{t=0} = d$$

Por outro lado, N(0) = *e*. Assim:

$$r = d/e$$

Deixa-se ao leitor o encargo de achar a expressão de r:

$$r = \frac{8\,[N(1) - N(-1)] - [N(2) - N(-2)]}{12\,N(0)}$$

Aplicada ao caso de uma população com o fator de crescimento a = 1,02 obtem-se

$$r = 0{,}0198026$$

resultado pràticamente exato: r = 0,01980269

E.6 — Demonstrar que a taxa instantânea de variação é o limite para o qual tende a taxa central correspondente ao intervalo h, quando êste tende para zero, isto é:

$$r(t) = \lim_{h \to 0} \bar{r}(t)_h$$

De fato, por definição:

$$\bar{r}(t)_h = \Delta\, N(t)_h \Big/ \int_0^h N(t+z)\, dz =$$

$$= [N(t+h) - N(t)] \Big/ \int_0^h N(t+z)\, dz$$

Ora,

$$\int_0^h N(t+z)\, dz = h.\, N(t + \theta\, h) \qquad 0 \leq \theta \leq 1$$

logo,

$$\bar{r}(t)_h = \frac{1}{N(t+\theta h)} \; \frac{N(t+h) + N(t)}{h}$$

Fazendo h → 0, vem

$$\lim_{h \to 0} \bar{r}(t)_h = \frac{1}{N(t)} \; \frac{dN(t)}{dt} = r(t) \qquad \text{c.q.d.}$$

OBSERVAÇÃO: O fator de variação a_t resulta da equação

$$a_t = N_{t+1} / N_t$$

da qual se obtem a taxa de variação

$$i_t = \Delta N_t / N_t = a_t - 1$$

Pode-se generalizar essa expressão para um período h, fazendo

$$i_t^{(h)} = \Delta N_t^{(h)} / h N_t$$

onde $\Delta N_t^{(h)} = N_{t+h} - N_t$. Nessas condições resulta igualmente, supondo que $t + h$ é uma variável contínua e N_t derivável,

$$\lim_{h \to o} i_t^{(h)} = \frac{1}{N_t} \frac{dN_t}{dt} = r(t)$$

Denomina-se i_t; a taxa média de variação (anual) para o período h, na época t. Igualmente,

$$a_t^{(h)} = 1 + i_t^{(h)}$$

é o fator de variação média, na época t, para o período h.

E.7 — Representar pelo modêlo (2.3.1-2) do texto, a evolução da população mundial, de 1930 a 1967, utilizando os dados do Anuário Estatístico da ONU, 1967, pág. 97. Comparar os resultados das duas seguintes hipóteses:

a) taxa instantânea de variação constante: $r(t) = r$

b) taxa instantânea de variação expressa por uma função linear de t: $r(t) = at + b$.

QUADRO DE CÁLCULO I

ANO (1)	t_i (2)	$N^*(t)$ (milhões) (3)	$y_i^* = lg_e N^*(t_i)$ (4)	$t_i y_i^*$ (5)	$t_i^2 y_i^*$ (6)	RESULTADO caso a	RESULTADO caso b
1930 .	0	2 070	7,63530	—	—	2 011	2 080
1940 . .	1	2 295	7,73849	7,73849	7,73849	2 308	2 262
1950	2	2 517	7,83082	15,66164	31,32328	2 649	2 555
1960	3	3 005	8,00803	24,02409	72,07227	3 040	2 995
1963	3,3	3 175	8,06306	26,60810	87,80673	3 168	3 165
1966. .	3,6	3 355	8,11821	29,22556	105,21202	3 302	3 339
1967	3,7	3 420	8,13740	30,10838	111,40101	3 348	3 424
	16,6	—	55,53131	133,36626	415,55380	—	—

COL (2) — Tempo: origem: 1930; unidade: decênio.

COL (3) — Os valores "observados" de N(t) são representados por N*(t) A expressão "observados" não é inteiramente adequada uma vez que, de acôrdo com as notas que acompanham os dados fornecidos pela ONU êles resultam, em muitos casos da soma de parcelas algumas das quais não provêm de operações de contagem (recenseamentos, ou amostras) mas de cálculos indiretos de precisão duvidosa De qualquer forma os resultados fornecidos pela ONU constituem as melhores estimativas que se dispõe das populações mundiais

COL (6) -- $t_1 \times$ col (5).

Caso a — A população calculada pode ser posta sob a forma

$$N(t) = e^{at+b} = e^{\overline{\Phi}(t)}$$

$$lg_e\, N(t) = at + b \qquad lg_e N(t) = y$$

$$y = at + b$$

O método dos mínimos quadrados (outros métodos seriam possíveis para determinação de a e b) permite escrever

$$\sum_{i=0}^{6} (y_i^* - at_i - b)^2 = min.$$

De onde as conhecidas equações normais:

$$\sum y_i^* = a \sum t_i + nb$$

$$\sum t_i\, y_i^* = a \sum t_i^2 + b \sum t_i \qquad (I)$$

Além dos resultados anteriores obtem-se

$$\sum t_i^2 = 51{,}54$$

$$\sum t_i^3 = 169{,}246$$

$$\sum t_i^4 = 571{,}9698$$

As equações (I) serão, numèricamente:

$$55{,}53130 = 16{,}600\ a + 7c$$

$$133{,}36626 = 51{,}5400\ a + 16{,}600\ c$$

De onde

$$a = 0{,}1378091$$

$$b = 7{,}606241 \qquad antilog_e\, b = 2010{,}60$$

O parâmetro a é a taxa constante de crescimento r; todavia, dado o fato de se ter adotado por unidade de tempo o decênio,

$$r = a/10 = 0{,}01378091$$

De onde a equação final

$$N(t) = 2010{,}60\ e^{0{,}01378091\ t} \qquad \text{(a)}$$

Os resultados acham-se no Quadro de cálculo I (cont.)

A taxa anual de crescimento equivalente a r = 0,01378091 será

$$i = antilog_e\, r = 0{,}0138763$$

QUADRO DE CÁLCULO I (cont.)

t_i	rt	$\lg e^{rt}$	e^{rt}
0	—	—	1,00000
1	0,1378091	0,0598497	1,14776
2	0,2756182	0,1195995	1,31734
3	0,4134273	0,1795492	1,51199
3,3	0,4547700	0,1975041	1,57581
3,6	0,4961128	0,2154591	1,64232
3,7	0,5098937	0,2214440	1,66512

Caso b — No caso b pode-se colocar a taxa instantânea de variação sob a forma

$$r(t) = 2at + b$$

de modo que por integração resulta:

$$\overline{\phi}(t) = y = at^2 + bt + c$$

Adotando-se o mesmo critério dos mínimos quadrados chega-se ao sistema:

$$\begin{aligned} \sum y_i^* &= a \sum t_i^2 + b \sum t_i + nc \\ \sum t_i\, y_i &= a \sum t_i^3 + b \sum t_i^2 + c \sum t_i \\ \sum t_i^2\, y_i &= a \sum t_i^4 + b \sum t_i^3 + c \sum t_i^2 \end{aligned} \qquad \text{(II}$$

O Quadro de cálculo II fornece os valores de $t_i^2 \cdot y_i^*$ necessário para a solução do sistema II, que sob forma numérica será então:

$$\begin{aligned} 55{,}53131 &= 51{,}5400 \text{ a} + 16{,}600 \text{ b} + 7{,}00 \text{ c} \\ 133{,}36626 &= 169{,}2460 \text{ a} + 51{,}540 \text{ b} + 16{,}60 \text{ c} \\ 415{,}55380 &= 571{,}9698 \text{ a} + 169{,}246 \text{ b} + 51{,}54 \text{ c} \end{aligned}$$

A solução dêsse sistema fornece

$$\begin{aligned} \text{a} &= 0{,}0187942 \\ \text{b} &= 0{,}065218 \\ \text{c} &= 7{,}6400074;\ \text{N}(0) = \text{antilog}_e \text{ c} = 2\,079{,}76 \end{aligned}$$

Tendo em vista que a unidade de tempo foi o decênio, os parâmetro para o ano como unidade, serão:

$$\begin{aligned} \text{a}/10^2 &= 0{,}000187942 \\ \text{b}/10 &= 0{,}0065218 \\ \text{c} &= 7{,}640074 \end{aligned}$$

De onde

$$\overline{\phi}(t) = 0{,}000187942\ t^2 + 0{,}0065218\ t + 7{,}6400074$$

e:

$$N(t) = 2\ 079{,}76\ e^{0{,}000187942\ t^2 + 0{,}0065218\, t}$$

A taxa de crescimento (instantânea) será:

$$r(t) = \overline{\phi}'(t) = 0{,}000375884\ t + 0{,}0065218$$

A taxa anual correspondente resulta da expressão

$$\lambda_t = \int_t^{t+1} r(z)\, dz$$

que no caso se reduz, por ser r(t) uma função linear, à fórmula exata

$$\lambda_t = r\,(t + 1/2)$$

com êsse resultado pode-se então calcular i_t a partir de

$$\lambda_t = lg_e\,(1 + i_t) = r\left(t + \frac{1}{2}\right)$$

isto é:

$$lg_e\,(1 + i_t) = 0{,}000375884\; t + 0{,}0067097$$

O Quadro de cálculo n.º II fornece os cálculos finais e a comparação entre i_t e r_t, acha-se no Quadro IV.

QUADRO II

t	at	at + b = ϕ_1 (t)	ϕ(t) = t ϕ_1 (t)	ϕ (t) lge	e $^{\phi(t)}$
0,0	—	—	—	—	1,00000
1,0	0,00187943	0,00840123	0,0840123	0,0364861	1,08764
2,0	0,00375885	0,01028065	0,2056130	0,0892966	1,22828
3,0	0,00563828	0,01216008	0,3648023	0,1584316	1,44023
3,3	0,00620211	0,01272391	0,4198889	0,1823554	1,52179
3,6;	0,00676593	0,01328773	0,4733584	0,2055770	1,60538
3,7	0,00695388	0,01347568	0,4986000	0,2165392	1,64641

Os valores de N(t) acham-se na última coluna do Quadro de cálculo I. As diferenças entre os valôres calculados e "observados" pode ser apreciada em função das diferenças $\delta = N(t) - N^*(t)$ constantes do resumo abaixo:

QUADRO III

ANO	1930	1940	1950	1960	1963	1966	1967
δ — caso a	— 59	13	132	35	7	— 53	— 72
δ — caso b	10	— 33	38	— 10	— 10	— 16	4

Não só os êrros são, *em geral*, menores (em valor absoluto) no caso b, como as distribuições dos sinais + e — é algo mais aleatório. De fato, no 1.º, os valores teóricos são inferiores aos reais em 1930, superiores em 1940, 1950 e 1960 e a seguir novamente inferiores, em 1963 1966 e 1967, indicando que a curva representativa da evolução real apresenta uma menor curvatura do que a curva teórica. No caso *b*, êsse efeito é corrigido, ou pelo menos atenuado.

O cálculo de σ^2

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \Sigma \, [N(t) - N^*(t)]^2}$$

fornece, para os casos *a* e *b* respectivamente.

$$\sigma_a = 65{,}84$$

$$\sigma_b = 21{,}06$$

Ainda que considerássemos os números de graus de liberdade,

$$n - 2 = 5 \text{ no caso } a$$

$$n - 3 = 4 \text{ no caso } b$$

resultaria

$$\hat{\sigma}_a = 77{,}90$$

$$\hat{\sigma}_b = 27{,}86$$

Assim, a hipótese de uma taxa crescente, partindo do nível inicial de 6,52‰ e aumentando de 0,376‰ anualmente descreve muito melhor a evolução da população mundial no período considerado do que a hipótese de uma taxa constante de 13,78‰.

O Quadro seguinte fornece as taxas instantâneas e anuais referidas ao meio de cada ano.

QUADRO IV

Comparação entre $r(t)$ e i_t

ANO	TAXAS DE CRESCIMENTO ‰	
	Instantânea	Anual
1930	6,52	6,71
1940	10,28	10,47
1950	14,04	14,23
1960	17,80	17,99
1963	18,93	19,11
1966	20,05	20,44
1967	20,43	20,62

E.8 — Aplicar o mesmo modêlo do problema anterior na hipótese b), ajustando diretamente a função $r(t) = at + b$.

O problema anterior foi resolvido pelo ajustamento da função $\Phi(t)$; vamos proceder agora a um outro ajustamento, utilizando diretamente a função $r(t)$. Para isso determinam-se as taxas $r(t + h/2)$ correspondentes aos 6 períodos $t \vdash t + h$, centradas nos pontos $t + h/2$ e aplica-se o sistema de equações normais (não ponderadas):

$$\sum_{i=o}^{n} r(t_i) = a \sum_{i=o}^{n} t + nb \qquad n = 6$$

$$\sum_{i=o}^{n} t_i r(t_i) = a \sum_{i=o}^{n} t_i^2 + b \sum_{i=o}^{n} t_i$$

Os valores numéricos constam do Quadro seguinte:

QUADRO V

t_i	t_i^2	$r(t)$	$t_i r(t_i)$
0	0	0,010323	—
1	1	0,009237	0,00923700
2	4	0,017744	0,03548800
2,65	7,0225	0,018346	0,04861690
2,95	8,7025	0,018383	0,05422985
3,15	9,9225	0,019189	0,06044535
11,75	30,6475	0,093220	0,20801710

O sistema de equações anterior será então:

$$0{,}0932220 = 11{,}75\ a + 6\ b$$

$$0{,}2080171 = 30{,}6475\ a + 11{,}75\ b$$

De onde, dividindo por 10 o valor de a $(h = 10)$

$$a = 0{,}00900912$$

$$b = 0{,}000333338$$

de modo que

$$r(t) = 0{,}000333338\ t + 0{,}00900912$$

Ora, essa equação tem como origem dos tempos 1.º de janeiro de 1935/ (1.º de julho de 1930 + h/2). Logo, fazendo a mudança de coordenadas para que a origem seja 1.º de julho de 1930, resulta.

$$r(t) = 0{,}000333338\ t + 0{,}0075091$$

Comparando-se com os valores de $\phi'(t)$, do problema anterior, os resultados constam do Quadro seguinte:

QUADRO VI

Valôres de r(t): ‰

ANO	1.º AJ. ATRAVÉS DE ϕ (t)	2.º AJ. DIRETO
1930	6,52	7,51
1940 ..	10,28	10,84
1950	14,04	14,18
1960	17,80	17,51
1963	18,93	18,51
1966 .	20,05	19,51
1967	20,43	19,84

Como se verifica, a inclinação da reta (aceleração da taxa de crescimento) é algo superior no 1.º ajustamento; mas, no conjunto, os valores são muito próximos em ambos os casos.

Na expressão:

$$N(t) = N(o)\, e^{1/2\, at^2 + bt} = e^{1/2\, at^2 + bt + c}$$

fica ainda indeterminado o parâmetro N(0) $= e^c$. Sob a forma logarítima vem para cada t_i:

$$y_i = lg\ N(t) = 1/2\ at_i^2 + bt_i + c$$

Obrigando a que a média dos y_i calculados coincida com a dos y^*_i (observados) vem.

$$c = lg_e\ N(0) = \frac{\sum y_i - 1/2\ a \sum t_i^2 + b \sum t_i}{n}$$

Substituindo n por 7, *a* e *b* por seus valores resulta, tendo-se em conta a unidade de tempo utilizada:

$$lg_e N(0) = \frac{55{,}53131 - 0{,}856845 - 1{,}246511}{7} = 7{,}6325648$$

De onde

$$lg_{10}\ N(0) = 3{,}3147808$$

$$N(0) = 2\,064{,}34$$

O Quadro seguinte fornece os cálculos e resultados finais (unidade de tempo: ano)

QUADRO VII

ANO	$\frac{1}{2}at+b=\phi_1(t)$	$\phi(t) = t\,\phi_1(t)$	lg[N(t)/N(O)]	N(t)/N(O)	N(t)
1930	0,00750910	—	—	1,00000	2 064
1940	0,0917579	0,0917579	0,0398499	1,09608	2 263
1950	0,1084248	0,2168496	0,0941766	1,24216	2 564
1960	0,1250917	0,3752751	0,1629799	1,45539	3 004
1963	0,1300918	0,4293029	0,1844439	1,52913	3 157
1966	0,1350918	0,4863305	0,2112107	1,62634	3 357
1967	0,1367585	0,5060064	0,2197558	1,65865	3 424

De modo geral êsse ajustamento é tão bom como o anterior (baseado no ajustamento da função ϕ) e apresenta, até, melhores valores no conjunto, exceto o 2.º (1940): o desvio padrão a ser comparado com o anterior (21,06) é:

$$\sigma_c = 22{,}72$$

algo superior, exclusivamente devido ao maior ajustamento obtido para 1940.

A população em milhões de habitantes prevista para 1970 de acôrdo com a hipótese *b* seria de 3.647 pelo 1.º ajustamento e 3.603 pelo 2.º.

BIBLIOGRAFIA

(1) — Lyra Madeira, João — Curso de Demografia da Escola Nacional de Ciências Estatísticas. Apostilhas do curso dos vários anos escolares, principalmente as do ano de 1969.

(2) — Lyra Madeira, João e Augusto Costa, Manoel — "Pesquisas demográficas". Documento apresentado a 1.ª Conferência Nacional de Estatística (Maio/Junho de 1968).

(3) — IBE — LABORATÓRIO DE ESTATÍSTICA — "As projeções de "Populações". Documento apresentado a 1.ª Conferência Nacional de Estatística. Maio/junho, 1968.

(4) — Lyra Madeira, João — "Reformulação do Crescimento Demográfico da Guanabara no período 1940-1960, em face dos recenseamentos gerais" — Publicação n.º 5 da série Estudos e Análises, do Centro Brasileiro de Estudos Demográficos, IBE, Fundação IBGE, 1969.

(5) — Secretaria de Economia e Planejamento do Estado de São Paulo — DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA — Divisão de Estatística Demográficas — "Previsão Populacional em ... 1.º-VII-1968 e para o período 1.º-I-1969 a 1 º-I-1980".

(6) — Lyra Madeira, João — "Mensário Estatístico Atuarial do IAPI".

MODELOS DE ANÁLISE DO CRESCIMENTO DEMOGRÁFICO
(continuação)

PROF. JOÃO LYRA MADEIRA
Diretor do Centro Brasileiro de Estudos Demográficos e Professor da Escola Nacional de Ciências Estatísticas

SUMÁRIO

R bras Estat, Rio de Janeiro, 40 (157/58) : 95-172, jan /jun. 1979

3 — MODELOS ESTOCÁSTICOS E DETERMINÍSTICOS

3.1 — Conceitos básicos. Processo Estocástico. Média do processo.

3.1.1 — Antes de prosseguir no estudo dos modelos demográficos mais sofisticados, vamos nos deter um pouco na conceituação dos modelos estocásticos e determinísticos. Um capítulo especial será dedicado às aplicações à Demografia de modelos estocásticos de vários tipos; aqui apenas nos preocupamos com certas idéias gerais necessárias para a perfeita compreensão das bases teóricas dos modelos de projeção demográfica, quanto ao caráter estocástico ou determinístico dos mesmos. Começaremos por definir o que se entende por processo estocástico e suas possíveis aplicações ao problema das projeções demográficas. A Bibliografia no final do estudo permitirá ao leitor completar a análise resumida que vem a seguir, proporcionando-lhe os livros básicos onde poderá aprofundar o conhecimento do assunto.

3.1.2 — Se, no estudo da evolução de uma população, a nossa atenção se concentra no número de habitantes N(t), correspondente a cada época t, o enfoque do problema é de caráter determinístico, seja ou não conhecida a função matemática N(t). Mas, se o nosso objetivo é determinar a lei de probabilidade da população em cada instante t, o enfoque é probabilístico, ou estocástico. Assim, em lugar da função N(t), o que se deseja é determinar a probabilidade de que um dado valor de N ocorra na época t, o que pode ser conseguido através da determinação da função de distribuição (para cada t):

$$F_t\,(N) = \text{Pr. (n}^{\circ}\text{ de habitantes} \leq N)_t$$

Logo, um *processo estocástico* pode ser considerado como uma generalização do conceito de variável aleatória, no sentido de que constitui uma *família* de variáveis aleatórias. Para se dar uma definição clara desse novo conceito, já definitivamente instalado entre as ferramentas mais úteis do moderno estatístico, vamos partir da definição de variável aleatória, a fim de que, dentro da mesma linha, possamos conceituar o processo estocástico. Uma variável aleatória, X, fica definida para uma certa categoria E de *experimentos aleatórios,* quando se define o espaço-amostra S, constituído de elementos ξ, no qual se processará, através de um experimento de E, a escolha de um elemento de S. O espaço S constitui o domínio da variável, a qual fica então definida quando, a cada ξ, faz-se corresponder a função $X(\xi)$, associada a uma probabilidade $P(X) \geqslant 0$, tal que $\Sigma_S P(X) = 1$. A função $X(\xi)$ é, então, uma variável aleatória, tal como se conhece nas aplicações estatísticas correntes. Assim, ξ poderá ser o número gravado em cada face de um dado vulgar, de seis faces; o experimento E, o lançamento do dado e S, o conjunto dos números inteiros de 1 a 6. A variável $X(\xi)$ ficará definida, por exemplo, mediante a correspondência simples,

$$X(\xi) = \xi$$

Em determinadas condições do experimento, pode ser $P(\xi) = 1/6$; diz-se então, que o dado é "correto".

Em outro exemplo, em que o experimento E consiste no lançamento de 2 dados, ou no lançamento de *um* dado *duas* vêzes, consecutivas ou simultâneas, o elemento ξ poderá ser o par (ξ_1, ξ_2) dos pontos gravados em cada face do 1.º e do 2.º dados, respectivamente. O espaço S será então, o conjunto dos 36 pares.

$$(1,1);\ (1,2),\qquad ;\ (6,6)$$

A variável $X(\xi)$ poderá ser, por exemplo, a correspondência resultante de qualquer das seguintes situações (além de outras):

a) a cada par (ξ_1, ξ_2), $X(\xi)$ faz corresponder a soma $\xi_1 + \xi_2$, a qual variará, no caso considerado, de 2 a 12;

b) $X(\xi) = 0$ se a soma anterior for "par" e $X(\xi) = 1$, se for "ímpar".

Em determinadas condições do experimento tem-se:

I — para o caso a):

$$P(X=2) = P(X=12) = 1/36;\quad P(X=3) = P(X=11) = 2/36$$

$$P(X=4) = P(X=10) = 3/36;\quad P(X=5) = P(X=\ 9) = 4/36$$

$$P(X=6) = P(X=\ 8) = 5/36;\quad P(X=7) = 6/36$$

II — para o caso *b*):

$$P(X=0) = P(X=1) = 1/2$$

É claro que a diferentes elementos ξ, de S, poderá corresponder o *mesmo elemento* $X(\xi)$ do contra-domínio, mas, a cada elemento ξ, não deverá corresponder mais de um elemento $X(\xi)$, de modo que a variável aleatória é unívoca, no sentido $\xi \rightarrow X(\xi)$.

3 1 3 — Suponhamos uma cidade de N habitantes e um experimento consistindo em examinar cada habitante, em um determinado dia a fim de constatar se ele foi ou não atacado de desidratação durante aquele dia Cada habitante será um elemento ξ, de modo que haverá N elementos $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ Para cada elemento ξ_i, será definida uma variável $X_i = X(\xi_i)$ de modo que:

$X_i = 0$ se o elemento ξ_i não tiver sido acometido de desidratação naquele dia;

$X_i = 1$, se o elemento ξ_i, tiver sido acometido de desidratação.

A variável

$$X = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

representa o número de casos de desidratação no dia considerado, e

$$f = X/N$$

é a freqüência diária do fenômeno naquela população. Se se repetisse o mesmo experimento, todos os dias, durante um ano, por exemplo (bastaria dispor dos totais de atendimentos em hospitais e clínicas, de casos de desidratação), teríamos 365 valores de X (ou de f), que permitiriam constituir uma imagem observada da distribuição dessa variável.

Admita-se, agora, que a freqüência de desidratação é maior nos dias de canícula, isto é, por outras palavras, de que a distribuição do número de casos de desidratação *depende da temperatura ambiente,* seria possível, então, definir, para cada temperatura $t \in T$, uma variável aleatória

$$X(\xi, t)$$

Na realidade estar-se-ia definindo, com isso, não apenas *uma* variável aleatória, mas *uma* verdadeira *família* de variáveis aleatórias, cada valor de t dando lugar a um determinado membro da família, o qual seria, então, uma variável aleatória comum. A família de variáveis aleatórias

$$[X(\xi, t); t \in T] = [X(\xi, t); t]$$

assim determinada, constitui um *processo estocástico.*

Observe-se bem que t não é um elemento aleatório, tal como ξ, pois se o fosse, não se teria um processo estocástico, mas apenas uma variável aleatória bidimensional; para cada valor t_i de t, $X(\xi, t_i)$ será uma variável aleatória, cuja função de distribuição dependerá do valor t_i considerado:

$$F(x, t_i) = Pr[X(\xi, t_i)] \leq x$$

Eventualmente o estudo de um processo estocástico, pode ser realizado, com bons resultados práticos, simplesmente mediante a determinação (através dos seus momentos, por exemplo) da distribuição conjunta das variáveis.

$$X(\xi,\ t_1),\ X(\xi,\ t_2)\ \ .\ \ X(\xi,\ t_n)$$

correspondentes a n valores do parâmetro t:

$$F(x_1,\ x_2,\ .\ \ ,\ x_n)\ =\ Pr\left[X(\xi,\ t_1)\ \leq\ x_1;\ X(\xi,\ t_2)\ \leq\ x_2;\ .\ .\ X(\xi,\ t_n)\ \leq\ x_n\right]$$

3.1.4 — O processo definido no parágrafo anterior é um processo unidimensional, porque comporta apenas um elemento aleatório ξ, correspondente a um único espaço amostra S. Se fossem dois elementos aleatórios, isto é,

ξ, elemento do espaço S

η, elemento do espaço R

poderia ser definido um processo estocástico bidimensional, no espaço $S \times R$

$$\{X(\xi,\ \eta,\ t);\ \ t \in T\}$$

Em geral, sendo ξ_1, ξ_2, ..., ξ_k, elementos aleatórios nos espaços S_1, S_2 ..., S_k, ter-se-á um processo estocástico no espaço $S_1 \times S_2 \times \ldots S_k$ definido por

$$\{X(\xi_1,\ \xi_2,\ ..\ ,\ \xi_k;\ t);\ t \in T\}$$

quando o processo é unidimensional, não é, em geral, necessário especificar o elemento aleatório, de modo que a representação pode ser simplificada, eliminando ξ da notação; obtém-se, nesse caso, as notações mais simples.

$$\{X(t);\ t \in T\}\ \text{ ou, simplesmente, } X(t)$$

que substituirão as notações anteriores, sempre que não possam dar lugar a dúvidas.

Quando, como ocorre freqüentemente, o parâmetro t do processo representa um tempo (que pode ser medido em horas, dias, meses, anos, gerações, etc.), o conjunto de *n* observações

$$X^*(t_1),\ X^*(t_2),\ \ \ \ ,\ X^*(t_n)$$

constitui uma série cronológica, podendo ser $X^*(t)$ um escalar ou um vetor, esses resultados são os valores observados das variáveis aleatórias $X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)$.

3.1.5 — Utilizando-se o critério de Bharucha-Reid[1], Joshi[2] e outros, serão classificados os processos estocásticos em quatro grupos fundamentais:

I — Processo DD (discreto-discreto) quando a variável X(t) e o parâmetro t são ambos discretos. Assim, por exemplo, X(t) poderá representar o número de descendentes da t^{ma} geração em determinada população;

II — Processo DC (discreto-contínuo) quando X(t) é uma variável discreta e o parâmetro t é contínuo (no sentido estatístico). Tal é o caso de X(t) representar o número de filhos de uma mulher, depois de decorrido o tempo t, a contar da data do casamento, ou a população de um país, na época t;

III — Processo CD (contínuo-discreto) quando X(t) é uma variável contínua e o parâmetro t é discreto. Tal seria o processo que descrevesse a variação do intervalo X(t) entre os nascimentos dos filhos de ordem t e t+1, ou a idade da mulher, ao nascer o t^{mo} filho;

IV — Processo CC (contínuo-contínuo) quando X(t) e t são, ambos, variáveis contínuas. Tal seria, por exemplo, o processo que descrevesse a distribuição das idades das mulheres, ao se casarem, através do tempo.

Note-se que, freqüentemente, uma variável contínua pode ser transformada em variável discreta, pela consideração de intervalos adotados como etapas discretas do processo.

3.1.6 — Um modelo estocástico pode ser definido por um processo estocástico; há, todavia, a possibilidade de definir o modelo sem especificar, aparentemente, o processo estocástico utilizado, através de uma equação de diferenças (ou diferencial) comportando um têrmo aleatório, cujas características serão prefixadas através da sua lei de probabilidade ou de função característica (ou, de forma aproximada, quando assim for julgado suficiente, pelo conhecimento de alguns dos momentos da lei de probabilidade).

Assim, uma forma simples e natural de se abordar o problema do crescimento demográfico, através de um modelo global, de caráter estocástico, consiste em se acrescentar às equações dos modelos determinísticos estudados no capítulo anterior, um ou mais têrmos aleatórios. Isso pode ser feito de mais de uma maneira; uma delas, a mais simples de todas, é a da se adicionar um têrmo aleatório, $N_o \epsilon_t$, à equação do modelo global, obtendo-se, dessa maneira

$$N_{t+1} = a_t N_t + N_0 \epsilon_t \qquad (3.1.6\text{-}1)$$

Suponha-se, agora, que os ϵ_t são variáveis aleatórias independentes de N_t (eventualmente normais) com variância constantes σ^2 e média 0 (zero) para cada t. Nesse caso, considerando-se a valor médio (esperança matemática) de cada membro da equação (3.1.6-1) e representando E(X) por $\tilde{X}$, pode-se escrever

$$\tilde{N}_{t+1} = a_t \tilde{N}_t \qquad (3.1.6\text{-}2)$$

uma vez que, de acordo com as hipóteses formuladas, $E(\epsilon_t) = 0$. A equação do modelo determinístico continua portanto válida, aplicável porém, à média da função N_t. Por outro lado, a equação (3.1.6-1) é uma equação de diferenças do tipo (2.2.1-2) onde $N_o \epsilon_t$ representa o papel da função M_t de modo que a solução dessa equação, separadas as duas parcelas que a compõem, será

$$N_t = \tilde{N}_0 e^{\psi t} + N_0 e^{\psi t} \sum_{x=0}^{t-1} \epsilon_x e^{-\psi x+1} \qquad (3.1.6\text{-}3)$$

Assim, a solução apresenta um têrmo aleatório que pode ser indicado por η_t, cuja expressão é:

$$\eta_t = \tilde{N}_0 e^{\psi t} \sum_{x=0}^{t-1} \epsilon_x e^{-\psi x+1} \qquad (3.1.6\text{-}4)$$

Indicando por $\sigma^2(\eta_t)$ a variância de η_t, obtém-se imediatamente:

$$\sigma^2(\eta_t) = \tilde{N}_0^2 e^{2\psi t} \sigma^2 \sum_{x=0}^{t-1} e^{-2\psi x+1}$$

Ora, $\tilde{N}_0 e^{\psi t} = \tilde{N}_t$, de modo que o quadrado do coeficiente de variabilidade, $\sigma^2(\eta_t)/\tilde{N}_t^2$ será dado pela expressão:

$$C_v^2(t) = \sigma^2 \cdot \sum_{x=0}^{t-1} e^{-2\psi x+1} \qquad (3.1.6\text{-}6)$$

Resultados inteiramente análogos seriam obtidos com o auxílio do modelo contínuo, através de equação análoga onde apenas haveria a substituição dos somatórios, nas duas últimas fórmulas pelas integrais correspondente, da taxa λ_t por r(t) e da função Ψ_t por $\phi(t)$.

Casos particulares.

3.1.7 — Um caso particular interessante a destacar é o da taxa de crescimento constante Nesse caso, tem-se $\lambda_t = \lambda$ de modo que $\Psi_t = \lambda_t$ (t inteiro). As equações (3.1.6-5) e (3.1 6-6) apresentarão, dentro do somatório, uma progressão geométrica de razão $e^{-2\lambda}$ e de primeiro têrmo igual a 1, de modo que

$$\sigma^2(\eta_t) = \tilde{N}_t \sigma^2 \frac{1 - e^{-2\lambda t}}{1 - e^{-2\lambda}} \tilde{N}_0 \sigma^2 - \frac{e^{2\lambda t} - 1}{1 - e^{-2\lambda}}$$

$$C_v(t) = \sigma^2 \frac{1 - 2^{-2\lambda t}}{1 - e^{-2\lambda}}$$

Para t $\rightarrow \infty$, resulta:

$$\lim_{t \to \infty} \sigma^2 (\eta_t) = \infty$$

$$\lim_{t \to \infty} C_v^2(t) = \sigma^2 / (1 - e^{-2\lambda})$$

Outra situação que merece destaque é aquela em que a taxa r(t) é negativa. Isso ocorre, em particular, no caso de uma tábua de sobrevivência, onde, indicando o tempo por x (idade) resulta, como vimos:

$$r(x) = - \mu(x)$$

sendo μ(x) a taxa instantânea de mortalidade. Adotando, nesse caso, o modelo contínuo e utilizando a relação

$$e^{-\varphi(x)} = l_x / l_0 = p(x)$$

onde p(x) representa a probabilidade de um recém-nascido atingir a idade *x;* de acordo com a tábua, resulta

$$\sigma^2 (\eta_x) = l_0^2 \; p^2(x) \; \sigma^2 \int_0^x e^{-2\phi(z)} \, dz = l_0^2 \; p^2 \; (x) \; \sigma^2 \int_0^x p^2(z) \, dz =$$

$$= l_0^2 \; p^2 \; (x) \; \sigma^2 \; \bar{e}^{(2)}_{\overline{o,x|}}$$

$$\text{com } \phi(z) = \int_0^z \mu(y) \, dy$$

onde $\bar{e}^{(2)}_{\overline{o,x|}}$ representa a vida média na idade zero, temporária de x, correspondente à tábua de sobrevivência p^2(x). Sendo

$$p^2(x) = p(x) \cdot p \; (x) = p(x,x)$$

$\bar{e}^{(2)}_{\overline{o,x|}}$ é, portanto, a vida média de um grupo de duas pessoas, sujeitas à mesma lei de mortalidade p(x), e extinguindo-se o grupo com o primeiro óbito (supõem-se os óbitos independentes)

3.1.8 — No item 3.1.6 admitiu-se que o têrmo aleatório era adicionado diretamente à equação (2.3.2.-1) e que lhe dava um caráter análogo ao da função M_t na equação (2 2.1-2). Ora, outras possibilidades existem, uma das quais consiste em supor que o têrmo aleatório é um têrmo aditivo da taxa de crescimento.

Para facilitar o tratamento algébrico, supõe-se que esse termo se refere à taxa instantânea $r^{(t)}$ ou, no caso discreto, a λ_t, isto é:

$$r(t) = \tilde{r}(t) + \varepsilon_t$$

$$\lambda_t = \tilde{\lambda}_t + \varepsilon_t$$

Nesse último caso, por exemplo, obtém-se:

$$N_t = N_0 \, \epsilon^{\tilde{\psi}_t + \sum_{x=0}^{t-1} \varepsilon_x} \qquad (3.1.8\text{-}1)$$

Assim, sob os mesmos pressupostos anteriores verifica-se que a equação (2.3.2-4) do modelo determinístico, continua válida para a média da função N_t, isto é:

$$\tilde{N}_t = \tilde{N}_0 \cdot e^{\tilde{\psi}_t} \qquad (3.1.8\text{-}2)$$

Quanto à variância, basta considerar que

$$lg_e \, N_t = lg_e \, N_0 + \tilde{\psi}_t + \sum_{x=0}^{t-1} \varepsilon_x$$

Representando novamente por σ^2 a variância do têrmo aleatório, suposta constante, resulta da equação anterior:

$$\sigma^2_{lg_e N_t} = t \, \sigma^2 \qquad (3.1.8\text{-}3)$$

Mas tendo em vista a relação estatística (válida para qualquer variável aleatória X), $\sigma_X = \mu_X \, \sigma lg_X$, resulta:

$$\sigma^2_{N_t} = \mu^2_{N_t} \cdot t \, \sigma^2$$

Ora, $\mu_{N_t} = E(N_t) = \tilde{N}_t = \tilde{N}_0 \, e^{\tilde{\psi}_t}$, de acôrdo com (3 1.8-2), de modo que:

$$\sigma^2_{N_t} = \tilde{N}_0 \cdot e^{\tilde{\psi}_t} \, \sigma^2 = t \cdot \tilde{N}^2_t \cdot \sigma^2 \qquad (3.1.8\text{-}4)$$

A expressão do quadrado do coeficiente de variabilidade coincide, em face de observação anterior com

$$\sigma^2_{lg_e N_t}, \text{ isto é, } c^2_v = t \, \sigma^2$$

3.1.9 — A equação (3.1 6-2), como já foi salientado, é a mesma equação (2.3.2-1) do modelo determinístico estudado no Capítulo 2. Assim se se deseja utilizar um modelo de caráter realmente estocástico, não é suficiente considerar N_t como variável aleatória e estudar apenas como evolui a sua média $\tilde{N}_t$. É necessário, ainda, examinar outras características do processo entre as quais a sua variabilidade, sem o que o modelo não será realmente estocástico. A rigor, o modelo deveria permitir um conhecimento completo da função de distribuição de N_t e de sua variação no tempo. Na prática, porém, esse conhecimento, que poderia ser obtido através da função característica (isto é, de todos os momentos ou semi-invariantes de N_t) limita-se, quase sempre ao conhecimento da média e da variância, tornando-se necessário, muitas vezes, o conhecimento da covariância. Portanto, a utilização de um processo estocástico pode reduzir-se formalmente à mesma aplicação do modelo determinístico, se se ficar limitado ao estabelecimento da *média do processo*. Todavia, embora o emprêgo formal de um processo estocástico que não seja condição suficiente é, pelo menos, uma condição necessária para o estudo dos modelos realmente estocásticos. Daí a necessidade de se dedicar uma especial atenção ao estudo sumário dos processos estocásticos que intervêm em tais modelos

PROPRIEDADE MARKOVIANA

3.1 10 — Todo processo estocástico pode referir-se a um sistema em evolução, A, capaz de assumir, em cada instante t, *um* (e apenas *um*) dentre um conjunto, finito ou infinito (numerável ou não) de estados possíveis E_i, $i = 1, 2, \ldots, m$. Os processos estocásticos de que se tratarão neste capítulo serão finitos (m finito) e que gozam, além disso, de uma propriedade fundamental, denominada:

Propriedade Markoviana: "Toda informação sobre a evolução do sistema a partir do instante t, acha-se incorporada ao estado que ele ocupa no instante t. Por outras palavras, se for considerado, apenas, o caso em que t é uma variável discreta, diz-se que a probabilidade de que o sistema venha a ocupar um determinado estado no instante $t+1$ depende, exclusivamente, do estado em que se encontrava no instante t. Representando-se por E_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ um qualquer dos m estados possíveis do sistema, a Propriedade Markoviana pode ser expressa assim

$$Pr\left[E_i(t)/E_j(t-1),\ E_k(t-2),\ \ldots,\ E_s(0)\right] = Pr\left[E_i(t)\ \mid\ E_j(t-1)\right]$$

onde

$$Pr\left[E_i(t)\ \mid\ E_j(t-1),\ E_k(t-2),\ .\ \ ,\ E_s(0)\right] \qquad (3.1.10\text{-}1)$$

significa a probabilidade condicional de ocupar o sistema o estado E_i — $(i=1, 2, . \ ., m)$, no instante t, dados cada um dos estados ocupados nos instantes t-1, t-2, . . , 1,0. É importante evitar a confusão que pode ocorrer quando se enuncia essa propriedade de uma forma algo imprecisa, dizendo-se que a situação do sistema no instante t depende *exclusivamente da situação em que ele se encontrava no instante imediatamente anterior, t-1*. Na realidade, ela depende de todo o passado do sistema, isto é, dos estados ocupados em *todos os instantes que precedem o instante t*. Apenas, essa dependência resulta, exclusivamente, do conjunto de informações que se acham incorporados ao estado ocupado pelo sistema no instante t-1. Alguns exemplos servirão para esclarecer o assunto:

a) quando se diz que a estrutura genética de um indivíduo, na ausência de mutações, *só depende da estrutura genética dos pais,* não se está querendo dizer que o indivíduo não possa herdar uma característica do avô ou de outro antepassado mais distante. Apenas significa o fato óbvio de que essa herança é transmitida "via pais" isto é, através do conjunto de informações genéticas presentes no "gens" paternos e maternos. O que se herda dos antepassados constitui o resultado final de uma cadeia que se transmitiu dos antepassados distantes aos seus filhos, desses aos netos, e assim por diante. Nenhum "gen" dos avós pode ser herdado pelos netos senão através daqueles "gens" que se acham presentes no conjunto de informações registrados nos cromossomos dos seus pais,

b) a corrida de revezamento é um processo Markoviano, uma vez que cada participante, na ordem que ocupa na equipe, só poderá receber o bastão do seu *antecessor imediato,* muito embora, em cada instante, a posição de qualquer participante dependa, evidentemente, das "performances" obtidas por *todos os seus antecessores.*

3.2 — Processos finitos do tipo DD

3.2.1 — São os modelos que se traduzem mediante uma cadeia finita de *Markov,* isto é, uma cadeia que comporta sòmente um número finito de estados, m. Seja pois um sistema S, capaz de ocupar um, e somente um, dos seguintes estados que serão assim os únicos estados possíveis

$$E_1, E_2, \ldots, E_m \qquad\qquad m < \infty$$

que serão, às vezes, referidos simplesmente pelos seus índices, 1, 2, ..., m. Para definir o processo como processo discreto suponha-se que o tempo é computado apenas em *etapas* discretas, sendo a t^{ma} etapa aquela que se realiza no intervalo t-1, t. A probabilidade de passagem ou de transferência do sistema, que se encontra no estado i, para o estado j, no intervalo $t \vdash t+1$, será indicada por $p_{ij,t}$. A matriz

$$P_t = \left[p_{ij,t}\right] \qquad\qquad i,j = 1, 2, \quad , m \tag{3.2.1-1}$$

denomina-se *matriz de transição na época t* (ou na etapa t+1) A relação

$$p_{ij,t} \geq 0; \sum_{j=1}^{m} p_{ij,t} = 1, \quad i = 1, 2, \quad , m \tag{3.2.1-2}$$

é uma conseqüência do fato óbvio de que, entre os instantes t e t+1, só existe, para o sistema S, as seguintes possibilidades:

I — permanecer no estado E_i em que se encontrava, ocorrência cuja probabilidade é $p_{ii,xt}$ ou:

II — passar para um qualquer dos demais estados, E_j, ocorrência de probabilidade $p_{ij,t}$, com $j \neq i$.

A relação (3.2.1-2) caracteriza a matriz P_t como matriz *simplesmente estocástica;* se além dessa relação se verificasse, também, que

$$\sum_{i=1}^{m} p_{ij} = 1; \quad j = 1, 2, \quad , m \qquad (3\ 2.1\text{-}3)$$

a referida matriz seria *duplamente estocástica*. De modo geral as probabilidades de transição, $p_{ij,t}$ dependem da variável t; quando, porém forem independentes de t, a matriz P_t, diz-se homogênea e representa--se simplesmente por P:

$$P = \{p_{ij}\} \qquad i,j = 1, 2, \ . \ , m$$

A cadeia de Markov definida por uma matriz homogênea diz-se que é uma *cadeia homogênea*. Entre as cadeias homogêneas de Markov, têm particular importância as cadeias regulares. Para definir uma cadeia regular, considere-se a potência *n* da matriz P

$$P^n = \{r_{ij}^{(n)}\} \qquad (3.2\ 1\text{-}4)$$

onde os $r_{ij}^{(n)}$ são funções conhecidas dos p_{ij}. Prevalece o seguinte:

Princípio de regularidade: se existir um n finito para o qual

$$r_{ij}^{(n)} > 0 \qquad i, j = 1, 2, \quad , n \qquad (3.2.1\text{-}5)$$

a matriz P diz-se uma matriz regular e a cadeia de Markov que a ela corresponde será uma *cadeia regular*. Na presente exposição limitaremos o estudo ao caso das cadeias regulares. Começaremos com alguns exemplos.

EXEMPLOS

Verificar, sob o ponto de vista da regularidade, as seguintes matrizes

$$I)\ M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad II)\ M = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{bmatrix};$$

$$III)\ M = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} a + b = 1 \\ a,b > 0 \end{matrix} \qquad IV)\ M = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} a + b = 1 \\ a,b > 0 \end{matrix}$$

Solução. I) A matriz referida em I, elevada ao quadrado fornece

$$M^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = M$$

Logo, $M^n = M$, para qualquer n finito. Portanto,

$$r_{ij}^{(n)} = 1 \qquad i = j \qquad \text{n finito}$$

$$r_{ij}^{(n)} = 0 \qquad i \neq j \qquad \text{n finito}$$

Não ficando satisfeita a condição (3.2.1-5) para nenhum n finito, a matriz *não é regular.*

II) A matriz M, tem todos os seus elementos positivos; logo, existe um n (n=1) para o qual M^n (que é a própria matriz M) tem todos os elementos positivos. A matriz é pois regular. *Toda matriz de elementos positivos será portanto regular*

III) A matriz M^2 será

$$M^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + b & ab \\ a & b \end{bmatrix}$$

Como se verifica o quadrado de M possui todos os elementos positivos de modo que a matriz satisfaz a (3 2.1-5), sendo, pois, regular.

IV) A matriz M^2 será

$$M^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & (a+1)b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Suponhamos, agora, que M^{t-1} seja do tipo

$$M^{t-1} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

então, resulta

$$M^t = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Aa & (A+1)B \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo, $r_{21}^{(n)} = 0$. Como essa propriedade, isto é, $r_{21}^{(n)} = 0$ se verifica para n=2, e sendo verdade para n = t-1, será também para n = t, é claro que a mesma propriedade vale para todo n finito. Assim, a matriz M não satisfaz à condição (3 2.1-5) e *não sendo por isso, uma matriz regular.*

3.2.2 — Considere-se a matriz regular, finita e homogênea

$$P = \{p_{ij}\}; \quad \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

e seja um instante qualquer adotado como origem Nesse instante, *0*, o sistema A poderá encontrar-se em um qualquer dos estados E_1, de modo que surge a necessidade de considerar-se um vetor-linha

$$A_o = \left[a_{1,0} \quad a_{2,0} \qquad a_{m,0}\right], \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{i,0} = 1$$

cuja componente a_i — i = 1, 2, ..., m — represente a probabilidade "a priori" (não condicional) de encontrar-se o sistema no estado E_i, no instante inicial. Ao vetor A_0 denomina-se *estrutura inicial* do sistema S, ou vetor estrutura do sistema S, no instante "0". De modo geral será indicada por A_t o vetor estrutura do sistema no instante t; tendo em vista a forma discreta desse processo, a passagem do instante t-1 para o instante t denomina-se de "etapa t" ou "passo t" do processo, de modo que A_t representa a estrutura do sistema ao final da etapa t (logo antes de t + 1), isto é, depois de decorridas t etapas do processo Resulta, assim·

$$A_t = \left[a_{1,t} \quad a_{2,t} \qquad a_{m,t}\right] \tag{3.2.2-1}$$

onde $a_{i,t}$, i = 1, 2, .. k, representa a probabilidade "a priori" de encontrar-se o sistema no estado E_i, ao final de t passos. Ora, as probabilidades $a_{j,\,t+1}$, podem ser expressas em função dos $a_{i,t}$, para i = 1, 2, , m, e das probabilidades $p_{ij,t}$ de transferência de E_i para E_j·

$$a_{j,\,t+1} = \sum_{i=1}^{m} a_{i,t}\ p_{ij,t} \tag{3.2.2-3}$$

Dessa igualdade resulta que $a_j^{(t+1)}$ é o produto das componentes de $A^{(t)}$ pela coluna j da matriz P_t, de modo que a estrutura do sistema ao final de uma etapa t+1 qualquer será dada pelo produto matricial.

$$A_{t+1} = A_t \cdot P_t \tag{3.2.2-3}$$

Essa equação matricial de diferenças, *análoga à equação de diferenças,* que define o modelo global permite escrever a solução

$$A_n = A_0 \prod_{t=1}^{n} P_t \tag{3.2.2-4}$$

Quando a cadeia é homogênea, P_t é independente de t, de modo que nesse caso:

$$A_n = A_0 P^n \qquad (3.2.2\text{-}5)$$

Diz-se, em virtude de (3.2.2-3) que a matriz P_n transforma o vetor linha A_n em outro vetor linha A_{n+1}.

Se consideramos o vetor

$$A_t = NA_t = [Na_{1,t} \quad Na_{2,t} \quad Na_{k,t}]$$

onde N é um escalar (população total da região considerada), as equações (3.2.2-3), (3.2.2-4) e (3.2.2-5) continuam válidas, com a substituição de $/A_t$ e $/A_n$, respectivamente.

3.2.3 — Seja um vetor linha qualquer

$$X = [x_1 \quad x_2 \quad . \quad x_m];$$

de modo geral, aplicando-se a X a transformação matricial expressa pela matriz P, o vetor X se transformará em Y.

$$Y = X \cdot P \qquad (3.2.3\text{-}1)$$

Diz-se que Y é o *transformado P* de *X*. Pode acontecer que exista, em relação à matriz P um certo vetor X tal que o seu transformado P seja o próprio X, isto é.

$$XP = X \qquad (3.2.3\text{-}2)$$

Denomina-se o vetor X de vetor fixo (ou ponto fixo) da transformação matricial considerada ou, simplesmente, vetor fixo da matriz P. Se X representar a estrutura de um sistema S, tal como foi definida anteriormente, diz-se que X é *estrutura fixa* da matriz P (ou do processo de que P é a matriz de transição).

Suponha-se um sistema S, de estrutura inicial qualquer, A_0, sujeita a um processo de transição da matriz homogênea P Seja D_t a matriz diagonal, assim definida, no final da etapa t:

$$D_t = \{d_{ij,\,t}\} \quad d_{ij,\,t} = 0 \qquad i \neq j \qquad (3.2.3\text{-}3)$$

$$d_{ii,\,t} = 1 / a_{i,\,t}$$

Considere-se a matriz produto

$$C_t = D_t^{-1} P \qquad (3\ 2.3\text{-}4)$$

A casa ij dessa matriz terá como elemento

$$c_{ij,\,t} = a_{i,\,t} \times p_{ij}$$

Analogamente, a casa ji terá como elemento

$$c_{ij,t} = a_{j,t} \ p_{ji}$$

Assim, o elemento da casa ij representa a probabilidade "à priori" de passagem do estado E_i para o estado E_j, enquanto que o elemento da casa ji, representa a probabilidade "à priori" do movimento em sentido inverso. Por isso a matriz C_t será denominada de *matriz de trocas* na etapa t. Se essa matriz for tal que a probabilidade de uma saída de E_i, para qualquer outro estado, seja igual a de entrada em qualquer outro estado, o sistema estará em equilíbrio, isto é, os movimentos de E_i para E_j ($j = 1, 2, \ldots, k$), qualquer que seja E_i, são exatamente compensados pelos movimentos em sentido contrário. Para que o sistema permaneça em equilíbrio é necessário, ainda, que, além dessa condição, a matriz de trocas seja independente de t; isso exige, portanto, que a estrutura do sistema coincida com a estrutura fixa da matriz P, de modo que se verifica as relações que exprimem a igualdade das probabilidades "à priori", para a fase de equilíbrio:

$$c_i = c_j$$

Isto é:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i,} \ p_{ij} = \sum_{j=1}^{m} a_{j,} \ p_{ji} \qquad i = 1, 2, \quad , k \qquad (3\ 2\ 3\text{-}5)$$

Assim, o elemento da casa ij representa a probabilidade "à priori" de passagem do estado E_i para o estado E_j, enquanto que o elemento da casa que exprime, por outro lado, o fato óbvio já acentuado de que o total de entrados em qualquer estado E_i na fase de equilíbrio do sistema deve ser igual ao total de saídos desse mesmo estado: esse resultado seria obtido por simples multiplicação de ambos os membros da igualdade (3.2.3-6) por N.

3.2.4 — Antes de prosseguir, é conveniente esclarecer um aspecto importante, relacionado com a interpretação concreta dos elementos que figuram nas diferentes matrizes que ocorrem, ao se estudar um processo comandado por uma cadeia de Markov. Há situações em que o processo se refere a um sistema individual que pode passar de cada um dos estados E_i para outro estado qualquer, E_j. Como exemplo suponha-se que, para realizar previsões do tempo, sejam considerados apenas três estados, E_1, tempo bom; E_2, tempo instável e E_3, tempo chuvoso Se for conhecida a matriz

$$P = [p_{ij}] \qquad i, j = 1, 2, 3$$

onde p_{ij} é a probabilidade, suposta independente de t,

$$p_{ij} = Pr\,[E_j \mid E_i]$$

torna-se possível fazer previsões meteorológicas atribuindo uma probabilidade a cada "tempo" *possível* de amanhã, para cada "tempo" *conhecido* de hoje A estrutura A_t indicará, nesse caso, o conjunto de probabilidades $a_{i,t}$ — $i = 1, 2, 3$, de que, na etapa t (em tal dia) o tempo seja "bom", "instável" ou "chuvoso". Essa estrutura não tem, por conseguinte, o caráter de *existência atual,* uma vez que a observação de cada dia fornece apenas *um dos três* resultados possíveis e nada mais. Somente após um grande número de etapas consecutivas será possível obter estimativas dos $a_{i,t}$ — $i = 1, 2, 3$, assim mesmo somente na hipótese de que essa estrutura não *dependa do tempo,* o que dificulta bastante a solução do problema, se a estrutura estiver de fato em evolução. Somente havendo essa estabilidade se poderá determinar o termo de valores, a_1^*, a_2^*, a_3^*, estimativas de a_1, a_2, a_3, estrutura teórica do sistema. Essas estimativas são as freqüências observadas, ao final de um grande número de dias (um ano, por exemplo) dos diferentes estados possíveis Se os $a_{i,t}$ dependerem de t essas estimativas tornam-se muito mais difíceis (e mais precárias) exigindo métodos e interpretações com base em uma técnica econométrica muito mais apurada, uma vez que, como no caso dos fenômenos econômicos a observação nos fornece *apenas um resultado para cada* t e não as freqüências dos diferentes estados possíveis um determinado dia será "bom", "instável" ou "chuvoso" e não uma fração $a^*_{1,t}$ de bom, $a^*_{2,t}$ de instável e $a^*_{3,t}$ de chuvoso.

Numa segunda situação, existem, na realidade, *em cada etapa t,* um grande número de sistemas idênticos (ou supostamente idênticos), como ocorre nos exemplos dos movimentos geográficos, sociais ou econômicos da população. Considerando-se a transferência de população de uma atividade econômica para outra, *cada indivíduo observado é um sistema A sujeito ao processo de transferência,* de modo que, em cada etapa do processo encontram-se numerosos sistemas (indivíduos, elementos, grupos, etc), em cada um dos estados possíveis e, de uma etapa para outra, numerosos sistemas passam dos estados E_i ($i = 1, 2, 3$) para os estados E_j ($j = 1, 2, 3$) A estrutura A_t adquire assim um caráter atual bem nítido, tornando-se possível estimar, *para cada t,* a fração do total de sistemas (elementos, indivíduos, etc.) que se encontram em cada um dos estados e, bem assim, os que se transferem de um estado para outro.

Cabe observar que a diferença entre as duas situações consideradas não resulta do fato de se supor em uma delas um sistema individual e em outra um sistema coletivo (população) Na realidade a diferença provém do modo por que se consideram os estados E_i em relação ao sistema Assim, é possível considerar um sistema coletivo, constituído pela população de uma região, sem que se chegue obrigatòriamente à segunda situação apontada. De fato, se o processo $X(t)$ traduz por exemplo, a evolução do número de habitantes e os estados considerados são os diferentes números de habitantes possíveis

$$E_X = N$$

então, não tem sentido considerar-se a transferência de cada habitante de um estado para outro; o processo se refere a todo o grupo, isto é, somente a população em bloco poderá ocupar os diferentes estados considerados. Aqui, como no caso individual, só haverá um único valor observado em cada etapa e a estrutura A_t não apresenta caráter de existência atual; ela traduz o conjunto t de probabilidades de que a população tenha tal ou qual valor, isto é,

$$a_{N,\,t} = Pr\,\{X(t) = N\}$$

As componentes dessa estrutura não são pois estimáveis diretamente, uma vez que não há possibilidade de se estabelecer a freqüência observada de cada estado. Aqui ainda há uma agravante em relação ao caso da situação individual considerada anteriormente: não há possibilidade de *repetição* das observações em etapas sucessivas; portanto, o grande número de casos em cada estado não existe nem de forma concomitante (para cada t) nem tampouco de forma sucessiva (para sucessivos valores de t). Note-se ainda de passagem, embora isso não se relacione com o assunto aqui tratado, que no caso de evolução de uma população, não é possível exprimir a matriz de transição por uma matriz finita. O número de estados é (teoricamente) um número infinito (ou pelo menos extremamente grande). O processo, embora Markoviano é definido através de esquema de "nascimento e morte", pois a construção da matriz de transição seria praticamente impossível.

3.2 5 — Suponha-se novamente um sistema A de estrutura inicial A_0, sujeito a um processo de transição determinado pela matriz homogênea P. Ao final de n etapas, a estrutura do sistema ter-se-á alterado e será, de acordo com o que foi dito·

$$A_n = A_0 \cdot P^n$$

Para n crescente, prevalece uma tendência bem definida do processo, que fica subordinado ao seguinte:

Princípio de estabilidade: Todo processo homogêneo e regular conduz o sistema S a uma estrutura limite, independente da sua estrutura inicial, A_0; essa estrutura limite coincide com o vetor fixo da matriz P. Representando esse vetor por $A = [a_1\ a_2\ \ldots\ a_m]$, tem-se pois·

$$AP = A$$

A essa equação matricial, corresponde o sistema algébrico

$$\sum_{j=1}^{m} a_j p_{ji} = a_i; \qquad i = 1, 2, \quad m$$

ao qual se deve acrescentar a equação de condição

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = 1$$

Como só existem m incógnitas, a_1, a_2, ... a_m, uma das equações decorre das demais como facilmente se pode verificar. Por outro lado, sendo A_n o vetor estrutura de S, após n etapas, isto é

$$A_n = A_0 P^n$$

deverá resultar:

$$A = \lim_{n \to \infty} A_n = \lim_{n \to \infty} A_o P^n = A_o \lim_{n \to \infty} P^n$$

Pondo

$$\lim_{n \to \infty} P^n = \rho = \{_{ij}\pi\}$$

deve-se então verificar a relação

$$A_o \rho = A \qquad (3.2.5\text{-}1)$$

qualquer que seja o vetor A_o. Assim, para um vetor arbitrário

$$A_o = X = [x_1 \ x_2 \qquad x_m]'$$

resulta de (3.2.5-1):

$$\sum_{j=1}^{m} x_j \pi_{ji} = a_i \qquad i = 1, 2, \qquad m$$

quaisquer que sejam os números não negativos, x_j, satisfazendo a condição

$$\sum_{j=1}^{m} x_j = 1$$

Ora, para que aquelas m igualdades sejam válidas, quaisquer que sejam os valores de x_j, é necessário que tenha.

$$\pi_{ji} = a_i \qquad j = 1, 2, \qquad m \qquad (3.2.5\text{-}2)$$

Essa mesma relação pode ser estabelecida por caminho ligeiramente diferente, o que será feito a seguir à guiza de exercício De fato escrevamos a (3 2.5-1) sob a forma equivalente

$$X^{(\prime)} \rho = A \qquad (3.2\ 5\text{-}3)$$

e considerem-se os seguintes vetores $X^{(r)}$:

$$X^{(1)} = [100 \ldots 0];\ X^{(2)} = [010 \ldots 0];\ X^{(3)} = [001 \ldots 0];\ \ldots;\ X^{(m)} = [000 \ldots 1]$$

A igualdade (3.2.5-1) devendo ser válida para qualquer desses vetores, resulta:

$$X^{(1)}\rho = [a_1\, a_2 \ldots a_m], \text{ donde: } \pi_{11} = a_1;\ \pi_{12} = a_2;\ \ldots\ \pi_{1m} = a_m$$

$$X^{(2)}\rho = [a_1\, a_2 \ldots a_m], \text{ donde: } \pi_{21} = a_1;\ \pi_{22} = a_2;\ \ldots\ \pi_{2m} = a_m$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$X^{(m)}\rho = [a_1\, a_2 \ldots a_m], \text{ donde: } \pi_{m1} = a_1;\ \pi_{m2} = a_2;\ \ldots\ \pi_{mm} = a_m$$

Portanto verifica-se, diretamente, que

$$\pi_{ij} = a_j$$

conforme se estabeleceu anteriormente.

Assim, a matriz ρ será constituida de m linhas iguais, cada uma delas igual ao vetor limite A, vetor fixo de P, isto é:

$$\rho = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & & a_m \\ a_1 & a_2 & & a_m \\ & & & \\ a_1 & a_2 & \cdot & a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ A \\ \cdot \\ A \end{bmatrix}$$

Note-se que, visto que $A_0\rho = A$, qualquer que seja o vetor A_0, é claro que A_0 poderá ser o próprio A. Assim, o vetor A é vetor fixo tanto de P como de ρ.

Considere-se, novamente, a matriz de trocas, definida no parágrafo (3.2.3):

$$C_t = D_t^{-1} P \qquad t = 0, 1, 2,$$

A medida que o sistema S evolui, a sua estrutura A_t se modifica e conseqüentemente, também D_t e C_t se alteram. Se o sistema estiver sujeito a um processo homogêneo e regular, A_t tenderá para A (vetor fixo de P) e D_t^{-1} tenderá para a matriz diagonal cujos elementos são as componentes de A, de modo que podemos escrever:

$$\lim_{t \to \infty} C_t = \lim_{t \to \infty} D_t^{-1} P$$

Pondo então:

$$\lim_{t \to \infty} C_t = C\ ;\ \lim_{t \to \infty} D_t^{-1} = D^{-1}$$

Resulta:

$$C = D^{-1} P$$

Assim, uma vez atingida a estrutura fixa, no caso de um conjunto de sistemas, esse conjunto permanecerá em equilíbrio; todavia, esse equilíbrio não decorre do fato de cessarem as trocas entre estados, mas do fato de que as trocas, entre os diferentes estados, se compensam mutuamente: o total de saídas (valor esperado) de um estado E_i ($i = 1, 2, .. m$) para todos os demais estados E_j ($j = 1, 2, .. m$) é igual ao total de entradas (valor esperado) no estado E_i, provenientes de todos os demais. Na interpretação individual, um elemento qualquer c_{ij} de C_t (ou de C) representa a probabilidade "à priori" de passagem do estado E_i para o estado E_j, ao passo que os elementos p_{ij} da matriz P, representam as probabilidades condicionais de passagem (ver definição de P) Cabe ainda examinar outros aspectos relacionados com as migrações entre os diferentes estados de um sistema (interpretação individual) ou de um conjunto de sistemas (interpretação coletiva). Para isso considere se a matriz

$$\Delta_{t\,h} = C_{t+h} - C_t$$

denominada matriz de diferencial de trocas entre as etapas t e t+h. Quando $h \to \infty$ tendo em vista que $\lim\limits_{t \to \infty} C_{t+h} = C$, a matriz

$$\Delta_t = \lim_{h \to \infty} \Delta_{t,h} = C - C_t$$

intitula-se *matriz diferencial de trocas na etapa t.* À medida que a estrutura do sistema tende para a estrutura fixa da matriz P, a matriz Δ_t tende para a matriz nula, isto é

$$\lim_{t \to \infty} \Delta_t = 0$$

Para um valor de t suficientemente grande essa matriz se aproxima tanto da matriz nula que pode, sem grande erro, ser confundida como ela; às vezes isso ocorre até mesmo para valores moderadamente grandes de t.

Outra matriz de importância é a matriz de balanço interno de trocas, na etapa t, representada por B_t. Essa matriz fica definida assim:

$$B_t = \{b_{ij}^{(t)}\}$$

sendo:

$$b_{ij}^{(t)} = a_{j,t}\, p_{ji} - a_{i,t} p_{ij} = c_{ji,t} - c_{ij,t} \qquad i \neq j$$

$$b_{ii} = \sum_{j=1}^{m} (a_{j,t}\, p_{ji} - a_{i,t}\, p_{ij}) = \sum_{j=1}^{m} (c_{ji,t} - c_{ij,t})$$

onde $c_{ij,t}$ são os elementos da matriz C_t. Assim, b_{ij} representa, no caso de um conjunto de sistemas, o balanço de trocas entre dois estados E_i e E_j; b_{ii}, entre E_i e todos os demais. Pondo

$$\lim_{t \to \infty} B_t = B$$

é bastante ilustrativa, também, a consideração da matriz

$$K_{t,h} = B_{t+h} - B_t$$

assim como dos seus valores limites:

$$K_t = \lim_{h \to \infty} K_{t,h} = B - B_t \quad e \quad K = \lim_{t \to \infty} K_t = \mathbf{O}$$

EXEMPLOS NUMÉRICOS

3.2.7 — Um primeiro exemplo, adaptado de (6), com pequenas alterações, refere-se ao problema da transferência de populações do campo para a cidade e vice-versa. Suponha-se que, em um certo recenseamento, de um total de 100 milhões de habitantes e cuja data é adotada como origem do tempo, foram registrados os seguintes resultados:

População das cidades (estado E_1): 40% ou 40 milhões de hab.

População do campo (estado E_2): 60% ou 60 milhões de hab.

O vetor inicial, será então

$$A_o = [40 \quad 60]$$

o qual poderia ser também representado a partir dos valores relativos

$$A_o = [0{,}4 \quad 0{,}6]$$

Na realidade o esquema aqui desenvolvido pressupõe que se trata de um único sistema, ou, na interpretação coletiva do processo, de um número *fixo* de sistemas sujeitos ao mesmo processo: não há *desaparecimento* de sistemas preexistentes, nem *criação* de novos sistemas. Ora, no caso de uma população, em que cada indivíduo constitui *um sistema*, é claro que essa condição não fica satisfeita, uma vez que alguns indivíduos morrem durante cada ano (etapa) ao passo que outros nascem. Podemos, no entanto, supor que cada óbito é substituído por um nascimento, o que não afeta o total, e por hipótese admitiremos que não afeta também a matriz de transferência ou que o crescimento não afeta o fenômeno relativo. Trata-se, portanto, de um esquema ainda muito rudimentar para ser aplicado a uma população real mas que além do caráter ilustrativo de grande valor apresenta freqüentemente resultados extraordinariamente realistas, em problemas específicos, como ocorre com grande número de modelos extremamente simplificados em relação às características fundamentais dos fenômenos a que são aplicáveis. Escolhida, pois, a unidade de tempo que constitui uma etapa do processo (ano, qüinqüênio, etc.) sejam as seguintes proporções, supostas independentes do tempo:

a) 99% das pessoas que habitavam as cidades no início do período, continuavam vivas, nas cidades, no ano seguinte, e apenas 1% se transferiam para o campo, continuando vivas no ano subseqüente;

b) 95% das pessoas que residiam no campo no início de determinado ano, ali continuavam, vivas, no início do ano seguinte, e 5% se transferiam para as cidades, onde permaneciam vivas no início do ano subseqüente.

Com as condições estabelecidas, o processo resultante constitui uma Cadeia de Markov (processo do tipo DD) regular e homogênea, com matriz de transferência 2x2·

$$M = \begin{bmatrix} 0{,}99 & 0{,}01 \\ 0{,}05 & 0{,}95 \end{bmatrix}$$

A regularidade da matriz resulta do fato de que ela própria possui todas as casas e positivas $(n=1)$, de modo que haverá uma estrutura fixa para a qual tenderá a estrutura A_t da população, quando $t \to \infty$. Seja **X** essa estrutura fixa

$$X = [a, b] \text{ com } a + b = 1$$

Ora, sendo, pela definição da estrutura fixa,

$$X \cdot M = X$$

resulta

$$[a, (1-a)] \cdot \begin{bmatrix} 0{,}99 & 0{,}01 \\ 0{,}05 & 0{,}95 \end{bmatrix} = [a, (1-a)]$$

De onde se tira:

$$0{,}99\,a + 0{,}05(1-a) = a$$

$$0{,}01\,a + 0{,}95(1-a) = (1-a)$$

Essas duas equações não são independentes, como se pode ver facilmente. De fato, subtraindo-se ambos os membros da 1ª de 1, em seguida, somando-se e subtraindo-se 0,01a ao 1.º membro da equação resultante, a rearrumando-se os termos obtém-se a segunda. Resolvendo-se, pois, qualquer uma delas, resulta:

$$a = 5/6 \qquad 1 - a = b = 1/6$$

Tais serão as proporções limites para as populações urbana e rural, respectivamente. Essa conclusão pode ser confirmada por outro caminho, mostrando-se que se a estrutura, em qualquer etapa (e, sem prejuízo da generalidade, pode-se adotar a etapa inicial) for algo diferente da estrutura fixa de M, surgirão movimentos não compensados da cidade para o campo e do campo para a cidade. Esses movimentos tendem a modificar a estrutura da população no sentido de aproximá-la daquela estrutura fixa; só quando essa estrutura for atingida aqueles movimentos serão exatamente iguais, verificando-se um balanço nulo.

Diretamente pode-se obter esse resultado supondo que a estrutura inicial difere da estrutura limite de uma quantidade ε, positiva ou negativa, isto é:

$$a_0 = 5/6 - \varepsilon; \; b_0 = 1/6 + \varepsilon$$

Assim:

$$A_0 = [5/6 - \varepsilon; \; 1/6 + \varepsilon]$$

Aplicando a transformação M repetidamente obtém-se:

$$a_1 = 5/6 - (0{,}94)\,\varepsilon; \; a_2 = 5/6 = (0{,}94)^2\,\varepsilon; \; \ldots \; a_n = 5/6 - (0{,}94)^n\,\varepsilon$$

$$b_1 = 1/6 + (0{,}94)\,\varepsilon; \; b_2 = 1/6 + (0{,}94)^2\,\varepsilon; \; \ldots \; b_n = 1/6 + (0{,}94)^n\,\varepsilon$$

De onde se tira

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 5/6; \; \lim_{n \to \infty} b_n = 1/6 \qquad c\,q\,d.$$

Considere-se agora o balanço de trocas numa etapa qualquer.

Ao final da n^{ma} etapa, a matriz de trocas, C_n será

$$C_n = D_n^{-1}\, M^* = \begin{bmatrix} 5/6 - (0{,}94)^n\,\varepsilon & 0 \\ 0 & 1/6 + (0{,}94)^n\,\varepsilon \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0{,}99 & 0{,}01 \\ 0{,}05 & 0{,}95 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}825 - 0{,}99\,(0{,}94)^n\,\varepsilon & 0{,}00833\,.\,.\, - 0{,}01\,(0{,}94)^n\,\varepsilon \\ 0{,}00833\ldots + 0{,}050\,\varepsilon & 0{,}15833\,.\, + 0{,}95\,(0{,}94)^n\,\varepsilon \end{bmatrix}$$

Por outro lado, a matriz de trocas limite C terá a expressão numérica:

$$C = D^{-1} M^* = \begin{bmatrix} 5/6 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,99 & 0,01 \\ 0,05 & 0,95 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,825 & 0,00833\ldots \\ 0,00833\ldots & 0,15833\ldots \end{bmatrix}$$

A matriz diferencial de trocas na etapa n, feitos os cálculos e simplificações, poderá ser posta sob a forma:

$$\Delta_n = C - C_n = -(0,94)^n \varepsilon \begin{bmatrix} -0,99 & -0,01 \\ 0,05 & 0,95 \end{bmatrix}$$

De onde se vê claramente que

$$\Delta = \lim_{n \to \infty} \Delta_n = \mathbf{O}$$

O movimento de E_2 (campo) para E_1 (cidade) será, ao final da etapa n:

$$M_{21}(n) = 0,00833\ \ldots + 0,05\ (0,94)^n \varepsilon$$

e o movimento de E_1 para E_2

$$M_{12}(n) = 0,00833\ \ldots - 0,01\ (0,94)^n \varepsilon$$

No limite, os movimentos, nos dois sentidos, serão ambos iguais a 0,00833 ...

No exemplo dado, em que

$$A_0 = [0,40;\ 0,60]$$

tem-se: $\varepsilon = 0,60 - 1/6 = (5/6) - 0,40 = 0,433\ldots = 13/30$

O Quadro seguinte fornece, para alguns valores de n, os valores de $M_{12}(n)$ e $M_{21}(n)$ multiplicados por 100.

QUADRO

MOVIMENTO DO CAMPO PARA A CIDADE E DA CIDADE PARA O CAMPO EM % DE POPULAÇÃO TOTAL

Valores de 100 $M_{12}(n)$ e $M_{21}(n)$ e proporção de população urbana

n	$(0,94)^n$	$(0,94)^n \varepsilon$	100 $M_{12}(n)$	100 $M_{21}(n)$	100 a_n
0	1,00000	0,43333	0,400	3,000	40,000
1	0,94000	0,40733	0,426	2,870	42,600
2	0,88360	0,38289	0,450	2,748	45,044
3	0,83058	0,35992	0,473	2,633	47,341
4	0,78075	0,33832	0,495	2,525	49,501
5	0,73390	0,31802	0,515	2,423	51,531
10	0,53862	0,23340	0,600	2,000	59,993
20	0,29011	0,12571	0,708	1,462	70,762
30	0,15626	0,06771	0,766	1,172	76,562
50	0,04531	0,019643	0,814	0,931	81,369
100	0,002055	0,000890	0,832	0,838	83,244
∞	—	—	0,833	0,833	83,333

Como se verifica o padão migratório caracterizado pela matriz P considerada nesse exemplo, resulta em movimentos do campo para a cidade e da cidade para o campo que atingem 3% e 0,4%, respectivamente, no início do processo; mas o primeiro declina e o segundo aumenta de modo que ao final de 1 século (100 etapas) o 1.º representa 8,38% e o segundo 8,32%, isto é, estão praticamente estabilizados nesse nível; a proporção de habitantes da cidade, representando inicialmente apenas 40% do total, terá atingido, então 83,2%. Verifica-se, nesse caso, que a matriz B_n para a etapa n (balanço interno de trocas) terá todos os seus elementos determinados em função de $M_{12}(n)$ — $M_{21}(n)$, de modo que

$$B_n = 0{,}06\ (0{,}94)^n \varepsilon\ E$$

onde E é a matriz

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3.2.8 — Como segundo exemplo suponha-se que a distribuição da população entre atividades primárias (agro-pastoris), secundárias (indústria manufatureira) e terciárias (comércio e serviços) seja caracterizada pela seguinte estrutura inicial:

$$A_0 = [0{,}60;\ 0{,}25,\ 0{,}15]$$

Por outro lado admita-se que a matriz de transferência

$$M = \begin{bmatrix} 0{,}940 & 0{,}040 & 0{,}020 \\ 0{,}010 & 0{,}960 & 0{,}030 \\ 0{,}005 & 0{,}010 & 0{,}985 \end{bmatrix}$$

onde os índices i,j = 1, 2, 3 representam as atividades acima referidas na ordem ali indicadas.

A aplicação reiterada da relação

$$A_{n+1} = A_n\ M$$

permite obter

$$A_1 = 0{,}56725,\quad 0{,}26550;\quad 0{,}16725$$

$$A_2 = 0{,}53671;\quad 0{,}27924;\quad 0{,}18405$$

$$A_3 = 0{,}50822;\quad 0{,}29138;\quad 0{,}20040$$

$$A_4 = 0{,}48164;\quad 0{,}30206;\quad 0{,}21630$$

$$A_5 = 0{,}45685;\quad 0{,}31140,\quad 0{,}23175$$

Como se verifica a estrutura inicial vai se modificando de etapa para etapa, tendendo para um vetor limite, estrutura fixa de M*.

Seja

$$X = [a, b, c]$$

o vetor fixo da matriz M, isto é, um vetor tal que satisfaça a relação

$$XM = X$$

Efetuando esse produto tem-se o sistema

$$0{,}940\ a + 0{,}010\ b + 0{,}005\ c = a$$

$$0{,}040\ a + 0{,}960\ b + 0{,}010\ c = b$$

$$0{,}020\ a + 0{,}030\ b + 0{,}985\ c = c$$

$$a + b + c = 1$$

Esse sistema contém aparentemente 4 equações a 3 incógnitas; de fato, a última pode resultar como soma das 3 primeiras (ou qualquer delas como combinação linear das demais) de modo que, na realidade, há apenas 3 equações e 3 incógnitas. Resolvendo-o obtém-se:

$$a = 3/31 = 0{,}0967742$$

$$b = 8/31 = 0{,}2580645$$

$$c = 20/31 = 0{,}6451631$$

Como se verifica, a estrutura limite é bem diversa da inicial, o que indica um sistema em franca evolução.

A matriz de trocas C_0, C_5 e C podem ser fàcilmente calculadas:

$$C_0 = D_0^{-1}\ M^* = \begin{bmatrix} 0{,}56400 & 0{,}02400 & 0{,}01200 \\ 0{,}00250 & 0{,}24000 & 0{,}00750 \\ 0{,}00075 & 0{,}00150 & 0{,}14755 \end{bmatrix}$$

$$C_5 = D_5^{-1}\ M^* = \begin{bmatrix} 0{,}42944 & 0{,}01827 & 0{,}00914 \\ 0{,}00311 & 0{,}29894 & 0{,}00934 \\ 0{,}00116 & 0{,}00232 & 0{,}22827 \end{bmatrix}$$

$$C = D^{-1}\ M^* = \begin{bmatrix} 0{,}09097 & 0{,}00387 & 0{,}00194 \\ 0{,}00258 & 0{,}24774 & 0{,}00774 \\ 0{,}00323 & 0{,}00645 & 0{,}63548 \end{bmatrix}$$

Resulta assim:

$$\Delta_{0,5} = \begin{bmatrix} -0{,}13456 & -0{,}00573 & -0{,}00286 \\ 0{,}00061 & 0{,}05894 & 0{,}00184 \\ 0{,}00141 & 0{,}00082 & 0{,}40721 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_0 = \begin{bmatrix} -0{,}47303 & -0{,}02013 & -0{,}01006 \\ 0{,}00008 & 0{,}00774 & 0{,}00024 \\ 0{,}00248 & 0{,}00495 & 0{,}48773 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_5 = \begin{bmatrix} -0{,}33847 & -0{,}01440 & -0{,}00720 \\ -0{,}00053 & -0{,}05120 & -0{,}00160 \\ 0{,}00207 & 0{,}00413 & 0{,}40721 \end{bmatrix}$$

Quanto ao movimento interno de trocas obtêm-se as seguintes matrizes

$$B_0 = \begin{bmatrix} -0{,}03275 & -0{,}02150 & -0{,}01125 \\ 0{,}02150 & 0{,}01550 & -0{,}00600 \\ 0{,}01125 & 0{,}00600 & 0{,}01725 \end{bmatrix}$$

$$B_5 = \begin{bmatrix} -0{,}02314 & -0{,}01516 & -0{,}00798 \\ 0{,}01516 & 0{,}00814 & 0{,}00702 \\ 0{,}00798 & 0{,}00702 & 0{,}01500 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}00129 & 0{,}00129 \\ 0{,}00129 & 0 & -0{,}00129 \\ -0{,}00129 & 0{,}00129 & 0 \end{bmatrix} = 0{,}00129 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Como se verifica o sistema, ao iniciar-se o processo, encontra-se em uma posição muito distante da posição de equilíbrio (estrutura fixa), ocorrendo intensas migrações entre os diferentes estados.

Na posição de equilíbrio, todavia, esses movimentos migratórios não cessarão: uma fração de 1,29% do total estará permanentemente passando de E_1 para E_2, de E_2 para E_3 e de E_3 para E_1; idênticos movimentos ocorrerão em sentidos contrários, de modo que, no conjunto, os totais em E_1, E_2 e E_3, não mais se modificarão uma vez que as entradas em cada estado são exatamente compensadas pelas saídas.

3.2.9 — Além da modalidade decorrente de movimentos migratórios econômicos intersetoriais, (8), (9) ou geográficos, o emprego das cadeias finitas de Markov tem sido também útil no estudo da Mobilidade Social, ou seja, da transferência de indivíduos, de geração para geração, de uma para outra classe social. A fim de exemplificar esse caso considere-se o seguinte exemplo de J. Prais (9, 10) a população da Inglaterra, em 1949 foi distribuída em três classes sociais, de acordo com atividades exercidas:

Classes			% em *1949*	
1. SUPERIOR	— 1.1 —	Profissões liberais e adm. superior	2,9	
	1.2 —	Gerentes e executivos	4,6	7,5
2. MÉDIA	— 2 1 —	Supervisão superior, não manual	9,4	
	2 2 —	Supervisão inferior, não manual	13,1	
	2 3 —	Especialistas (manual e não manual)	40,9	63,4
3. INFERIOR	— 3.1 —	Semi-especializada, manual ..	17,0	
	3.2 —	Não especializada	12,1	29,1
				100,00

A matriz de transferência representada aqui pela notação P*, é constituída pelas probabilidades p^*_{ij} de que um indivíduo pertencente à classe E_i, tenha filhos (um ou mais) que venham a pertencer à classe E_j Assim, cada etapa do processo compreende o decurso de uma geração, de pai para filhos. Para as três classes acima consideradas a matriz obtida por J. Prais, segundo Kemeny and Snell (5) é a seguinte.

$$P^* = \begin{bmatrix} 0,448 & 0,484 & 0,068 \\ 0,054 & 0,699 & 0,247 \\ 0,011 & 0,503 & 0,486 \end{bmatrix}$$

A estrutura fixa dessa matriz calculada como se indicou é.

$$A = [0,06720, \quad 0,62403, \quad 0,30877]$$

a qual comparada com a estrutura inicial

$$A_0 = [0,076, \quad 0,624; \quad 0,290]$$

indica estar o sistema muito próximo da posição de equilíbrio compatível com a matriz P.

Assim, as equações de trocas C_0 e C terão as seguintes expressões numéricas:

$$C_0 = D_0^{-1}\ P^* = \begin{bmatrix} 0{,}04480 & 0{,}03678 & 0{,}00517 \\ 0{,}03424 & 0{,}44317 & 0{,}15660 \\ 0{,}00319 & 0{,}14587 & 0{,}14094 \end{bmatrix}$$

$$C = D^{-1}\ P^* = \begin{bmatrix} 0{,}03011 & 0{,}03252 & 0{,}00457 \\ 0{,}03370 & 0{,}43620 & 0{,}15414 \\ 0{,}00340 & 0{,}15531 & 0{,}15006 \end{bmatrix}$$

De onde [1]

$$\Delta_0 = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

Por outro lado,

$$B_0 = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

Primeira passagem de E_i para E_j

3.2.10 — Quando o sistema, — na interpretação individual — ou qualquer componente de um conjunto numeroso de sistemas —, se encontra num estado qualquer E_i, decorrerá um certo número de etapas antes que se dê passagem *pela primeira vez,* para outro estado E_i. Esse número médio de etapas denomina-se de tempo médio de *1.ª passagem* e será representado a seguir por τ_{ij}. A matriz

$$T = \{\tau_{ij}\} \qquad i,j = 1,\ 2,\ \ .\ ,\ k$$

denomina-se "matriz dos tempos de 1.ª passagem" ou abreviadamente "matriz de 1.ª passagem". A interpretação de τ_{ij} para $i \neq j$ resulta da

1 O leitor calculará, como exercício.

própria definição; quando i=j, é necessário um esclarecimento adicional. Assim τ_{ii} significa o tempo médio de "1.ª passagem" do estado E_i para o mesmo estado E_i; isso inclui não apenas os que permanecem no estado E_i de uma etapa para a outra, mas os que saem e voltam posteriormente pela 1.ª vez depois de ter saído. Para os que permanecem

$$\tau_{ii}^{(p)} = 1$$

para os que saem

$$\tau_{ii}^{(s)} > 1$$

o tempo médio τ_{ii}, é, finalmente, uma média ponderada entre esses dois valores sendo a ponderação dada pelo número de elementos que se enquadram em cada caso. Se o sistema não sai do estado E_i (estado absorvente), $p_{ii} = 1$ então $\tau_{ii} = 1$; se o sistema não pode permanecer no estado E_i (barreira refletora)

$$p_{ii} = 0, \; \tau_{ii} = 0$$

Para determinação da matriz T, será seguido o método matricial de Kemeny e Snell em (6a.) cap. IV, ao qual é enviado o leitor que desejar maiores esclarecimentos sobre os pormenores matemáticos do problema. Em linhas gerais, o método utilizado pelos referidos autores se resume nos passos indicados a seguir.

Em primeiro lugar é estabelecida a existência do limite de P^n:

$$\lim_{n \to \infty} P^n = \rho$$

Em seguida, demonstra-se (ver § 3.2.5) que esse limite é uma matriz (m x m), constituída de m linhas iguais, onde m é o número de estados possíveis, cada uma delas representada pelo vetor

$A = [a_1 \; a_2 \; \ldots \; a_m]$, estrutura fixa de P, isto é:

$$\rho = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & & a_m \\ a_1 & a_2 & . & a_m \\ . & & & \ldots . \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ A \\ \vdots \\ A \end{bmatrix}$$

É fácil verificar, por simples multiplicação, que

$$A \rho = A$$

Fixado esse ponto introduz-se uma nova matriz, $Z = \{Z_{ij}\}$, denominada *matriz fundamental* da cadeia, assim definida:

$$Z = [I - (P - \boldsymbol{\rho})]^{-1}$$

onde I é a matriz unidade

$$I = \{r_{ij}\} \qquad r_{ij} = 0 \qquad i \neq j$$

$$r_{ii} = 1$$

Demonstra-se (teorema 4.3.1 de 5) que existe a relação

$$Z = I + \sum_{n=1}^{\infty} (P^n - \boldsymbol{\rho}) \qquad (3.3.7\text{-}2)$$

nas a determinação prática de Z resulta mais simples a partir d((3.2.6-1). Conhecida a matriz fundamental, a matriz de 1.ª passagen será:

$$T = (I - Z + E\, Z_{dg})\, D^{-1}$$

onde Z_{dg} é uma matriz diagonal derivada de Z, assim definida:

$$Z_{dg} = \{z'_{ij}\} \qquad z'_{ij} = 0 \qquad i \neq j$$

$$z'_{ii} = z_{ii}$$

Por outro lado D é matriz definida em (3.2.3-3) e E é a matri: em que todos os elementos são iguais à unidade

$$E = \{1\}$$

Quando o processo é um processo aleatório simples, isto é, corres ponde a provas independentes, demonstra-se que

$$T = \{1/p_{ij}\}$$

VARIÂNCIA DOS TEMPOS MÉDIOS DE 1.ª PASSAGEM

3.2.11 — As variâncias dos tempos médios de 1.ª passagem d(E_i para E_j são obtidas como elementos da matriz das variâncias de 1.ª passagem.

$$V = \{v_{ij}\}$$

Para se determinar V, parte-se da matriz W, cuja definição é:

$$W = \{w_{ij}\} = T[2Z_{dg}\, D^{-1} - I] + 2[ZT - E(ZT)_{dg}]$$

A partir dessa matriz, resulta

$$V = W - T_{qd}$$

onde T_{qd} é a matriz cujos elementos são os quadrados dos elementos de T, isto é,

$$T_{qd} = \{\tau^2_{ij}\}$$

Esses resultados constituem a essência dos teoremas 4.5.1; 4.5.2 e 4.5.3 do Cap. IV, sec. 4 de (6.2). Os elementos de W são

$$W_{ij} = M_i(f_j^2)$$

onde f_j é a função cujos valores dão os números de etapas (ou passos) necessários para atingir E_j pela primeira vez após o passo inicial e M_i representa o valor médio (esperança matemática para o estado E_i).

No caso de provas independentes resulta

$$W = ED^{-1}(2D^{-1} - I) = \{(1/p_{ij})\ (2/p_{ij} - 1)\}$$

$$V = E(D^{-1} - D^{-1}) = (1/p^2_{ij} - 1/p_{ij})$$

tendo em vista ainda que $p_{ij} = p_{jj}$ para qualquer i e qualquer j.

A matriz dos desvios padrões, é simplesmente a matriz

$$\sigma = \{\sigma_{ij}\}$$

onde

$$\sigma_{ij} = \sqrt{v_{ij}}$$

EXEMPLOS

3 2.12 — Os exemplos dados anteriormente serão retomados para cálculo de *T*, *V* e σ. Assim, no primeiro exemplo (transferência de população do campo para a cidade e vice-versa), tem-se:

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}99 & 0{,}01 \\ 0{,}05 & 0{,}95 \end{bmatrix} \qquad \rho = \begin{bmatrix} 5/6 & 1/6 \\ 5/6 & 1/6 \end{bmatrix}$$

$$P - \rho = 1/300 \begin{bmatrix} 47 & -47 \\ -235 & 235 \end{bmatrix}; \ I - (P - \rho) = 1/300 \begin{bmatrix} 253 & 47 \\ 235 & 65 \end{bmatrix}$$

$$Z = [I - (P - \rho)]^{-1} = 1/90 \begin{bmatrix} 325 & -235 \\ -1175 & 1265 \end{bmatrix}$$

Por outro lado

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 5/6 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{bmatrix}$$

Por fim resulta

$$T = \begin{bmatrix} 6/5 & 100 \\ 20 & 6 \end{bmatrix}; \quad V = \begin{bmatrix} 582/75 & 45136/9 \\ 1496/9 & 970 \end{bmatrix}; \quad \sigma = \begin{bmatrix} 2{,}79 & 70{,}80 \\ 12{,}90 & 31{,}15 \end{bmatrix}$$

Como se verifica, o tempo médio de primeira passagem do campo para a cidade é de 20 anos, com um desvio padrão de quase 13 (12,90) e o correspondente do movimento inverso é de 100 anos, com um desvio padrão de quase 71 (70,80); a dispersão em torno dos valores médios é extremamente elevada. Esses tempos, por outro lado, são os mesmos que ocorreriam em um processo puramente aleatório ($1/p_{ij}$) embora as variâncias sejam (apesar de elevadas) inferiores as que ocorreriam em tal processo.

3.2.13 — 0 segundo e terceiro exemplos, serão resumidos também com a indicação, apenas, dos resultados finais. Assim em relação ao 2.º exemplo tem-se:

$$\rho = 1/31 \begin{bmatrix} 3 & 8 & 20 \\ 3 & 8 & 20 \\ 3 & 8 & 20 \end{bmatrix}$$

$$Z = 1/923521 \begin{bmatrix} 13\,158\,973 & 13\,313\,528 & -15\,548\,980 \\ -\ \ 246\,977 & 13\,740\,378 & -12\,569\,880 \\ -\ 1\,736\,527 & 5\,623\,772 & -\ 8\,283\,820 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 31/3 & 175/4 & 40 \\ 150 & 31/8 & 35 \\ 500/3 & 325/4 & 31/20 \end{bmatrix}; \quad \sigma = \begin{bmatrix} 54{,}1 & 61{,}2 & 36{,}9 \\ 160{,}3 & 20{,}1 & 35{,}2 \\ 162{,}8 & 77{,}8 & 6{,}3 \end{bmatrix}$$

Ainda aqui prevalece a conclusão de que o processo é de grande variabilidade. Finalmente, no exemplo da Mobilidade Social figuram a seguir as matrizes e constante de 6a. Sec. 6, Cap. VII

$$T = \begin{bmatrix} 14{,}9 & 2{,}1 & 5{,}6 \\ 25{,}1 & 1{,}6 & 4{,}3 \\ 26{,}1 & 1{,}9 & 3{,}2 \end{bmatrix}; \quad \sigma = \begin{bmatrix} 22{,}5 & 1{,}5 & 4{,}1 \\ 25{,}0 & 1{,}2 & 3{,}9 \\ 25{,}1 & 1{,}4 & 3{,}5 \end{bmatrix}$$

A variabilidade permanece extremamente elevada e é, neste último exemplo, praticamente independente do estado de partida.

O CASO DE CADEIA ABSORVENTE

3.2.14 — Nos exemplos dados anteriormente considerou-se apenas o caso de uma *cadeia regular, isto* é, uma cadeia tal que todos os estados se "comunicam" entre si. O sentido dessa "comunicabilidade" ficou muito claro: dados dois estados quaisquer, E_i e E_j, existe um n finito tal que as probabilidades $p^{(n)}_{ij}$ e $p^{(n)}_{ji}$ de que a partir de E_i o sistema possa atingir E_j, e vice-versa, em n etapas, são *positivas* (isto é, *não nulas*). Isso se traduz pela condição de que a matriz de transição do processo, P, seja tal que haja uma potência finita n dessa matriz p^n, *com todas as casas positivas*. Vamos considerar, agora um outro tipo de processo em que isso não ocorre. Considere-se uma região R, subdividida em k sub-regiões R_1, R_2, ..., R_k. A região R pode ser considerada fechada (sem correntes migratórias com o exterior); em caso contrário pode-se considerar a região ampliada $R + \overline{R}$, onde $\overline{R}$ significa "o resto do mundo" ou uma outra região de tal modo escolhida que o conjunto $R + \overline{R}$ constitua uma região fechada ou, pelo menos, *praticamente fechada*. Seja E_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) o estado que ocupa o sistema (indivíduo) quando se encontra na sub-região R_i. Suponhamos agora que introduzimos novos estados para "arrebanhar" o indivíduo (sistema) que morre durante o decurso de uma etapa. Admitido que existem j causas de óbito, acrescentemos, então, os estados $E_{k+1}, E_{k+2}, \ldots, E_{k+j}$ de modo que E_{k+r} indique o estado ocupado pelo indivíduo (sistema) que morre pela causa r. Surgem assim, dois tipos diferentes de estados que se subdividem em duas classes:

a) a classe *transiente,* constituída pelos estados $E_1, E_2, \ldots, E_k$

b) a classe *absorvente,* constituida pelos demais estados, $E_{k+1} \ldots E_{k+j}$.

Os estados que constituem a classe transiente denominam-se estados transientes; os que constituem a classe absorvente, são estados absorventes. Note-se que uma vez que o sistema *sai* da classe transiente não mais pode a ela retornar (não há possibilidade de ressucitar um morto); por outro lado, quando o sistema *entra* em um estado absorvente não mais pode abondoná-lo (pela mesma razão). A primeira propriedade (da classe transiente) não se aplica a cada estado transiente separadamente: o estado E_i $(i \leqslant k)$ pode ser abandonado sem que o sistema fique impossibilitado de a ele retornar. A probabilidade dessa ocorrência não é nula. Essa propriedade se aplica, no entanto à *classe transiente* como um todo: uma vez abandonada não haverá mais possibilidade de retorno. Com relação à classe absorvente, porém, a propriedade enunciada vale para *cada estado separadamente*: uma vez atingido *um estado* absorvente, o sistema não pode mais abandoná-lo.

3.2.15 — Seja m_{rs} a probabilidade condicional

$$m_{rs} = Pr(E_s | E_r)$$

isto é, a probabilidade de que o sistema passe para o estado E_s du rante uma etapa qualquer do processo, se estava no estado E_r na eta pa anterior. Tem-se, então:

$$\sum_s m_{rs} = 1 \qquad r = 1, 2, \ldots, k, k+1, \ldots, k+j \qquad (3.2.15\text{-}1$$

Por outro lado, dada a natureza dos estados de cada classe,

$$m_{rs} = 0, \text{ para } r \geq k+1, \text{ e } s \leq k$$

$$m_{rr} = 1, \text{ para } r \geq k+1; \; m_{rs} = 0, \text{ para } r \geq k+1, \; s \geq k+1 \text{ e } r \neq$$

Assim, a matriz de transição do processo, que representaremos por $\overline{M}$ terá o seguinte aspecto:

$$\overline{M} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} m_{11} & m_{12} & \ldots & m_{1k} & m_{1(k+1)} & \cdot\cdot & & m_{1(k+j)} \\ m_{21} & m_{22} & \ldots & m_{2k} & m_{2(k+1)} & & \cdot & m_{2(k+j)} \\ \ldots & . & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_{k1} & m_{k2} & \ldots & m_{kk} & m_{k(k+1)} & \ldots & & m_{k(k+j)} \\ \hline 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . & . & & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & & \ldots & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} M_1 & D_o \\ \mathbf{O} & I \end{bmatrix} \qquad (3.2.15\text{-}2$$

onde M_1 é a matriz $k \times k$, $M_1 = \{m_{rs}\}$, $r, s = 1, 2, \ldots k$ e D_o é a ma triz $k \times j$

$$D_o = \begin{bmatrix} m_{1(k+1)} & \cdot & m_{1(k+j)} \\ m_{2(k+1)} & \ldots & m_{2(k+j)} \\ . & & \\ . & . & . \\ m_{k(k+1)} & \cdot\cdot & m_{k(k+j)} \end{bmatrix} .$$

As demais matrizes da partição de $\overline{M}$, são: a matriz nula $j \times k$, repr sentada simplesmente por O e a matriz unidade, $j \times j$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

Se, em vez de considerar, separadamente, as j causas de óbito, considerar-se apenas um único estado absorvente, E_{k+1}, onde se incluirão todos os mortos, sem distinção de causa, a matriz $\overline{M}$ apresentará formalmente o mesmo aspecto, mas D_0 ficará reduzido a um vetor coluna, $k \times 1$, a matriz nula será um vetor linha nulo, $1 \times k$ e a matriz unidade será de dimensões 1×1, reduzindo-se pois ao número 1. Resta perguntar: um processo desse tipo (absorvente) admite um vetor fixo (estrutura limite)? Em caso afirmativo, qual será esse vetor limite?

3.2 16 — Para responder a essas perguntas, vamos considerar um exemplo simples, com duas sub-regiões R_1 e R_2 formando uma Região, R, fechada. Aos estados E_1 e E_2 correspondentes a essas regiões, acrescentaremos um terceiro, E_3, no qual se incluem os mortos. O vetor fixo será indicado por $W = [x\ y\ z]$, com $x + y + z = 1$, de modo que a equação de equilíbrio será

$$[x\ y\ z] \cdot \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x\ y\ z]$$

onde a matriz é, por hipótese, uma matriz estocástica.

Multiplicando-se o vetor W pelas duas primeiras colunas da matriz tem-se o sistema

$$\begin{aligned} m_{11}x + m_{21}y &= x \\ m_{12}x + m_{22}y &= y \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

Esse sistema admite a solução:

$$x = 0,\ y = 0;\ z = 1$$

Logo, o vetor fixo da matriz é

$$W = [0\ 0\ 1]$$

o que significa, pràticamente, que o sistema se encaminha irremediàvelmente para o estado E_3 (morte), resultado óbvio, evidente "à priori". A solução $[0\ 0\ 1]$ é a única possível; de fato, ela se torna evidente se multiplicarmos o vetor $[x\ y\ z]$ pela 3.ª coluna da matriz e igualarmos à 3.ª componente de W, isto é, a z Obtém-se:

$$m_{13}x + m_{23}y + z = z$$

Visto que os dois primeiros termos dessa equação são essencialmente positivos, é claro que a única solução será $x = 0$, $y = 0$, resultando, em conseqüência, $z = 1$.

3.2.17 — A partir da matriz M_1, correspondente, na matriz $\overline{M}$, à classe transiente, poderemos construir uma matriz estocástica, de um processo regular, em que ficam suprimidos os estados absorventes. Basta, para isso, fazer

$$\mu_{rs} = m_{rs}/m_r. \tag{3.2.17-1}$$

onde $m_r = \sum_{s=1}^{k} m_{rs}$ para $r = 1, 2, \ldots, k$. Evidentemente,

$$\sum_{s=1}^{k} \mu_{rs} = 1 \qquad \text{para } r = 1, 2, \ldots, k$$

de modo que a matriz

$$M = \{\mu_{rs}\} \qquad r, s = 1, 2, \ldots, k \tag{3.2.17-2}$$

é uma matriz estocástica correspondente a um processo do tipo regular. Essa foi a matriz utilizada nos exemplos numéricos dos parágrafos 3.2.7 a 3.2.9 dados anteriormente. A matriz $\overline{M}$ denomina-se matriz migratória ampliada e M é a matriz migratória reduzida; a matriz M_1 denominaremos de matriz migratória *incompleta*.

ESTUDO ESPECIAL DA MATRIZ INCOMPLETA M_1

3.2.18 — Considere-se uma matriz A, tal que

$$\lim_{n \to \infty} A^n = \mathbf{O} \qquad \text{(matriz nula)} \tag{3.2.18-1}$$

Seja N_n a matriz soma

$$N_n = I + A + A^2 + \ldots + A^{n-1}$$

premultiplicando-se ambos os membros dessa igualdade pela matriz $I - A$, obtem-se:

$$(I - A)\, N_n = (I - A)\,(I + A + A^2 + \ldots + A^{n-1}) = I - A^n$$

Donde se tira

$$N_n = (I - A)^{-1}\,(I - A^n)$$

Tendo em vista o limite de A^n, de acordo com (3.2.18-1), resulta

$$N = \lim_{n \to \infty} N_n = (I - A)^{-1} \qquad (3.2.18\text{-}2)$$

Pode-se ainda escrever:

$$N = (I + A + A^2 + \ldots) = A^r = (I - A)^{-1} \qquad (3.2.18\text{-}3)$$

Assim, a matriz N corresponde ao inverso da $(I - A)^{-1}$ e tem por expressão uma soma indefinida de potências de A, a qual funciona exatamente como se se tratasse de uma série numérica de potências.

3.2.19 — A matriz migratória incompleta satisfaz a condição (3.2.18-1) de modo que a ela se pode aplicar tudo o que foi estabelecido no parágrafo anterior. Assim, $(I - M_1)$ admite uma inversa

$$N = (I - M_1)^{-1} \doteq \sum_{r=1}^{\infty} M_1^r$$

que se denomina *matriz fundamental do processo* absorvente de que M_1 é parte. A importância dessa matriz é que seus elementos têm um significado especial muito útil. Esse resultado acha-se demonstrado em (5), Cap. 3.º, Sec. 2; indicando-se por v_{ij} os elementos de N, isto é

$$N = \{v_{ij}\}$$

resulta que v_{ij} é o número médio (esperança matemática do número) de vezes que o sistema passa pelo estado E_j, partindo do estado E_i ou número médio de visitas ao estado E_j a partir de E_i. É claro que essa grandeza só tem sentido para E_i e E_j pertencentes, ambos, à classe transiente, o que é uma decorrência, aliás, de ser definida através da matriz incompleta M_1. A título de ilustração, considere-se a matriz ampliada

$$\overline{M} = \begin{bmatrix} 0{,}970 & 0{,}015 & 0{,}015 \\ 0{,}060 & 0{,}930 & 0{,}010 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donde a matriz incompleta

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0{,}970 & 0{,}015 \\ 0{,}060 & 0{,}930 \end{bmatrix}$$

Um cálculo imediato fornece

$$I - M_1 = \begin{bmatrix} 0{,}030 & -0{,}015 \\ -0{,}060 & 0{,}070 \end{bmatrix}$$

Donde

$$N = (I - M_1)^{-1} = \begin{bmatrix} 175/3 & 25/2 \\ 50 & 25 \end{bmatrix}$$

Outra aplicação da matriz fundamental é que ela permite determinar, também a matriz N_2 das variâncias dos números médios de visitas ao estado E_j, a partir de E_i. Com as notações já utilizadas no parágrafo 3.2.11, pode-se escrever imediatamente (Ver Ref(5), Cap. 3, Sec. 3):

$$N_2 = N(2N_{dg} - I) - N_{qd}$$

Aplicada essa expressão ao exemplo anterior, obtem-se:

$$N_2 = \begin{bmatrix} 3411{,}33 & 456{,}25 \\ 3283{,}33 & 600{,}00 \end{bmatrix}$$

Donde resulta, por simples extração da raiz quadrada dos elementos dessa matriz, a matriz dos desvios padrões:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 58{,}4 & 21{,}4 \\ 57{,}3 & 24{,}5 \end{bmatrix}$$

3.2.20 — No processo anterior podemos suprimir o estado absorvente E_3 e considerar o que ocorre nesse caso. Teremos então um processo com dois estados E_1 e E_2 cuja matriz de transição seria a matriz M_1. Suponhamos que o vetor inicial seja, por exemplo, $A_o = [40 \quad 60]$. Aplicando a equação

$$A_{t+1} = A_t P \qquad (3.2.20\text{-}1)$$

obtem-se sucessivamente:

$A_1 = [42{,}4 \quad 56{,}4]$ com uma população total de 98,8

$A_2 = [44{,}5 \quad 53{,}0]$ com uma população total de 97,5

Assim, em cada etapa, a população total da região R é inferior à da etapa anterior. Apesar de que, nas duas etapas consideradas a populção de R_1 tenha aumentado à custa de uma redução da de R_2, ambas terminam por decrescer tendendo para 0, uma vez que a população total decresce indefinidamente. Isto é uma decorrência do fato de que, uma vez que a solução de (3.2.20-1) é

$$A_t = A_o P^t$$

e que $\lim\limits_{t \to \infty} p^t = 0$ (matriz nula), é claro que $\lim\limits_{t \to \infty} A_t = [0 \quad 0]$ (vetor nulo). Para que a população da região não tenda para 0, ela deverá ser alimentada por novos entrados. Isso poderia ser conseguido, naturalment através dos nascimentos, no interior da própria população, ou através de uma corrente *exógena* especialmente introduzida para esse fim (migração ou nascimentos). Bastaria, para isso, alimentar uma das regiões, R_1, por exemplo, substituindo-se m_{11} por $m_{11} + h$; a nova matriz seria então:

$$M'_1 = \begin{bmatrix} m_{11} + h & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$$

Pode-se, então, determinar o parâmetro h de modo que haja um vetor $X = [x \quad y]$, com $x + y = 1$, de modo que

$$XM'_1 = \lambda X \qquad (3.2.20\text{-}2)$$

onde λ é um escalar. Diz-se que X é o vetor próprio da matriz M'_1; é claro que para $\lambda = 1$, X será o *vetor fixo* de M'_1, já considerado anteriormente. Tem-se portanto:

$$[x \quad y] \cdot \begin{bmatrix} m_{11} + h & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = \lambda \, [x \quad y]$$

Donde as equações

$$\begin{aligned} (m_{11} + h)x + m_{21}y &= \lambda x \\ m_{12}x + m_{22}y &= \lambda y \\ x + y &= 1 \end{aligned}$$

Introduzindo uma nova variável, $z = y/x$ e dividindo ambos os membros da 1.ª equação por x e da 2.ª por y, vem:

$$m_{11} + h + m_{21}z = \frac{m_{12}}{z} + m_{22}$$

Multiplicando-se ambos os membros dessa equação por z obtém-se uma equação do segundo grau, cuja *raiz positiva* será:

$$z = -\frac{m_{11} - m_{22} + h}{2m_{21}} + \sqrt{\left(\frac{m_{11} - m_{22} + h}{2m_{21}}\right)^2 + \frac{m_{12}}{m_{21}}}$$

Conhecido o valor de z é possível, em combinação com a 3.ª equação do sistema, determinar-se, separadamente, x e y. Quanto ao parâmetro λ, a soma das duas primeiras equações do sistema, combinada com a 3.ª, fornece

$$(m_{11} + m_{12} + h)x + (m_{21} + m_{22})y = \lambda \qquad (3.2.20\text{-}3)$$

Essa equação permite as seguintes conclusões:

I) Se $k = 0$ e $m_{11} + m_{12} = m_{21} + m_{22} = 1$ (matriz estocástica), então $\lambda = 1$, em acordo com os resultados anteriores.

II) Se a matriz original não for estocástica, o valor de h, combinado com os elementos da matriz pode dar: $\lambda > 1$ (população crescente), $\lambda = 1$ (população estacionária) ou $\lambda < 1$ (população decrescente).

Em todos os casos, porém, a população será *estável*, no sentido de que as proporções de indivíduos nas diferentes classes (isto é, o número de sistemas ocupando os diferentes estados) permaneçam constantes, uma vez que na passagem de uma etapa para a outra, ficam multiplicados pelo mesmo número λ. O problema pode ser invertido, determinando-se h de modo que a população tenda, no limite, a crescer segundo um determinado fator de crescimento, λ, prefixado. Todavia na forma da solução indicada essa determinação exigiria um longo processo de aproximações sucessivas. É possível, no entanto estabelecer uma outra forma de solução de modo que se possa determinar h, se for conhecido λ, ou vice-versa, determinar λ se for conhecido h. Para isso considere-se a equação (3.2.20-2) sob a forma:

$$X(M_1' - \lambda I) = \mathbf{O} \qquad (3.2.20\text{-}4)$$

a qual exige seja nulo o determinante

$$\det\ (M_1' - \lambda I) = 0$$

ou, o que é a mesma coisa:

$$\begin{bmatrix} m_{11} + h - \lambda & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} - \lambda \end{bmatrix} = 0 \qquad (3.2.20\text{-}5)$$

Donde se tira:

$$(m_{11} + h - \lambda)\ (m_{22} - \lambda) - m_{12}m_{21} = 0 \qquad (3.2.20\text{-}6)$$

É claro que, fixado λ, determina-se diretamente h, e vice-versa; observe-se, no entanto que, fixado h, resultarão *dois* valores de λ uma vez que a equação obtida, nesse caso, é do 2.º grau. No caso do exemplo anterior (matriz M_1), obtém-se da equação anterior que para $\lambda = 1{,}03$ resulta $h = 0{,}051$. Assim, uma alimentação exógena da região R_1 (uma migração exterior, por exemplo), de um contingente igual a 5,1% da população da região seria suficiente para fazer com que a população total aumentasse à razão de 3% ao ano (etapa). O cálculo de x e y, obtidos através da expresso de z, daria:

$$z = 0{,}1956$$

Donde

$$x = 0{,}8364 \qquad y = 0{,}1636$$

A população tenderia, pois, para uma distribuição regional caracterizada pelo vetor (estrutura relativa) constante

$$A = [0{,}8364 \quad 0{,}1636]$$

A população de cada região, bem como a população total cresceria a uma taxa anual constante de 3%. Voltaremos oportunamente às equações 4, 5 e 6 deste parágrafo e ao estudo especial do fator de crescimento λ.

3.2.21 — Cabe fazer uma observação sobre a alimentação através de uma corrente migratória exógena examinada no parágrafo anterior. Essa corrente foi introduzida apenas na região R_1, ficando a região R_2, sem alimentação direta, acrescida indiretamente de uma contribuição proveniente das migrações de R_1 para R_2, onde se incluem, naturalmente, elementos provenientes daquela corrente migratória externa. Assim, R_2 se beneficia da corrente migratória externa, "via R_1". Uma forma diferente de considerar o problema seria admitir-se que todas as regiões recebessem contribuições exógenas diretas. Assim, a matriz M'_1 se deduziria de M_1 por soma de uma matriz diagonal, isto é:

$$M'_1 = M_1 + H = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & . & m_{1k} \\ m_{21} & m_{22} & . \; . & m_{2k} \\ \\ m_{k1} & m_{k2} & . \; . & m_{kk} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 & 0 & & 0 \\ 0 & h_2 & & 0 \\ \\ 0 & 0 & \dots & h_k \end{bmatrix}$$

conhecida a matriz H (isto é todos os h_r) é possível determinar o fator de crescimento limite, λ (dados os m_{rs}) e, bem assim, a estrutura limite (vetor próprio de M'_1).

CAPÍTULO 4 — MODELOS INTER-REGIONAIS

4.1 — Inclusão exógena da natalidade

4 1 1 — O modelo global discreto estudado no Capítulo 1, na hipótese de um crescimento exclusivamente induzido, baseou-se na equação de diferença

$$N_{t+1} = a_t N_t$$

onde o fator de crescimento, a_t é dado por:

$$a_t = (1 + b_t - q_t + i_t - e_t)$$

Nessa equação, tanto a população, como o fator a_t, são escalares. O mesmo tipo de equação é válido, conforme ficou estabelecido, para um modelo multi-regional:

$$N_{t+1} = N_t(I + B_t - Q_t + E_t - S_t) = N_t\overline{P}_t \qquad (4.1.1\text{-}1)$$

com a diferença de que, agora, os elementos que figuram na equação não são escalares, mas matrizes diagonais. Na realidade, pelo fato de serem diagonais todas as matrizes, o modelo multi-regional não é mais do que uma mera extensão, à várias regiões, separadamente, do modelo global aplicável a cada uma delas. A forma matricial, afora o seu caráter de sistematização, não introduz realmente nada de novo em relação ao modelo global estudado anteriormente. O mesmo tipo de extensão poderia ser realizado para grupos ocupacionais (modelo global multi-ocupacional), grupos sociais, econômicos, etc. O aspecto novo irá surgir com o modelo interregional que passaremos a analisar neste Capítulo.

4 1 2 — Voltemos novamente à equação (4.1.1-1) do parágrafo anterior, utilizada no modelo multi-regional. Veremos que a mesma equação é válida para o modelo inter-regional, com a diferença de que, neste novo modelo não figuram apenas os movimentos globais de cada região para o conjunto das demais, porém os movimentos de cada região R_i para cada uma das outras R_j, separadamente. Examinaremos pois, uma por uma, as matrizes que comparecem na equação (4.1.1-1), do ponto de vista do novo modelo. Quanto à natalidade, ela continuará a ser incluida exogenamente através da matriz diagonal de natalidade, correspondente às k sub-regiões R_1, R_2, ... R_k:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & . & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & b_k \end{bmatrix}$$

Em um modelo mais completo, que será introduzido mais adiante, a natalidade terá um caráter endógeno, decorrente da incidência sobre os grupos de mulheres entre 15 e 45 ou 50 anos (em conjunto ou separadas por estado civil) das taxas específicas de fecundidade por idades.

4.1.3 — A mortalidade é incluída no modelo através da matriz de mortalidade

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & \dots & q_{1k} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & \dots & q_{2k} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & \dots & q_{3k} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ q_{k1} & q_{k2} & q_{k3} & \dots & q_{kk} \end{bmatrix}$$

Onde q_{ij} representa a probabilidade de que um membro da população que se achava na região R_i no início do período (em uma dada etapa) se transfira para a região R_j e aí venha a falecer até o final do período (início da etapa seguinte). Façamos:

$$\sum_{j=1}^{k} q_{ij} = q_i \qquad i = 1, 2, 3, \dots, k \qquad (4.1\ 3\text{-}1)$$

Eventualmente pode-se supor

$$q_{ij} = \mu_{ij} q_i \qquad (4.1.3\text{-}2)$$

onde μ_{ij} são os elementos da matriz M, introduzida no parágrafo 3.2.17 (matriz migratória reduzida). Pode-se decompor a matriz Q da seguinte maneira:

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11}-q_1 & q_{12} & \dots & q_{1k} \\ q_{21} & q_{22}-q_2 & \dots & q_{2k} \\ q_{31} & q_{32} & \dots & q_{3k} \\ & & & \vdots \\ q_{k1} & q_{k2} & \dots & q_{kk}-q_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & q_k \end{bmatrix}$$

Denominando a primeira matriz de Q^* e a segunda de $\overline{Q}$ pode-se escrever:

$$Q = Q^* + \overline{Q}$$

Para ilustrar o que foi dito, suponha-se o caso de duas regiões R_1 e R_2, em que:

$$q_1 = 0{,}010 \qquad q_2 = 0{,}015$$

Então a matriz diagonal será

$$\overline{Q} = \begin{bmatrix} 0{,}010 & 0 \\ 0 & 0{,}015 \end{bmatrix}$$

Seja, por exemplo, a matriz migratória líquida:

$$M = \begin{bmatrix} 0,98 & 0,02 \\ 0,03 & 0,97 \end{bmatrix}$$

Mediante aplicação de (4.1.3-2) e (4.1.3-1) obtém-se:

$$Q = \begin{bmatrix} 0,00980 & 0,00020 \\ 0,00045 & 0,01455 \end{bmatrix}$$

$$Q^* = \begin{bmatrix} -0,00020 & 0,00020 \\ 0,00045 & -0,00045 \end{bmatrix}$$

Em geral a matriz Q^* apresenta, em todos as casas, valores muito próximos de 0, com todos os elementos diagonais negativos, de modo que não haverá, em geral, erro de grande monta, em supôr-se aproximadamente

$$Q^* \cong \mathbf{O}$$

substituindo-se, portanto, Q por $\overline{Q}$. Trata-se, todavia, de mera aproximação que deve ser aferida em cada caso.

4.1.4 — Resta-nos considerar a matriz $I + E - S$ da expressão (4.1.1-1); é o que vamos considerar neste parágrafo. Um exemplo prévio ilustrará o que se vai dizer. Considere-se a matriz migratória do parágrafo anterior. Tem-se:

$$M - I = \begin{bmatrix} 0,98 & 0,02 \\ 0,03 & 0,97 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,02 & 0,02 \\ 0,03 & -0,03 \end{bmatrix}$$

A última matriz é a matriz $E - S$ de entradas e saídas: saída de 0,02 da região R_1 para a região R_2 e saída de 0,03 da região R_2 para R_1. Assim, de modo geral, pode-se escrever

$$I + E - S = M \tag{4.1.4-1}$$

Do ponto de vista prático, vimos que freqüentemente se pode desprezar a matriz Q^*; todavia, para maior rigor pode-se introduzir a matriz R, que denominaremos de "matriz migratória residual" assim definida:

$$R = M - Q^* \tag{4.1.4-2}$$

Note-se que a matriz R é uma matriz estocástica dado o caráter da matriz Q^*. Assim:

$$\sum_{j=1}^{k} r_{ij} = 1 \qquad i = 1, 2, 3, \dots, k$$

De acordo com a definição da matriz R e a expressão de Q*.

$$r_{ij} = \mu_{ij} - q_{ij} \qquad \text{para } i \neq j \tag{4.1.4-3}$$

$$r_{ii} = \mu_{ii} - q_{ii} + q_i \qquad \text{para } i = j \tag{4.1.4-4}$$

Em todas as matrizes aqui definidas suprimimos o índice t, indicador do tempo; é o que ocorre nos processos homogêneos. Todavia, as mesmas matrizes podem depender de t, o que em nada altera as definições dadas. No próximo parágrafo admitiremos, em geral, essa dependência do tempo.

4.1.5 — Tendo em vista o que foi dito pode-se então escrever:

$$N_{t+1} = N_t(B_t - \overline{Q}_t + R_t) = N_t P_t \tag{4.1.5-1}$$

onde P_t é uma matriz geralmente não estocástica. A equação de diferenças acima tem como solução:

$$N_t = N_o \cdot P_o P_1 P_2 \qquad P_{t-1} = N_o \prod_{s=0}^{t-1} P_s \tag{4.1.5-2}$$

onde N_o é o vetor inicial. Se o processo for homogêneo, todas as matrizes serão iguais a P, de modo que se pode escrever a solução:

$$N_t = N_o P^t \tag{4.1 5-3}$$

Como se verifica as expressões (4.1.5-2) e (4.1.5-3) têm o mesmo aspecto formal das soluções do modelo global, discreto, com crescimento induzido. Seria possível introduzir, também aqui, como no caso dos modelos globais, uma componente autônoma do crescimento, através de um vetor acrescido à equação (4.1.5-1). Resultaria:

$$N_{t+1} = N_t P_t + \overline{M}_t \tag{4.1.5-4}$$

cuja solução sob o aspecto formal seria também análoga à do modelo global, isto é:

$$N_t = \left[N_o + \prod_{r=0}^{t-1} \overline{M}_r T_r^{-1} \right] \prod_{r=0}^{t-1} P_r \tag{4.1.5-5}$$

onde

$$T_r = \prod_{s=1}^{r} P_s$$

Nessa expressão $\overline{M}_t$ é um vetor que representa, na época t, a parte das correntes migratórias entre as diversas sub-regiões R_i, não explicadas através da matriz residual.

4.1.6 — Como ilustração considere-se uma região fechada, subdividida em 2 sub-regiões, 1 e 2, com a seguinte matriz Q de mortalidade anual:

$$Q = \begin{bmatrix} 0{,}010 & 0 \\ 0 & 0{,}015 \end{bmatrix}$$

a mesma matriz migratória líquida, M, do parágrafo 4.1.3, com o auxílio das quais se obtêve a matriz Q^* ali calculada. Assim, por simples subtração obtem-se a seguinte matriz residual, R:

$$R = M - Q^* = \begin{bmatrix} 0{,}98020 & 0{,}01980 \\ 0{,}02955 & 0{,}97045 \end{bmatrix}$$

Verifica-se, com um pouco de algebra e utilizando as relações (4.1.3-1) e (4.1.3-3) que a matriz R, no caso de 2 sub-regiões ($k = 2$), será:

$$R = \begin{bmatrix} \mu_{11} + (1 - \mu_{11}) q_1 & \mu_{12} - (1 - \mu_{11}) q_1 \\ \mu_{21} - (1 - \mu_{22}) q_2 & \mu_{22} - (1 - \mu_{22}) q_2 \end{bmatrix}$$

o que confirma, feitos os cálculos, os resultados numéricos obtidos, subtraindo-se Q^* de M, assim como o fato de que R é uma matriz estocástica (uma vez que M o é). Seja, agora, a seguinte matriz diagonal de natalidade:

$$B = \begin{bmatrix} 0{,}035 & 0 \\ 0 & 0{,}043 \end{bmatrix}$$

A matriz de projeção será portanto:

$$\overline{P} = (B - \overline{Q} + R) = \begin{bmatrix} 1{,}00520 & 0{,}01980 \\ 0{,}02955 & 0{,}99845 \end{bmatrix}$$

Voltaremos, posteriormente, a utilizar essa matriz de projeção.

4.1.7 — Supôs-se, até agora, uma região fechada, isto é, não sujeita a correntes migratórias com o exterior. A matriz migratória residual R (ou a matriz migratória líquida, M) dará conta, tão somente, das correntes migratórias que se processam entre as diferentes sub-regiões, no interior da região considerada. Para que sejam computadas possíveis contribuições migratórias com o exterior, torna-se necessário acrescentar uma *matriz migratória externa*, W, de modo que a nova matriz de projeção $\overline{P'}$ será:

$$\overline{P}' = (B - \overline{Q} + R + W)$$

onde W é a matriz *diagonal,*

$$W = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & w_2 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & w_3 & & . & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & w_k \end{bmatrix}$$

Os elementos de W são as taxas w_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, correspondentes aos saldos migratórios da região i com o exterior, podendo ser positivas, negativas ou nulas. A taxa w_i será positiva quando a imigração superar a emigração e negativa em caso contrário. É claro que a suposição implícita é de que a corrente migratória é de caráter induzido; se for em parte autônoma, seria necessário incluir, na equação, um vetor autônomo externo, como se fez em (4.1.5-4).

4.1.8 — Dada uma matriz de projeção $k \times k$,

$$\overline{P} = \{\overline{p}_{ij}\}$$

resulta em geral

$$\sum_{j=1}^{k} \overline{p}_{ij} \neq 1 \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, k$$

Normalmente, para que a população seja crescente é necessário que pelo menos para um valor qualquer de i

$$\sum_{j=1}^{k} \overline{p}_{ij} > 1$$

Na prática essa última desigualdade se verifica para todas as linhas, ou para quase todas. Em qualquer caso se pode escrever:

$$\overline{P} = \{\lambda_{ij}\, p_{ij}\} \qquad\qquad i, j = 1, 2, \ldots, k$$

onde

$$\sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1$$

e λ_{ij} são números positivos, ou eventualmente nulos; quando a matriz é estocástica, têm-se obviamente:

$$\lambda_{ij} = 1 \qquad\qquad i, j = 1, 2, \ldots, k$$

Se os parâmetros λ_{ij} não dependerem de j, mas tão somente do índice i então:

$$\overline{P} = \{\lambda_i\, p_{ij}\} \tag{4.1.8-1}$$

o que significa, como se pode ver facilmente, que a matriz P poderá ser decomposta em um produto de duas matrizes:

a) uma matriz diagonal:

$$U = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ & & \cdot & & \vdots \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_k \end{bmatrix}$$

b) uma matriz estocástica:

$$P = \{p_{ij}\}$$

$$\sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, k$$

Outra forma de decomposição possível de uma matriz de projeção qualquer consiste em decompô-la em uma soma

$$\overline{P} = P + K$$

onde P é estocástica e K é uma matriz diagonal cuja obtensão indicaremos a seguir começando com um exemplo numérico. Seja, por exemplo a matriz

$$\overline{P} = \begin{bmatrix} 1{,}11 & 0{,}05 \\ 0{,}15 & 0{,}60 \end{bmatrix}$$

Nessa matriz a soma da 1.ª linha é 1,16 e a da 2.ª 0,75. Há portanto um excesso de 0,16 na 1.ª linha e uma deficiência de 0,25 na 2.ª; subtraindo-se o primeiro do 1.º elemento e somando-se o segundo ao último elemento a matriz resultante será estocástica. Basta, portanto, acrescentar, a fim de não alterar a matriz primitiva, uma matriz diagonal com esses mesmos valores. Assim:

$$\overline{P} = \begin{bmatrix} 1{,}11 - 0{,}16 & 0{,}05 \\ 0{,}15 & 0{,}60 + 0{,}25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}16 & 0 \\ 0 & -0{,}25 \end{bmatrix}$$

De modo geral, dada uma matriz $\overline{P}$ na qual S_i é a soma da i^{ma} linha, ela pode ser decomposta em uma matriz estocástica obtida subtraindo-se S_i-1 do elemento diagonal da i^{ma} linha, acrescida de uma matriz diagonal, cujo elemento da i^{ma} linha é, exatamente, igual a S_i-1.

4.2 — Estabilidade a longo prazo. Cálculo da estrutura limite.

4.2.1 — É claro que o modelo inter-regional descrito neste capítulo é aplicável a problemas de natureza inter-ocupacional, de grupos com inter-relações econômicas, sociais, etc. Continuaremos todavia a tratá-lo como modelo inter-regional. Para facilitar denominaremos daqui por diante de *vetor estrutura* (inter-regional) o vetor, acrescido ou não de índice indicador do tempo (t):

$$N = [a_1\ a_2\ .\ .\ a_k]$$

onde $\Sigma a_i = 1$; por outro lado denominaremos de *vetor população* ao vetor NT, onde T é a população total da região, de modo que as componentes desse vetor serão os produtos Ta_i. Assim, a i^{ma} componente do vetor estrutura indica a probabilidade de um determinado indivíduo escolhido ao acaso na população (o sistema a que se refere o processo) esteja no estado E_i (na região R_i) ao passo que a componente similar no vetor população indica o número esperado de sistemas que se encontram no estado E_i dentre um total de T sistemas considerados em conjunto. Esse vetor será representado também por N, quando não der lugar a dúvida. Convém introduzir aqui o vetor coluna $k \times 1$,

$$F = [1\ 1\ \ .\ 1]' \qquad (4.2.1\text{-}1)$$

de modo que para o vetor estrutura resultará:

$$NF = 1$$

e para o vetor população:

$$NF = T \qquad (\text{ou, quando fôr o caso } NTF = T)$$

4.2.2 — Considere-se novamente o modelo inter-regional expresso pela equação

$$N_t = N_o \overline{P}^t$$

onde N_t e N_o são *vetores população.*

Em geral todos os elementos de $\overline{P}$ são positivos; todavia isso não é necessário para os nossos propósitos. Basta que haja um número n tal que sejam positivos todos os elementos de $\overline{P}^n$. Por outras palavras a matriz

$$\overline{P}^n = \{\overline{p}_{ij}^{(n)}\}$$

é tal que se verifique

$$p_{ij}^{(n)} > 0 \qquad i, j = 1, 2, \ldots , k$$

Quando isso ocorre observa-se que a matriz $\overline{P}$ apresenta um certo tipo de estabilidade, no sentido de que as relações

$$g_{ij}^{(t)} = \overline{p}_{ij}^{(t+1)} / \overline{p}_{ij}^{(t)}$$

tendem a permanecer constantes a medida que t aumenta, de modo que se pode escrever:

$$\lim_{t \to \infty} g_{ij}^{(t)} = \lambda \qquad i, j = 1, 2, \ldots, k \tag{4.2.2-1}$$

ficando λ compreendido entre os valores de λ_{min} e λ_{max} da matriz U definida em 4.1.8. Note-se de passagem que, qualquer que seja $\overline{P}$, é sempre possível a decomposição indicada em (4.1.8-1). De fato, sendo S_i a soma da i^{ma} linha de $\overline{P}$, basta fazer:

$$p_{ij} = \overline{p}_{ij} / S_i \qquad \text{e} \qquad \lambda_i = S_i$$

Seja a matriz

$$G_n = \{g_{ij}^{(n)}\}$$

O que se disse nas linhas anteriores equivale a admitir-se que

$$\lim_{n \to \infty} G_n = G = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 1 & . & 1 \\ 1 & 1 & . & 1 \\ & & & \\ 1 & 1 & .. & 1 \end{bmatrix}$$

Todavia, essa tendência é, às vezes, algo lenta cabendo estabelecer outros métodos mais rápidos se se deseja obter uma boa estimativa de λ.

4.2.3 — Como ilustração do critério referido no parágrafo anterior, considere-se novamente a matriz de projeção do parágrafo 4.1.6:

$$\overline{P} = \begin{bmatrix} 1{,}00520 & 0{,}01980 \\ 0{,}02955 & 0{,}99845 \end{bmatrix}$$

Elevando essa matriz a potências sucessivas, obtém-se os seguintes resultados para

$$n = 2,\ n = 3,\ n = 16,\ n = 17,\ n = 64,\ n = 65$$

$$\overline{P}^2 = \begin{bmatrix} 1{,}0110121 & 0{,}0396723 \\ 0{,}0592079 & 0{,}9974875 \end{bmatrix} \qquad \overline{P}^3 = \begin{bmatrix} 1{,}0174417 & 0{,}0596288 \\ 0{,}0889915 & 0{,}9971137 \end{bmatrix}$$

$$\overline{P}^{16} = \begin{bmatrix} 1{,}1603595 & 0{,}3323830 \\ 0{,}4961543 & 1{,}0470460 \end{bmatrix} \qquad \overline{P}^{17} = \begin{bmatrix} 1{,}1762167 & 0{,}3548419 \\ 0{,}5296736 & 1{,}0552450 \end{bmatrix}$$

$$\overline{P}^{64} = \begin{bmatrix} 3{,}0877338 & 2{,}0342428 \\ 3{,}0365524 & 2{,}3942351 \end{bmatrix} \qquad \overline{P}^{65} = \begin{bmatrix} 3{,}1639019 & 2{,}0922268 \\ 3{,}1230922 & 2{,}4506477 \end{bmatrix}$$

Dividindo-se os elementos de $\overline{P}^{n+1}$ pelos de $\overline{P}^n$, obtém-se as matrizes G_n definidas no parágrafo anterior. Assim:

$$G_1 = \begin{bmatrix} 1,005782 & 2,003652 \\ 2,003651 & 0,999036 \end{bmatrix} \qquad G_2 = \begin{bmatrix} 1,006360 & 1,503034 \\ 1,503034 & 0,999625 \end{bmatrix}$$

$$G_{16} = \begin{bmatrix} 1,013665 & 1,067569 \\ 1,067558 & 1,007831 \end{bmatrix} \qquad G_{64} = \begin{bmatrix} 1,024663 & 1,028504 \\ 1,028499 & 1,023562 \end{bmatrix}$$

Como se verifica, a tendência à estabilidade referida anteriormente parece já bastante clara com os exemplos numéricos dados. Todavia, como se verá adiante o valor limite para o qual deverão tender todos os elementos da matriz G_n quando $n \to \infty$ é igual a *1,026248*. Assim, o método indicado seria prático como método de cálculo, principalmente se considerarmos matrizes de projeção de maiores dimensões.

4 2.4 — Um caminho alternativo, que apresenta certa vantagem sobre o anterior consiste em calcular as populações totais em épocas diferentes (de preferência com uma etapa de diferença) e comparar os resultados. Representemos por N_t o vetor população e por K_t o vetor estrutura e sejam, no caso de duas sub-regiões:

$$N_o = [40 \quad 60] \qquad K_o = [0,40 \quad 0,60]$$

O cálculo da população total, na época t, T_t, resulta da expressão

$$T_t = N_t F$$

onde F é o vetor coluna definido em (4.2.1-1). Utilizando a mesma matriz de projeção do parágrafo anterior, obtêm-se:

$$N_1 = N_o \overline{P} = [40 \quad 60] \begin{bmatrix} 1,00520 & 0,01980 \\ 0,02955 & 0,99845 \end{bmatrix} = [41,981 \quad 60,699]$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
N_2 &= N_1 \overline{P} = N_o \overline{P}^2 = [43,99296 \quad 61,43614] \\
N_3 &= N_2 \overline{P} = N_o \overline{P}^3 = [46,03716 \quad 62,22120] \\
&\ldots \\
N_{16} &= N_o \overline{P}^{16} = [76,18364 \quad 76,11808] \\
N_{17} &= N_o \overline{P}^{17} = [78,82908 \quad 77,50838] \\
&\ldots \\
N_{64} &= N_o \overline{P}^{64} = [305,70250 \quad 225,02382] \\
N_{65} &= N_o \overline{P}^{65} = [313,94161 \quad 230,72793]
\end{aligned}$$

As populações totais serão:

$$T_0 = 100;\ T_1 = 102{,}680;\ T_2 = 105{,}4291;\ T_3 = 108{,}25836;\ \ldots\ T_{16} = 152{,}30172$$

$$T_{17} = 156{,}33746;\ \ldots\ T_{64} = 530{,}72631;\ T_{65} = 544{,}66954$$

Representando por λ_n a n^{ma} aproximação de λ, resulta a partir dos totais anteriores:

$$\lambda_1 = T_1/T_0 = 1{,}026800;\ \lambda_2 = T_2/T_1 = 1{,}026793;\ \lambda_3 = T_3/T_2 = 1{,}026836$$

$$\ldots\ \lambda_{17} = T_{17}/T_{16} = 1{,}026500\ \ldots\ \lambda_{65} = T_{65}/T_{64} = 1{,}026276$$

Como se verifica, os resultados já apresentam uma maior estabilidade, além de maior aproximação ao valor exato. Essa mesma tendência a uma estabilização resulta do cálculo dos sucessivos valores de K_t. De fato, dividindo-se as componentes de cada N_t, pelo correspondente valor de T_t, obtém-se:

$$K_0 = [0{,}40 \quad 0{,}60];\ K_1 = [0{,}4089 \quad 0{,}5911];\ K_2 = [0{,}4173 \quad 0{,}5827]$$

$$K_3 = [0{,}4253 \quad 0{,}5747]\ \ldots\ K_{16} = [0{,}5002 \quad 0{,}4998];\ \ldots\ K_{65} = [0{,}5764 \quad 0{,}4236]$$

A estrutura limite resultante da matriz adotada é, como se verá adiante,

$$K = [0{,}5840 \quad 0{,}4160]$$

resultado do qual já se acha bem próximo o valor de K_{65}.

4.2.5 — Há, todavia, uma outra possibilidade para o cálculo de λ, baseado, ainda, nas potências da matriz de projeção. De fato, apesar de que os elementos de G_n, apresentem uma nítida tendência a se estabilizarem no exato valor de λ, só dariam resultados satisfatórios para valores muito elevados de n. Pode-se observar, no entanto, que alguns desses elementos são superiores ao valor exato, ao passo que outros lhes são inferiores. É lícito esperar, portanto, que a soma de todos os elementos da matriz $\overline{P}_t$ apresente uma estabilidade. Considerando-se novamente o vetor coluna F e o seu transposto (vetor linha) F', é claro que tem:

$$F'\,\overline{P}\,F = \sum_i \sum_j \overline{p}_{ij}^{(t)}$$

Assim, pode-se adotar como valor aproximado de λ, o cociente:

$$\lambda_t = F'\,\overline{P}^{t+1}\,F\,/\,F'\,\overline{P}^{t}\,F$$

Com o auxílio dessa expressão obtém-se:

$$\text{Para } t = 16 \quad F'\overline{P}^{17}F = 3{,}1159772$$

$$F'\overline{P}^{16}F = 3{,}0359428$$

$$\text{Donde} \quad \lambda_{16} = 1{,}026362$$

$$\text{Para } t = 64 \quad F'\overline{P}^{65}F = 10{,}8298686$$

$$F'\overline{P}^{64}F = 10{,}5527640$$

$$\text{Donde} \quad \lambda_{64} = 1{,}026260$$

Os resultados assim obtidos são os que mais se aproximam do valor exato de λ. O erro é de apenas *0,000114* no caso de $t = 16$ e de *0,000012* para $t = 64$.

4.3 — Vetor próprio e raízes características da matriz de projeção

4.3.1 — O problema da determinação do vetor fixo, conforme já foi salientado no parágrafo 3.2.20, é um caso particular de um problema mais geral, que será tratado, agora, mais pormenorizadamente. Se X é um vetor de $1 \times k$ e M uma matriz $k \times k$, o produto de X por M é um novo vetor $1 \times k$:

$$XM = Y \tag{4.3.1-1}$$

Assim, M pode ser considerada como um operador matricial que transforma o vetor X em outro vetor Y. Em particular, se Y for um múltiplo de X

$$Y = sX$$

sendo s uma grandeza escalar, então a equação (4.3.1-1) pode ser escrita sob a forma

$$XM = sX \tag{4.3.1-2}$$

ou, ainda

$$X(M - sI) = \mathbf{O} \tag{4.3.1-3}$$

onde $\mathbf{O}$ é o vetor nulo.

Quando isso ocorre, o vetor X denomina-se vetor próprio de norma s da matriz M. Os valores de s que satisfazem a (4.1.3-3) denominam-se raízes características da matriz M; a raiz de maior valor absoluto é a raiz característica principal de M.

Assim, o vetor fixo estudado no Capítulo 3, nada mais é do que um vetor próprio de norma 1. Coube a PERRON[1] demonstrar, pela primeira vez, que a raiz característica de maior valor absoluto de uma matriz *quadrada de elementos positivos, é real e positiva.* FROBENIUS[2] ampliou esse resultado, demonstrando que o vetor próprio associado a essa raiz *é único e possui todas as componentes positivas.* Posteriormente mostrou que o mesmo resultado é válido para a classe das matrizes irredutíveis[*], o qual sob forma menos ampla (weaker form) foi estendido em seguida às matrizes redutíveis não negativas, por SAMUEL KARLIN[3]. Ora, a matriz de projeção $\overline{P}$, no modelo inter-regional, é uma matriz quadrada de elementos positivos, de modo que a ela se podem aplicar os teoremas de PERSON-FROBENIUS para essa classe de matrizes.

4.3.2 — O valor de λ calculado segundo o método indicado em (4.2.4) coincide exatamente com a raiz característica principal de λ, à qual se pode associar um vetor próprio K para o qual tende a estrutura relativa da distribuição inter-regional da população. Para se determinar esse vetor, cujas componentes supomos sejam $x, y, z, \ldots$ basta escrever a equação (4.3.1-2) sob forma explícita e desenvolvê-la, isto é:

$$[x\ y\ z\ \ldots] \begin{bmatrix} \overline{p}_{11} & \overline{p}_{12} & \overline{p}_{13} & . & \overline{p}_{1k} \\ \overline{p}_{21} & \overline{p}_{22} & \overline{p}_{23} & \ldots & \overline{p}_{2k} \\ \overline{p}_{31} & \overline{p}_{32} & \overline{p}_{33} & . & \overline{p}_{3k} \\ . & . & & . & . \\ \overline{p}_{k1} & \overline{p}_{k2} & \overline{p}_{k3} & .. & \overline{p}_{kk} \end{bmatrix} = \lambda\ [x\ y\ z\ \quad]$$

Donde resulta o sistema de

$$\begin{aligned} x\overline{p}_{11} + y\overline{p}_{21} + z\overline{p}_{31} + \ .\ . &= \lambda x \qquad (4.3.2\text{-}1) \\ x\overline{p}_{12} + y\overline{p}_{22} + z\overline{p}_{32} + \ \ldots &= \lambda y \\ x\overline{p}_{13} + y\overline{p}_{23} + z\overline{p}_{33} + \ .\ . &= \lambda z \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ x + y + z + \ \ .\ \ .\ \ . &= 1 \end{aligned}$$

Desse sistema de k + *1* equações podem-se tirar os valores das k + *1* incógnitas $x, y, z, \ldots$ e λ. Se λ tiver sido determinado previamente a partir de (4.2.4) uma das equações é desnecessária.

---

* Que não podem, por permutação de linhas e colunas, ser reduzida do tipo

$$\begin{bmatrix} B & C \\ O & D \end{bmatrix}$$

onde B e D são matrizes quadradas e o é a matriz nula

Uma segunda forma de determinar λ pode ser obtida a partir de .... (4.3.1-3). Aquela condição exige, de fato que o determinante de $\overline{P}- sI$ seja nulo, isto é,

$$\det(\overline{P} - \lambda I) = 0 \qquad (4.3.2\text{-}2)$$

Donde, sob outro aspecto:

$$\det(\overline{P} - \lambda I) = \begin{bmatrix} \overline{p}_{11}-\lambda & \overline{p}_{12} & \dots & \overline{p}_{1k} \\ \overline{p}_{21} & \overline{p}_{22}-\lambda & \dots & \overline{p}_{2k} \\ . & . & . & \\ \overline{p}_{k1} & \overline{p}_{k2} & .. & \overline{p}_{kk}-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

O desenvolvimento desse determinante fornece uma equação de grau k, cujas k raízes são as raízes características de $\overline{P}$, sendo a maior delas a raiz principal, taxa de crescimento limite da população considerada Esse método tem a vantagem de fornecer de um só golpe *todas* as raízes características de P e não apenas a raiz principal.

4 3 3 — Como ilustração seja o determinante $\overline{P}$ considerado no item (4.1.6)

$$\overline{P} = \begin{bmatrix} 1{,}00520 & 0{,}01980 \\ 0{,}02955 & 0{,}99845 \end{bmatrix}$$

As equações (4.3.2-1) ficarão, nesse caso, reduzidas a 2 se substituirmos, desde logo, y por $1 - x$ de acordo com a última equação:

$$1{,}00520\ x + 0{,}02955\ (1 - x) = \lambda x \qquad (4.3.3\text{-}1)$$

$$0{,}01980\ x + 0{,}99845\ (1 - x) = \lambda\ (1 - x)$$

Dividindo-se a 1.ª por x e a 2.ª por $1 - x$, pondo $z = (1-x)$, igualando e simplificando, resulta a equação do 2.º grau em z:

$$0{,}02955\ z^2 + 0{,}00675\ z - 0{,}01980 = 0$$

cujas raízes são

$$z_1 = 0{,}71228267$$

$$z_2 = -0{,}94070907$$

Somente a 1.ª raiz (positiva) tem aplicação; ora sendo

$$x = 1/(1 + z)$$

resulta:

$$x = 0{,}584016$$

$$y = 0{,}415984$$

A 1.ª das equações (4.3.3-1) dividida por x fornece

$$\lambda = 1{,}00520 + 0{,}02955\ z$$

Donde

$$\lambda = 1{,}026248$$

Assim, no limite, a sub-região 1 terá cerca de 58,4% da população total, a região 2, cerca de 41,6% e ambas crescerão (assim como todo o país) à taxa de 2,62% por período. Note-se que o crescimento do país resulta apenas da diferença entre a natalidade e a mortalidade média ao passo que nas sub-regiões agirão também os movimentos migratórios inter-regionais. O crescimento natural da região 1 é inferior à média, compensado, porém, por uma migração de 2 para 1 superior à de 1 para 2; o contrário ocorre com a região 2 que apresenta um crescimento natural superior à média, compensado pela perda migratória.

A aplicação da equação (4.3.2-2) ao exemplo do item anterior daria

$$\begin{bmatrix} 1{,}00520 - \lambda & 0{,}01980 \\ 0{,}02955 & 0{,}99845 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Donde, pelo desenvolvimento do determinante resulta a equação do 2.º grau.

$$\lambda^2 - 2{,}00365\ \lambda + 1{,}00305685 = 0$$

cuja maior raiz é

$$\lambda_1 = 1{,}026248$$

exatamente o mesmo resultado anterior.

4.3.4 — As raízes características da matriz de projeção têm grande importância prática, e, a cada uma, corresponde um vetor próprio. A raiz de maior valor absoluto, sempre real e postiva, estará compreendida entre o maior e o menor elementos diagonal da matriz U (ver parágrafos 4.1.8 e 4.2.2). Ela tem um significado demográfico muito importante uma vez que representa o fator de variação limite da população considerada. A partir de um certo valor de t, suficientemente grande, a população total e as populações de cada região crescem praticamente com a mesma intensidade. Se a região é fechada, λ *-1*, representa a diferença entre a natalidade e a mortalidade; os movimentos migratórios inter-regionais serão tais que, em cada sub-região, a diferença entre natalidade e mortalidade acrescida da diferença entre as taxas de imigração e emigração internas será também igual a λ *-1*. Como se verá posteriormente quando, em lugar de regiões geográficas, considerarmos a população subdividida em grupos etários, a raiz da matriz de projeção corresponde à taxa intrínseca, *r*, de crescimento de Lotka, conhecida através de memoráveis trabalhos desse autor, de época muito anterior, e baseados em métodos inteiramente diversos, uma vez que foram escritos em uma época em que o emprego prático das matrizes estava muito limitado pela falta do computador eletrônico. A taxa λ *-1* é uma taxa de crescimento anual (etapa do processo) ao passo que a taxa intrínseca de crescimento de Lotka, corresponde a um crescimento contínuo: é a taxa instantânea equivalente a λ *-1*. Entre as duas existe a relação

$$r = lg_e \lambda$$

4.4 — Critério para distribuição regional da população segundo os objetivos políticos

4.4.1 — A distribuição regional relativa da população segundo as várias sub-regiões tende, segundo o modelo estudado neste Capítulo, para uma estrutura limite, definida pelo vetor $N = \lim_{n \to \infty} N_o \bar{p}^n$. Na realidade, o limite que existe nesse caso, é o do vetor N_t/S_t. Pode acontecer, no entanto, que essa distribuição limite apresente características contrárias às metas formuladas nos planos de desenvolvimento econômico que a comunidade deseja por em prática. Assim, de acordo com o vetor limite, a região 1 pode apresentar-se excessivamente povoada, em detrimento de outra região, cujos recursos naturais deverão ser intensivamente explorados, de acordo com os planos de desenvolvimento acima referidos. Daí a necessidade de se examinar o problema da intervenção em matéria demográfica. Não se pretende abordar o problema do ótimo de população da região como um todo, mas, tão somente, a sua distribuição entre as sub-regiões que a compõem, seguindo, de perto, as linhas gerais estabelecidas por ANDREI ROGERS(1) baseado, por sua vez, em um modelo sugerido por JOHN KEMENY e J. LAURIE SNELL (2). O problema, por outro lado, será examinado de forma sumária, considerados apenas os seus resultados básicos.

4.4.2 — Duas questões surgem imediatamente, a saber:

a) dado um particular regime de crescimento, determinado pela matriz *P* nem todas as metas podem ser atingidas. Algumas serão incompatíveis com essa matriz, de modo que a primeira consideração se refere à *factibilidade de uma meta projetada;*

b) uma vez reconhecida essa factibilidade, resta determinar o regime de intervenção capaz de conduzir à meta desejada. Esse regime será caracterizado por um vetor $1 \times k$.

$$G\ (g_1\ g_2\ g_3\ \ldots\ g_k)$$

onde g_i representa o número de pessoas que, na unidade de tempo, devem ser transferidas *para* a região *i*, se for positivo, e da *região i*, se for negativo, a fim de cumprir o objetivo demográfico desejado. Assim, no caso de 3 regiões, 1, 2 e 3, o vetor

$$G(2\ -3\ 1)$$

significa, segundo a convenção estabelecida, que 2 unidades (pessoas, milhares de pessoas, etc.) deverão ser atraídas para a sub-região 1 e 1 unidade par a região 3, todas elas retiradas da região 2. Note-se que o vetor G representa um *objetivo político* que nem sempre poderá ser facilmente realizado, devendo-se, na prática, fazer freqüentes correções ao longo do tempo O que o vetor determina, *é o que se deverá fazer se* se pretende realizar a meta desejada. Quanto ao modo de fazê-lo (compulsório ou por medidas indiretas) e às dificuldades que isso acarreta, são problemas de outra natureza que o método apresentado não pretende sugerir nem poderá resolver. Todavia, o fato de se conhecer o conjunto de transferências necessárias para o cumprimento da meta desejada, constitui, por si só, um notável resultado. É claro que se o regime de crescimento se alterar, isto é, se a matriz $\bar{P}$ se modificar, torna-se necessário determinar um novo vetor G.

4.4.3 — Por efeito da matriz de projeção, o vetor G, ao final de um tempo r estará transformado em um novo vetor

$$G\bar{P}^r$$

de modo que se o mesmo vetor for aplicado anualmente entre 0 e t, a nova distribuição regional da população na época t será:

$$A_t = N_o \bar{P}^t + \sum_{r=0}^{t-1} G\bar{P}^r \qquad (4.4.3\text{-}1)$$

Seja então A o vetor que define a meta desejada em termos das proporções da população total localizada em cada sub-região, o T_t a população total da região. O objetivo a atingir será então fazer com que

$$\lim_{t \to \infty} (A_t / T_t) = A \qquad (4.4.3\text{-}2)$$

Para que essa meta seja factível é necessário, ainda impor a condição de que, em nenhum momento, a população se torne negativa, isto é:

$$N_0 \overline{P}^t + \sum_{r=0}^{t-1} G\overline{P}^r \geq 0 \qquad (4.4.3\text{-}3)$$

O estudo compreende três tipos possíveis de evolução, conforme a natureza da matriz P os quais serão tratados separadamente:

a) população limite estacionária, o que corresponde a uma raiz característica principal, $\lambda = 1$;

b) população limite em declínio, correspondente à raiz característica principal, $\lambda < 1$;

c) população limite em crescimento, correspondente à raiz característica principal $\lambda > 1$.

O último caso é, sem dúvida, o mais importante, do ponto de vista prático; todavia, os casos *a* e *b* apresentam, do ponto de vista teórico um grande interesse, e constituem um preparo necessário à abordagem do caso *c*.

4.4.4 — Considere-se, portanto, inicialmente, o caso de $\lambda = 1$. O estudo compreende duas partes:

i) intervenção mediante controle pleno;

ii) intervenção mediante controle parcial.

O primeiro tipo significa a existência de um controle sobre todas as *sub-regiões* e o segundo supõe que esse controle só possa ser exercido sobre uma parte das *sub-regiões*.

INTERVENÇÃO MEDIANTE CONTROLE PLENO

Seja $\rho = \lim_{t \to \infty} \overline{P}^n$ a matriz limite, constituida, como se sabe, por k vetores iguais a N, limite do vetor N_t Assim, representando-a pela sua forma transposta, tem-se

$$\rho = [N \; N \; N \qquad N] \qquad (4.4.4\text{-}1)$$

Nesta expressão, portanto, N é o vetor linha $N = ({}_1n \; {}_2n \; \ldots \; {}_kn)$ onde ${}_in$ é a população limite da região i. Considere-se, agora, o segundo termo de (4.4.3-1). É condição *necessária* para que o somatório seja convergente, quando $t \to \infty$, que se tenha:

$$\lim_{r \to \infty} (G\overline{P}^r) = \mathbf{O} \qquad (4.4.4.2)$$

Mas, como $\overline{P}^r$ tende para ρ o produto $G\overline{P}^r$ tenderá para $G\rho$. Ora,

$$G\rho = (g_1 + g_2 + g_3 + \ldots g_k).\ N \qquad (4.4.4\text{-}3)$$

de modo que, sendo $N \neq O$, a condição para que se verifique a (4.4.4-3) é que

$$\sum_{i=1}^{k} g_i = 0 \qquad (4.4.4\text{-}4)$$

Assim, para se conseguir a distribuição estável desejada é necessário que as transferências sejam tais que, no conjunto das sub-regiões consideradas elas se compensem, dando um saldo nulo.

Assim, satisfeita a condição (4.4.4-4) o produto $G\rho$ será nulo, isto é, o termo geral da série

$$\sum_{r=0}^{\infty} GP^r$$

onde $\overline{P}$ foi substituido por P, para facilitar, tenderá para O, de modo que se pode escrever

$$\sum_{=0}^{\infty} GP^r = GI + \sum_{r=1}^{\infty} GP^r = GI + \sum_{r=1}^{\infty} G(P^r - \rho) = G\left[I + \sum_{r=1}^{\infty} (P^r - \rho)\right] \qquad (4.4.4\text{-}5$$

uma vez que a subtração de $G\rho$ de cada termo da série em nada modifica o resultado. Ora, o último termo de (4.4.4-5) é o produto GZ onde Z é a matriz fundamental introduzida no Capítulo 3.

Pode-se então escrever

$$\sum_{r=0}^{\infty} GP^r = GZ \qquad (4.4.4\text{-}6)$$

Assim, quando $t \to \infty$ o 1.º termo do 2.º membro de (4.4.4-1) tende para o vetor limite N de modo que:

$$\lim_{t \to \infty} A_t = A = N + GZ \qquad (4.4.4\text{-}7)$$

Note-se que não é necessário, no presente caso, considerar-se a soma s_t da equação (4.4.3-2) uma vez que sendo constante (população limite estacionária) pode-se supor igual a 1, tanto a soma das componentes de qualquer vetor N_t como a do vetor limite N e do vetor A, em virtude de (4.4.4-4). Ora, de acordo com o que foi visto no Capítulo 3, $Z = (I - P + \rho)^{-1}$ de modo que a equação anterior se transforma em

$$A = N + G(I - P + \rho)^{-1} \qquad (4.4.4\text{-}8)$$

ou ainda,

$$A(I - P + \rho) = N(I - P + \rho) + G$$

a qual pode assumir ainda a forma

$$G = A(I - P) + A\rho - NI + NP - N\rho$$

Ora, as últimas 4 parcelas são todas iguais a N. De fato, $A\rho$ é igual a $({}_1a + {}_2a + \ldots {}_ka)$ N mas como a soma entre parêntesis é por hipótese igual a 1, $A\rho$ resulta igual a N. Por outro lado, $NP = N$ porque N é o vetor fixo de P; $N\rho$ é igual a $({}_1n + {}_2n + \ldots {}_kn)$ N e portanto igual a N visto que a soma entre parêntesis é 1; $NI = N_1$. Logo, resulta finalmente

$$G = A(I - P) \qquad (4.4\ 4\text{-}9)$$

expressão que permite determinar o "vetor intervenção" G, em função do "vetor meta" A e da matriz de transição P (matriz de projeção).

4.4.5 — Pode-se comprovar facilmente que o vetor G dado pela expressão (4.4.4-9) satisfaz a equação (4.4.4-4). De fato, sendo E um vetor coluna de componentes iguais à unidade, isto é, representando-o pela forma transposta

$$E = [1\ 1\ 1\ \ldots\ 1]' \qquad (4.4.5\text{-}1)$$

e multiplicando G por E, resulta:

$$GE = \sum_{i=1}^{k} g_i \qquad (4.4.5\text{-}2)$$

ora, multiplicando-se por E o vetor $I - P$ que constitui o 2.º membro de (4.4.4-9) obtem-se

$$A(I - P)\, E = A(IE - PE) = A(E - E) = 0$$

uma vez que a matriz, sendo estocástica, satisfaz à condição

$$\sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1 \qquad i = 1, 2, \ldots k$$

Logo, o vetor $A(I - P)$ satisfaz a condição (4.4.4-4). Para que o objetivo A seja factível basta substituir em (4.4.3-3) o vetor G por $A(I - P)$, resultando para aquela condição

$$N_o P^t + \sum_{r=o}^{t-1} A(I - P) P^r \geq o$$

Mas o somatório é igual a

$$A(I - P)(I + P + P^2 + .. + P^{t-1}) = A(I - P) \frac{I - P^t}{I - P} = A(I - P^t)$$

Logo, a condição anterior será:

$$(N_o - A) P^t + A \geq o$$

ou, o que é a mesma coisa:

$$A \geq (A - N_o) P^t \qquad t \geq o \qquad (4.4.5\text{-}3)$$

Embora essa condição pareça inócua à primeira vista, uma vez que exigiria aparentemente a verificação impossível de uma infinidade de valores de t, o inconveniente é obviado, como salienta Rogers, pela aplicação de um teorema de Kemeny-Snell. Os resultados básicos são os seguintes:

1.º — Se para algum valor s, a soma dos valores absolutos de $(A - N_o) P^t$ não superar o menor elemento de A, então a desigualdade (4.4.5-3) será válida para todo $t \geqslant s$.

2.º — Se $(A - N_o) P^{t+1} \leqslant (A - N_o) P^t$ e a (4.4.5-3) fôr válida para $t = s$, então também será válida para $t > s$.

3.º — Se $AP \leqslant A$ então a (4.4.5-3) será válida para qualquer t e para qualquer N_o.

As demonstrações dessas propriedades encontram-se em Rogers e Kemeny & Snell. Apenas salientamos que esses resultados fornecem um critério viável para decidir sobre a validade de (4.4.5-3) e portanto sobre a factibilidade do objetivo A. Para isso, começa-se com $t = 0$. Se a (4.4.5-3) não for satisfeita para algum t, então não será factível. Se o for, encontrar-se-á finalmente um valor de t satisfazendo aquela condição, não se tornando necessário prosseguir. Os itens 2.º e 3.º permitem, simplesmente, encurtar o processo de verificação, quando aplicáveis.

INTERVENÇÃO MEDIANTE CONTROLE PARCIAL

4.4.6 — É essencialmente baseado nos resultados anteriores. De fato, suponha-se (o que não afeta a generalidade) que as primeiras j

regiões são controláveis e as seguintes $k - j$ não possam ficar sujeitas a qualquer controle. A matriz P pode então ser particionada de modo à separar esses dois tipos de sub-regiões (controladas e não controladas) correspondendo T às regiões controladas.

$$P = \begin{bmatrix} T & U \\ Q & W \end{bmatrix} \tag{4.4.6-1}$$

e o vetor G, terá apenas j primeiras componentes não nulas, isto é,

$$G = [g_1\ g_2\ .\ .\ g_j\ 0\ 0\ \ldots\ 0] = [G^*\ \mathbf{O}] \tag{4.4.6-2}$$

onde G^* é o vetor $1 \times j$ de componentes $g_1\ \ldots g_j$ e $\mathbf{O}$ é o vetor nulo $1 \times (k\text{-}j)$. Decomponha-se também o vetor objetivo A em dois: A^* corresponde às sub-regiões controladas e A^{**} corresponde às demais sub-regiões. Os seguintes resultados gerais são obtidos por Rogers:

a) O vetor A^{**} para as regiões não controladas fica determinado, desde que se fixe A^*, isto é:

$$A^{**} = A(I - W)^{-1} U \tag{4.4.6-3}$$

b) Quanto a G, basta que se determine G^*. Ora, pondo

$$P^* = T + U(I - W)^{-1} Q \tag{4.4.6-4}$$

resulta

$$G^* = A^* (I - P^*) \tag{4.4 6-5}$$

c) a condição (4.4.5-3) continua válida.

4.4.7 — Considere-se, agora, o caso de uma matriz de projeção em que pelo menos uma linha tenha soma inferior à unidade. Então, a raiz característica principal embora não negativa será inferior à unidade e a população limite estará em declínio. Afim de evitar o resultado óbvio que seria a extinção da população, admite-se como ponto de partida que há uma injeção exógena de população, suficiente para compensar a tendência ao declínio. Mais especificamente, a equação (4.4.4-4) ficará substituída por

$$\Sigma\ g_i \geq a$$

onde a é o número mínimo de habitantes necessários para compensar a tendência ao declínio decorrente da raiz característica principal da matriz de projeção ser inferior à unidade. Como no caso anterior distinguem-se duas situações: a do controle pleno e a do controle parcial.

CONTROLE PLENO

A análise fica simplificada pelo fato de que, tendendo $N_o\overline{P}^t$ para zero, na equação (4.4.3-1) quando $t \to \infty$, ela se transforma simplesmente em:

$$\lim_{t \to \infty} \sum_{r=o}^{t-1} G\overline{P}^r = A \qquad (4.4.7\text{-}1)$$

Aqui também se pode dispensar a divisão por s_t uma vez que se supôs a "injeção" exógena de população suficiente para manter s_t constante.

Assim, desenvolvendo o somatório de (4.4.7-1),

$$G\,(I + \overline{P} + \overline{P}^2 + \qquad) = A$$

Ora, uma vêz que $\overline{P}^t \to \infty$ quando $t \to \infty$, obtem-se:

$$G = A\,(I - \overline{P}) \qquad (4.4.7\text{-}2)$$

A expressão de G é portanto a mesma do caso anterior, continuando válida, também, a condição (4.4.5-3).

CONTROLE PARCIAL

Procedendo-se da mesma forma adotada no modelo estacionário, verifica-se que permanece válida a condição (4.4.5-3) para que o objetivo seja factível e a solução única, G é dada pela mesma equação (4.4.6-5) resultando o vetor A^{**} determinado, também, por (4.4.6-3).

4.4.8 — Do ponto de vista prático o caso mais importante é aquele de uma população limite em expansão, cuja matriz de projeção $\overline{P}$ tem uma raiz característica principal, $\lambda > 1$. Infelizmente, é, também, esse o caso mais difícil de sofrer um tratamento teórico. Baseado em considerações de caráter heurístico, e no fato de que, em última análise, a população crescerá a uma taxa constante, igual a λ, Rogers sugere, depois de obter resultados satisfatórios em um processo de simulação, o seguinte critério para determinar o vetor de interferência na época t:

$$G_t = G_o \lambda^t \qquad (4.4.8\text{-}1)$$

onde G_o é o vetor intervenção correspondente a uma população limite estacionária, cuja matriz P está relacionada a $\overline{P}$ segundo a expressão

$$P = \overline{P} - K \qquad (4.4.8\text{-}2)$$

sendo k uma matriz diagonal escolhida de modo que P seja estocástica.

De onde as seguintes normas propostas por Andrei Rogers:

a) Transformar a matriz de projeção $\overline{P}$ segundo a (4.4.8-2);

b) Determinar o vetor intervenção G_o para a população transformada, com matriz P estocástica;

c) Multiplicar por λ em cada etapa, o vetor intervenção correspondente à etapa anterior. Assim, para a 1.ª etapa, o vetor intervenção será $G_o\lambda$; para a segunda, $G_o\lambda^2$, e assim por diante.

Com o método adotado tanto a população como o vetor intervenção crescerão, em última análise, à mesma taxa, constante, λ.

4.4.9 — Considere-se o seguinte problema prático: dados vetores população N_o e N_t, para k regiões, correspondentes a duas épocas separadas por um intervalo inteiro, t, e a matriz que transforma N_o em N_t em uma única etapa. Determinar a matriz de projeção constante, para o intervalo unitário, capaz de transformar N_o em N_t em t etapas.

Esse problema é a contrapartida matricial do problema examinado no Capítulo 2, consistindo em determinar o fator de crescimento (ou a taxa de crescimento) constante, a, quando são dadas as populações nas épocas 0 e t. Nesse caso, representando as populações por n_o e n_t, obteve-se:

$$n_t = n_o a^t$$

$$a^t = n_t / n_o$$

Donde

$$lg_e\, a = \frac{1}{t}\, lg_e\, (n_t / n_o)$$

Se, porém, N_t é o vetor que representa a distribuição interregional da população, na época t, resulta

$$N_t = N_o \cdot \overline{P}^t$$

onde $\overline{P}$ é a matriz de projeção para o período unitário. Chamando R a matriz correspondente ao período t, suposta conhecida.

$$N_t = N_o \cdot R$$

Donde

$$\overline{P}^t = R \therefore \overline{P} = R^{1/t} \qquad (4.4.9\text{-}1)$$

O problema consiste, pois, determinar $\overline{P}$ quando se conhece R.

Faça-se
$$R = MDM^{-1} \qquad (4.4.9\text{-}2)$$

onde D é uma matriz diagonal e M uma matriz adequadamente escolhida, como se verá a seguir, ambas quadradas, da mesma ordem que R.

Pode-se então escrever:

$$R^2 = (MDM^{-1})\,(MDM^{-1}) = (MD)\,(M^{-1}M)\,(DM^{-1})$$
$$= MD^2\,M^{-1}$$

Aplicando o mesmo processo, resulta, para n inteiro:

$$R^n = MD^n M^{-1} \qquad (4.4.9\text{-}3)$$

Ora, demonstra-se que essa fórmula é válida para n *fracionário* de modo que se pode escrever

$$\theta(R) = M\,\theta(D)\,M^{-1} \qquad (4\ 4.9\text{-}4)$$

onde $\theta(D)$ é uma função polinomial qualquer. Em particular, pode-se escrever

$$R^{1/n} = M\ D^{1/n} M^{-1} \qquad (4.4.9\text{-}5)$$

Ora, sendo D uma matriz diagonal, torna-se fácil determinar a matriz $D^{1/n}$, de modo que a expressão anterior permita calcular $R^{1/n}$ e portanto, a matriz $\overline{P}$ relativa a um submúltiplo de n.

4.4.10 — Um teorema conhecido da teoria das matrizes estabelece o seguinte: Se R possui raízes características d_i $(i = 1, 2, \dots k)$ diferentes, a matriz D será uma matriz diagonal formada pelas raízes características de R, em ordem decrescente $d_1 > d_2 > \dots > d_k$:

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \dots & 0 \\ & \cdot\cdot & \cdot & & \cdot\cdot \\ 0 & 0 & 0 & & d_k \end{bmatrix}$$

Além disso, os cofatores da primeira coluna da matriz

$$F_i = \{f_{rs}\} = [R - d_i\ I] \qquad i = 1, 2, \dots k \qquad (4\ 4.9\text{-}6)$$

fornecem os diferentes elementos da matriz M. Assim, os elementos $m_{rs}(r = 1, 2, \ldots k)$ da coluna s de M são os cofatores correspondentes à 1.ª linha e à coluna s do determinante F_r, obtido com a raiz d_r da matriz R (elemento diagonal da r^{ma} coluna da matriz D).

4.4.11 — Suponha-se que, para uma etapa (período) de 5 anos, se obteve:

$$R = \begin{bmatrix} 1{,}032177 & 0{,}0998432 \\ 0{,}149031 & 0{,}9981399 \end{bmatrix}$$

e que se deseja determinar a matriz anual de projeção, suposta constante. Trata-se, portanto, de determinar

$$\overline{P} = R^{1/5}$$

ora, as raízes características de R são.

$$d_1 = 1{,}1383223$$

$$d_2 = 0{,}8919944$$

Logo, a matriz D será:

$$D = \begin{bmatrix} 1{,}1383223 & 0 \\ 0 & 0{,}8919944 \end{bmatrix}$$

A matriz correspondente à raiz d_1, é então:

$$F_1 = R - d_1 I = \begin{bmatrix} -0{,}1061453 & 0{,}0998432 \\ 0{,}1490309 & -0{,}1401824 \end{bmatrix}$$

Assim, os elementos da 1.ª coluna de M, serão os cofatores da 1.ª linha de F_1, isto é:

$m_{11} = -\ 0{,}1401824$ (1 ª linha, 1.ª coluna de F_1)

$m_{21} = -\ 0{,}1490309$ (1.ª linha, 2.ª coluna de F_1)

Analogamente, a matriz correspondente à raiz d_2 de R será:

$$F_2 = R - d_2 I = \begin{bmatrix} 0{,}1401826 & 0{,}0998432 \\ 0{,}1490309 & 0{,}1061455 \end{bmatrix}$$

Os elementos da 2.ª coluna de M são os cofatores da 1.ª linha do determinante dessa matriz, isto é:

$$m_{12} = 0{,}1061455 \qquad \text{(1.ª linha, 1.ª coluna de } F_2\text{)}$$

$$m_{22} = -\ 0{,}1490309 \qquad \text{(1.ª linha, 2.ª coluna de } F_2\text{)}$$

A matriz M será então:

$$M = \begin{bmatrix} -0{,}1401824 & 0{,}1061455 \\ -0{,}1490309 & -0{,}1490309 \end{bmatrix}$$

Calculado o inverso de M obtém-se

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} -4{,}0596260 & -2{,}8914207 \\ 4{,}0596260 & -3{,}8185914 \end{bmatrix}$$

Por outro lado, o cálculo de $D^{1/5}$ é imediato por ser D uma matriz diagonal. Assim:

$$D^{1/5} = \begin{bmatrix} 1{,}0262497 & 0 \\ 0 & 0{,}9774002 \end{bmatrix}$$

Donde, mediante aplicação de (4.4.9-5) obtem-se:

$$\overline{P} = R^{1/5} = M\ D^{1/5}\ M^{-1} = \begin{bmatrix} 1{,}0051990 & 0{,}0198000 \\ 0{,}0295544 & 0{,}9984492 \end{bmatrix}$$

A verificação pode ser feita facilmente: de fato, elevando-se essa matriz à 5ª potência obtem-se a matriz original para o período de 5 anos, isto é:

$$\overline{P}^5 = R = \begin{bmatrix} 1{,}032177 & 0{,}0998432 \\ 0{,}149031 & 0{,}9981399 \end{bmatrix}$$

4.4.12 — Para ilustrar mais uma vez o cálculo do vetor intervenção migratória considere-se o exemplo do parágrafo 3.2.8 (população estacionária) cuja matriz de projeção é:

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}940 & 0{,}040 & 0{,}020 \\ 0{,}010 & 0{,}960 & 0{,}030 \\ 0{,}005 & 0{,}010 & 0{,}985 \end{bmatrix}$$

com um vetor limite

$$N = [0{,}0967742 \quad 0{,}2580645 \quad 0{,}6451613]$$

Suponha-se que, é possível um controle das três regiões e que, em virtude de considerações de ordem econômica e social, torna-se desejável uma distribuição algo diferente de N caracterizada pelo vetor objetivo:

$$A = [0{,}15 \quad 0{,}30 \quad 0{,}55]$$

De acordo com (4.4.4-9) o vetor intervenção será:

$$G = A(I - P)$$

Ora,

$$I - P = \begin{bmatrix} 0{,}060 & -0{,}040 & -0{,}020 \\ -0{,}010 & 0{,}040 & -0{,}030 \\ -0{,}005 & -0{,}010 & 0{,}015 \end{bmatrix}$$

Efetuando o produto de A por $I - P$ resulta:

$$G = A(I - P) = [0{,}00325 \quad 0{,}00050 \quad -0{,}00375]$$

Assim, se a população total da região fôr, digamos, de 100 milhões de habitantes as sub-regiões 1 e 2 deverão receber, anualmente 325 000 e 50 000 habitantes, respectivamente, transferidos da região 3.

4.4.13 — Para verificar se o resultado obtido está certo, basta confirmá-lo pela equação (4.4.4-7), isto é:

$$A = N + GZ$$

onde GZ pode ser considerado como *vetor correção* de N, e

$$Z = (I - P + \rho)^{-1}$$

Numericamente resulta:

$$Z = \begin{bmatrix} 0{,}1567742 & 0{,}2180645 & 0{,}6251613 \\ 0{,}0867742 & 0{,}2980645 & 0{,}6151613 \\ 0{,}0917742 & 0{,}2480645 & 0{,}6601613 \end{bmatrix}^{-1}$$

Feitos os cálculos,

$$Z = \begin{bmatrix} 14{,}248699 & 3{,}587930 & -16{,}836629 \\ -\ 0{,}267430 & 14{,}878252 & -13{,}610822 \\ -\ 1{,}880333 & -\ 6{,}089490 & 8{,}969823 \end{bmatrix}$$

Obtém-se desse modo o vetor correção

$$Z = [0{,}0532258 \quad 0{,}0419355 \quad -0{,}0951613]$$

o qual somado a N, fornece o objetivo desejado

$$A = [0{,}15 \quad 0{,}30 \quad 0{,}55]$$

Para verificar se esse objetivo é factível é necessário considerar uma posição inicial definida pelo vetor estrutura N_o. Assim, nem todos os objetivos são accessíveis a partir de N_o. Se por exemplo:

$$N_o = [0{,}20 \quad 0{,}30 \quad 0{,}50]$$

Então:

$$A - N_o = [-0{,}05 \quad 0 \quad 0{,}05]$$

Sendo h_i a i^{ma} componente de $P^k\,(A - N_o)$, a condição de acessibilidade do objetivo será dada por

$$\sum_{i=1}^{k} |h_i| \leqq \min_j a_j$$

onde a_j é a componente j^{ma} de A.

Ora, no caso exemplificado resulta, para $k = o$, $P^k(A\text{-}N_o) = A - N_o$ de modo que,

$$\sum_i |h_i| = 0{,}10$$

ao passo que

$$\min_j \; a_i = 0{,}15$$

Assim a condição é satisfatória já para $k = o$ de modo que não é necessário prosseguir: a estrutura A é acessível a partir de N_o e que indica tratar-se de objetivo factível.

4.5 — Projeção de sub-grupos inter-regionais: população ativa

4 5.1 — Muitas vêzes a projeção que se deseja não é a da população total, mas a de um determinado grupo, como, por exemplo, o da ativa, o da população escolar, etc... Ora, os elementos necessários para a construção da matriz de projeção de tais grupos nem sempre são diretamente disponíveis, de modo que é de toda conveniência um método analítico simples, que permita transformar uma das matrizes na outra. Embora se possa aplicar o mesmo método a vários tipos de grupos, adotaremos, por base, na exposição que se segue, o caso da população ativa, por ser este, do ponto de vista prático, um dos mais importantes, face às dificuldades que freqüentemente apresentam.

4.5.2 — Suponha-se uma região R subdividida em k sub-regiões, com uma população, na época t, dada pelo vetor linha:

$$N_t = |n_{1,t} \; n_{2,t} \qquad n_{k,t}|$$

Admita-se que essa população fica sub-dividida em 2 grupos:

i) dependentes, representada pelo vetor

$$D_t = |d_{1,t} \; d_{2,t} \qquad d_{k,t}|$$

ii) população ativa, definida pelo vetor:

$$A_t = |a_{1,t} \; a_{2,t} \qquad a_{k,t}|$$

sendo, portanto,

$$N_t = D_t + A_t$$

isto é

$$n_{i,t} = d_{i,t} + a_{i,t} \qquad i = 1, 2, \qquad k$$

Seja $\overline{P}$ a matriz de projeção da população total, suposta independente de t (embora o mesmo esquema possa ser aplicado quando ela depende do tempo):

$$N_{t+1} = N_t \overline{P} \qquad (4.5.2\text{-}1)$$

Seja V a matriz de projeção da população ativa:

$$A_{t+1} = A_t V \qquad (4.5.2\text{-}2)$$

onde $V = v_{ij}$, sendo

I) v_{ij}, para $i \neq j$ a relação entre o número de pessoas economicamente ativas que se achavam na região i, na época t, e na região j, na época $t+1$. Corresponde exatamente, em relação aos ativos ao elemento $\overline{p}_{ij}$ da matriz de projeção da população total.

II) v_{ii}, é o elemento correspondente ao $\overline{p}_{ii}$ da matriz $\overline{P}$. Nesse sentido, deve incluir: a) a taxa de "nascimento" de trabalhadores, entendendo-se como tal, a relação entre os trabalhadores novos, ingressados no mercado de trabalho durante o período $t \vdash t+1$, e os que existiam no início do período; b) a taxa de "mortalidade ", compreendida no sentido de saída do mercado de trabalho (incluindo portanto não apenas os óbitos, mas, também, as aposentadorias), correspondente à matriz $\overline{Q}$ do Capítulo 4; as correntes migratórias (de trabalhadores), na sua forma líquida, isto é, correspondentes aos elementos da matriz R do Capítulo 4.

4.5.3 — Considere-se, agora, uma matriz "amplificadora", S, que, aplicada ao vetor A_t, transforma-o no vetor N_t:

$$N_t = A_t S \qquad (4.5.3\text{-}1)$$

Substituído esse valor de N_t na expressão (4.5.2-1), resulta:

$$N_{t+1} = A_t S \overline{P} \qquad (4.5.3\text{-}2)$$

Mas a equação (4.5.3-1) pode ser transcrita para a época $t+1$, substituindo-se no produto $A_{t+1}S$ do segundo membro, o vetor A_{t+1} pelo seu valor $A_t V$ proveniente da equação (4.5.2-2), de modo que se obtem:

$$N_{t+1} = A_t V S \qquad (4.5.3\text{-}3)$$

Comparando-se as duas últimas expressões de N_{t+1} resulta:

$$A_t V S = A_t S \overline{P}$$

de modo que se pode escrever:

$$V S = S \overline{P}$$

Post-multiplicando essa igualdade por S^{-1} vem finalmente:

$$V = S \overline{P} S^{-1} \qquad (4.5.3\text{-}4)$$

Resta-nos, apenas, definir a matriz auxiliar S. Para isso indiquemos por:

n_{ij} a população que vive em i, na época t, procedente de j;

t_{ij}, população ativa vivendo em i, na época t, procedente de j;

n_i, população de i, na época t (por supressão do índice t utilizado anteriormente);

t_i, população ativa de i, na época t.

A matriz S fica definida pelos seus elementos s_{ij}, isto é,

$$S = \{s_{ij}\} \qquad i,j = 1,\ 2, \quad , k$$

onde se tem:

$$s_{ij} = n_{ij}/t_j \tag{4.5.3-5}$$

Ora, essa relação pode ser, ainda, escrita de duas maneiras equivalentes, a saber.

$$s_{ij} = (t_{ij}/t_j)\ (n_{ij}/t_{ij}) = (n_{ij}/n_j)\ (n_j/t_j) \tag{4 5 3-6}$$

ou, para simplificar a notação:

$$s_{ij} = \beta_{ij} \cdot s^*_{ij} = \alpha_j \cdot h_{ij} \tag{4 5 3-7}$$

onde β_{ij} é a relação t_{ij}/t_j, s^*_{ij} é n_{ij}/t_{ij}, α_j representa n_j/t_j e, finalmente, h_{ij} exprime o cociente n_{ij}/n_j.

4.6 — Redução de matriz de projeção

4 6.1 — Seja uma região R, subdividida em diversas sub-regiões. Para exemplo, consideraremos apenas duas: A e B. De modo geral, dentro de cada sub-região, podem ser considerados diversos sub-grupos com características diferentes quanto aos níveis de natalidade, mortalidade, intensidade migratória, todos eles, elementos importantes da matriz de projeção. Sejam, por hipótese, k sub-grupos em cada uma das duas sub-regiões consideradas. Os vetores população:

$$N_{A,t} = \left[n^{A}_{1,t}\ n^{A}_{2,t} \qquad n^{A}_{k,t}\right], \text{ para a sub-região } A$$

$$N_{B,t} = \left[n^{B}_{1,t}\ n^{B}_{2,t} \qquad n^{B}_{k,t}\right], \text{ para a sub-região } B$$

dará lugar a um vetor particionado, para o conjunto das duas sub-regiões, isto é, para a região R, o qual pode ser expresso assim:

$$N_{R,t} = [N_{A,t} \quad N_{B,t}]$$

Sejam, agora, as matrizes de projeção de cada sub-região, extensiva aos k sub-grupos (diferentes profissões, classes de idades, etc.):

$$\mathbf{A} = \{a_{ij}\} \quad \mathbf{B} = \{b_{ij}\} \qquad i, j = 1, 2, \ldots, k$$

Se não existirem correntes migratórias entre A e B (o que é excepcional) a matriz de projeção correspondente a toda a região R, seria, mediante partição adequada

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \vdots & \mathbf{O} \\ \cdots & & \cdots \\ \mathbf{O} & \vdots & \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

onde O é uma matriz nula, $k \times k$. Assim, na época $t+1$ ter-se-á:

$$N_{R,t+1} = [N_{A,t} \quad N_{B,t}] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \vdots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & & \mathbf{B} \end{bmatrix} = [N_{A,t}\mathbf{A} \ \vdots \ N_{B,t}\mathbf{B}] =$$

$$= [N_{A,t+1} \ . \ N_{B,t+1}]$$

4.6.2 — Em geral, porém, entre A e B ocorrem movimentos migratórios de maior ou menor intensidade, que podem ser representados pelas matrizes

$$\mathbf{M}_{AB} = \{m_{ij}^{AB}\} \qquad \mathbf{M}_{BA} = \{m_{ij}^{BA}\} \qquad i, j = 1, 2, \ldots, k$$

Nesse caso, a matriz de projeção para a região R, particionada em função dos k sub-grupos considerados será:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & & \mathbf{M}_{AB} \\ \cdots & & \cdots \\ \mathbf{M}_{BA} & : & \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

Na matriz M_{AB} os elementos indicam as transferências de indivíduos que na época t se encontravam na sub-região A, na classe i e que na época $t+1$ se encontravam na sub-região B, na classe j; a matriz M_{BA} tem significado análogo, de B para A.

Assim, a expressão de $N_{R,t+1}$ pode ser obtida, como anteriormente, utilizando, porém, a nova matriz R, de modo que se terá:

$$N_{R,t+1} = |N_{A,t} \ \dot{} \ N_{B,t}| \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{A} & & \mathbf{M}_{AB} \\ \vdots & \cdots & \cdot \\ \mathbf{M}_{BA} & \vdots & \mathbf{B} \end{vmatrix} = |N_{A,t}\mathbf{A} + N_{B,t}\mathbf{M}_{BA} \ \vdots \ N_{A,t}\mathbf{M}_{AB} + N_{B,t}\mathbf{B}$$

$$= |N_{A,t+1} \ \vdots \ N_{B,t+1}|$$

Apesar de que o problema, em princípio, esteja resolvido, pode haver conveniência de uma redução da matriz R a uma matriz *simples*, 2×2 em substituição àquela, cujas dimensões efetivas são de $2k \times 2k$.

4.6.3 — Para realizar esse objetivo, considere-se a matriz $2 \times 2k$ (2 sub-regiões e k sub-grupos em cada uma):

$$\mathbf{G}_t = \begin{vmatrix} N_{A,t} & \vdots & \mathbf{O} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{O} & \vdots & N_{B,t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n^A_{1,t} & n^A_{2,t} & \ldots & n^A_{k,t} & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & n^B_{1,t} & n^B_{2,t} & & n^B_{k,t} \end{vmatrix}$$

Por outro lado, seja a matriz $2k \times 2$

$$E = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Ora, o produto G_tR será uma matriz $2 \times 2k$; esse resultado, multiplicado por E, de dimensões $2k \times 2$, dará como resultado uma matriz 2×2, cumprindo-se, desse modo, a redução desejada. A matriz resultante será pois, do tipo

$$\overline{P}_t = \begin{vmatrix} \overline{p}_{AA,\,t} & \overline{p}_{AB,\,t} \\ \overline{p}_{BA,\,t} & \overline{p}_{BB,\,t} \end{vmatrix}$$

Eventualmente a matriz R pode, também depender de t, sem que o processo se altere; excepcionalmente a matriz G_t poderá ser independente de t, de modo que a matriz 2×2 resultante (matriz reduzida) será também independente de t; para isso basta que as proporções de n_i^A e n_i^B, em relação à população total da região R permaneçam constantes, de modo que os elementos da matriz G_t poderão ser essas proporções, em lugar de os totais n_i^A e n_i^B utilizados na sua definição.

4.6.4 — De modo geral, se uma região R está constituida de r sub-regiões e, dentro de cada sub-região existem k sub-grupos, ou classes diferentes, sob o ponto de vista dos fatores que influem sôbre o movimento demográfico, a matriz geral de projeção R é uma matriz $(rk) \times (rk)$, particionada *em* r sub-matrizes, correspondentes às r sub-regiões, que serão agora representadas nos índices das matrizes M, por $1, 2, \ldots, r$ (em lugar das letras maiúsculas $A, B, \ldots$ adotadas no parágrafo anterior). Assim, a matriz R terá o seguinte aspecto, onde os elementos diagonais serão indicados por M_{11} M_{22} $\ldots$ M_{rr} em lugar de $A, B, \ldots$

BIBLIOGRAFIA

I — *Livros básicos*

1 — *T. J. BAILEY,* "The elements of Stochastic Processes with applications to the Natural Sciences — Wiley, 1964.

2 — *CHIN LONG CHIANG* — "Introduction to Stochastic Processes in Biostatistics" — Wiley, 1968.

3 — *KARLIN, SAMUEL* — "A First curse in Stochastic Processes" Academic Press, 1966.

4 — *BHARUCHA-REID, A. T.* — "Elements of the Theory of Markov, Processes and their Applications", Mc-Graw-Hill, 1960.

5 — *KEMENY, J. G. and Snell, J. L.* — "Finit e Markov Chains", D. Van Nostrand, 1960, Reprinted 1963, 1965.

6 — *KEMENY, J. G. and Snell, J. L., and Thompson G. L.* — "Introduction to Finite Mathematics".

II — *Artigos fundamentais*

7 — *TARVER, JAMES D. and GURLEY, WILLIAM R.* — "A Stocastic Analysis of Geographic Mobility and Population Projections of the Census Division in the United States" — Demography, vol. 2, 1965, pp. 134-139.

8 — *BLUMEN, ISADORE, KOGAN, MARVIN and Mc CARTHY, PHILIP J.* — "The Industrial Mobility of Labor as a Probability Process (Ithaca: New York State School of Industrial and Labor Relations, Cornell University, 1955).

9 — *PRAIS, S. J.* — "The Formal Theory of Social Mobility", Population Studies, vol. IX, n.º 1, July, 1955, pp. 72-81.

10 — *PRAIS, S. J.* — "Mesuring Social Mobility" — J. R. Journal of Royal Statistics, A., vol. CXVIII, 1955, pp. 56-66.

DADOS ESTATÍSTICOS PARA A ANÁLISE DEMOGRÁFICA DA POPULAÇÃO BRASILEIRA*

JOÃO LYRA MADEIRA
Prof da Escola Nacional de Ciências Estatísticas
e Chefe do Centro Brasileiro de Estudos Demográficos

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

1 1 — Toda a pesquisa científica no campo econômico-social se encaminha cada vez mais no sentido de proporcionar modelos através dos quais se possa desenvolver uma política. Haverá, assim, uma política econômica, uma política demográfica, uma política educacional, etc ,

(*) Trabalho apresentado ao Seminário Brasileiro de População, realizado em São Leopoldo — Rio Grande do Sul, de 27 a 30 de julho de 1973 todas elas constituindo partes integrantes e integradas de uma política mais ampla que é a política do bem estar da coletividade. Isso não afasta — antes incita e motiva — o desenvolvimento da chamada pesquisa científica pura, a qual tem por objetivo preparar as ferramentas e os ingredientes necessários para o posterior desenvolvimento de metodologias adequadas à análise dos fatos observados. Esse tipo de pesquisa tem se mostrado extremamente rentável a longo prazo e de maneira nenhuma ela pode ser subestimada ou relegada a segundo plano.

1.2 — Se por um lado a formulação de modelos permite estabelecer comandos de ações políticas imediatas dentro dos objetivos pré-fixados que constituem as metas consciente e racionalmente enunciadas. a pesquisa pura permite, entre outras coisas, a reformulação dos modelos, a utilização de ferramentas mais poderosas, estabelecendo novas possibilidades que nem sequer eram suspeitadas na época da realização da pesquisa, inclusive pelo próprio pesquisador. O sistema binário de numeração e a álgebra de Boole são exemplos de resultados que os seus próprios autores admitiam como simples especulações teóricas, sem qualquer possibilidade aparente de aplicação prática. Os seus autores não viveram o suficiente para poderem apreciar a admirável aplicação de suas especulações teóricas no campo tecnológico, com o desenvolvimento dos computadores, conduzindo à automação característica da nova era cibernética.

1.3 — A presente exposição não desconhece esses fatos mas ela se detém essencialmente no campo da pesquisa de aplicação imediata, em particular, no da análise demográfica da população brasileira e da sua problemática atual e de um futuro a curto e médio prazos. Como esclarecimento adicional cabe informar que se entende como tal, nesta exposição, um prazo de cinco a trinta anos, quando a maioria da população atual ainda estará viva, embora, muito provavelmente isso não se aplique, infelizmente, ao próprio expositor.

2. COMPONENTES DO MOVIMENTO DEMOGRÁFICO

2.1 — O movimento demográfico que se traduz na variação do número de habitantes, é a resultante da ação combinada da mortalidade, da natalidade e das correntes migratórias, internas e externas. A ação de quaisquer fatores biológicos, econômicos ou sociais sobre o movimento demográfico, se manifesta, em última análise, através de uma dessas três componentes fundamentais. Por outro lado, há uma interação que faz com que a ação que exerce sobre uma delas se traduza, ao longo do tempo, em uma influência sobre as demais, estabelecendo novo ponto de equilíbrio dinâmico, o qual nunca é atingido, porque antes disso, novas alterações diretas ou indiretas das componentes fundamentais modificam o ponto de equilíbrio, estabelecendo uma permanente tendência em busca dessa posição. Embora o equilíbrio dinâmico praticamente não seja atingido em momento algum, porque, em última análise, as próprias variações aleatórias contribuem para isso — é de grande importância para o conhecimento da problemática populacional o conhecimento do ponto de equilíbrio dinâmico resultante de um dado conjunto observado de componentes fundamentais; esse equilíbrio pode ser analisado através de diversos modelos demográficos, entre os quais os modelos de Lotka com todas as conseqüentes ampliações e os diferentes tipos de modelos de simulação merecem particular destaque Esses modelos de simulação despertam um particular interesse quando apresentam um caráter estocástico, uma vez que, somente nesse caso, eles permitem tirar o máximo da informação, que se traduz em uma faixa de possibilidades. Obtém-se, desse modo, um conjunto de possíveis trajetórias da população para um dado sistema de distribuições das componentes fundamentais associadas às distribuições por idade, sexo, região, renda, etc., etc. No presente trabalho tentaremos analisar os dados básicos necessários ao conhecimento dessas componentes fundamentais e dos fatores econômicos, sociais, biológicos e naturais de que dependem

3 O MOVIMENTO DEMOGRÁFICO

3 1 — Considerações gerais

3.1 1 — Em 31/12/1972 a população do Brasil era da ordem dos 101 milhões de habitantes. Em 1.º de janeiro de 1867, isto é, 105 anos antes, a população era de apenas 9 milhões. A diferença de 92 milhões é o resultado da acumulação durante esse período da diferença entre 164 milhões de nascimentos, 74 milhões de óbitos e uns 2 milhões de saldo migratório. Uma redução média de 10% na natalidade do período, mantidas a mesma mortalidade e corrente migratória, teria sido suficiente para diminuir a população final de 101 para 84,6 milhões e uma redução de 10% na mortalidade, mantida a mesma natalidade e o mesmo fluxo migratório, teria aumentado de 101 para 108,4 milhões. Uma redução simultânea de 10% da mortalidade e da natalidade média do período, fariam com que a população final passasse de 101 para 124,8 milhões

3 1 2 — Por aí se tem uma idéia da importância do conhecimento das componentes naturais do movimento demográfico com um erro inferior a 10% e, se possível, abaixo de 5%. Por outro lado, as migrações internacionais tiveram pouca influência direta no movimento demográfico brasileiro. É claro que existe ainda uma influência indireta decorrente da descendência dos migrantes, além da influência econômica, cujos reflexos demográficos seriam difíceis de precisar No entanto, se considerarmos os movimentos inter-regionais, veremos que as correntes

migratórias são extremamente importantes, predominando freqüentemente sobre os movimentos naturais. Passemos, pois, a analisar separadamente a mortalidade, a natalidade e as migrações internas.

3.2 — A mortalidade

3.2.1 — Dois são os aspectos principais a considerar no estudo da mortalidade: a) como fator de decréscimo da população constitui uma das componentes importantes do movimento demográfico; b) como decorrência das condições sanitárias do país constitui um dos indicadores econômico-sociais, no setor da saúde pública.

3.2.2 — Como componente do movimento demográfico, o conhecimento da mortalidade, através de uma tábua de mortalidade, é essencial para estimativas e projeções de população O ideal, nesse caso, seria o conhecimento permanente da mortalidade através de registros contínuos. Essa função deveria caber às estatísticas do Registro Civil, sabidamente deficientes em nosso País, mesmo com relação ao registro dos óbitos. No momento, essa possibilidade só existe para os municípios de algumas capitais e cidades mais importantes. Assim, enquanto para o Brasil, como um todo, só é possível construir uma tábua de mortalidade para o decênio 1960/1970, por comparação entre os dois censos, o CBED já iniciou os cálculos de tábuas de mortalidade relativas ao período mais curto e mais recente de 1969/72 para alguns municípios de capitais, mediante a comparação dos óbitos diretamente apurados, com os expostos ao risco deduzidos da combinação desses óbitos com os dados censitários. Para o Município de Porto Alegre, o primeiro a ser tratado por esse método, já foi construída uma tábua de mortalidade [1] que forneceu as seguintes esperanças de vida ao vencer (vida média ao nascer):

Homens:	59,13 anos
Mulheres:	66,58 anos
Sexos reunidos:	62,77 anos

Uma tábua de mortalidade construída pelo mesmo processo, a partir dos dados do Registro Civil para o conjunto do País, conduziria, no entanto, a uma grande sobreestimação da vida média do brasileiro Ela passa a ser inteiramente inútil para qualquer projeção a prazo médio e longo, desde que a deficiência numérica dos dados sobre óbitos seja superior a uns 3 ou 4% o que é certamente o caso do Brasil Por outro lado, o atraso com que são disponíveis os dados necessários para a construção de uma tábua, constitui outro fator desfavorável que, por si só, reduziria muito a sua utilidade. Se para o Brasil, como um todo, existem

[1] TÁBUA de mortalidade do município de Porto Alegre para o período 1969/71 s n t p 271-6.

todas essas deficiências, elas são ainda maiores ao nível das Unidades da Federação ou das grandes Regiões, o que impede o emprego de matrizes regionais de mortalidade capazes de permitir a realização de projeções segundo as várias regiões. Por isso (e por outros motivos que serão indicados mais adiante) essas regiões tão diversas têm de ser agregadas em um todo heterogêneo Nesse particular, a demografia brasileira ainda se encontra, portanto, na fase dos processos "heróicos", em que uma tábua de mortalidade só pode ser obtida para o período intercensitário. Esse método, porém, está sujeito a uma série de limitações, como por exemplo, ausência de migrações internacionais, hipótese felizmente válida em primeira aproximação para o Brasil Por outro lado, os diferentes métodos possíveis através da utilização dos dados censitários, exigem, às vezes, prodigios de imaginação e de engenhosidade, por parte do pesquisador, como ocorre, por exemplo, em toda a metodologia de Brass. Essas considerações não implicam, de maneira nenhuma, em menosprezar essas metodologias heróicas, queremos, tão somente, deixar claro que, apesar do grande serviço que vêm prestando aos países cujas estatísticas ainda são deficientes, não se deve, por isso, imaginar que todos os problemas estão resolvidos através dessas metodologias Elas constituem meros paliativos — excelentes paliativos, sem dúvida alguma, mas apenas paliativos A solução de caráter definitivo ainda consiste na melhoria do sistema de informações básicas no campo demográfico, isto é, na implementação das estatísticas de óbitos, nascimentos e migrações internas, sem o que não será possível um conhecimento atualizado das componentes do movimento demográfico, nem tão pouco a regionalização dessas componentes

3.2.3 — No que se refere, ainda, à mortalidade, em seu caráter de componente fundamental do movimento demográfico, cabe fazer algumas ponderações de caráter metodológico De acordo com o art 77 do Decreto-lei n.º 1 000, de 21 de outubro de 1969, ".. O assento do óbito deverá conter.

1.º) hora, se possível, dia, mês e ano do falecimento,

2.º)

3 º) nome, prenome, sexo, idade, cor, . do morto; etc."

Para uma rigorosa determinação da taxa de mortalidade, deve-se observar que, pondo de parte as pessoas de 100 anos ou mais, que pela raridade, poderiam ter um tratamento especial, os 8 dígitos consumidos na fixação da data do óbito e da idade, no cartão ou fita, para fins de processamento, não são suficientes para determinar, de maneira completa, os dois fatos, nascimento e morte, na escala do tempo Em vez disso, é possível, *com apenas seis dígitos,* obter uma maior quantidade de informação e determinar os elementos necessários para um cálculo *rigoroso* das taxas anuais de mortalidade por idades, desde que sejam disponíveis os seguintes elementos, no cartão ou fita de processamento

i) centena final do ano de nascimento; ii) centena final do ano do óbito; iii) idade, em anos inteiros, atingida no último aniversário anterior ao óbito.

Essa precisão exigiria, naturalmente, algumas retificações e modificações da legislação atual sobre Registro Civil se se pretende continuar a estatística de óbitos através desse registro. Aliás, há outros pontos a precisar no assentamento do óbito, a fim de que ele possa servir adequadamente a esse objetivo. No que se refere aos óbitos, acreditamos que seja possível o aproveitamento desse registro, ainda que, de início, como um dos elementos do processo de duplo registro de Deming Mahalanobis.

3.2.4 — Do ponto de vista estritamente sanitário, um elemento importante, além das taxas globais de mortalidade e da mortalidade infantil para o conjunto do país e para as diversas regiões, é a estatística por causas de óbitos. Ainda aqui, é básica a distinção entre as taxas brutas de mortalidade e as taxas padronizadas. Todavia, essa padronização pode ser obtida, com vantagem, pelo método indireto, segundo o qual torna-se desnecessário o estabelecimento de tábuas de mortalidade regionais. No momento, as estatísticas por causas de óbitos no Brasil, só são realizadas ou pelo menos divulgadas, para os municípios das capitais. Embora a sua generalização para todo o país seja uma tarefa árdua e ainda distante, muitos outros municípios poderiam ser incluídos, ampliando-se as estatísticas por causas de óbitos para os municípios com mais de 150 ou 200 mil habitantes (digamos) ou pelo menos para os centros urbanos mais importantes desses municípios, além dos municípios das capitais. A apreciação da mortalidade por causas de óbitos constitui uma aplicação dos modelos de causas conflitantes ou riscos competitivos (Chiang, Neyman[2], etc). No trabalho do Centro Brasileiro de Estudos Demográficos, intitulado "Tábuas de permanência e seu emprego em Demografia" tivemos oportunidade de tratar desse problema indicando um método iterativo para obtenção das taxas utilizadas em alguns desses modelos. O processo por nós sugerido, é mais simples do que os de Neyman-Chiang. Ao analisar a mortalidade por causas, salientamos o fato de que o método mais adequado para se apreciar a influência de uma determinada causa de óbito consiste em determinar o aumento de vida média (ou o aumento da população num curto prazo), decorrente da eliminação total ou de uma redução préfixada dessa causa de óbito. Através de estatísticas, ainda não disponíveis, sobre o custo de eliminação de determinadas causas de óbitos (ou de uma dada redução da sua intensidade), seria possível estabelecer qual o aumento de vida média por cruzeiros aplicados em cada programa e assim estabelecer um programa sanitário "ótimo" em termos econômicos Uma aplicação ao Estado da Guanabara relativa ao período

---

[2] CHIANG, Ching Leng. *Introduction to Stochastic Process in Biostatistics,* 1938 e NEYMAN, Jazy *First Course in Probability and Statistics,* 1950

1939/41, em que a vida média ao nascer era de 36,9 anos, forneceu os seguintes resultados para tuberculose e sífilis:

TABELA I

CAUSAS ELIMINADAS	AUMENTO DE VIDA MÉDIA (anos)
Tuberculose	2,8
Sífilis	3,3
Tuberculose e Sífilis	6,5

3 2.5 — Com relação à mortalidade — e o mesmo se aplica, como se verá adiante, à fecundidade — cabe salientar um aspecto de grande importância para a boa compreensão do crescimento demográfico e das perspectivas futuras do País em matéria de população Trata-se de pôr em evidência aquelas relações econômico-demográficas que se traduzem diretamente em modificações da vida média Como é sabido, a vida média é o elemento que, isoladamente, contém a maior quantidade de informações sobre o padrão de mortalidade por idades O aumento da renda "per capita" se correlaciona com o aumento da vida média através de vários fatores, entre os quais, podemos salientar·

a) a maior disponibilidade dos indivíduos para despesas com a higiene e saúde pública;

b) a melhoria das condições gerais de vida com a conseqüente melhoria da alimentação, das condições de moradia etc.

Assim, uma equação de regressão que permita relacionar a vida média com a renda "per capita", constitui um elemento importante para a formulação de perspectiva de crescimento, necessárias por exemplo, nas projeções demográficas. Em lugar de fazermos hipóteses diretamente sobre evolução futura da mortalidade, essas hipóteses transferir-se-ão para o campo econômico. Em um modelo do processo econômico em que a renda constitua a saída do modelo, seria possível determinar, através da equação de regressão, a vida média no início de cada etapa do processo, e com isso a tábua de mortalidade a vigorar no decurso dessa etapa, de modo que a população em lugar de entrar como variável exógena, passaria a constituir uma variável endógena do modelo. Um estudo desse tipo poderia ser realizado, seja com caráter retrospectivo, visando à compreensão do processo econômico-demográfico-social como um todo, seja com caráter prospectivo, a fim de estabelecerem melhores projeções da evolução da população, cada dia mais necessárias para integrar os processos decisórios dos governos, em todos os países do mundo.

3.2.6 — Uma observação importante pode ser feita desde logo, sobre os métodos que denominamos heróicos, muito embora eles não digam respeito apenas à mortalidade. De fato, nós entendemos como tais, todos aqueles métodos, modelos e pesquisas que procuram esclarecer fenômenos sobre os quais há uma considerável deficiência de dados básicos, devendo, por isso, adotar metodologias especiais e análises indiretas ou relações novas, até então deixadas de lado, ou até mesmo insuspeitadas. Não desejamos que em face do que dissemos anteriormente se pretenda inferir que o nosso pensamento contenha qualquer restrição ao uso desses métodos quando necessário, ou que essas técnicas sejam passageiras e que em breve desaparecerão à medida que os dados estatísticos básicos sejam aperfeiçoados. Na realidade, sempre existirá a necessidade do emprego de métodos "heróicos". Em primeiro lugar porque os dados estatísticos nunca abrangerão todos os campos sobre os quais seja necessário realizar pesquisas. O processo de pesquisa é um processo auto-alimentado. Sempre que os estudos e análises vão sendo ampliados com base em pesquisas de tipo clássico, com dados básicos de boa qualidade, haverá necessidade, criada por aqueles estudos e aquelas análises de ampliá-las de modo a abranger novos setores onde as estatísticas ainda são deficientes. O mesmo ocorre num setor em que as estatísticas existem com um certo nível de agregação e se verifica a necessidade de estudos mais profundos, exigindo uma maior desagregação dos dados Nesse caso, pode ser incluído, por exemplo, além de outros, o modelo proposto recentemente por S. H. Preston, sobre a estrutura da mortalidade por causas de óbitos[3], o qual permite, a partir de uma tábua de mortalidade agregada por todas as causas, analisar a estrutura por causas específicas, desagregando, assim, os totais de óbitos por idades segundo um certo grupo de causas mais importantes. Logo, a pesquisa demográfica não deve limitar-se aos setores em relação aos quais haja dados disponíveis de boa qualidade. Se assim fosse, não haveria estudo de mortalidade e fecundidade no Brasil. Desde que haja uma real necessidade de pesquisa em determinado setor, é quase sempre possível estabelecer, na falta de dados estatísticos de boa qualidade, uma particular metodologia do tipo "heróico" para o caso específico de que se trate. Portanto, esse tipo de metodologia sempre terá um lugar de destaque nos planos de pesquisa demográfica. Mas, há, também, o reverso da medalha: o fato de existir ou ser possível conseguir uma metodologia desse tipo, não implica, de modo algum, em que se possa dispensar de pugnar sempre, por uma melhor qualidade dos dados estatísticos em todos os setores de pesquisa.

3.3 — A fecundidade

3.3.1 — Se os dados básicos das estatísticas de óbitos, através do Registro Civil, ainda são deficientes, os que se referem aos nascimentos são deficientíssimos, além de que os fatos registrados, em grande parte não são aqueles que pretende levantar. Por outras palavras, os registros

---

[3] GREVILLE, Thomas N E *Population dynamics* s e , Academic Press, 1972

efetuados não dizem respeito apenas a nascimentos, o que complica e dificulta qualquer tentativa no sentido de se estimar a cobertura efetiva desse registro. Transcrevemos, a seguir, alguns trechos do trabalho apresentado pelo Centro Brasileiro de Estudos Demográficos à reunião da II CONFEST, em novembro/dezembro de 1972:

"Os dados atualmente fornecidos ao público são da pior qualidade e não podem servir de base a qualquer estimativa do movimento da população. Os casamentos, que constituem os melhores dados, ainda são deficientes por falta de uma cobertura total dos cartórios Os óbitos, além dessa deficiência, apresentam uma outra, devida ao fato de serem algo incompletas as declarações no próprio cartório Essas duas deficiências podem ser corrigidas em prazo relativamente curto, mediante medidas administrativas e legais adequadas No entanto, com relação aos nascimentos, onde são bem maiores as deficiências, o assunto é muito mais complexo As falhas resultam de várias circunstâncias sobre as quais dificilmente se pode exercer um controle eficiente. Em primeiro lugar a declaração depende da vontade dos pais São muito freqüentes os registros tardios O pai, que reside em local distante do cartório, registra, de uma só vez, os filhos que nasceram nos últimos 3, 4 ou 5 anos Além disso, em épocas de eleições (como estamos observando agora em vários Estados) são feitos registros tardios de adultos entre 18 e 60 anos, muitos dos quais, senão a maioria, constituem registros duplos (ou triplos). Para um possível eleitor é mais fácil declarar que não foi registrado e conseguir novo registro, para fins eleitorais, do que solicitar a certidão do registro original, em localidade distante, em outra Unidade da Federação. Assim, em 64 registros de certo Município verificado haviam, no 1º trimestre de 1972, apenas 4 relativos a nascimentos ocorridos no trimestre, os demais eram de nascimentos ocorridos nas décadas de 60, 50 e de 40, existindo até um registro de 1912 (pessoa com 60 anos de idade) Ora, deficiências desse tipo só podem ser corrigidas a longo, e muito longo prazo, não sendo concebível que as estatísticas vitais, tão importantes para o País, fiquem na dependência desse lento processo de melhoria.

4. Assim, enquanto o processo de melhoria dos dados do Registro Civil continua, é preciso um método rápido de fazer estimativas do número de nascimentos, o que será possível com o método ora proposto. É fato notório que nos centros metropolitanos do Brasil, uma grande proporção de nascimentos ocorre em hospitais. Para isso contribui a melhoria da rede hospitalar e a ação do INPS. É provável que esta proporção deva crescer com o tempo, existindo, portanto, para esses centros a possibilidade de se coletar, diretamente dos hospitais, dados bastante completos sobre os nascimentos. Com a ação do INPS estendida há pouco às zonas rurais, tam-

bém aí a cobertura deverá melhorar. Existe, ainda, a possibilidade de serem completados estes dados com pesquisas especiais na zona rural para estimar o total de nascimentos no País."

Por outro lado, o Boletim Demográfico CBED, v. 2, 3.4, de abr./jun. 1972, já havia analisado as deficiências do registro de nascimentos, mostrando que mesmo em Unidades como a Guanabara os registros de determinado ano continham cerca de 10,46% de nascimento ocorridos a mais de 5 anos. Essas percentagens se elevavam nas demais Unidades a valores absolutamente inadmissíveis, como se pode ver pela Tabela II.

TABELA II

BRASIL: NASCIMENTOS REGISTRADOS NO ANO DE 1969, SEGUNDO AS UNIDADES DA FEDERAÇÃO

UNIDADES DA FEDERAÇÃO	NASCIMENTOS REGISTRADOS		(2/1)%
	Total (1)	Ocorridos antes de 1964 (2)	
Rondônia	3 577	1 399	39,11
Acre	5 983	3 526	58,93
Amazonas	9 995	5 441	54,44
Roraima	342	214	62,57
Pará	55 282	23 639	42,76
Amapá	5 352	2 250	42,04
Maranhão	79 631	47 526	59,68
Piauí	34 008	18 666	54,89
Ceará	128 460	52 543	40,90
Rio Grande do Norte	53 249	20 789	39,04
Paraíba	102 668	45 603	44,42
Pernambuco			
Alagoas	64 375	33 607	52,21
Fernando de Noronha	33	5	15,15
Sergipe	38 557	12 861	33,36
Bahia	299 037	147 455	49,31
Minas Gerais	452 051	130 766	28,93
Espírito Santo			
Rio de Janeiro	159 592	30 574	19,16
Guanabara	108 875	11 384	10,46
Paraná	267 171	50 141	18,77
Santa Catarina			
Mato Grosso	65 100	24 616	37,81
Goiás	128 276	64 509	50,29
Distrito Federal	24 156	3 694	15,29

Fonte: Boletim Demográfico CBED, vol 2, n 4, abr/jun de 1972
Obs: São Paulo e Rio Grande do Sul não apurados no CBED

3.3.2 — Assim, em conseqüência da situação precária em que se encontram as estatísticas do Registro Civil em relação aos nascimentos, sem quaisquer perspectivas de melhoria a curto prazo, foi sugerida a adoção de um novo sistema radicalmente diferente para o levantamento desses dados. Estamos realmente convencidos de que o atual sistema peca pela base, porque: i) a declaração de nascimento a cargo do pai do recém-nascido (ou da mãe, na falta deste) constitui uma obrigação cujo cumprimento depende de um longo processo educativo; ii) os registros resultantes de interesses outros que não os decorrentes do fato que se pretende conhecer, dificilmente poderão ser evitados Em virtude dessas e de outras circunstâncias, parece, a nós, muito mais fácil obter bons resultados a prazo relativamente curto, se o registro estatístico dos nascimentos, constituir uma condição obrigatória do exercício das atividades de Saúde (estabelecimentos hospitalares) e do exercício profissional (médicos etc). Ainda que a cobertura não seja total, há algumas características do novo sistema que o tornam muito mais apto para realizar essa tarefa: i) os registros no novo sistema serão efetivamente *registros de nascimentos*, não estando, pois, viciados em decorrência da inclusão de fatos que nada têm a ver com os que se pretende levantar (registros tardios e/ou múltiplos para ingresso na escola, na força de trabalho, no contingente eleitoral etc), ii) o sistema tende a melhorar gradativamente com o aumento dos nascimentos por ele abrangidos, devido à ampliação das atividades do INPS, do sistema de Saúde etc., em decorrência da urbanização rápida do País e da extensão daqueles serviços ao interior; iii) finalmente, dado que os registros se referem efetivamente aos fatos pesquisados, é possível comparar o total com os obtidos em outros levantamentos (como, por exemplo, os do PNAD) que *pesquisam os mesmos fatos,* estabelecendo coeficientes de cobertura que facilitarão estimativas posteriores, além de facultar um sistema de controle da qualidade, que dificilmente se poderia aplicar ao Registro Civil. Os registros dos nascimentos através da rede hospitalar, dos médicos e posteriormente das parteiras e curiosas, realizados em colaboração com as Secretarias de Saúde dos Estados, também interessadas nos seus resultados para a realização dos seus programas específicos, poderão constituir, logo de início um sistema de amostra básica capaz de permitir, se não a obtenção do total de nascimentos do País, pelo menos boas estimativas, não deturpadas (unbiased) desse total, bem como das taxas de fecundidade global e por idades da mãe etc Assim, tudo indica ser o novo sistema bem superior ao atual. O Centro Brasileiro de Estudos Demográficos já iniciou alguns contatos preliminares, em Brasília, em Porto Alegre, através das Secretarias de Saúde, tendo verificado nesses primeiros contatos, dois fatos de suma importância para o sucesso do empreendimento: i) as Secretarias de Saúde com as quais o contato foi estabelecido, já vêm trabalhando no mesmo sentido e estão muito interessados na cooperação com a Fundação IBGE, ii) os estabelecimentos hospitalares já utilizam uma ficha de registro de nascimento e consideram viável a possibilidade de complementar as indicações a fim de atenderem às necessidades das estatísticas de nascimentos.

3 3.3 — Os estudos de fecundidade, até o momento, têm sido baseados, no IBGE, em dados censitários resultantes da apuração do quesito sobre número de filhos tidos até o momento do Censo e filhos tidos no ano anterior. Os mesmos quesitos foram formulados no último inquérito da PNAD e deverão sê-lo no próximo. Esses quesitos (o primeiro

dos quais vem sendo incluídos desde o Censo de 1940) têm permitido uma considerável soma de dados sobre a fecundidade da mulher brasileira. O Centro Brasileiro de Estudos Demográficos já iniciou essas análises em relação ao Censo de 1970, o que pretende fazer para todas as Unidades da Federação, para as Grandes Regiões e para o Brasil como um todo. O mesmo tipo de análise será realizada sobre os resultados do último inquérito da PNAD (quarto trimestre de 1972), para o que já foram estabelecidas e aprovadas diversas tabulações que estão sendo ultimadas. Os dados censitários, embora sujeitos, quase sempre, a uma certa dose de subenumeração (que pode ser aproximadamente estimada) permitem, pelo menos, o conhecimento do padrão de fecundidade. O nível absoluto será mais bem conhecido na medida em que pudermos obter estimativas independentes do total de nascimentos. Mas os dados censitários facultam, por outro lado, o cruzamento dos elementos de fecundidade com uma série de outras variáveis econômicas e sociais; o mesmo ocorre com os inquéritos da PNAD. Cabe fazer, aqui, uma observação importante: os fatores econômicos que interferem nos níveis e padrões de fecundidade não são apenas aqueles que dizem respeito às características do casal (renda, atividade, nível educacional etc). São extremamente importantes, também, as relações com o meio econômico-social em que vive. A fecundidade resultante provém de uma atitude que constitui a reação do casal às condições econômico-sociais do seu meio. Os incentivos de que resultam uma determinada dimensão da família e que se traduzem essencialmente em perspectivas de ampliação da renda, de segurança futura e de realizações dos objetivos da família, estão fundamentalmente ligados, é claro, às condições econômico-sociais do casal. Mas, na medida em que esses incentivos constituem o resultado de relações entre o indivíduo e o meio, aquelas condições econômico-sociais do casal devem ser consideradas dentro do contexto econômico-social da coletividade a que pertencem. Assim, um casal pobre vivendo em uma coletividade rica e industrializada, não sofre as mesmas influências e incentivos, nem apresenta as mesmas reações, que um outro de igual renda, em uma coletividade pobre. Além disso, os padrões de renda nas duas coletividades são muito diferentes, e as atividades fundamentalmente diversas. Tudo isso contribui para que as dimensões ótimas da família sejam profundamente diferentes, não tanto em função apenas das características do casal, mas das coletividades a que pertencem. Além dos incentivos, outros elementos devem ser considerados, tais como: i) os custos totais para uma dada dimensão de família, que são mais reduzidos na comunidade pobre, ii) para se conseguir uma dada dimensão da família, a maior mortalidade verificada nas comunidades pobres exige um maior número de nascimentos e, portanto, uma fecundidade mais elevada; iii) o conhecimento dos métodos anticonceptivos é menor nas comunidades pobres, de modo que para a mesma dimensão familiar planejada, haverá maior número de nascimentos não desejados. Tudo isso faz com que os resultados em relação às dimensões da família sejam radicalmente diferentes. Conforme mostramos no curso de Demografia da Escola Nacional de Ciências Estatísticas da Fundação IBGE, baseados em uma análise econômica do sistema familiar, os filhos de determinada ordem, apresentam, em uma comunidade pobre, ao mesmo tempo, um custo marginal menos elevado e uma utilidade marginal mais alta. Daí que, contrariamente à opinião mal fundamentada de alguns, os povos subdesenvolvidos não podem ser acusados de procederem irracionalmente pelo fato de apresentarem uma fecundidade elevada em comparação com a dos povos desenvolvidos, ainda que para o País, como um todo, fosse preferível uma fecundidade mais baixa Os habitantes das comunidades pobres respondem racionalmente às contingências e condições de sua comunidade restrita; apenas funciona aqui o conhecido paradoxo da composição segundo o qual o que é vantajoso para um subconjunto nem sempre é vantajoso para o todo de que ele faz parte Os indivíduos, nas comunidades pobres, respondem racionalmente ao sistema de custos e incentivos de sua comunidade, procurando aumentar o bem estar da família, adotando o tamanho ótimo que corresponde às suas condições específicas O mesmo fazem os habitantes das comunidades do tipo "rico", apenas, nesse caso, a dimensão familiar a que são conduzidos é muito menor Pretender forçar o contrário, exigindo poucos filhos de uma comunidade pobre, é o mesmo que exigir muitos filhos em uma comunidade rica Com isso, o que se está fazendo é violentar a família A única medida a ser tomada, a par do desenvolvimento econômico social das comunidades pobres, é fornecer todos os conhecimentos e todas as facilidades para um planejamento voluntário da família, de modo que na medida em que as condições econômicas e sociais se vão modificando, o procedimento racional dos casais não encontre dificuldade e fricções para se adaptarem, tanto quanto possível, a um comportamento reprodutivo que atenta aos interesses econômico-sociais da comunidade mais ampla que constitui o País como um todo

3 3.4 — Resulta do que foi dito anteriormente — vale a pena insistir — que as relações a serem pesquisadas não são apenas aquelas que se referem às características próprias do casal, tais como renda, nível educacional, profissão, ramo de atividade de que dependem, duração da união, número de filhos tidos etc. É necessário ir além do âmbito familiar e relacionar o comportamento do casal com as condições da pequena comunidade de que os dois fazem parte. Mas, além dessas pesquisas, cujos dados básicos resultam das estatísticas do Registro Civil, das apurações censitárias, dos dados da PNAD ou de uma combinação dos três, há a considerar aquelas pesquisas que versariam sobre motivações, perspectivas e dimensões ideais da família, além de informações sobre conhecimentos, atitudes e práticas em relação à reprodução, estas últimas já conhecidas através da sigla CAP. Dada a sua natureza específica, penetrando na intimidade da família, esses inquéritos só podem ser levados a bom termo, através de pequenas amostras com pessoal adequadamente escolhido, de preferência por intermédio do médico ou conselheiro da família, sempre que isto for possível.

3.3.5 — Outros aspectos importantes ligados às motivações iniciais para a constituição da família se traduzem nas variações da nupcialidade. De fato, os modelos de projeção de população e de interpretação dos movimentos passados, não podem prescindir da nupcialidade. Como salienta David D. McFarlane em "Comparison of Alternative Marriage Models[4]: "Os modelos de nupcialidade constituíram um dos tópicos mais ativos da demografia matemática nos últimos anos". E logo a seguir: "Enquanto vários tópicos especializados da demografia matemática tiveram a contribuição ativa de dois ou três especialistas, há mais de uma dúzia que publicaram trabalhos recentes diretamente relacionados com modelos de nupcialidade", e segue-se a citação de 14 nomes aos quais, à última hora, antes da publicação do trabalho, em notas ao pé da página, acrescenta alguns nomes a mais. Embora reconhecendo a existência de algumas dificuldades e deficiências dos dados básicos, não é difícil melhorar a qualidade dessas estatísticas. Por outro lado, é evidente a importância da nupcialidade para a boa compreensão e formulação dos modelos de crescimento demográfico. De fato, a curto prazo, as variações da renda e do emprego se fazem sentir sobre a taxa de nupcialidade, o que por sua vez faz variar os totais de nascimentos pela alteração do número de primeiros filhos que dão uma contribuição importante ao total. As oscilações do sistema econômico através da nupcialidade de um lado e diretamente em conseqüência das variações da natalidade, de outro, se transferem assim para o sistema demográfico. É claro que uma onda de nascimentos provocada em certa época tende a se reproduzir em intervalos iguais à duração média de uma geração, quando as mulheres que nasceram vão, por sua vez, ter filhos. Pode

TABELA III

DURAÇÃO MÉDIA DE UMA GERAÇÃO E COMPONENTE DO CICLO DE NASCIMENTOS

PAÍS E ÉPOCA	DURAÇÃO MÉDIA DE UMA GERAÇÃO μ	COMPONENTE DO CICLO $2\pi/y$
Bélgica 1963	27,78	27,52
Colômbia 1964	29,60	29,27
Dinamarca 1966	26,65	26,49
Equador 1965	29,41	28,94
Europa 1965	27,76	27,79
Itália 1966	28,55	28,77
Japão 1963	27,78	27,74
Maurícia 1966	28,66	28,18
Escócia 1963	27,63	27,31
Suécia 1965	27,07	27,35
Togo 1961	28,75	29,15
Trinidad e Tobago 1966	27,55	27,54
Estados Unidos 1967	26,28	26,14

Fonte: Population Dynamics, 1972 p. 6.

[4] GREVILLE, op cit , p 138

muito bem ser essa a razão econômica que se encontra na origem das "ondas de população" (Population Waves) que deu título ao trabalho de Nathan Keyfitz em "Population Dynamics". Nesse trabalho, o autor mostra que tais ondas repetidas têm um ciclo praticamente igual ao intervalo médio entre gerações o que vêm dar um significado concreto aos termos correspondentes às raízes imaginárias da equação característica, na solução da equação integral de Lotka. Reproduzimos anteriormente o quadro de Keyfitz onde figuram esses dois elementos.

Os dados sobre casamentos necessários para a construção das tábuas de nupcialidade — base dos modelos de mesmo nome — podem ser obtidos, conforme se disse no trabalho apresentado à II CONFEST, mediante uma melhor cobertura dos cartórios informantes, o que é possível realizar a curto prazo. Cabe salientar, todavia, a importância das uniões consensuais estáveis, que só podem ser estimadas através dos registros censitários ou mediante inquéritos especiais [5].

3.4 — Migrações internas

3.4.1 — As correntes migratórias internas constituem fator freqüentemente predominante em qualquer modelo de crescimento demográfico regional. A sua importância pode ser julgada a partir de vários indicadores. Assim, 32,1% da população de brasileiros natos, residentes no País em 1970, estavam deslocados do seu município de origem. Por outro lado, a taxa anual de crescimento urbano, entre 1960 e 1970, foi de 48,03%, ao passo que a de crescimento rural foi de apenas 8,13‰, de que resultou que 89,1% de todo o crescimento do período ocorreu em regiões urbanas e apenas 10,9% nas zonas rurais. Em 1970 a população urbana representava 55,98% do total, ao passo que, apenas 20 anos antes, era de 36,2%. Todos esses números salientam a importância dos movimentos migratórios, uma vez que os diferenciais de fecundidade e mortalidade seriam absolutamente insuficientes para explicá-los. O reconhecimento da necessidade de uma política migratória implica no reconhecimento de que a distribuição territorial da população, que prevalece atualmente, deve ser considerada desfavorável para os propósitos dos planos integrados de desenvolvimento econômico-social. Na realidade as duas coisas se implicam mutuamente, o que, por sua vez, implica na suposição de que existe algum padrão de distribuição territorial ótimo, ou, pelo menos, muito mais favorável, a ser adotado como objetivo. É possível admitir-se que através de um plano bastante pormenorizado de desenvolvimento econômico-social, de caráter regional, se possa chegar à fixação da quantidade de mão-de-obra necessária em cada região. Dados os coeficientes normais previstos para participação por idades, do homem e da mulher, na força de trabalho, pode-se chegar,

---

[5] Nos modelos de crescimento, a fecundidade, tal como sugerimos no caso da mortalidade, pode resultar de uma regressão com a renda "per capita" e outras variáveis econômicas e sociais, constituindo um "feed-back" através do qual se fortalece o caráter endógeno da população nos modelos de crescimento global

em face das características existentes ou previstas para a mortalidade e a fecundidade, a uma certa distribuição por idades e, conseqüentemente, ao montante da população capaz de proporcionar aquela mão-de-obra regional. Considerando todas as regiões do País em face dos planos de desenvolvimento econômico, é, finalmente, possível fixar não apenas a distribuição territorial da população, mas, também, a população total do País capaz de proporcionar aquela mão-de-obra desejada. Os valores serão adequadamente reajustados, em aproximações sucessivas, até que o objetivo se torne viável tendo em vista o crescimento demográfico previsto, o qual, por sua vez, é influenciado pela ação do próprio plano da política adotada em relação à mortalidade, à fecundidade e às correntes migratórias internacionais. Por outras palavras, fixadas as necessidades regionais de mão-de-obra, é possível, em face dos padrões e níveis de mortalidade e fecundidade, determinar, ao mesmo tempo, a população desejável para o País e a sua distribuição territorial. É claro que essa distribuição territorial pode restringir-se, por exemplo, apenas a uma distribuição rural-urbana ou a uma distribuição rural-urbana em cada uma das cinco Grandes Regiões e, não, obrigatoriamente, uma distribuição por municípios, microrregiões ou Unidades Federadas. A viabilidade do plano é que decidirá em que nível se deverá considerar essa distribuição territorial. Por outro lado, o objetivo a ser atingido não será, obrigatoriamente, do tipo clássico de desenvolvimento econômico-social, mas pode, ao contrário, cogitar apenas de um plano de desenvolvimento rural-urbano, por exemplo, em que se leve em conta os problemas ecológicos e, em particular, a poluição das grandes cidades, decorrentes da industrialização "à outrance". Todavia, o objetivo econômico a atingir escapa ao julgamento do demógrafo, como tal constituindo antes um setor da especialidade dos economistas e dos ecologistas. Um outro ponto a considerar é que o objetivo fixado constitui tão somente uma linha mestra para definir a política migratória, devendo ser permanentemente revisto face aos resultados conseguidos e às novas características do desenvolvimento econômico-social planejado.

3.4.2 — Supondo que se fixe uma meta em termos de distribuição territorial da população sob forma de um "vetor objetivo", isto é, um vetor cujos componentes seriam as populações de cada região, o passo seguinte seria o de estabelecer a política migratória capaz de conduzir àquela distribuição, seja como resultado limite da política adotada, seja como resultado a ser atingido em um prazo pré-fixado. O objetivo deverá ser, ainda, *viável,* isto é, compatível com a capacidade humana de orientar os fluxos migratórios. No caso de um objetivo a ser atingido como resultado limite, já tivemos oportunidade de indicar uma solução no trabalho "Migrações internas no planejamento econômico" [6]. Ela consiste em determinar o vetor limite atual, resultante da combinação da mortalidade, fecundidade e correntes migratórias vigorantes no momento e, se ele for diferente do objetivo pré-fixado, introduzir um *vetor*

[6] COSTA, Manoel Augusto *Migrações internas no Brasil* Rio de Janeiro, IPEA/INPES, 1971 190 p.

corretivo (migrações internas) a que denominamos "vetor intervenção", determinado de tal modo que o novo vetor limite venha a coincidir com o "vetor objetivo". Um processo análogo pode ser aplicado no caso em que o objetivo deva ser realmente atingido em um prazo predeterminado, embora o problema, nesse caso seja algo mais complexo

Para isso é necessário conhecer-se a matriz migratória a qual pode ser uma matriz $2n$ x $2n$ onde n é o número de regiões, separadas em urbana e rural. Eventualmente se poderia considerar uma matriz $3n$ x $3n$, se se desejasse separar em cada região, além da população rural, a das pequenas cidades e das grandes áreas metropolitanas (ou grandes cidades). Maior subdivisão implicaria na matriz kn x kn.

3.4.3 — Felizmente, os dados para a construção dessa matriz podem ser obtidos no Censo Demográfico de 1970, que neste particular, é bastante pormenorizado no Boletim de Amostra, permitindo, ainda, uma série de cruzamentos com variáveis econômicas e sociais importantes, o que torna possível, ao pesquisador, obter, ao lado das intensidades dos fluxos migratórios, as suas características demográfico-econômicas. Uma vez conhecidas as correntes migratórias ideais, isto é, aquelas correntes que associadas com a mortalidade e a fecundidade, conduziriam à distribuição territorial desejável, é necessário, ainda, convencer às pessoas a realizarem esses fluxos migratórios. Pondo de parte qualquer processo de ação pela força, o método natural consistiria em agir sobre aquelas variáveis que induzissem as pessoas a migrarem na forma desejada Acreditamos que o desejo de migrar depende de numerosos fatores difíceis de caracterizar. Todavia, um sistema de impostos diferenciais associados a incentivos dos mais variados tipos, podem obter como resultado orientar os migrantes potenciais no sentido dos fluxos desejáveis Somente mediante uma apuração das características dos migrantes, determinadas através dos cruzamentos das variáveis econômicas e sociais, registradas no boletim do censo e nos inquéritos da PNAD, com os resultados de inquéritos especiais sobre motivações de comportamento e razões das migrações [7], é possível pensar-se em estabelecer um sistema de incentivos e restrições capaz de induzir as correntes migratórias no sentido e intensidade necessários aos objetivos pré-estabelecidos

4. QUALIDADE DA POPULAÇÃO

4.1 — Além dos problemas quantitativos é importante realizar pesquisas que visem ao aprimoramento da qualidade da população, assunto sobre o qual, ao finalizar essa exposição, não podemos deixar de dar algumas indicações sumárias A possibilidade de agir sobre a qualidade

---

[7] A inexistência de estudos sistemáticos desse tipo dificultam, ainda, o estabelecimento de modelos de crescimento de caráter regional, nos quais, além do andamento futuro provável da mortalidade e fecundidade de cada região deveriam ser, também, formuladas hipóteses sobre o andamento provável dos fluxos migratórios inter-regionais

da população resulta do fato de se ter comprovado diretamente na espécie humana, a validade da teoria cromossômica da herança e dos princípios fundamentais da genética, descobertos nos demais seres vivos. Por outro lado, como salienta Frota Pessoa [8], os progressos recentes da citogenética humana, "além de sua grande importância teórica, abre perspectivas auspiciosas no campo aplicado". Resulta daí, que o aconselhamento genético poderá ser feito com maior segurança, tanto maior quanto maior for o conhecimento das características demográficas de importância genética da população brasileira. Esse conhecimento virá, além do mais, permitir uma utilização mais segura dos métodos estatísticos de decisão bayesiana, cujo emprego vem tendo uma aceitação cada vez maior, em contraposição aos processos clássicos.

4.2 — Um dos aspectos a considerar, inicialmente, é o que se refere aos casamentos consangüíneos, como elementos necessários à medida do coeficiente de endocruzamento, com validez geral para o Brasil e com uma precisão satisfatória. A experiência demonstra que o desenvolvimento econômico, por si só, contribui favoravelmente para a redução do grau de endocruzamento, que é medido através do coeficiente F de Sewall Wright; e quanto mais baixo for esse coeficiente tanto menor serão as possibilidades de manifestação dos "genes" recessivos deletérios.

Assim, Salzano e Freire-Maia [9], fornecem os seguintes valores de F (Tabela 16) para as cinco Grandes Regiões brasileiras [10].

Região Sul	0,00081
Região Leste	0,00191
Região Nordeste	0,00365
Região Norte	0,00190
Região Centro-Oeste	0,00228
BRASIL	0,00200

Todavia, dada a exigüidade dos dados, os próprios autores advertem que "essas estimativas (Tabela 16) devem ser aceitas com muita cautela uma vez que apenas representam ordens de grandeza". Ora, seria extremamente útil que através de convênios com as Universidades, se pudesse colocar à disposição dos biologistas e geneticistas a poderosa organização de coleta de dados da Fundação IBGE. Alguns estudos demográficos ligados ao aspecto genético da população brasileira seriam de grande alcance teórico e prático.

4.3 — Outro aspecto importante, ainda ligado aos casamentos, se relaciona com as migrações internas. Assim, os conceitos de "raio matrimonial médio", "distância marital" e "índice de exogamia" (esse

[8] FROTA PESSOA, O Os cromossomos humanos. In: PAVAM, Crodowaldo & CUNHA, A Brito *Elementos de genética* 2 ed São Paulo, Ed Nacional, 1966

[9] SALZANO, F. M. & FREIRE-MAIA, N *Populações brasileiras — aspectos demográficos e antropológicos São Paulo,* Ed. Nacional, 1967.

[10] Regiões brasileiras na época do trabalho.

último introduzido por N. Freire-Maia) são extremamente interessantes para a caracterização dos isolados e cujo alcance ainda não tem sido devidamente aproveitado O raio matrimonial médio é a média das distâncias entre os locais de nascimento dos cônjuges e local de casamento, enquanto a distância marital é, simplesmente, a distância entre os locais de nascimento dos cônjuges Se considerarmos distâncias medidas em linha reta e subdividirmos o raio matrimonial em dois, conforme se refira à esposa ou ao marido, teremos, por soma, o "raio matrimonial total", ou simplesmente a "distância matrimonial". É fácil verificar que a distância marital é sempre menor, quando muito, igual à distância matrimonial. Por outro lado, essas distâncias que estão obviamente relacionadas com as migrações, têm um sentido demográfico que transcende do seu significado puramente genético, traduzindo, também, um conceito de elevado conteúdo econômico-social. As pesquisas nesse setor também são altamente deficientes e a Fundação IBGE muito poderá contribuir para uma considerável melhoria neste setor de conhecimento, certamente, de grande importância para o Brasil. Quanto ao índice de exogamia, ele é calculado como a soma das freqüências dos casais, em que pelo menos um nasceu em localidade diferente daquela em que se realiza o casamento Esse índice, cujo valor está obviamente relacionado com os dois anteriores, é de determinação mais fácil e, conforme já dissemos, pode ser utilizado, assim como os anteriores, para a caracterização dos isolados, isto é, daqueles grupos dentro de cujos limites os cônjuges se escolhem Esse conceito de isolado é um dos mais importantes na genética das populações e seriam de extrema utilidade as pesquisas que se realizassem no sentido de permitir a sua determinação, seja quanto ao aspecto teórico seja quanto ao aspecto prático, relacionado com o levantamento dos dados necessários para a sua determinação

4 4 — Cabe, ainda, algumas considerações especiais sobre o problema das malformações e doenças decorrentes de anomalias cromossômicas Vamos nos referir apenas a dois casos. o primeiro diz respeito a certas anomalias do cromossomo 21 que dão lugar a um tipo de deficiência físico-mental conhecida, vulgarmente, como mongolismo ou imbecilidade mongolóide [11]. Esse tipo de deficiência se manifesta, entre outras coisas, por um severo retardo mental. Está definitivamente comprovado que a incidência do mongolismo resultante da trissomia do cromossomo 21, está intimamente ligada à idade da mãe na ocasião em que tem o filho e, não à idade do pai nem à ordem do filho, ambas associadas, no entanto, à idade da mãe. Não há estatísticas nacionais

[11] Essa denominação, proveniente da peculiaridade que sempre acompanha a anomalia, de uma forma peculiar dos olhos, que os torna semelhantes aos dos mongóis, tende a ser abandonada uma vez que pode induzir erradamente, a idéia de que tal anomalia seja mais freqüente nas pessoas daquela raça, o que não é verdade (Ver "Cromossomos humanos" de O Frota Pessoa)

sobre essa dependência; mas, utilizando o padrão determinado por Carter a Evans, Frota Pessoa e Nilda Martello, em um trabalho publicado pelo CBED ("Estimativas das freqüências ao nascer de crianças afetadas pelo mongolismo em populações brasileiras" — 1969), determinaram a freqüência do mongolismo em diferentes Estados do Brasil, aplicando aquele padrão aos nascimentos por eles estimados para o período 1945-50, distribuídos segundo a idade da mãe, obtendo a incidência de 1,7‰, resultado sensivelmente mais alto do que pesquisas anteriores indicavam. Aplicando o mesmo padrão de Carter e Evans aos "nascimentos do ano anterior", segundo a idade da mãe, registrados no censo de 1970, obtivemos 1,8‰, resultado ainda mais alto, uns 6%, do que o de Frota Pessoa e Nilda Martello. Um padrão sensivelmente mais baixo determinado por Matsunaga para o Japão, aplicado aos mesmos padrões de nascimentos, deu como resultado 1,1‰, valor bastante inferior ao obtido com o padrão de Carter e Evans, o que está indicando a necessidade do conhecimento do verdadeiro padrão brasileiro. Como a distribuição dos nascimentos, segundo a idade da mãe, depende do padrão de fecundidade, é claro que a freqüência da "idiotia mongolóide", irá depender do padrão de fecundidade. Um cálculo simples permite apreciar melhor: se o padrão de fecundidade brasileira se modificasse de modo que a metade dos nascimentos das mães de 35 anos e mais, se distribuissem igualmente nas 4 classes qüinqüenais de 15 a 35, a incidência da referida deficiência calculada segundo o padrão de Carter e Evans diminuiria de 1,8‰ para menos de 1,3‰ (1,29‰). Isso mostra a possibilidade de sensível melhoria da qualidade de uma população, por simples ação sobre o padrão de fecundidade (planejamento familiar qualitativo).

4.5 — Além da anomalia do cromossomo 21, há uma considerável série de anomalias nos cromossomos sexuais (*XX*, para a mulher normal e *XY* para o homem normal) que dão lugar a vários síndromes, além de outros defeitos não classificados como síndromes, todos eles, porém, com graves conseqüências acompanhadas, quase sempre, de retardo mental mais ou menos severo. Conforme demonstrou Penrose, uma dessas anomalias, pelo menos a trissomia do cromossomo sexual, depende, como a do cromossomo 21, da idade da mãe ao dar à luz, agravando-se com a idade, o que permite concluir que uma modificação do padrão de fecundidade no sentido das idades mais jovens reduziria, também, a freqüência dessa anomalia.

Em resumo, pois há uma série de campos, num domínio que chamaríamos de demografia qualitativa, onde as pesquisas ainda são muito deficientes e onde a ajuda do IBGE seria extremamente frutuosa. Temos a certeza de que, num futuro próximo, a Fundação IBGE irá estender a sua ação coordenadora e motivadora a esse campo ainda tão inexplorado em benefício do bem-estar, da saúde e da higidez da população brasileira.

RESUMO

No presente trabalho (paper) o autor procura analisar os dados e levantamentos necessários para a obtenção dos elementos essenciais para as análises demográficas no domínio da fecundidade, da mortalidade e das migrações internas. Sugere medidas para a melhoria das estatísticas vitais, principalmente quanto aos nascimentos e propõe medidas para o desenvolvimento de estudos no campo da genética.

ABSTRACT

In this paper the author attempts to analyse the data and surveys necessaries to obtain the essential eleents for demographic analyses in the areas of fertility, mortality, and internal migration. He suggests measures for the improvement of vital statistics, principally with respect to births, and proposes measures for the development of research in the field of genetics.

DEMOGRAFIA E DESENVOLVIMENTO BRASILEIRO*

Prof. João Lyra Madeira
do Centro Brasileiro de Estudos Demográficos
do IBGE

SUMÁRIO:

1. INTRODUÇÃO

1.1 Desde longa data os problemas de população vêm preocupando os sociólogos, economistas e administradores. Por outro lado, os aspectos teóricos matemáticos desses problemas passaram a ser estudados por atuários e especialistas em biometria, surgindo daí uma nova ciência — A Demografia — destinada a permitir a análise específica dos problemas de população em seus diferentes aspectos. A célebre polêmica entre os partidários de Malthus e os seguidores de Marx despertaram novo interesse pelos problemas de população, na segunda

* Conferência proferida na Escola Superior de Guerra, em 28 de agosto de 1974. Divulgação autorizada pela referida Entidade

metade do século passado. Depois os economistas voltaram a esquecê-los quando, na década dos 30, os problemas a curto prazo assumiram a primazia, relegando a 2.º plano os problemas de população. De fato, no quadro de soluções a curto prazo, a variável demográfica desempenhava um papel puramente exógeno, isto é, constituía apenas um dado a mais a ser considerado na solução dos problemas econômicos, mas não fazia parte da estrutura interna do modelo.

1.2 Foi só depois da segunda guerra mundial que os problemas de população voltaram a desempenhar um papel mais significativo na formulação dos modelos econômicos, dado o caráter endógeno que passou a desempenhar nesses modelos. Cabe aqui ressaltar o papel importante do avanço tecnológico no setor dos transportes e, mais ainda, no das comunicações, nesse novo impulso dado aos estudos populacionais. Esses progressos permitiram que todos os países entrassem em contato com uma dura realidade. Em torno de 1958, cerca de 67% da população do mundo, vivendo nos países mais pobres (com um produto bruto "per capita" não superior a 300 dólares anuais), recebia apenas 14% do produto bruto mundial, ao passo que 25% da população da Terra, vivendo nos países mais ricos (com um produto bruto "per capita" superior a 500 dólares anuais), detinha quase 79% daquele produto bruto. Essa tremenda desigualdade da distribuição mundial da riqueza (que de então para cá ainda se agravou) tornou-se evidente pela comparação dos modos de vida das diferentes nações, patenteada pelos poderosos meios de comunicação modernos, o que despertou o espírito desenvolvimentista que passou a vigorar nos países mais pobres. Por seu turno, esse fato motivou o estudo teórico do processo de desenvolvimento econômico-social e deu uma extraordinária importância política à população nos planos econômicos postos em prática nos países mais pobres.

1.3 De fato, o desenvolvimento econômico, embora realizado através de planos sucessivos a curto prazo, constitui, na sua essência, um objetivo a ser executado a longo prazo. Nessa nova posição as variáveis demográficas não podem figurar como dados do problema. A população constitui um elemento ao mesmo tempo determinante e determinado, isto é, deverá ser incluída no modelo geral de desenvolvimento econômico-social com um caráter endógeno. Por outras palavras, se o modelo de desenvolvimento tem como "out-put" o produto bruto "per capita", por exemplo, esse elemento constituirá "input" de um submodelo demográfico, imbricado no modelo econômico geral, e exercerá um efeito mensurável sobre os fatores do crescimento demográfico, isto é, sobre a mortalidade, a fecundidade e as migrações internas. Não pretendendo fazer uma análise de profundidade da estrutura desse modelo, tentaremos, no entanto, desentranhar alguns aspectos e características importantes da população dentro do processo integrado de desenvolvimento econômico-social.

1.4 Nas estimativas da população brasileira, realizadas pelo Centro Brasileiro de Estudos Demográficos do IBGE, foram utilizadas as seguintes hipóteses, baseadas em suas próprias pesquisas.

Mortalidade — Adotou-se a esperança de vida ao nascer de 58 anos para o qüinqüênio 1970 ⊢ 1975, aumentando gradativamente, até atingir uma esperança de vida de 71 anos no período 1995 ⊢ 2000, correspondente à dos Estados Unidos na atualidade.

Fecundidade — Foram feitas duas hipóteses. a primeira, denominada alternativa superior, parte de uma fecundidade total de 5,27 no período 1970 ⊢ 1975, declinando lentamente até 4,60 no qüinqüênio 1995 ⊢ 2000. A segunda, denominada alternativa inferior, parte de 5,07 em 1970 ⊢ 1975 e declina mais rapidamente até 3,62 em 1995 ⊢ 2000

Resultaram, assim, duas séries de projeções da população por classe qüinqüenais de idades. De acordo com os resultados obtidos, a população do Brasil, no ano 2000, ficará entre 207 milhões (alternativa inferior) e 222 milhões (alternativa superior). A distribuição nas classes "0 ⊢ 15", "15 ⊢ 65", e "65 e mais", nos anos inicial e final do período de projeção, é a seguinte:

TABELA 1

PROPORÇÕES DE PESSOAS POR GRANDES CLASSES DE IDADES

CLASSES DE IDADES	1970	2000	
		Alternativa Superior	Alternativa Inferior
0 ⊢ 15.	424,8	399,8	391,7
15 ⊢ 65	543,9	558,8	569,6
65 e mais	31,3	41,4	38,7
TOTAL	1 000,0	1 000,0	1 000,0

De acordo com os resultados foram calculadas as taxas de crescimento natural por qüinqüênios, durante o período de projeção cujos valores encontram-se na Tabela 2

TABELA 2

TAXAS DE CRESCIMENTO DA POPULAÇÃO BRASILEIRA SEGUNDO AS PROJEÇÕES — CBED — IBGE

QÜINQÜÊNIOS	TAXAS DE CRESCIMENTO: ‰	
	Alternativa Superior	Alternativa Inferior
1970 — 75	28,84	27,58
1975 — 80	29,72	27,61
1980 — 85	29,79	26,92
1985 — 90	29,12	25,53
1990 — 95	28,54	24,07
1995 — 2000	28,42	22,79

Como se verifica, a taxa de crescimento, no caso da alternativa superior, ainda tenderia a aumentar até 1980-85, declinando lentamente a seguir e atingindo, no último qüinqüênio do século, um nível ligeiramente inferior ao do qüinqüênio inicial (1970-75). Isso resulta da ação combinada do forte declínio de mortalidade e um fraco declínio da natalidade associadas com uma ligeira modificação da composição por idade. A resultante final é um declínio mais rápido da taxa bruta de mortalidade até o qüinqüênio 1980-85, a partir de onde o declínio da natalidade passa a ser ligeiramente mais acentuado.

No caso da alternativa inferior, o declínio da natalidade é suficientemente intenso para compensar o declínio da mortalidade, resultando uma taxa de crescimento que atinge no final do século um nível cerca de 17% mais baixo do que o inicial. As estimativas de declínio são bastante moderadas, não sendo impossível que a fecundidade possa vir a apresentar uma redução mais forte, caso em que a população do país, no ano 2000, não atingiria os 200 milhões de habitantes.

2. VOLUME DA POPULAÇÃO E CRESCIMENTO DEMOGRÁFICO

2.1 Relacionados com a população há dois tipos de problemas:

a) os que dizem respeito à taxa de crescimento da população, ligados essencialmente ao crescimento rápido, que é o caso do Brasil;

b) os que dizem respeito ao volume da população e suas relações com os recursos econômicos.

As questões levantadas em cada um desses casos são bastantes diferentes e passaremos a examiná-las na medida que nos permitir o espaço disponível.

2.2 Analisaremos, inicialmente, dois aspectos principais relacionados com o crescimento rápido de uma população, isto é, os que decorrem da necessidade de o sistema econômico-social acompanhar o aumento do número de habitantes, e os que resultam da estrutura demográfica inerente a cada nível de crescimento. É óbvio que uma população que cresce rapidamente se impõe um duplo encargo: o primeiro consiste em fazer com que toda a sua infra-estrutura econômico-social acompanhe esse crescimento, enquanto o segundo tem por objetivo realizar um certo progresso econômico. O primeiro é conseguido através de uma parcela das inversões totais denominadas inversões demográficas; o segundo se processa através das chamadas inversões econômicas. Admite-se, em geral, que as inversões totais são limitadas pela capacidade máxima de poupança da população; assim, torna-se claro que a taxa de crescimento demográfico, que comanda o montante das inversões demográficas, reduz na mesma medida as inversões econômicas, limitando-as ao resíduo entre as inversões totais e o montante das inversões demográficas. Em outras palavras podemos dizer que o montante total das inversões se decompõe em duas parcelas: uma destinada a assegurar ao acréscimo demográfico o mesmo nível de vida e o mesmo grau de equipamento da população atual, e outra destinada a melhorar o nível de vida e o equipamento de toda população. A primeira constitui as inversões demográficas e a segunda as inversões econômicas. Veremos depois que essa distinção é válida até certo ponto, mas que, analisada rigorosamente, é algo inadequada. Entre as inversões demográficas podemos citar como exemplo a construção de novos domicílios para atender ao aumento da população.

2.3 É fácil verificar que a taxa de crescimento das novas construções é obrigatoriamente superior à taxa de crescimento da população, suposta constante se se mantém o número de pessoas por domicílio. De fato, além da construção anual dos domicílios necessários para atender à nova demanda, deve-se acrescer uma certa quantidade, que também cresce anualmente com a população, necessária para reposição de antigas moradias deterioradas. Supondo uma reposição igualmente distribuída no tempo e uma duração média de 100 anos por domicílio, uma população que crescesse a uma taxa anual constante de 2,8% teria que aumentar anualmente as construções a uma taxa de 3,2% para que, durante 50 anos, pudesse atender à nova demanda de domicílios e assegurar a reposição necessária. Essa taxa se refere ao período de 50 anos, já que varia com o período considerado, isto é, ela é variável com o tempo, apesar da constância suposta para a taxa de crescimento da população. O mesmo ocorre em todos os casos em que há necessidade de reposição, ou de manutenção, o que constitui, até certo ponto, uma outra forma de reposição. Assim, o processo citado atinge, praticamente, todos os bens necessários duráveis e semiduráveis

2.4 Suponhamos que a relação capital/renda seja igual a 4, isto é, um capital 4 produz uma renda social igual a 1. Assim, se a taxa de crescimento da população é r, será necessário constituir o capital $4r$ para que o capital médio por habitante não fique diminuído. Havendo necessidade de reposição do capital, o montante necessário ainda será maior do que $4r$, face ao que vimos anteriormente. Nesse caso, para uma inversão total de 18% do PIB e para uma taxa de crescimento demográfico de 2,8%, em um período de 50 anos, seria absorvido um total de 4 x 3,2 = 12,8% do PIB por ano para inversões demográficas, restando apenas 5,2% para inversões econômicas, isto é, para aquelas aplicações que se destinam a elevar o nível e melhorar o padrão de vida da população. Na melhor hipótese esse total seria igual a 4 x 2,8 = 11,2% do PIB, ficando apenas 6,8% para inversões econômicas. Assim, o crescimento demográfico estabelece uma alocação, automática de recursos entre inversões demográficas e inversões econômicas, destinando tanto mais às primeiras quanto mais elevada for a taxa de crescimento da população.

2.5 A idéia geral é de que as inversões demográficas não proporcionam desenvolvimento econômico mas tão somente asseguram a manutenção do "status quo"; o desenvolvimento decorreria apenas das inversões econômicas. Essa idéia, todavia, não é inteiramente exata. De fato, os bens econômicos que são repostos incorporam todo o progresso tecnológico havido entre a época da 1a. aquisição e a da sua reposição. Assim, para exemplificar, as máquinas de calcular manuais foram substituídas por máquinas eletromecânicas e estas por máquinas eletrônicas.

O mesmo ocorre com os novos equipamentos, com os novos domicílios destinados ao acréscimo da população, visto que, também eles incorporam gradativamente o progresso tecnológico normal do processo de desenvolvimento econômico. Portanto, as inversões demográficas não se limitam a manter o "status quo"; de uma forma ou de outra, ela promove algum desenvolvimento econômico. Todavia devemos reconhecer que os maiores progressos, as inovações mais importantes, se dão nas formas de inversões denominadas econômicas. Portanto, se não podemos dizer de uma maneira absoluta que, face à taxa alternativa de crescimento "adotada", a população faz uma escolha entre quantidade de habitantes e qualidade da vida, há, todavia, uma escolha segundo a qual ela dá maior ênfase, ora à quantidade através das inversões demográficas, ora à qualidade mediante as inversões econômicas. Mas essa escolha que a população faz entre crescer e melhorar o padrão de vida resulta de várias escolhas, que se processam ao nível familiar, atendendo aos interesses que se apresentam a esse nível, e respondendo aos incentivos e motivações proporcionados pela comunidade a que pertencem (vilas, cidades, grandes metrópoles, etc.). Ora, se por um lado cabe à coletividade reduzir, tanto quanto possível, o nível da mortalidade, esse nível, por seu turno, interfere nas decisões dos grupos familiares, determinando o número de nascimentos necessários para que seja conseguido o número desejado de filhos e adultos. Em resumo, pois, a intensidade e o nível do progresso econômico-social e as condições de vida que aufere a coletividade ao nível macroeconômico determinam os incentivos que, em última análise, fixam, ao nível familiar, a dimensão média da família idealizada. Por outro lado, a mortalidade determina o número de nascimentos necessários para se atingir essa dimensão, enquanto o conhecimento e o acesso aos métodos anti-conceptivos estabelecem a medida dos erros por excesso que se cometem na tentativa de conseguir a dimensão desejada da família. Desse conjunto de fatores resulta o crescimento demográfico que a população terá.

Portanto, a alocação de recursos entre número e qualidade de habitantes de um país constitui uma macrodecisão que é um resultado inevitável do conjunto de microdecisões que se processam ao nível dos grupos familiares, com o fim de atender outros objetivos que não os da população em conjunto. Voltaremos a examinar esse aspecto importante na fixação de uma política demográfica capaz de se adaptar, da melhor maneira possível, a uma política de desenvolvimento econômico

2.6 Entre os diferentes aspectos do problema do crescimento demográfico devemos salientar, especialmente, o problema da urbanização. De fato, ao lado da explosão demográfica dos últimos decênios, em parte alimentado por ela e em parte pelas migrações do campo para as cidades, tem-se observado, também, uma explosão urbana de proporções inéditas, caracterizada por um crescimento excessivo das maiores cidades e das grandes áreas metropolitanas. Essa explosão se torna patente no Brasil se considerarmos que, enquanto o país, como um todo, cresceu no decênio 1960/1970 a uma taxa média anual de 2,86%, os aglomerados urbanos de mais de 100 000 habitantes cresceram a uma taxa anual de 6,30%, os de 10 000 habitantes ou mais, a uma taxa de 6,13% e os de menos de 10.000 habitantes, à razão de 2,30% ao ano Assim, se a explosão demográfica do país faz a população dobrar em 24 anos e meio, os aglomerados urbanos de mais de 100.000 habitantes dobrarão seu volume demográfico em apenas 11 anos Essa explosão urbana, considerada sob o ponto de vista geográfico da distribuição territorial, tem, na realidade, o caráter de uma imensa implosão, visto que, cada vez mais e com uma extraordinária velocidade, a população abandona grandes áreas em diversos pontos do país, para se concentrar nas cidades e grandes regiões metropolitanas as quais, como área, representam uma fração ínfima do território nacional É possível, então, fixar-se uma meta relacionada com esse aspecto do movimento demográfico, estabelecida sob forma de um vetor, com quatro componentes, digamos correspondentes, respectivamente, às grandes áreas metropolitanas, às cidades grandes, às cidades pequenas e ao campo, determinando-se o "vetor intervenção", tal como foi sugerido em 2 3, capaz de conduzir a distribuição territorial, através das migrações, à meta desejada. No estabelecimento dessa meta ficaria explícito o pensamento dominante da necessidade reconhecida de um crescimento mais balanceado desses aglomerados, e o vetor intervenção determinaria os movimentos a serem conseguidos a fim de se realizar uma transferência, real ou aparente [1], da população dos grandes centros urbanos para os

[1] MADEIRA, João Lyra Migiações internas no planejamento econômico In: COSTA, Manuel Augusto et alii *Migrações internas no Brasil,* Rio de Janeiro, IPEA/INPES, 1971 190 p, il (Brasil IPEA/INPES Monografia, 5) p 35-58, il

centros de menor porte, existentes ou a serem criados "ad hoc". Com relação às migrações rural-urbanas, deve-se ter em vista que apesar dos problemas que podem criar a curto prazo, o permanente progresso tecnológico, devidamente orientado, proporcionará, a longo prazo, um aumento da produtividade agrícola, com a liberação conseqüente da mão-de-obra do campo. No tipo de estudo aqui considerado, com o objetivo de estabelecer um processo de urbanização controlada, deve-se separar a parcela devida ao crescimento geral do país daquela que decorre de movimentos migratórios específicos, porque cada um deles depende de um tipo diferente de ação corretiva. Estamos certos de que, muito mais grave do que o crescimento das necessidades humanas decorrentes do aumento rápido da população, é a deterioração do ambiente sócio-cultural e do ambiente natural conseqüente à tremenda implosão urbana desordenada, com a vida se concentrando nessas pequenas áreas barulhentas e regorgitantes de população, de veículos, de fábricas e de poluição. As necessidades humanas serão atendidas pelo progresso tecnológico e pela exploração dos recursos naturais inexplorados, em particular os imensos recursos dos mares [2] ao passo que, até agora, tem sido dada pouca ou nenhuma atenção aos outros problemas. Acreditamos que o ponto crítico da capacidade demográfica do país, a longo prazo, não se estabeleça em termos de limitações econômicas, mas em termos de limitações do meio físico e do ambiente sócio cultural. Portanto, os problemas de crescimento urbano, principalmente das grandes cidades e áreas metropolitanas, associados à deterioração dos processos de utilização do lazer e do aproveitamento espiritual do meio ambiente, merecem uma atenção muito maior, por parte dos pesquisadores e administradores, do que vem sendo atribuída na atualidade. Este será um imenso campo aberto à pesquisa, já que o bem-estar da população, no futuro, vai depender, em grande parte, dos conhecimentos que tenhamos adquirido neste setor e da medida em que possamos formular metas objetivas e utilizar ações corretivas eficientes, através do conhecimento das motivações que comandam o movimento para as cidades, da poderosa atração que elas exercem e dos meios de que disponhamos para contrabalançar essa atração

Além dos problemas apontados, o crescimento desregrado das cidades atua num sentido desfavorável que pode agir como elemento frenador do progresso econômico. É que, se em certas circunstâncias, o crescimento da população pode proporcionar o que se costumou denominar "economias de escala", pode acontecer, em outros casos, o aparecimento de "deseconomias de escala". De fato, quando as aglomerações urbanas ultrapassam uma determinada dimensão ou apresentam um crescimento excessivo, os novos problemas que surgem, associados a essa hipertrofia urbana acarretam, no custo dos serviços públicos, um acréscimo mais que proporcional ao aumento do número

---

[2] Há imensos recursos inexplorados nos mares, lagos e rios que poderão assegurar os meios de subsistência de uma população muito maior que a atual, se as nações se dispuserem a preservá-los, evitando a poluição que os ameaça Como diz Cousteau, só agora se começa a descobrir o mar e, ao descobri-lo, verifica-se que ele está morrendo

de habitantes, de modo que o sistema econômico pode passar a funcionar em regime de custos crescentes, comprometendo, assim, o progresso econômico do país.

2.7 O segundo aspecto desfavorável do crescimento rápido da população é que a distribuição por idade apresenta uma estrutura desfavorável. A pirâmide etária torna-se excessivamente larga na base e estreita nas idades adultas. Esse aspecto pode ser apreciado comparando-se, por exemplo, as pirâmides do Brasil, que cresce à taxa de 2,8% ao ano, e da França, onde a taxa de crescimento é de 0,6%.

TABELA 3

CARACTERÍSTICAS E CLASSES DE IDADES	BRASIL — 1970*	FRANÇA — 1970**
Esperança de vida ao nascer.	57,6 anos	71,6 anos
Fecundidade total	5,67	2,32
Taxa de crescimento	28,0°/°°	6,1°/°°
Classes de idades: 0 ⊢ 15	417,4°/°°	244,7°/°°
15 ⊢ 65	558,6°/°°	624,3°/°°
65 e mais	24,0°/°°	131,0°/°°

FONTES: * — Censo de 1970
** — La population de France — C.I.C.R.E.D. — 1974

Como se verifica, o grupo 0 ⊢ 15 apresenta-se, no Brasil, com uma proporção superior em 70,6% ao da França, o que pode dar uma idéia da maior magnitude, em nosso país, dos problemas ligados à juventude, entre os quais se destacam a educação e a formação profissional. O grupo 15 ⊢ 65 apresenta-se no Brasil, reduzido de uns 10,5% em relação ao da França, o que pode servir de índice da deficiência relativa de mão-de-obra. O grupo 65 e mais se apresenta, no Brasil, com apenas 18,4% do correspondente na França. Se considerarmos, em conjunto, os dois grupos "0 ⊢ 15" e "65 e mais", relacionados com o grupo central "15 ⊢ 65", obteremos um índice de dependência econômica que é 375,7/624,3 = 60,2% na França e 441,4/558,6 = 79,0% no Brasil. Como veremos adiante, a análise teórica permite compreender os aspectos importantes que relacionam a forma da pirâmide aos fatores do crescimento demográfico A fim de permitir uma visão mundial

TABELA 4

DISTRIBUIÇÃO DA POPULAÇÃO POR GRANDES CLASSES DE IDADES EM VÁRIAS REGIÕES DO MUNDO: %

CLASSES DE IDADES	REGIÕES						
	MUNDO	REGIÕES EM DESENVOLVIMENTO	REGIÕES INDUSTRIALIZADAS	EUROPA (EXCL URSS)	ÁSIA	ÁFRICA	AMÉRICA DO NORTE
0 ⊢ 15	36,8	40,3	27,7	25,6	40,5	40,9	28,2
15 ⊢ 60	55,9	54,8	59,5	60,4	54,9	54,6	57,7
60 e mais	7,3	4,9	12,8	14,0	4,6	4,5	14,1

ampla da distribuição por idade e suas relações com o desenvolvimento econômico, damos a seguir um quadro com a distribuição nas grandes classes "0 ⊢ 15", "15 ⊢ 60" (em lugar de 15 ⊢ 65) e "60 e mais".

Como se verifica, o grupo central é sempre mais elevado nas regiões economicamente desenvolvidas e o grupo jovem nas regiões subdesenvolvidas.

2.8 Consideremos agora os efeitos da mortalidade e da fecundidade sobre a estrutura etária de uma população. Em primeiro lugar e contrariamente ao que geralmente se pensa, o declínio da mortalidade não contribui para envelhecer mas, para rejuvenescer a população. Isso se deve aos padrões de declínio da mortalidade observados na prática A razão é simples: na luta contra a morte, o homem só conseguiu, até agora, um domínio franco sobre as causas exógenas de mortalidade isto é, aquelas que provêm do meio ambiente, e cujo combate se processa através do saneamento básico, dos meios de imunização e de controle de vetores de moléstias. Ora, pelo menos as causas referidas nos dois primeiros grupos atingem em larga escala a infância e a juventude, ao passo que na idade adulta e na velhice as principais causas de morte são as de origem endógena (moléstias degenerativas em geral), sobre as quais a ação do homem pouco realizou até agora em termos de combate eficiente em larga escala. Assim, o padrão de declínio da mortalidade tem sido, até agora, um padrão uniforme, segundo o qual, à medida em que melhoram as condições sanitárias e imunológicas, o declínio da mortalidade ocorre em proporção muito maior na infância e juventude do que na idade adulta e na velhice. Exemplificando: se o nível da mortalidade se reduz, digamos em 20%, essa redução é superior a 30%, em média, nas idades jovens (até os 20 ou 25 anos digamos), o inferior a 10% depois dessas idades. Portanto quando ocorre um declínio da mortalidade, ele economiza uma proporção muito maior de jovens e crianças do que de adultos e velhos, o que contribui obviamente, para o rejuvenescimento da população. No futuro, se o homem conseguir dominar as causas endógenas com a mesma eficiência com que tem dominado, até aqui, as causas exógenas, então o padrão de declínio da mortalidade poderá vir a ser tal que uma redução da mortalidade contribua para o envelhecimento da população.

2.9 Ao contrário, o declínio da fecundidade tem contribuído em escala extremamente importante para o envelhecimento da população Os efeitos desse envelhecimento pode ser facilmente percebido por uma simples inspeção das Tabelas 3 e 4. Todavia, a fim de isolar os efeitos da mortalidade e da fecundidade sobre a composição por idade, com relação aos seus reflexos sobre as grandes classes "0 ⊢ 15", "15 ⊢ 65" e "65 e mais", que determinam a magnitude dos encargos e da capacidade de mão-de-obra, consideramos as populações teóricas correspondentes a 3 níveis de mortalidade e três níveis de fecundidade. Os níveis da mortalidade são caracterizados pela esperança de vida ao nascer representada por $\bar{e}_0$, de modo que se tem:

Mortalidade alta: $\bar{e}_o = 30{,}1$ anos (Nível 6)
Mortalidade média: $\bar{e}_o = 51{,}8$ anos (Nível 15)
Mortalidade baixa $\bar{e}_o = 71{,}2$ anos (Nível 23)

Os níveis de fecundidade são caracterizados pelas taxas brutas de reprodução, R, assim escolhidas·

Fecundidade baixa $R = 1{,}000$
Fecundidade média $R = 2{,}250$
Fecundidade elevada· $R = 3{,}500$

Os resultados obtidos para as proporções de pessoas em cada uma das três classes de idades consideradas acham-se na Tabela 5.

TABELA 5

POPULAÇÕES ESTÁVEIS
SEXO MASCULINO

Modelo "West"
Coale e Demeny

GRUPOS DE IDADES	NÍVEL 6 — $\bar{e}_o$ = 30,076		
	TAXA BRUTA DE REPRODUÇÃO		
	1,000	2,250	3,500
0 ⊢ 15	16,65	33,77	44,37
15 ⊢ 65	71,91	62,46	53,85
65 e mais	11,44	3,77	1,78

GRUPOS DE IDADES	NÍVEL 15 — $\bar{e}_o$ = 51,831		
	TAXA BRUTA DE REPRODUÇÃO		
	1,000	2,250	3,500
0 ⊢ 15	19,31	38,14	49,03
15 ⊢ 65	67,90	57,93	49,19
65 e mais	12,79	3,93	1,78

GRUPOS DE IDADES	NÍVEL 23 — $\bar{e}_o$ = 71,188		
	TAXA BRUTA DE REPRODUÇÃO		
	1,000	2,250	3,500
0 ⊢ 15	19,94	39,71	50,84
15 ⊢ 65	64,84	55,74	47,15
65 e mais	15,22	4,55	2,01

FONTE: Dados básicos extraídos de "Regional Model Life Tables and Stable Populations", by Ansley Coale and Paul Demeny — 1966

As conclusões gerais que se podem tirar desses cálculos são as seguintes:

a) para cada nível de fecundidade, o declínio da mortalidade aumenta a proporção de jovens (classes 0 ⊢ 15), reduz a de adultos (classes 15 ⊢ 65) e aumenta a de pessoas idosas (65 e mais);

b) para cada nível de mortalidade, o declínio da fecundidade reduz a proporção de jovens e aumenta as de adultos e de pessoas idosas;

c) o declínio da fecundidade tem um efeito muito maior do que o da mortalidade, tanto sobre a redução da proporção de jovens como sobre o acréscimo da proporção de pessoas idosas. Esse efeito da fecundidade é quase o mesmo para os diferentes níveis de mortalidade, sendo, todavia, algo maior se a mortalidade é alta;

d) os índices de dependência, definidos no parágrafo, acham-se indicados na Tabela 6, por onde se verifica a forte influência de fecundidade, embora variem também com a mortalidade; esse índice aumenta consideravelmente à medida em que aumenta a fecundidade; com relação à mortalidade, porém, o efeito é contrário, ele cresce quando a mortalidade diminui.

TABELA 6

ÍNDICE DE DEPENDÊNCIA POR 1.000 ADULTOS

MORTALIDADE $\bar{e}_0$	FECUNDIDADE — TAXA BRUTA DE REPRODUÇÃO		
	1,000	2,250	3,500
30,076. . .	390,6	601,0	857,0
51,831. . .	472,8	726,2	1 032,9
71,188. .	542,3	794,0	1 120,9

Assim, para cada nível de mortalidade, a elevação desse índice, com a fecundidade entre os limites considerados, é superior a 119% no caso da mortalidade alta ($\bar{e}_0 = 30{,}1$), a 118% no caso da mortalidade média ($\bar{e}_0 = 51{,}8$), e a 105% no caso da mortalidade baixa. Ao contrário, para cada nível de fecundidade, a sua elevação, com o declínio da mortalidade entre os limites considerados, é de menos de 40% se a fecundidade é baixa (R = 1,000), de cerca de 32% no caso de uma fecundidade alta. Supondo que o caminho normal de um país que se desenvolve seja passar de alta fecundidade e alta mortalidade para níveis baixos dessas duas componentes, o desenvolvimento econômico fará o país passar de um índice de dependência de 857,0‰ para outro de 542,3‰. Assim, esse índice de dependência sofre uma redução apreciável durante o processo de desenvolvimento econômico.

2.10 Apesar da importância que tem sido atribuída ao índice de dependência, ele não conta toda a verdade. De fato, é necessário considerar o homem não apenas como um fator de consumo mas, também, como fator de produção. Se o declínio da fecundidade reduz o número de jovens, por outro lado aumenta o número de pessoas idosas. E não é lícito somar os totais dos dois grupos para a determinação de um índice de dependência, uma vez que eles não têm o mesmo valor nem como produtores nem como consumidores. Em "Conceitos Econômicos na Demografia" (RBE n.º 97/98 de jan./jun. 1964), utilizando coeficientes de produção e de consumo por idades, propostos por Mortara, estabelecemos vários cálculos elucidativos sobre esse aspecto. Em primeiro lugar, calculamos para alguns países os dados constantes da Tabela 7

TABELA 7

NÚMERO DE UNIDADES DE PRODUÇÃO E DE CONSUMO POR 1.000 HABITANTES, DE UNIDADES DE CONSUMO POR 1.000 DE PRODUÇÃO E DE UNIDADES DE PRODUÇÃO POR 1.000 DE CONSUMO

POPULAÇÃO E ÉPOCA (1)	NÚMERO DE UNIDADES DE CONSUMO POR 1 000 HABITANTES (2)	NÚMERO DE UNIDADES DE PRODUÇÃO POR 1 000 HABITANTES (3)	$\frac{1\,000\ (2)}{(3)}$ (4)	$\frac{1\,000\ (3)}{(2)}$ (5)
Brasil (1950).	732,0	522,3	1 401,5	713,5
Índia (1951)	755,8	561,2	1 346,8	742,5
EE. UU. (1954).	794,4	626,0	1 269,0	788,0
Suécia (1950) . .	821,1	670,5	1 224,6	816,6
França (1954)	815,6	653,8	1 247,5	801,6

A apreciação desses dados permite concluir que os 3 países economicamente desenvolvidos apresentam um número de unidades de produção por 1.000 unidades de consumo superior aos 2 países em desenvolvimento. Esse número depende da estrutura demográfica e é maior nos países de estrutura etária mais envelhecida, como a Suécia e a França. Um cálculo especialmente destinado a ressaltar a influência da mortalidade e da natalidade foi feito no mesmo trabalho acima citado, utilizando modelos com 3 níveis de mortalidade e várias taxas de crescimento. Dessa análise podem-se extrair as seguintes conclusões gerais:

a) o número de unidades de produção por 1 000 unidades de consumo varia pouco com o nível da mortalidade, aumentando ligeiramente à medida que a mortalidade declina;

b) o fator decisivo na determinação desse índice é a taxa de crescimento da população e, conseqüentemente, o nível da natalidade. De fato, ele aumenta bastante à medida que aquela taxa declina, dentro de cada nível de mortalidade.

Em resumo, pois, mesmo corrigidos, os defeitos do índice de dependência, a conclusão final é que o crescimento rápido decorrente da alta natalidade estabelece uma estrutura etária da população com características desfavoráveis, do ponto de vista econômico.

2.11 Algumas considerações devem ser feitas sobre a influência econômica das correntes migratórias internacionais. De modo geral, essas correntes se processam em maior intensidade nos grupos etários correspondentes às idades adultas, contribuindo para aumentar a proporção de pessoas entre 15 e 65 anos, reduzindo assim o índice de dependência e aumentando, na população, o número de unidades produtivas por 1.000 unidades de consumo. Por outro lado, um imigrante adulto constitui uma unidade de trabalho que não exigiu nenhuma inversão para sua formação, que ficou inteiramente a cargo do país de origem. Assim, do ponto de vista estritamente econômico, uma forte corrente migratória representa um capital imenso posto à disposição do país de destino, constituindo assim um elemento favorável ao seu desenvolvimento econômico. Grande parte do imenso progresso dos Estados Unidos foi uma conseqüência da intensa corrente migratória vinda da Europa. Até agora ainda não foi adequadamente apreciada e calculada a imensa contribuição que a Europa aplicou no progresso econômico da América do Norte, sob forma de capital humano.

Naturalmente, devemos reconhecer, as correntes migratórias podem acarretar problemas políticos de natureza diversa que não estão sendo considerados aqui, e que devem ser ponderados ao se decidir sobre a política migratória a ser adotada pelo país; mas as suas vantagens econômicas não devem ser esquecidas ou subestimadas.

2.12 Algumas breves palavras sobre o volume da população. Em uma ampla explanação isso nos conduziria ao problema da população ótima. Em primeiro lugar caberia fixar o sentido do ótimo, porque há várias possibilidades. Há um ótimo de potência, há vários ótimos econômicos; os mais conhecidos são o ótimo de riqueza (produto bruto "per capita" máximo) e o ótimo de enriquecimento (produto bruto "per capita" crescendo) com a máxima intensidade [3]. Escolher entre esses dois "ótimos" equivale a se colocar a pergunta: o que será melhor; estar rico ou estar enriquecendo? Mas, ainda que se consiga escolher o tipo de ótimo mais desejável, ainda não existe, do meu conhecimento, uma metodologia aceitável para a determinação do volume de população que responda a qualquer tipo de otimização proposta. O que podemos afirmar é que o ótimo não depende da densidade da população, nem, dentro de certos limites, do seu valor absoluto. A densidade demográfica do Canadá é bem mais baixa que a do Brasil e o canadense desfruta de uma das mais altas rendas "per capita" do mundo. Há países ricos e países pobres com grande volume e pequeno volume de população e com densidades demográficas elevadas e baixas. Assim, se o desenvolvi-

[3] O ótimo de potência conduz a uma população superior à do ótimo de riqueza que, por sua vez, fornece uma população superior à do ótimo de enriquecimento

mento econômico independe de circunstâncias tão variadas, não nos parece que se deva gastar muito esforço na fixação de uma população ótima para o Brasil. O problema do crescimento rápido é, ao nosso ver, muito mais importante.

3. BASES DE UMA POLÍTICA

3.1 Voltemos ao problema do crescimento demográfico. Para uma população praticamente fechada às correntes migratórias internacionais, a taxa de crescimento depende dos níveis da mortalidade e da natalidade. Mas a mortalidade, em qualquer política demográfica, não apresenta alternativa; o objetivo, nesse particular, é, sempre, conseguir a máxima expectativa de vida. Assim, o fator crítico em uma política destinada a interferir no crescimento demográfico é o nível da fecundidade, o qual depende essencialmente de três componentes básicos:

a) as pressões e condicionamentos sociais que determinam as motivações para que o casal deseje realizar um certo tamanho ideal da família dependendo do tipo de comunidade a que pertence;

b) o nível da mortalidade que condiciona o número de nascimentos necessários para se conseguir a realização do número ideal de filhos adultos;

c) o maior ou menor desconhecimento dos métodos de controle da natalidade cuja relativa ineficiência conduz sempre a um número de nascimentos superior ao que seria necessário para se atingir o tamanho ideal da família.

Convém esclarecer que o número ideal de filhos é um objetivo que, embora presente, não se manifesta sempre sob uma forma explícita de um plano do casal. Às vezes constitui apenas um desejo vago, para cuja realização exerce muitas vezes uma ação ineficiente. Por outro lado, nem sempre tem uma formulação prévia, tornando-se explícito no momento em que o casal, já com alguns filhos, decide que não deseja mais aumentar a família, ou simplesmente reconhece que tal é o seu desejo.

3.2 A componente econômico-social referida anteriormente é constituída por todos os fatores externos que condicionam psicologicamente o casal no sentido de desejar um determinado número de filhos. Esses condicionamentos estão intimamente relacionados com a estrutura econômico-social da coletividade. Somente a modificação dessa estrutura econômico-social será capaz de estabelecer novos condicionamentos psicológicos e alterar o número ideal de filhos que o casal venha a desejar. Um dos processos que acarretam profundas modificações na estrutura da sociedade é o processo de desenvolvimento econômico-social. É relativamente fácil estabelecer, nesse caso, o sentido em que se modificam condicionamentos básicos do casal. De fato, em uma coletividade pobre, de estrutura predominantemente agrária, com um baixo nível educacional e profissional e um alto nível de mortalidade, todos os elementos colaboram no sentido de tornar desejável uma família de dimensões relativamente grandes. Cada filho adicional constitui, além de uma fonte de prazeres, dentre as poucas de que podem desfrutar os casais das comunidades pobres, uma perspectiva de renda adicional e de maior segurança no futuro quando, deixando os pais de trabalhar, poderão dispor da mão-de-obra dos filhos para os trabalhos do campo, assegurando uma sobrevivência calma na velhice, dentro do seio da própria família que conseguiu realizar. O baixo nível educacional e profissional contribui para reduzir o custo de formação do adulto e diminuir o tempo de formação, ao fim do qual poderá dispor da renda adicional que o filho irá proporcionar. Antes dos 10 anos já as crianças podem ajudar nos trabalhos do campo e nos afazeres da casa. Por outro lado, o alto nível da mortalidade exige, para a realização de um dado número de filhos adultos, um elevado número de nascimentos. As comunidades que sobreviveram no passado foram aquelas em que a natalidade foi suficientemente alta para deixar um pequeno saldo sobre os óbitos causados por uma mortalidade elevadíssima. A própria espécie humana só pode sobreviver graças a esse fato. Acresce, ainda, que, nas comunidades pobres, os processos utilizados de controle da natalidade, necessários para o dimensionamento da família, são extremamente ineficientes. Assim, os erros, que se produzem sempre no sentido de ampliar o dimensionamento desejado, são mais amplos e mais freqüentes do que seriam se fossem utilizados métodos mais eficientes. Dado o baixo nível educacional ocorre, também, com maior freqüência, que o número ideal de filhos constitui apenas uma idéia vaga, que não é acompanhada de qualquer iniciativa no sentido de torná-la efetiva.

3.3 O panorama é inteiramente outro em uma comunidade rica. Aqui a estrutura econômico-social está dominada pela industrialização e pela tecnologia, exigindo, na formação do homem adulto, um nível educacional elevado e uma formação profissional altamente especializada. Assim, os condicionamentos psicológicos são completamente diferentes, favorecendo em todos os sentidos à pequena família. De fato, cada filho adicional implica em uma considerável inversão a fim de torná-lo apto, profissionalmente, a exercer as atividades que o alto nível tecnológico exige de todos. Os pais não só desejam mas são compelidos, na luta pela manutenção ou melhoria do "status social", a proporcionar aos filhos esse nível de educação e formação profissional. Portanto, o custo de formação do homem adulto é elevado, exigindo pesadas inversões e dilatado tempo, de modo que nenhum incentivo ele representa como proporcionador de possível renda adicional, tornando-se ao mesmo tempo praticamente desnecessário como fonte de segurança no futuro. Além desses custos diretos, também os custos indiretos de uma família mais numerosa serão mais elevados na comunidade rica: uma mulher com muitos filhos perde a oportunidade de poder trabalhar e assim ajudar nas despesas familiares. Mas não é só; os demais fatores enunciados anteriormente atuam no sentido de uma fecundidade mais moderada. De fato, sendo mais baixo o nível da mortalidade, o excedente de nascimentos necessários para assegurar o ideal da família já não precisará ter as mesmas proporções. Supondo que o ideal de um casal, quando declara que deseja ter 3 filhos, signifique a realização de 3 filhos adultos (com 18 anos, digamos), o nível da mortalidade transforma-se em um fator de grande importância na diferenciação dos níveis de fecundidade. Assim, em uma comunidade pobre, com uma expectativa de vida ao nascer de 35 anos, o excedente de nascimento para se conseguir que um dado número de filhos atinja os 18 anos é de cerca de 67%; para cada 100 pessoas que atingem 18 anos são necessários 167 nascimentos. Em uma comunidade rica, onde a expectativa de vida ao nascer é, digamos, de 70 anos, o excedente poderá ser apenas de 5%, isto é, para cada 100 pessoas atingirem 18 anos são necessários apenas 105 nascimentos. Portanto, se o tamanho ideal da família em uma comunidade pobre for, por exemplo, de 5 filhos, e em uma comunidade rica, de 3, a fecundidade aparentemente deveria ser 67% mais elevada na primeira. Em face, porém, da diferença de mortalidade, seriam necessários, para que 100 casais realizassem a média de 5 filhos adultos (com 18 anos), um total de 833 nascimentos, ao passo que 100 casais de comunidade rica apenas necessitariam, para realizar seus objetivos de 3 filhos adultos, 315 nascimentos. Nessas condições, a fecundidade efetiva na comunidade pobre deveria ser não apenas 67%, mas 165% superior à da comunidade rica, a fim de que as duas comunidades realizassem dimensões ideais de suas famílias, tendo em vista os condicionamentos sociais e os níveis da mortalidade. Mas, se levarmos em conta, ainda, as diferenças dos métodos utilizados para o controle da natalidade, as diferenças se ampliam mais. Assim, supondo que na comunidade rica os erros decorrentes da ineficiência dos métodos de controle da natalidade sejam da ordem de 10% e, nas comunidades pobres, três vezes maiores, o resultado final, levando em conta os três fatores básicos referidos anteriormente, será que, nas comunidades ricas de tipo indicado, cada 100 casais deverão dar lugar a 346 nascimentos, ao passo que, na comunidade pobre, os mesmos 100 casais deveriam produzir 1.083 nascimentos. Por outras palavras, fecundidade, na comunidade pobre, deveria ser 213% mais elevada do que na comunidade rica. Não é de estranhar, pois, que as comunidades mais pobres continuem a apresentar uma fecundidade elevada, sem que se possa taxá-las de manter um procedimento irracional, como tem sido alegado por alguns sociólogos, economistas e demógrafos, malgrado o fato incontestável, por nós apontados, das desvantagens macroeconômicas, decorrentes de um crescimento rápido da população. É que as decisões sobre o número de filhos ocorrem no seio do núcleo familiar, atendendo aos interesses legítimos da família, alheios aos problemas que se desenvolvem na escala macroeconômica, os quais preocupam os governos, os sociólogos, demógrafos e economistas, em um nível de decisão muito mais amplo. Como ocorre em muitos casos, funciona aqui o conhecido *paradoxo da composição,* segundo o qual os interesses legítimos de uma pequena parcela de um grupo nem sempre concordam com os legítimos interesses do grupo. Um casal do interior, vivendo da agricultura, morando em uma pequena propriedade rural, deseja legitimamente uma família numerosa; mas se todos os casais do país desejassem a mesma coisa, o crescimento demográfico seria extremamente rápido, podendo, no conjunto, prejudicar o crescimento econômico e o desenvolvimento social da coletividade. Felizmente, nem todos vivem no interior, em uma pequena propriedade rural, de modo que, mesmo nos países subdesenvolvidos, já se manifesta uma atenuação do crescimento da população em relação ao que ocorreria naquela hipótese extrema, apesar do declínio da mortalidade, o qual, na sua difusão rápida, produziu temporariamente uma explosão demográfica sem precedentes na história da humanidade. A posição atual do Brasil é de uma mortalidade com tendência ainda a um declínio substancial proporcionando, pelas características ainda jovens da composição etária da população, um declínio da taxa bruta de mortalidade a níveis extremamente baixos nos próximos 30 anos: da ordem de 5‰, cerca de metade do seu nível atual. O nível da fecundidade já apresenta sinais de um lento declínio que provavelmente deverá intensificar-se nos próximos 30 anos, graças à influência cada vez mais acentuada do desenvolvimento econômico.

3.4 Qual a política demográfica para o Brasil com relação ao problema do crescimento demográfico? De acordo com os resultados da análise procedida anteriormente, o declínio da fecundidade vai depender da medida em que seja possível controlar os três fatores básicos apontados: motivações sobre as dimensões da família, conhecimento do nível da mortalidade, erros decorrentes da ineficiência dos métodos de controle da natalidade, e ignorância sobre esses métodos.

Pouco adianta a simples divulgação dos métodos eficientes de controle da natalidade, uma vez que tal procedimento não atinge o ponto central do problema, isto é, não modifica as motivações relativas às dimensões ideais da família. Só o desenvolvimento econômico-social, com todas as modificações estruturais que acarreta, será capaz de alterar essas motivações no sentido de reduzir o número ideal de filhos. No exemplo dado anteriormente, onde o nível da natalidade na comunidade pobre seria 214% mais elevado do que o da comunidade rica, a máxima divulgação, entre os membros da comunidade pobre, dos métodos ultra-eficientes adotados na comunidade rica, conseguiria, na melhor das hipóteses, baixar o nível da fecundidade desse grupo de uns 22%. De fato, essa divulgação apenas reduziria o excesso de nascimentos decorrentes da ineficiência dos métodos, mas não modificaria o tamanho ideal da família que a comunidade pobre continuaria a perseguir, nem o excedente necessário para compensar o nível mais elevado da sua mortalidade. Por outro lado, forçoso é reconhecer a importância, e até mesmo a necessidade dessa divulgação, à medida que avança o processo de desenvolvimento econômico. De fato, de par com as alterações que vão ocorrendo nas motivações relacionadas com o tamanho ideal da família, é necessário que os casais possam dispor, não apenas do conhecimento dos métodos mais eficientes de controle da natalidade, mas que possam também ter acesso a esses métodos e possam adotar aqueles que julgarem mais adequados. As duas condições são, pois, complementares: o desenvolvimento econômico altera os padrões dimensionais da família e a divulgação dos métodos de controle coloca-os em situação de realizar, tanto quanto possível, aquelas dimensões de família que o desenvolvimento econômico-social requer, evitando assim as fricções que poderiam comprometer ou dificultar o curso do processo de desenvolvimento. Fica desde logo patente que alguns recursos deverão ser aplicados nessa tarefa de divulgação dos meios de controle da natalidade, como parte do próprio processo educativo, que consiste em transformar uma criança num adulto e, bem assim, para proporcionar o acesso a esses meios. Esses recursos têm por objetivo, pois, evitar possíveis dificuldades e fricções ao longo do processo de desenvolvimento econômico-social, as quais redundariam em desperdício de esforços. Mas, de modo nenhum se pode considerar os recursos aplicados em programas de planejamento familiar como capazes de proporcionar modificações essenciais de caráter permanente, nas motivações que conduzem à fixação do nível da fecundidade. Se o desenvolvimento econômico-social induz o declínio da fecundidade, o processo não é reversível: os programas de planejamento familiar por si sós não proporcionam nenhum desenvolvimento econômico. O que é fundamental, para alterar a fecundidade com caráter estável e permanente, não é proporcionar aos casais os meios eficientes de limitação da natalidade; é necessário induzi-los a desejar menos filhos. Os meios de limitação devem ser proporcionados na medida em que os casais o desejarem por força de decisões próprias, decorrentes das motivações proporcionadas durante o curso da evolução do processo de desenvolvimento econômico-social. Pressionar diretamente um casal que deseja muitos filhos a tê-los em menor número parece-nos tão ilegítimo como forçar aqueles que desejam poucos filhos a aumentar a sua prole. Só o desenvolvimento econômico-social reconhecido pela coletividade pode legitimar as pressões capazes de agir sobre as dimensões ideais da família. Os anticonceptivos devem constituir apenas os meios com que poderão realizar seus próprios desejos.

Vultos da Estatística Brasileira

Professor JOÃO LYRA MADEIRA

Ao completar 70 anos de idade faleceu o Prof. João Lyra Madeira. Perde o panorama técnico brasileiro um dos seus mais altos valores e a ciência, uma das mais conceituadas expressões Os relevantes trabalhos prestados não só ao Brasil, como ao nosso Continente, projetaram seu nome no cenário internacional, de onde recebeu o merecido reconhecimento

João Lyra Madeira nasceu em Palmares, no Estado de Pernambuco, em 12 de janeiro de 1909. Transferiu-se para São Paulo, diplomando-se em Ciências e Letras pelo Ginásio de S. Bento em 1927. Recebeu nesse Ginásio duas medalhas de bronze, uma de prata e uma de ouro.

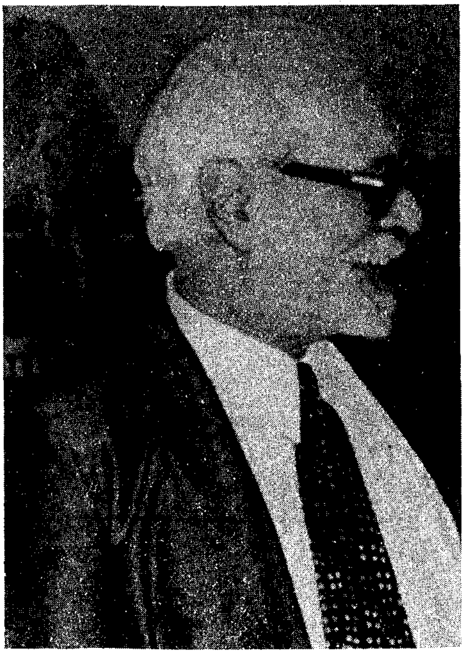
Ingressou na Escola Polythecnica do Rio de Janeiro, em 1928, onde obteve os diplomas de Engenheiro Geógrafo em 1930, e Engenheiro Civil em 1932 Fez o curso com várias distinções, tendo feito jus, também, ao prêmio "Paulo de Frontin", conferido pela Congregação da Escola em 1937.

Seu primeiro contato com o Serviço Público ocorreu em 1933, na qualidade de contratado do então Ministério do Trabalho, Indústria e Comércio, como Assistente-Técnico. Ainda em 1933, prestou concurso nessa Entidade para o cargo de Atuário Adjunto, exercido até 1936. Nessa data, em concurso, obteve a primeira colocação para o cargo de Atuário-Assistente, com defesa da tese "Tábuas biométricas, sua construção e ajustamento". A partir daí exerceu as funções de chefe da Divisão Técnica do Departamento Nacional de Seguros Privados e Capitalização do MTIC, Consultor Atuarial do IAPI, Chefe do Departamento Atuarial do IPASE e Consultor Atuarial do IRB Em 1946, assumiu a Direção da Divisão Atuarial do IAPI, que organizou e implantou, aí permanecendo até 1966. Em outubro de 1969, aposentou-se no Serviço Público Federal

Em 1967, foi criado o Centro Brasileiro de Estudos Demográficos, atual Departamento de Estudos de População, no IBGE, resultado de seu idealismo e do apoio da Presidência, visando ao estudo científico da população ao atendimento governamental para o planejamento da política demográfica do País. Nomeado nessa época para o Departamento, permaneceu na sua direção até o seu falecimento (15 de janeiro de 1979).

A contribuição do Prof. João Lyra Madeira levou-o a participar de várias entidades científicas como a União Internacional para o Estudo Científico da População, o International Association Statistical Institute, o IASI, o CICRED, a SBPC, o Instituto Brasileiro Atuário e a Sociedade Brasileira de Estatística. Foi Presidente da primeira Diretoria Executiva da Associação Brasileira de Estudos Populacionais e, pelos serviços prestados em prol da Demografia no Brasil e dos esforços para a fundação dessa Associação, foi eleito Presidente de Honra.

Em virtude de suas múltiplas especializações, foi indicado para participar de Consultorias, Comissões Técnicas, Conferências, Congressos e Seminários, dos quais podem ser citados: Membro da Comissão Censitária Nacional, Relator do Tema "Pesquisa operacional aplicada ao seguro social" na II Conferência Internacional de "Actuários y Estadígrafos de la Seguridad Social" Membro da Comissão Técnica de Estimativas de População, do IBGE, Membro do Conselho Atuarial do então Mi-



nistério do Trabalho e Previdência Social, Assessor Técnico da Delegação Brasileira à Conferência de Chapultepec (1944), Congresso Mundial de População (Roma, 1954), Representante do Brasil ao Congresso do Instituto Internacional de Estatística (28.ª Reunião), Membro da Comissão de Consolidação das Leis do Trabalho e Previdência Social, Representante do Brasil ao Congresso Internacional do Instituto Internacional de Estatística (Bruxelas — 34.ª Reunião), Presidente da Comissão para Planificação das Estatíscas Nacionais (1964/65), Consultor para assuntos econômicos do Instituto Nacional de Previdência Social (1966/67), Representante do Brasil na Comissão de População do Conselho Econômico e Social na ONU (1969 a 1972), Presidente da Sessão sobre Mortalidade no I Congresso Latino-Americano de População — México (1970), Membro da Comissão de Planejamento e Normas Estatísticas (CONPLANE), Coordenador da Comissão de Coordenação Técnica da II Conferência Nacional de Estatística (CONFEST — 1972). Integrou o Comitê de apoio à elaboração da Matriz de Relações Intersetoriais, no IBGE (1972), participou do I Encontro Inter-regional de Cientistas Sociais do Brasil (1972), Congrès International de la Population (Liège — 1973), Seminário Brasileiro de População (São Leopoldo — 1973), Encontro Brasileiro de Estudos Populacionais (IBGE — Rio de Janeiro, 1974) e, ainda apresentou trabalho no II Encontro Inter-regional de Cientistas Sociais do Brasil (1974), Seminário sobre a Utilização do Método de Amostragem nas Pesquisas e Questionários de Saúde da Organização Pan-Americana de Saúde (Bogotá — 1975), Seminário sobre a Política Nacional de Idosos (Brasília — 1976), Conferência sobre População, Recursos Naturais e Meio-Ambiente no ciclo de Conferências e Debates promovido pela Universidade Federal do Paraná (Curitiba — 1977).

Publicou inúmeros trabalhos e colaborou em vários periódicos, como: *Revista Brasileira de Estatística,* Rio de Janeiro; *Mensário Estatístico Atuarial,* Rio de Janeiro; *Boletim Demográfico,* Rio de Janeiro; *Acta Haematologica,* Suíça; *Revista Brasileira de Biologia,* Rio de Janeiro; *Revista dos Industriários,* Rio de Janeiro; *Revista Brasileira de Atuária,* Rio de Janeiro; *Notas de Población,* Chile.

De suas atividades no magistério, ministrou os mais variados cursos na Fundação Getulio Vargas, Escola Normal de Niterói, Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência, Instituto de Resseguros do Brasil (IAPI), Pontifícia Universidade Católica. Merece destaque sua contribuição à Escola Nacional de Ciências Estatísticas — professor-fundador, lecionou a partir de março de 1953 as Cadeiras de Controle de Qualidade e Estatísticas Industriais, Estatística Aplicada, Análise e Pesquisa de Mercado e Demografia. Participou dos Órgãos Colegiados da Escola e foi Coordenador do Ensino Superior, de 1965 a 1967.

Os Estatísticos formados pela Escola Nacional de Ciências Estatísticas receberam, desde a sua primeira turma, a influência do saudoso professor João Lyra Madeira.

LUCINDA DA SILVA

BIBLIOGRAFIA DOS TRABALHOS DO PROF. JOÃO LYRA MADEIRA PUBLICADOS NA REVISTA IRB

Hulda Maria Gomes
Estatística

CONVENÇÕES

Indicação bibliográfica — *1* (3): col 6-34, out. 1940 — significa: volume 1 (fascículo ou número 3). coluna 6-34, data (mês e ano) do fascículo ou número

ABREVIATURA

R IRB, — *Revista do IRB*, Rio de Janeiro

Probabilidade e acaso *R IRB, 1* (3). col. 6-34, out 1940

Conferência realizada no MTIC, 1940

Esboço histórico das origens do cálculo de probabilidade e suas aplicações O desenvolvimento correlato do cálculo das probabilidades e da estatística Conceituação, características e exemplos de acaso Valor científico e prático da probabilidade· evolução de seu emprego até o presente

Ajustamento de tábuas de mortalidade *R IRB, 5* (29). col 111-22, fev. 1945, *7* (41). col 35-75, tab., gráf.

Considerações em torno dos polinômios de Tchebcheff definição. A utilização da Cuiva de Makeham no ajustamento das tábuas de mortalidade. Aplicação teórica da fórmula de Makeham. exemplo prático e tabelas ilustrativas.

Os verdadeiros objetivos do plano de resseguro-vida no I.R.B. *R. IRB, 6* (33): col. 5-12, out. 1945.

Causas e objetivos da instituição do resseguro. Origens das oscilações do coeficiente de sinistros nas companhias de seguros.

Cálculo da reserva matemática. *R. IRB, 8* (43): col. 19-36, jun. 1947, tab.

Metodologia para o cálculo da reserva matemática de uma companhia seguradora de grande porte.

Análise das séries históricas: *R. IRB, 8* (46): col. 5-30, dez. 1947, tab., gráf.; *8* (47): col. 77-91, fev. 1948; *9* (48): col. 47-58, abr. 1948; *9* (49): col. 101-18, jun. 1948, tab. gráf.; *9* (50): col. 141-54, ago. 1948, tab., gráf.; *9* (51). col. 97-106, out. 1948, tab., gráf; *9* (53): col 121-44, fev. 1949, tab.; *10* (55): col. 55-70, jun. 1949, tab., gráf.; *10* (56): col. 111-23, ago. 1949, tab, gráf.; *10* (57): col. 103-18, out. 1949, tab, gráf.; *10* (58)· col. 83-100, dez. 1949, tab, gráf.; *10* (59): col. 129-38, fev. 1950, tab., gráf.; *11* (61). col. 107-16, jun. 1950, *11* (62)· col. 101-12, ago. 1950; *11* (64): col. 83-96, dez. 1950; *11* (65): col. 123-36, fev. 1951.

Definição e aplicações gerais de séries históricas no estudo da estrutura e evolução demográficas e na análise dos sistemas econômicos. Tipos e características das séries históricas. Métodos de análise e exercícios de aplicação prática. Condições para o ajustamento de uma série. Teoria e prática do ajustamento: exemplos de aplicação. Métodos de cálculo do erro de estimativa: aplicação. Estudo das funções ajustadoras. Método de ajustamento pela logística: teoria e aplicação.

Estudos para fixação dos F. R. no ramo incêndio. *R. IRB, 8* (47): col. 13-46, fev. 1948, tab., gráf.

Metodologia adotada no novo critério para o cálculo dos fatores de retenção das sociedades que operam no ramo incêndio.

As reservas técnicas no seguro. *R. IRB, 9* (52): col. 11-30, dez. 1948, tab.

Natureza e função da reserva técnica. Análise da reserva matemática de um seguro de vida. Tipos e plano de aplicação de reservas. Ativo total das sociedades seguradoras e instituições de previdência social em 1947, e análise das possibilidades de novas inversões, tendo em vista o aumento das reservas técnicas. Diferença entre as necessidades de inversões das instituições de seguros privados e as de seguro social.

Alguns aspectos técnicos do seguro agrícola. *R. IRB, 10* (56): col. 7-26, ago. 1949, tab, gráf.

Explanação do método norte-americano de cálculo do seguro da produção e do investimento agrícolas. Aspectos econômicos do seguro agrícola.

Despesas de aquisição. *R. IRB, 10* (59): col. 19-28, fev. 1950, tab.

Caracterização e critérios de amortizações das despesas de aquisição das sociedades seguradoras no Brasil.

Majoração das aposentadorias e pensões a cargo das instituições de previdência social. *R. IRB, 11* (62): col. 23-32, ago. 1950, tab.

Resultados da Lei 1.136, de 19-7-50, que elevou as aposentadorias e pensões, as quais passaram a ser superiores aos salários de atividade: aumentos percentuais em cada UF. Os desequilíbrios técnicos previstos em decorrência da referida Lei para as instituições de previdência social.

Considerações sobre o resseguro nos seguros dos ramos elementares. *R. IRB, 11* (63): col. 13-32, out. 1950, tab.

Objetivos do resseguro. Fontes de risco aleatório a que estão sujeitas as sociedades de seguros e maneira por que atuam, em conjunto, os riscos provenientes de cada uma dessas fontes. Tipos de resseguros utilizados nos chamados ramos elementares. Resultados da aplicação prática do resseguro.

O seguro agrícola. *R. IRB, 13* (77): col. 25-46, fev. 1953; *14* (79): col. 21-38, jun. 1953.

Objetivos do seguro agrícola. Histórico de sua evolução nos EUA, dificuldades com que se defrontaram os seguradores norte-americanos e medidas adotadas pelo Governo. Organização e condições de operação do ramo no Japão. Possibilidades do seguro agrícola no Brasil.

Alguns aspectos do resseguro. *R. IRB, 14* (81): col. 165-94, out. 1953, tab., gráf.

Objetivos do resseguro. Fontes de riscos aleatórios que interessam às operações de resseguro. Problemas do resseguro. Análise do seguro de excesso anual de sinistro/prêmio e evolução da taxa sinistro/prêmio, 1940/51. Sugestões para um plano de resseguro.

Tese apresentada à 1.ª Conf Brasileira de Seg. Privados.

Probabilidade e acaso *R. IRB, 17* (99): col. 95-128, out. 1956.

Esboço histórico das origens do cálculo de probabilidades e suas aplicações. O desenvolvimento correlato do cálculo das probabilidades e da estatística. Conceituação, características e exemplos de acaso. Valor científico e prático da probabilidade: evolução de seu emprego até o presente.

Conferência realizada no MTIC, 1940.

BIBLIOGRAFIA DOS TRABALHOS DO PROF. JOÃO LYRA MADEIRA PUBLICADOS NO MENSÁRIO ESTATÍSTICO ATUARIAL*

HULDA MARIA GOMES
Estatística — Chefe do SCT/COGERE
e
LUCINDA DA SILVA
Estatística — Assessora do CBED

O presente levantamento, liberado como contribuição aos trabalhos de pesquisa bibliográfica no campo da Demografia, para a qual temos recebido inúmeras e freqüentes solicitações, constitui parte inicial da Bibliografia dos Trabalhos do Professor João Lyra Madeira. Por se tratar de uma divulgação preliminar, adotou-se a ordem cronológica da publicação. Uma bibliografia completa, dos trabalhos já divulgados, está sendo preparada. Como orientação inicial, fornecemos alguns dos títulos de periódicos que estão sendo trabalhados Revista Brasileira de Estatística, *Rio de Janeiro;* Revista Industriários, *Rio de Janeiro;* Revista Brasileira de Química, *Rio de Janeiro;* Revista de Estudos Sócio-Econômicos, *Rio de Janeiro;* Boletim Estatístico, *Rio de Janeiro, IBE;* Revista IRB, *Rio de Janeiro e Estadística,* Washington.

* O Periódico acima referido teve como primeiro título *Boletim Estatístico Atuarial.*

ABREVIATURA

Mens. estat. atuar — Mensário Estatístico Atuarial, Rio de Janeiro.

CONVENÇÕES

Indicação bibliográfica — *1* (5): 5-16, maio 1953 — significa: volume 1 (fascículo ou número 5): páginas 5 a 16, data (mês e ano) do fascículo ou número

Regimes financeiros do seguro social. *Mens. estat. atuar.*, *1* (7): 52-60, jul. 1953, tab., *1* (9): 55-61, set. 1953, tab., gráf.

Tipos, definição e características dos regimes financeiros de seguro social. Determinação dos elementos à estabilidade de uma instituição em cada regime financeiro considerado Cálculo do fundo acumulado.

Aspectos econômicos de algumas características demográficas *Mens. estat. atuar.*, *1* (11): 7-19, nov. 1953, gráf.; *1* (12): 7-19, dez. 1953, tab., gráf.; *2* (13): 20-9, jan. 1954, tab.

Densidade demográfica e distribuição da população do Brasil, comparadas às de outros países. Metodologia para o cálculo do "otimum" de população, do ponto de vista econômico. O crescimento e a composição etária da população: suas implicações sociais e econômicas, dados comparativos do Brasil e outros países. Taxas de mortalidade e sobrevivência nas principais Capitais brasileiras e em diversos países. Condições sanitárias do País. Aspectos econômicos das migrações externas e internas.

Salário na indústria em 1952. *Mens. estat. atuar.*, *1* (11): 31-4, nov. 1953, tab.

Análise dos resultados das apurações dos salários na indústria brasileira, segundo as UF, 1952

Limite do salário de contribuição. *Mens. estat. atuar.*, *1* (11): 35-6, nov. 1953, tab.

A necessidade de elevação do atual limite de contribuição do IAPI. Percentuais de associados do IAPI que contribuem sobre o máximo, segundo as UF, 1952, e em todo o Brasil, 1937/52

| A média de grau *s* é uma função sempre crescente de *s* no campo real|. *Mens. estat. atuar.*, 1 (11): 37-9, nov. 1953.

Demonstração, baseada no conceito mecânico de centro de gravidade, de que a média de grau n será superior à de grau m se $n > m$

Reavaliação do ativo. *Mens. estat. atuar.*, *2* (13): 18-9, jan. 1954 (Exponha seu problema).

Objetivo da acumulação de capitais no regime de capitalização. As receitas de contribuições e de juros como elementos decisivos e correlacionados no equilíbrio do IAPI Demonstração da inutilidade do aumento dos valores dos bens que figuram no ativo, se daí não decorrer um aumento de receitas de juros, para a melhoria das condições técnico-financeiras do IAPI.

13.º Congresso Internacional de Atuária. *Mens. estat. atuar.*, *2* (13): 58, jan. 1954.

Comentário ao Congresso e apresentação de tradução de relatório sobre o financiamento do seguro social.

Teoria geral da média. *Mens. estat atuar.*, *2* (15): 49-51, mar. 1954 tab.; *2* (16): 64-6, abr. 1954.

O caminho para a construção de qualquer teoria. Definição teórica d média geral e exemplo de aplicação

O período de carência no seguro social. *Mens. estat. atuar.*, *2* (16): 7-11, abr. 1954.

Transcrição de parecer em processo do IAPI. Conceituação e objetivos do período de carência estabelecido em lei para a concessão de benefício social. Necessidade da carência e inconvenientes que sua supressão podem ocasionar.

| Interpolação em tabelas conjugadas | *Mens. estat. atuar.*, *2* (16): 21-2, abr. 1954 (Exponha seu problema).

Significado e exemplo de cálculo da "interpolação em tabelas conjugadas", ponto do programa de matemática-financeira de concurso do IAPI para Tesoureiro-Auxiliar

Amostragem e inferência estatística. *Mens. estat. atuar.*, *2* (16): 67-8, abr. 1954; *2* (17): 70-7, maio 1954, Bibliografia; *2* (18): 36-47, jun. 1954, tab.; *2* (19): 64-9, jul. 1954, tab.; *2* (20): 59-67, ago. 1954, tab.; *2* (21): 43-7, set. 1954; *2* (22): 45-52, out. 1954, gráf.; *2* (24): 69-84, dez. 1954; *3* (25): 41-5, jan. 1955, tab., gráf.; *3* (27): 47-53, mar. 1955, tab., gráf.; *3* (28): 51-64, abr. 1955, tab., gráf.; *3* (30): 63-4, jun. 1955; *3* (31): 47-52, jul. 1955, gráf.; *3* (32): 57-8, ago. 1955, tab.

Definição de inferência estatística e amostragem. Demonstração de que o tamanho da amostra depende da variabilidade da população Alguns problemas de aplicação da estatística à Medicina, Administração e Controle de Qualidade Conceitos básicos e exemplos relativos a: Cálculo de probabilidade; distribuição hipergeométrica, binomial, de Poisson e normal; decisão estatística, teste de hipótese; teste de proporção; esperança matemática.

Sobre as alterações observadas no andamento dos auxílios-pecuniários. *Mens. estat. atuar.*, *2* (17): 26-9, maio 1954.

Análise da tendência do aumento do número de pagamentos de auxílios-pecuniários pelo IAPI, no período de jun 1952 a dez. 1953, em comparação com 1949/51.

Valor médio das pensões concedidas de acordo com o novo regulamento geral das instituições de previdência social. *Mens. estat. atuar.*, *2* (18): 7-9, jun. 1954, tab.

Critérios e métodos adotados no estabelecimento de novas bases para o cálculo das pensões

| Cálculo atuarial| *Mens estat. atuar.*, *2* (18): 22-3, jun. 1954 (Exponha seu problema).

Definição e exemplo de cálculo atuarial

O atuário e a ciência atuarial *Mens. estat. atuar.*, *2* (19): 20-3, jul. 1954.

Atribuições do atuário e finalidades da previsão atuarial. Qualidade e utilização das estatísticas indispensáveis ao cálculo atuarial.

Rendimentos fabulosos auferem os Institutos pelo novo regulamento. *Mens. estat. atuar.*, *2* (19): 42-4, jul. 1954.

Contestação a artigo publicado em jornais de S Paulo relativo à receita pseudo-fabulosa dos Institutos de Previdência do País.

Sobre um novo índice de dispersão. *Mens. estat. atuar.*, *2* (19): 39-41, jul. 1954. tab.; *2* (20): 21, ago. 1954.

Definição e exemplos do índice de dispersão aplicável tanto às distribuições quantativas quanto às qualitativas (índice H) e do índice R, destinado a medir a covariância e aplicável às distribuições de atributos qualitativos.

A revogação do Decreto n.º 35 448 de 1.º de maio de 1954. *Mens. estat. atuar.*, *2* (21): 1, set. 1954.

Reflexos do Decreto que aprovou o Regulamento Geral dos Institutos de Previdência no equilíbrio financeiro do IAPI.

Previdência e salário mínimo. *Mens. estat. atuar.*, *2* (21): 9-11, set. 1954.

Em resposta a artigo de jornal, são expostas as razões pelas quais deve ser revogado o art. 3º da Lei 1 136, de 19-6-50, que versa sobre o limite máximo de contribuição para os Institutos de Aposentadoria e Pensões.

Nota explicativa sobre o "Inquérito Estatístico na Indústria". *Mens. estat. atuar.*, *2* (21): 13-6, set. 1954.

Esclarecimentos às empresas industriais que devem preencher o questionário Q-2 sobre as razões para a inclusão de diversos itens, os quais, aparentemente, fogem ao objetivo do inquérito — determinação do custo do plano de aposentadorias, pensões e demais auxílios pecuniários a serem concedidos pelo IAPI.

Algumas conseqüências da situação financeira dos Institutos. *Mens. estat. atuar.*, *2* (22): 5-6 out. 1954.

Análise sucinta das decorrências do deficit financeiro do IAPI: atraso cada vez maior nos pagamentos e solicitações de adiantamentos por conta da cota da União

| Casas para associados | *Mens. estat. atuar.*, *2* (22): 23-4, out. 1954 (Exponha seu problema).

Alguns esclarecimentos sobre o financiamento ou construção de casas para os associados do IAPI.

O problema do financiamento do seguro social no Brasil. *Mens. estat. atuar.*, *2* (23): 1-31, nov. 1954, tab., gráf., Bibliografia.

Os critérios que podem ser utilizados na cobertura dos encargos das instituições de previdência, isto é, os diferentes sistemas financeiros aplicáveis ao seguro social obrigatório. Cálculo das taxas de invalidez, saída da inatividade e contribuição; relação entre o número de aposentados e ativos: prazo necessário para atingir o equilíbrio. Evolução do número de aposentados do IAPI, 1942/53. Cálculo dos valores do fundo acumulado e das contribuições necessárias na fase de equilíbrio. Problemas e sugestões relativas à aplicação de capital. Aspectos atuariais do financiamento do seguro social: os possíveis regimes financeiros e respectivas conseqüências.

Entrevista... *Mens estat. atuar.*, *2* (24): 30-2, dez. 1954.

Transcrição de entrevista publicada na "Tribuna da Imprensa", Rio de Janeiro, 22 nov. 1954.

Causas da situação de dificuldade financeira do IAPI.

Observações sobre o projeto n.º 1 146, de 1949, que estabelece a aposentadoria ordinária aos 55 anos. *Mens estat. atuar.*, *3* (25): 6-8, jan. 1955.

Análise sucinta dos inconvenientes financeiros (para as instituições de previdência social), econômicos e sociais (para o País) do projeto de lei que antecipa a idade de aposentadoria.

Considerações técnicas em torno do IAPI. *Mens. estat. atuar.*, *3* (26): 17-9, fev. 1955.

Análise sucinta da situação financeira do IAPI

Planos de seguro social. *Mens estat. atuar.*, *3* (29): 5-10, maio 1955, tab; *3* (30): 5-11, jun. 1955, tab.; *3* (32): 23-5, ago 1955.

Crítica ao projeto de lei que altera a idade de aposentadoria para 50 anos (com 35 anos de serviço) e 60 anos (independentemente do tempo de serviço). Recomendações internacionais sobre o assunto. Implicações sociais e econômicas da composição etária da população em diversos países

Problemas de estatística. *Mens estat. atuar*, *3* (29): 54-6, maio 1955.

Desenvolvimento e solução de problemas relativos a índices, média e desvio padrão de uma distribuição de freqüência

Estudo elementar das equações estocásticas de diferenças. *Mens. estat. atuar*, *3* (32): 50-6, ago. 1955.

Definições básicas, soluções e exemplos de equações de diferenças finitas, lineares homogêneas (de 1ª e 2ª ordens) e lineares não homogêneas

Introdução ao estudo elementar das equações de diferenças finitas estocásticas. *Mens. estat. atuar*, *3* (33): 54-60, set. 1955, *3* (34): 50-6, out 1955; *3* (35). 29-35, nov. 1955; *4* (37): 25-30, jan 1956; *4* (38): 38-43, fev 1956; *4* (40): 26-36, abr. 1956, *4* (41): 36-9, maio 1956, il.

Soluções e exemplos de vários tipos de equações de diferenças finitas estocásticas. (Nos ns. 35, 37, 38, 40, o título é Introdução ao estudo das equações de diferenças estocásticas).

Natalidade e fertilidade. *Mens. estat. atuar.*, *3* (36): 28-32, dez. 1955, tab.

Exposição das técnicas e elementos estatísticos utilizados na mensuração da fertilidade de uma população As taxas de natalidade como medida básica de fertilidade Determinação de taxas e índices comparativos de fertilidade. Tabela da proporção de mulheres (de todas as idades e entre 15 a 49 anos) na população dos países da América Latina, 1950

(Exposição do autor no 1º Seminário sobre Problemas de População na América Latina, Rio de Janeiro, dez 1955 — ONU/IBGE).

Mortalidade *Mens. estat atuar.*, *3* (36): 32-9, dez. 1955, tab.

Análise sucinta da mortalidade na América Latina: causas e conseqüências do declínio Métodos para a determinação de índices e taxas comparativas de mortalidade

(Exposição do autor no 1º Seminário sobre Problemas de População na América Latina, Rio de Janeiro, dez. 1955 — ONU/IBGE)

Estudo estatístico da distribuição dos beneficiários de pensões. *Mens. estat. atuar.*, *4* (38): 17-21, fev. 1956, il; *4* (39). 22-4, mar. 1956, tab.

Metodologia e resultados de levantamento por amostragem realizado no Arquivo de Pensões do IAPI, com o objetivo de conhecer a estrutura da distribuição dos beneficiários das pensões segundo a espécie, 1955

(No nº 39 o título é Estudo estatístico da distribuição dos benefícios de pensões)

Escola Nacional de Ciências Estatísticas Problemas do exame de

2.ª época: estatísticas demográficas (3.º ano). *Mens. estat. atuar.*, *4* (39): 67-73, mar. 1956, tab.

Enunciados e soluções de problemas sobre demografia.

O seguro social (Comentário técnico). *Mens. estat. atuar.*, *4* (40): 12-5, abr. 1956.

Considerações em torno da situação precária da previdência social no Brasil. Importância e objetivos da acumulação de capitais.

A lei que já veio tarde. *Mens. estat. atuar.*, *4* (41): 5-9, maio 1956.

Histórico e objetivos da Lei 2 755, de 16-4-56, que elevou o teto de contribuição às instituições de previdência.

Seguro social. *Mens estat. atuar.*, *4* (42): 5-6, jun. 1956.

Deficiência da legislação previdenciária brasileira Diferença entre os regimes financeiros de capitalização e o chamado regime de repartição Causas que influiram nas difíceis condições atuais do Seguro Social.

Controle estatístico da qualidade na produção industrial. *Mens. estat. atuar.*, *4* (42): 34-6, jun. 1956, il.

Objetivos e métodos do controle de qualidade na produção industrial.

A previdência e as previsões atuárias. *Mens. estat. atuar.*, *4* (43): 5-17, jul. 1956, tab., des.

Demonstração de que as instituições de previdência social não poderão atender aos compromissos se não forem resolvidos vários problemas capitais, comparando-as a um imenso reservatório alimentado pelas contribuições do associado e do empregador, cotas de previdência e juros das reservas.

Criação e organização do IAPI. *Mens. estat. atuar.*, 4 (43): 23-35, jul. 1956, tab.

Explanação sobre as origens, criação, organização e finalidades do IAPI. Critérios seguidos no financiamento do seguro social no Brasil e em outros países. O regime financeiro de taxa nivelada ou estabilizada, adotado no Brasil. Débito da União para com o IAPI em 31 dez., (1938/46), e as dívidas de empregadores: conseqüências e soluções Plano de inversões do Instituto: objetivo e obstáculos. A desobediência aos planos técnicos e administrativos como causa da má situação financeira do IAPI.

Teste estatístico. *Mens. estat. atuar.*, *4* (44): 15-24, ago. 1956, il.

Metodologia aplicada a um exemplo prático de testes unilateral, superior e inferior, e bilateral.

Escola Nacional de Ciências Estatísticas. 1a. prova parcial de estatísticas demográficas. *Mens. estat. atuar.*, 4 (44): 25-31, ago. 1956.

Enunciados e soluções de problemas sobre demografia.

Amostragem para aceitação de produtos elaborados ou semi-elaborados. *Mens. estat. atuar.*, *4* (45): 33-42, set. 1956, tab., gráf.; *4* (46): 29-36, out. 1956; *4* (48): 43-6, dez. 1956, gráf.; *5* (50): 57-60, fev. 1957, tab., gráf.; *5* (52): 20-5, abr. 1957, tab.

Metodologia, critérios e aplicação do teste de aceitação, processo de controle de qualidade de produtos elaborados e semi-elaborados Definição e exemplos dos processos de amostragem utilizados (Nos ns. 46, 48, 50, 52 o título é: Controle de qualidade).

O financiamento do seguro social no Brasil. *Mens. estat. atuar., 4* (47): 30-6, nov. 1956, tab.

Análise do problema de financiamento do seguro social em geral, solução adotada no Brasil e situação atual. Aspectos atuariais, econômicos e políticos do problema; alternativas possíveis e respectivas implicações.

Gráfico de Lexis. *Mens. estat. atuar., 4* (47): 40-6, nov. 1956, gráf.

Metodologia para a utilização do gráfico idealizado pelo demógrafo alemão Guilherme Lexis, na construção de uma tábua de mortalidade com base em dados censitários

Deficit técnico e deficit financeiro. *Mens. estat. atuar., 4* (48): 3-5, dez. 1956.

Explanação sobre a diferença entre deficit técnico e financeiro, bem como suas conseqüências para uma instituição de seguro social.

Resolução dos problemas dados na prova escrita de estatísticas demográficas, da Escola Nacional de Ciências Estatísticas. *Mens. estat. atuar, 4* (48): 47-52, dez. 1956.

Enunciados e soluções de problemas sobre demografia

Controle estatístico da qualidade dos produtos elaborados ou semi-elaborados. *Mens. estat. atuar, 5* (49): 44-52, jan. 1957, tab., gráf.

Enunciados e soluções de problemas dados na Escola Nacional de Ciências Estatísticas (ENCE)

Prova de estatísticas demográficas da Escola Nacional de Ciências Estatísticas. *Mens. estat. atuar., 5* (51): 67-73, mar. 1957, tab.

Enunciados e soluções de problemas sobre demografia.

Controle de qualidade dos produtos elaborados e semi-elaborados. *Mens. estat. atuar., 5* (54): 29-38, jun. 1957, tab., gráf.

Definição e exemplo dos principais critérios para a realização da inspeção estatística (amostragem simples) de produtos elaborados ou semi-elaborados, para fins de aceitação ou rejeição.

Estatísticas industriais *Mens. estat. atuar., 5* (55): 24-34, jul. 1957.

Enunciados e soluções de problemas envolvendo amostragem; prova aplicada na ENCE — 4º ano.

A seleção no caso de testes de escolha simples e múltipla. *Mens. estat. atuar., 5* (57): 27-9, set. 1957, tab.

Apresenta solução dentro de teoria da decisão estatística, para o problema da fixação do grau de aprovação no caso das provas de escolha simples e múltipla.

Comentário sobre o seguro social. *Mens. estat. atuar., 5* (60): 3-5, dez. 1957. Bibliografia

Análise especial do cap. X da Lei Orgânica (Substitutivo Batista Ramos) referente à pensão

Comentário sobre seguro social. *Mens. estat. atuar., 6* (61): 12, jan. 1958.

Observação sobre o parágrafo 1º, do artigo 23, comparado com o item *a*) do artigo 72, do projeto da Lei Orgânica Comparação de texto

Escola Nacional de Ciências Estatísticas. *Mens. estat. atuar.*, *6* (63): 41-4, mar. 1958, tab.; *6* (65); 30-3, maio 1958, gráf.; *6* (66): 23-6, jun. 1958, gráf.; *6* (67): 21-3, jul. 1958, tab

Transcrição de questões de provas das Cadeiras de Estatísticas Demográficas e de Estatísticas Industriais. Soluções dos problemas propostos

Controle estatístico da qualidade. *Mens. estat. atuar.*, *6* (66): 27-31, jun. 1958; *6* (67): 24-6, jul. 1958; *6* (68): 38, ago. 1958; *6* (71): 8-13, nov. 1958, il.

Amostragem para aceitação de material em verificação da qualidade de um serviço, amostragem por variáveis em universo de variância conhecida Estudo de uma função de grande utilidade nas aplicações da estatística aos problemas industriais Aplicações práticas

Sobre a sistematização de alguns tipos de estudos demográficos. *Mens. estat atuar*, *6* (69): 16-24, set. 1958, tab.

(Trabalho apresentado ao Congresso Internacional de Estatística, Bruxelas, set 1958)

Aplicações dos sitemas de ponderações mais usados na determinação da média de uma certa função da idade, principal objetivo de grande número de estudos demográficos.

Discurso de paraninfo. *Mens. estat. atuar.*, 7 (74): 3-9, fev. 1959.

Transcrição do discurso do paraninfo da turma de 1958, da Escola Nacional de Ciências Estatísticas

Entrevista. *Mens. estat. atuar*, 7 (77): 22-3, maio 1959.

Explanação sobre finalidade e atividades próprias da Divisão Atuarial do IAPI, feita na entrevista concedida à Rádio Continental, na qualidade de Chefe da mesma Divisão

Controle de qualidade na produção industrial. *Mens. estat. atuar.*, 7 (78)· 19-24, jun. 1959.

Exposição referente a caso de inspeção por amostra em produção contínua, objetivando a melhoria da produção, corrigindo os defeitos logo que eles sejam detectados Bases-teóricas do problema e fixação do plano de inspeção.

1 ª prova parcial de estatística demográfica da 3.ª série. *Mens. estat. atuar.*, 7 (79): 43, jul. 1969.

Enunciado das questões de prova à 3 ª série da ENCE

1.ª prova parcial de estatística industriais da 4.ª série. *Mens. estat atuar*, 7 (79): 44, jul. 1959.

Enunciado das questões de prova aplicada à 4 ª série da ENCE.

Comentário sobre inversões no seguro social. *Mens. estat. atuar.*, 7 (80): 3-4, ago. 1959.

O papel que poderia ter sido desempenhado pelas inversões da Previdência Social, empregadas segundo um programa técnico que trouxesse solução aos problemas financeiros da mesma

Carta científica; estatística e progresso. *Mens estat. atuar.*, 7 (82): 11-3, out. 1959

Comentários e exemplos que ilustram o espírito científico inerente à adoção da estatística como método de decisão Sua função para países em desenvolvimento

Noções de cálculo de probabilidades. *Mens estat. atuar*, *8* (85):

17-29, jan. 1960, il; *8* (87): 18-24, mar. 1960.

Exemplos de provas aleatórias e sua realização. Conceituação de prova e experiência Explicação sobre os termos: observação, experiência, evento, ocorrência e acontecimento Definição de evento simples e evento composto, complexo, decomponível ou não simples Noções de álgebra lógica dos eventos Exame de alguns tipos característicos de provas aleatórias e teoria de aplicações Exercícios. Considerações gerais sobre o modelo teórico. Probabilidade condicional Estudo da independência estocástica
Probabilidades associadas a alguns espaços de provas simples. Estrutura do espaço de provas.

Fórmula útil para o cálculo da taxa de variação de uma população, etc. *Mens. estat. atuar.*, *8* (86) · 51-2, fev. 1960, tab.

Demonstração da aplicação de fórmulas para o cálculo da taxa de variação de uma população, durante um certo período, quando não se dispõe de uma tábua de logaritmos

A técnica estatística e a produtividade. *Mens. estat. atuar.*, *8* (86): 53-61, fev. 1960

Considerações sobre o emprego dos métodos modernos da estatística aplicados ao estudo e ao aperfeiçoamento dos métodos de trabalho

Administração e método científico. *Mens estat. atuar.*, *8* (87) 25-32, mar. 1960.

Contribuição para o estudo de uma administração eficiente

A qualidade dos produtos da indústria. *Mens. estat. atuar.*, *8* (88): 45-50, abr. 1960, tab , gráf.

Análise de um plano de amostragem simples, com objetivo de mostrar como funciona um plano desse tipo, ressaltando os seus efeitos benéficos sobre a qualidade do material aceito, em comparação com a do material submetido à inspeção. Comparação das distribuições do material, segundo a qualidade, antes e depois da inspeção, acompanhando os resultados, teóricos de um exemplo numérico

Sobre o critério de um "ponto ótimo" para a localização de um centro de processamento de dados. *Mens. estat. atuar.*, *8* (90): 15-8, jun. 1960, tab.

Estudo de um critério racional de localização de um Centro de Processamento de Dados que receba elementos, de vários pontos de origem, para operações de apuração, tabulação, comparação, etc.

Problemas de demografia teórica e aplicada. *Mens. estat. atuar*, *8* (92): 5-18, ago. 1960, gráf.; *8* (96): 24-8, dez. 1960, tab., gráf

Definição e caracterização de "ponto demográfico" Noções básicas de demografia

Reavaliação de ativo das instituições de previdência social. *Mens. estat. atuar.*, *8* (93): 5-6, set. 1960.

Comentário acerca de revalorização dos ativos dos Institutos de Aposentadoria e Pensões.

Escola Nacional de Ciências Estatísticas; prova de estatísticas industriais, turma de 1960 (2ª época). *Mens. estat. atuar.*, *9* (99) · 64-7, mar. 1961.

Enunciado geral dos problemas apresentados e soluções

Cibernética e finalidade. *Mens. estat. atuar*, *9* (103): 28-33, jul 1961.

Definição exemplificada de cibernética Demonstração do domínio amplo dessa ciência

A pesquisa operacional aplicada à administração de pessoal. *Mens. estat. atuar.*, *9* (103): 34-9, jul. 1961, tab.

Descrição da pesquisa operacional como método geral e seguro de análise e solução de problemas de funcionamento dos conjuntos de órgãos coordenados para a consecução de um objetivo. Apresenta problema e solução onde se pretende determinar qual a percentagem de novos servidores a serem admitidos, e quanto tempo devem permanecer em cada uma das classes que especifica

Noções sobre o estudo das filas de espera. *Mens. estat. atuar.*, *10* (109): 7-12, jan. 1962, tab.

Sumário dos elementos teóricos essenciais ao estudo das filas de espera, entre os quais se incluem, essencialmente, a distribuição das entradas no sistema e a distribuição dos tempos do serviço

Ciência e progresso. *Mens. estat. atuar.*, *10* (111): 18-24, mar. 1962.

Discurso do Paraninfo da turma de 1961 da Escola Nacional de Ciências Estatísticas (ENCE).

Algumas aplicações práticas da álgebra de Boole. *Mens. estat. atuar.*, *10* (115): 12-8, jul. 1962; *10* (116): 32, ago. 1962; *10* (117): 13-9, set. 1962.

Aplicações da Álgebra de Boole à teoria das proposições, teoria dos circuitos e teoria dos conjuntos. Problemas e soluções

O emprego da simulação no problema das filas. *Mens. estat. atuar.*, *10* (116): 24-31, ago 1962.

Método de simulação com o objetivo de determinar as características de uma fila. Apresentação através de exemplos numéricos fictícios, com a caracterização das fases essenciais do processo de simulação: a observação dos dados; a extração de amostras fictícias e a análise dos dados.

Transcrito no *Mens. estat. atuar.*, *11* (129): 26-33, set. 1963.

O método Monte-Carlo e suas aplicações. *Mens. estat. atuar.*, *10* (117): 5-12, set. 1962; *10* (119): 2-9, nov. 1962, tab., gráf.

Princípios fundamentais em que se baseia o método Monte-Carlo. Este é um método teórico-experimental, que utilizando a técnica estatística, permite obter resultados práticos, mesmo naqueles casos em que a análise matemática é impotente ou trabalhosa.

Testes de aleatoriedade no controle da qualidade. *Mens. estat. atuar.*, *10* (118): 17-33, out. 1962, tab., gráf.

Tipos fundamentais de amostragens empregados no controle estatístico da qualidade. Testes genéricos, exercícios Testes específicos; caso do "Trend". Tabela com valores críticos para o teste de seqüência.

Alguns conceitos econômicos na demografia. *Mens. estat. atuar.*, *10* (118): 34-44, out. 1962, tab. gráf.

Distribuição por idades; unidades de consumo e de produção

Conseqüências do 13.º salário nas instituições de previdência *Mens. estat. atuar.*, *10* (120): 3-4, dez. 1962.

Voto no Conselho Atuarial do MTPS Análise das consequências lógicas da Lei que estabelece o 13.º salário em face dos princípios técnicos que regem as condições de equilíbrio dessas instituições, tendo em vista as tendências já manifestadas e a sadia norma consubstanciada no art. 158 da Lei 3.807, de 26 ago. 1960 (Lei Orgânica da Previdência Social).

Custeio da assistência médica. *Mens. estat. atuar., 10* (120): 11-20, dez. 1962.

Relatório do Grupo de Trabalho para estudar o problema da Assistência Médica da Previdência Social, tendo em vista a Lei Orgânica n.º 3 807, de 26 ago. 1960 e o Regulamento Geral, n.º 48 959-A, de 19 set. 1960.

Escola Nacional de Ciências Estatísticas. Discurso de paraninfo (Turma de 1962). *Mens. estat. atuar., 11* (122): 7-13, fev. 1963.

Transcrição, na íntegra, de discurso pronunciado ao paraninfar a turma de 1962 da Escola Nacional de Ciências Estatísticas (ENCE)

Proc. 1 021 498/62. Informação. *Mens. estat. atuar., 11* (122): 57-8, fev. 1963.

Transcrição de informação prestada no Processo 1 021 498/62 do IAPI, sobre tabelas de cálculo de acréscimo de renda, sem se levar em conta as taxas de nupcialidade, devolvendo-se ao beneficiário, por ocasião do casamento, a reserva existente, relativa ao acréscimo inicial.

Gráfico de Lexis. *Mens. estat. atuar., 11* (123): 49-55, maio 1963, gráf.

Dissertação sobre o gráfico de Lexis, idealizado pelo demógrafo alemão Guilherme Lexis, que representa um grande auxílio na compreensão dos problemas que surgem, quando da construção de uma tábua de mortalidade usando-se os elementos de um recenseamento.

Testes de hipóteses estatísticas. *Mens. estat. atuar., 11* (125): 56-69, maio 1963.

Estudo dos testes de hipóteses estatísticas e exemplos ilustrativos.

As filas na assistência médica do IAPC. *Mens estat. atuar., 11* (127): 16-9, jul. 1963, tab.

Análise estatística sumária de dados, que servirão de base a estudos definitivos. Primeira contribuição decorrente do trabalho da comissão de filas designada pelo Departamento Nacional de Previdência Social. Os dados se referem apenas ao Ambulatório de Campinas e dizem respeito às altas verificadas no primeiro semestre de 1962.

Necessidade da mecanização em alto grau. *Mens. estat. atuar., 11* (127): 20-3, jul. 1963.

A automação e a rentabilidade de sua adoção pelas instituições

Noções sobre o estudo das filas de espera. *Mens. estat. atuar., 11* (128): 21-6, ago. 1963.

Transcrição. Ver *Mens. estat. atuar, 10*(109):7-12, jan. 1962.

Alguns conceitos econômicos na demografia. *Mens. estat. atuar., 11* (130): 11-21, out. 1963, tab., gráf.

Transcrição Ver *Mens. estat. atuar, 10*(118):34-44, out. 1962.

A seleção no caso de testes de escolha simples e múltipla, *Mens. estat. atuar., 11* (130): 22-4, out. 1963.

Transcrição Ver *Mens estat atuar, 5*(57):27-9, set 1957, tab.

Intervalos de tolerância. *Mens estat. atuar., 11* (131): 22-8, nov. 1963, tab. Bibliografia

Solução para um problema no campo da Estatística Industrial, qual seja a determinação dos intervalos de variação das diferentes características dos produtos, decorrentes do processo produtivo empregado na sua fabricação.

Decisões e jogos de estratégia. *Mens. estat. atuar., 12* (133): 27-34, jan. 1964.

Explicação sumária mediante exemplos concretos, de como pode a teoria dos jogos de estratégia contribuir para certos tipos de decisões humanas

Decisões Humanas. *Mens. estat. atuar., 12* (135): 3-17, mar. 1964; *12* (136): 39-55, abr. 1964, il.

Estudo de vários tipos de decisões e exemplos ilustrativos

Alguns modelos demográficos teóricos para o estudo sumário de evoluções condicionais. *Mens. estat. atuar., 12* (137): 1-11, maio 1964, il

Análise de modelos não estocásticos ou determinísticos

Análise demográfica para programação econômica. *Mens. estat* 1964; *12* (136) · 39-55, abr. 1964, il.

Panorama da situação demográfica mundial Exame de métodos e modelos teóricos que podem servir de base ao estudo da evolução demográfica dos países sub e semi-desenvolvidos: modelos globais ou sintéticos e modelos analíticos.

O emprego de matrizes em demografia. *Mens. estat. atuar., 12* (142): 20-7, out. 1964, il.

Indicação de possibilidades do emprego de matrizes no campo da demografia, utilizando para exemplos problemas de transferência de populações do campo para a cidade e da cidade para o campo, e de distribuição da população segundo a ocupação.

Testes de aleatoriedade no controle da qualidade. *Mens. estat. atuar., 12* (143): 1-17, nov. 1964, tab., gráf.

Métodos de amostragem para aceitação de lotes já produzidos e para verificação e correção do processo produtivo Testes genéricos. Testes específicos, caso do "Trend". Tabela referente aos valores críticos para o teste de seqüência (teste de aleatoriedade)

Alguns conceitos econômicos na demografia. *Mens. estat. atuar., 12* (143): 18-28, nov. 1964, tab., gráf.

Método para o cálculo de consumo médio por habitantes

População por grandes grupos de idade, taxas de crescimento, unidades de consumo e de produção Distribuições por idades das populações: Brasil — 1950, Índia — 1951, EE.UU. — 1954, Suécia — 1950, França — 1954

Testes de Kolmogorov — Smirnov. *Mens. estat. atuar., 12* (143): 29-36, nov. 1964, tab. Bibliografia.

Considerações sobre resultados teóricos obtidos por Kolmogorov-Smirnov Aplicação dos testes

Escola Nacional de Ciências Estatísticas; discurso de Paraninfo. *Mens. estat. atuar., 13* (146): 6-9, fev. 1965.

Transcrição do discurso do Paraninfo da turma de 1964 da Escola Nacional de Ciências Estatísticas.

Diferentes aplicações da distribuição χ^2 *Mens. estat. atuar., 13* (146): 10-27, fev. 1965, tab., gráf.

Teste bilateral e teste unilateral. Potência e característica de operação do teste Quadro de cálculo das ordenadas da função característica de operação e o gráfico correspondente Utilização da distribuição χ^2 para testar hipóteses sobre variâncias de universos normais

Cadeias homogêneas de Markoff e suas aplicações práticas. *Mens. estat. atuar*, *13* (148): 20-32, abr. 1965, il.

Definições básicas Descrição sumária dos estados do sistema. Tempos médios de retorno e de passagem

Estudo da mortalidade *Mens. estat. atuar.*, *13* (149): 1-20, maio 1965, il.

Definição de elementos referentes à idade 0: "tempo de vida" Demonstração das funções de distribuição e de permanência ou de sobrevivência Notação para "vida média". Definição de elementos de natureza condicional densidade de probabilidade, funções de distribuição e de sobrevivência e tempo médio de vida. Demonstração de diversas relações entre os vários elementos definidos Aplicações da teoria exposta à desintegração radioativa, mortalidade animal, mortalidade humana Problemas diversos. Cálculo da vida média econômicamente ativa Algumas tábuas abreviadas de sobrevivência· EE UU, 1949/51; Brasil 1940/50; Guanabara, 1949/51, Chile, 1952/53.

Sobre um critério de julgamento de mérito para promoção de funcionário. *Mens. estat. atuar*, *13* (150). 11-19, jun. 1965; *13* (151)· 8-12, jul 1965, il, *13* (152)· 1-4, ago 1965, tab

Relatório com observações sobre a substituição do sistema de julgamento do mérito dos funcionários, para promoção, adotado no IAPI Análise sumária do critério consubstanciado em resolução da Comissão de Promoções

Matrizes em demografia. *Mens. estat. atuar.*, *13* (150): 20-4, jun. 1965.

Demonstração de que não se representa um fenômeno de mortalidade por uma cadeia de Markoff em que a tábua de sobrevivência se transforme em uma matriz de transferência

Equações de diferenças e diferenciais na análise demográfica *Mens. estat. atuar.*, *13* (151): 1-7, jul. 1965.

Exposição sumária do tipo de problema que se enquadra no âmbito da cinemática demográfica e emprego de equações de diferenças (ou de equações diferenciais) no tratamento desses problemas

Problemas demográficos atuais. *Mens estat. atuar.*, *13* (151). 16-23, jul. 1965, il, *13* (152): 13-21, ago. 1965. il.

Desenvolvimento e subdesenvolvimento O produto bruto "per capita" como índice representativo do bem estar econômico de uma nação; comparações baseadas nesse conceito. Variabilidade desse índice em diferentes nações Curva de Concentração de Lorentz correspondente à distribuição do Produto Nacional Bruto em 72 nações Crescimento demográfico mundial

Problemas de análise demográfica. *Mens. estat. atuar.*, *13* (154): 1-11, out. 1965.

Estudo da reprodução Definição de um índice de reprodução Características de alguns países no período 1931/35 Alguns problemas práticos.

Controle estatístico da qualidade *Mens estat. atuar.*, *13* (154). 12-16, out. 1965, il

Controle em produção produtor e consumidor, a linha de produção e o controle de qualidade, inspeção total versus inspeção por amostra

Explosão demográfica mundial. *Mens. estat. atuar., 13* (155): 1-6, nov. 1965.

Transcrição de artigo publicado em o "Jornal do Brasil" de 17 out. 1965. Análise do crescimento demográfico mundial Considerações acêrca de mortalidade. A solução encontrada pelo Japão e Rússia.

Falácias e paradoxos em estatística. *Mens. estat. atuar., 14* (157): 1-6, jan. 1966.

Comentários de exemplos com resultados paradoxais decorrentes do emprego de índices não suficientemente precisos.

Política demográfica e economia. *Mens. estat. atuar., 14* (159): 32-6, mar. 1966.

Considerações sobre crescimento demográfico e suas implicações na economia.

Discurso de paraninfo (ENCE). *Mens. estat. atuar., 14* (160): 17-21, abr. 1966.

Transcrição do discurso feito ao paraninfar a turma de 1965 da Escola Nacional de Ciências Estatísticas.

Amostra para apuração dos questionários da Lei de 2/3. *Mens. estat. atuar., 14* (160): 34-54, abr. 1966, tab.; *14* (161): 55-57, maio 1966, tab., *14* (162): 46-55, jun. 1966, tab.; *14* (163): 16-27, jul, 1966, tab.; *14* (164): 38-52, ago. 1966, tab.; *14* (166): 19-33, out. 1966, tab.

Considerações sobre a técnica da amostragem e sobre o plano utilizado para as apurações dos questionários da Lei de 2/3. Estimativa do número de empregados por Estado, com base na amostra de 4% do total dos questionários, 1965. Divulgação de tabelas relativas às apurações de 1965 para GB, SP, RJ e MG.

Medicina e espécie humana. *Mens. estat. atuar., 14* (161): 11-4, maio 1966.

Estudos sobre o progresso da medicina contra a mortalidade, causa principal do aumento da natalidade. Com a quebra do equilíbrio existente, a explosão demográfica se perpetuou, trazendo graves conseqüências para a humanidade, como a eliminação das fôrças de evolução que agiam através da seleção natural a que está sujeita toda espécie viva. Trouxe esses dois resultados indesejáveis, que poderão vir a ser causa de calamidades futuras e degenerescência genética da espécie. Mas, apresenta uma solução: a eliminação desses dois resultados pelo contrôle da natalidade. A aplicação da engenia positiva, para a seleção da espécie, seria a forma de solucionar o problema.

Estudo da reprodução como processo estocástico. *Mens. estat. atuar., 14* (162): 1-7, jun. 1966, tab. Bibliografia.

Modelo matemático para estudo da reprodução Coeficiente líquido de reprodução.

População e economia. *Mens. estat. atuar., 14* (162): 22-9, jun. 1966.

Considerações sobre a importância do crescimento demográfico e o desenvolvimento econômico. A população como fator econômico nos países subdesenvolvidos.

População e formação de capital *Mens. estat. atuar., 14* (163): 5-15, jul. 1966, tab., gráf.

Considerações sobre aspectos numéricos das relações entre volumes de capital e volume de população. Análise do problema do desenvolvimento relacionado com a estrutura do capital social, de modo que a capacidade de crescimento da produção sugere definitivamente a capacidade de crescimento da população Desenvolvimento de fórmulas matemáticas relacionadas com o problema.

Algumas considerações sobre o imposto de circulação (antigo IVC). *Men. estat. atuar.*, *14* (164): 9-13, ago. 1966.

Comenta os problemas econômicos e fiscais resultantes da aplicação da seção IV da Emenda Constitucional n.º 18, art 12

Modificação da incidência do imposto de vendas e consignações (IVC). *Mens. estat. atuar.*, *14* (164): 14-21, ago. 1966, tab.

Estudo sobre a fixação de taxa para a incidência do imposto de vendas e consignações face à projetada modificação na legislação vigente. Documento básico para estudo posterior do assunto nele focalizado

As desigualdades econômicas. *Mens. estat. atuar.*, *14* (164): 22-37, ago. 1966, tab.

Análise do problema do desenvolvimento econômico mundial, baseada em elementos estatísticos sobre produto bruto, produto bruto "per capita" e produto nacional, utilizados como índices desse desenvolvimento.

Coeficiente líquido de reprodução e nupcialidade. *Mens. estat. atuar.*, *14* (165): 1-13, set. 1966, tab., gráf.

Definição de coeficiente líquido e bruto de reprodução. Determinação das propriedades demográficas potenciais de uma dada combinação binária "mortalidade — fecundidade"; exame das propriedades da combinação ternária "mortalidade — nupcialidade — fecundidade". Processo para cálculo e tabela com coeficiente líquido de reprodução e nupcialidade

Perspectivas e alternativas para a população mundial do futuro. *Mens. estat. atuar.*, *13* (156): 9-12, dez. 1965.

Apresentação de idéias sobre as possíveis alternativas com que se defrontará a população mundial, considerada em conjunto, em face de seu crescimento e das dimensões finitas do mundo

A livre escolha na assistência médica da previdência social. *Mens. estat. atuar.*, *14* (166): 5-8, out. 1966.

Transcrição de Parecer dado no Processo n.º 177 489/62. Contém os princípios gerais que devem nortear a matéria e uma súmula dos planos para prestação da assistência médica

Assistência médica da previdência social. *Mens. estat. atuar.*, *14* (166): 9-18, out. 1966.

Transcrição da Revista de Estudos Sócio-Econômicos, Ano I, n.º 4, 1961. Exposição sobre os aspectos técnicos--financeiros da assistência médica da previdência social e das dificuldades inerentes à sua execução.

Malthus, Marx e o papel da população no desenvolvimento econômico. *Mens. estat. atuar.*, *14* (167): 1-17, nov. 1966. Bibliografia.

Estudo analisando os principais pontos das idéias oposicionistas de Marx e de Malthus, com relação ao crescimento demográfico e no desenvolvimento econômico. Análise de aspectos econômicos ligados aos problemas demográficos em exemplo ilustrativo.

Natalidade e fecundidade feminina (Parte do curso de demografia). *Mens. estat. atuar.*, *14* (174): 3-25, jun. 1967, il.

Definição de taxa bruta de natalidade geral. Indicação de fatores que influenciam o total de nascimento como indicador para o crescimento demográfico: número de mulheres entre 15 e 50 anos na população e proporção de mulheres casadas. Determinantes da natalidade. Taxas de fecundidade feminina. Tabelas: "Taxas de natalidade, segundo alguns países — 1945/1959", "Taxa de fecundidade feminina geral, em alguns países"; "Taxas brutas de nupcialidade em 1954, 1956 e 1958 para alguns países".

Tábuas de permanência com várias causas de eliminação. *Mens. estat. atuar.*, *14* (177): 10-33, set. 1967, tab., gráf.

Estudo com dedução de fórmulas que serão utilizadas na construção de tábuas de permanência com várias causas de eliminação.

Qualidade da população. *Mens. estat. atuar.*, *15* (179): 25-47, nov. 1967; *15* (180) · 23-54, dez. 1967, il.

Indica fatores evolutivos que atuam sobre as diversas componentes de uma população e as leis aplicáveis a cada um desses fatores; evolução de uma comunidade em decorrência de sua ação conjugada. Hereditariedade

TRABALHOS EM COLABORAÇÃO

* MADEIRA, João Lyra & IÓRIO, Oswaldo. Amostragem na indústria em 1953. *B. estat. atuarial*, *1* (5): 5-16, maio 1953, tab.; *1* (6): 35-50, jun. 1953, tab.

Métodos para determinação do tamanho da amostra e técnica da amostragem estratificada; aplicação ao inquérito industrial por amostragem, a ser realizado pelo IAPI, em dez. 1953.

——— & IÓRIO, Oswaldo. Inquérito na indústria em dezembro de 1953. *Mens. estat. atuar.*, *1* (8): 7-17, ago. 1953, mapas, tab.

Método utilizado na extração das amostras de municípios do extrato constituído por municípios de menor concentração de indústrias em São Paulo e Minas Gerais, com vistas ao inquérito industrial por amostragem a ser realizado em dez 1953 pelo IAPI. Resultados tabulares e mapas de localização dos extratos em SP e MG

——— & CARVALHO, Gerson Rodrigues de. Mortalidade dos segurados do IPASE. *Mens. estat. atuar.*, *5* (53): 56-62, maio 1957, tab., gráf.

O presente estudo constitui um resumo de um trabalho de classe dado no Curso de Estatísticas Demográficas da Escola Nacional de Ciências Estatísticas Metodologia e resultado de estudos para determinação da mortalidade observada no grupo de classe de seguro dotal do IPASE. Óbitos verificados no decênio 1945/54

——— Curvas de crescimento | apontamentos e redação de Oswaldo Iório e Gerson Rodrigues de Carvalho |. *Mens. estat. atuar.*, *5* (54): 39-45, jun 1957.

Curso especial ministrado na Divisão Atuarial do IAPI Estudo da evolução da taxa de crescimento de uma função.

* Primeiro título do Mensário Estatístico Atuarial

DARIC, Jean. Conseqüências sociais do envelhecimento da população. Tradução de João Lyra Madeira e Gerson Rodrigues de Carvalho. *Mens. estat. atuar.*, *1* (10): 85-9, out. 1953, tab.

Inter-relações do envelhecimento com o seguro social e a habitação. Proporção de velhos nas populações de diversos países, 1900/47.

13.º Congresso Internacional de Atuários — 1951. Relatório Geral. Tradução de João Lyra Madeira e Altair Formel. *Mens. estat. atuar.*, *2* (14): 29-30, fev. 1954.

Relatório dividido em duas partes onde são analisados os sitemas obrigatórios e facultativos de pensões

GERING, Daniel S. Métodos de introdução da seguridade social nos países insuficientemente desenvolvidos. Tradução de João Lyra Madeira & Gerson Rodrigues de Carvalho. *Mens. estat. atuar.*, *2* (19): 24-30, jul. 1954

As etapas da organização do seguro social Proteções ao empregado existentes sob outra forma Fontes de recursos da previdência social Qualidade do pessoal administrativo Necessidade de decisão inter-ministerial. O planejamento básico do seguro social em um país: fatores do preço de custo, utilização da experiência de outros países, educação do público e planos contínuos

GERING, Daniel S. Alguns problemas da seguridade social Tradução de João Lyra Madeira e Gerson Rodrigues de Carvalho. *Mens. estat. atuar.*, *2* (20): 12-20, ago. 1954.

Principais problemas de um plano de seguro social: categoria das pessoas protegidas, trabalhadores independentes, proteção social da população agrícola, extensão geográfica do regime, riscos a cobrir, benefícios, depreciação monetária, contribuição do Governo, constituição de reservas e organização administrativa

MYERS, J. RASOR, E A. Projeções a longo prazo da população dos Estados Unidos para fins de estimativa do custo do seguro social. Tradução de João Lyra Madeira e Dalza de Oliveira. *Mens. estat. atuar.*, *2* (20): 22-36, ago. 1954, tab., gráf

Metodologia e hipótese adotadas. Taxas de natalidade e mortalidade Comparação com projeções anteriores Resultados para 1950/2050.

GERING, Daniel S. As principais formas de seguridade social. Tradução de João Lyra Madeira e Gerson Rodrigues de Carvalho. *Mens. estat. atuar.*, *2* (21): 17-23, set 1954.

Explanação sobre cada um dos cinco sistemas de seguro social: contribuição obrigatória; sem contribuição, voluntário e não oficial; caixas individuais de empresas e de previdência ou caixas-doença e leis sobre a responsabilidade pessoal dos empregadores

MELAS, Reinhold. O elemento familiar na determinação dos benefícios do seguro social Tradução de João Lyra Madeira e Gerson Rodrigues de Carvalho *Mens. estat. atuar.*, *3* (25): 14-7, jan. 1955.

Trabalho apresentado às "Jornadas Internacionais de Estudos sobre os Benefícios Familiares", Roma, abr. 1953 R.A.I.S.S., 2(7): 27-45, nov. 1953. Origem, objetivos e organização do seguro social. A família e as medidas previstas, para sua proteção, pelo seguro social.

Envelhecimento progressivo das populações de diversos países. Tradução de João Lyra Madeira e Gerson Rodrigues de Carvalho. *Mens. estat. atuar.*, *3* (30): 27-8, jun. 1955.

Tradução de artigo publicado no Bulletin de l'Association Internationale de la Securité Sociale (3), março 1955. Excertos e comentários de trabalhos sobre o assunto, realizados pelo Ministério do Trabalho da Grã-Bretanha e por Emma Steiger (Zurique)

Associação Internacional de Seguridade Social. Resoluções, recomendações e conclusões adotadas pela XII Assembléia Geral e pelo Conselho da A.I.S.S., México, nov/dez. 1955. Tradução de João Lyra Madeira e Gerson Rodrigues de Carvalho. *Mens. estat. atuar.*, *4* (39): 40-5, mar. 1956.

Resoluções relativas a acordos de reciprocidade no seguro social, benefícios de família, influência da reeducação profissional sobre a avaliação da invalidez, formação médico-social no México e seguro doença.

Reajustamento de aposentadorias e pensões na França. Tradução de João Lyra Madeira e Gerson Rodrigues de Carvalho. *Mens. estat. atuar.*, *5* (51): 24-5, mar. 1957, tab.

Tradução de artigo publicado no Boletim da A.I.S.S, Paris (11) nov. 1956. Critério seguido na França para o reajustamento das aposentadorias e pensões, abr. 1956.

MEYLON, Maurice. Cibernética e organização. Tradução João Lyra Madeira. *Mens. estat. atuar.*, *8* (91): 3-7, jul. 1960.

Trabalho apresentado no I° Congresso Internacional de Cibernética — NAMUR, 1956. Aplicação da Cibernética aos problemas de Administração.

MEHL, Lucien. Cibernética e Administração. Tradução de João Lyra Madeira. *Mens. estat. atuar.*, *9* (97): 5-11, jan. 1961; *9* (98): 34-42, fev. 1961.

Trabalho apresentado ao I Congresso Internacional de Cibernética reunido em Namur, 1956. Definição de cibernética e administração. Pesquisa da relação entre as duas ciências. Contribuições da cibernética ao campo da mecanização dos serviços públicos e da racionalização da administração

CALENDÁRIO DE REUNIÕES INTERNACIONAIS (ANO DE 1979)

Transcrevemos do Boletim do International Statistical Institute — ns. 5 e 6 — o Calendário de Reuniões (sessões, simpósios e congressos) programadas para o ano de 1979 por organismos internacionais e instituições científicas de diversos países:

DATA	*LOCAL*	REUNIÃO
15-26 janeiro	Nova Iorque, EUA	Nações Unidas: vigésima sessão da Comissão de Estatísticas (*) *Informações*: N U. Statistical Office, New York, N Y 10017, USA
15 janeiro/ 09 fevereiro	North Ryde, Austrália	Australian Mathematical Society, Summer Research Institute, incluindo dois dias destinados à Conferência sobre Estatísticas Aplicadas *Informações*: (para a Conferência s/Estatísticas Aplicadas) — prof, D McNeil, Macquarie University, North Ryde, NSW 2113, Australia
fevereiro (ainda sem data)	Wellington, Nova Zelândia	ESCAP, Seminário de Organização Estatística (*) *Informações*: Mr M Yusuf, Chefe da Divisão de Estatística, ESCAP, United Nations Building, Bangkok, Thailand
29 janeiro/ 09 fevereiro	Nova Iorque, EUA	Nações Unidas: vigésima sessão da Comissão de População (*) *Informaçõess* U. N. Population Division, New York, N Y 10017, USA
20 fevereiro/ 02 março	Nova Iorque, EUA	Nações Unidas: vigésima sessão da Comissão de Estatística (*) *Informaçõess* U N Statistical Office, New York, N Y. 10017, USA
27-29 março	Nottingham, Reino Unido	International Time Series Meeting *Informações*: O D Anderson, Box A, 9 Ingham Grove, Lenton Gardens, Nottingham, NG 7 2LQ, United Kingdom
09-11 abril	Amsterdam, Holanda	Association of European Operational Research Societies within IFORS Terceiro Congresso Europeu de Pesquisa Operacional *Informações*: Euro III, c/o Organisatie Bureau Amsterdam, Europaplein 1078, GZ Amsterdam, Netherlands
09-13 abril	Innsbruck, Áustria	United Nations Industrial Development Organization and Government of Austria (*) Sétima Conferência Internacional s/Técnicas de Equipamento Entrada/Saída *Informações*: Y R Cho, UNIDO, P O Box 707, Viena, Austria A-1011

(*) Reuniões fechadas

abril (ainda sem data)	Paris, França	UNESCO: Seventh Meeting of the panel of experts to discuss the draft of the manual for application of standardized concepts in collection of science and technology statistics (*) *Informações*: Director, Office of Statistics, UNESCO 7, Place de Fontenoy, 75700 Paris
23-28 abril	Seul, Coréia	The Pacific Conference in Operations Research *Informações*: Dr Rak To Song, Secretary Pacific Conference on O R c/o Hong Neung Machine Industry Co, CPO Box 3089, Seoul, Korea
24-30 abril	Wellington, Nova Zelândia	ESCAP, Seminar on Statistical Organization (*) *Informações*: Mr Y. Yusuf, Chief of Statistics Division. ESCAP UN Building, Bangkok, Thailand
maio (ainda sem data)	Viena, Áustria	UNESCO: Grupo de Trabalho sobre Estatísticas e Indicadores Culturais (*) *Informações*: Director Office of Statistics UNESCO, 7, Place de Fontenoy, 75700, Paris
10-11 maio	Waterloo, Ontário, Canadá	Computer Science and Statistics: 12th Annual Symposium on the Interface *Informações*: J F. Gentlemen, Department of Statistics, University of Waterloo, Ontario, Canada, N21 3G1
07-16 maio	Berlim, República Democrática da Alemanha	Fourth International Summer School on Problems of Model Choice and Parameter Estimation in Regression Analysis *Informações*: Zentralinstitut für Mathematik und Mechanik der AdW der DDR, "Somerschule Modellwahl", Mohrenstrasse 39,108 Berlin, DDR
06-10 agosto	Illinois, EUA	Bernoulli Society for Mathematical Statistics and Probability: 9th Conference on Stochastic Processes and their Application *Informações*: Prof E Cinlar, Dept of Industrial Engineering and Management Sciences, North Western University, Evanston, Illinois 60201, USA
13-16 agosto	Washington, DC, EUA	Institute of Mathematical Statistics, Reunião Anual *Informações*: G J Resnikoff, Executive Secretary IMS, Office of Graduate Studies, California State University, Hayward, Cal 94542, USA
13-16 agosto	Washington, DC, EUA	American Statistical Association, 139ª Reunião Anual *Informações*: ASA, 806-15th Street, N W Washington D C 20005, USA
03-07 setembro	Varna, Bulgária	Bernoulli Society for Mathematical Statistics and Probability — European Regional Committee, 12ª Reunião Européia de Estatísticos *Informações*: B I Penkov, Bulgarian Academy of Science, National Committee for Mathematics, P O Box 373, Sofia, Bulgaria
04-07 setembro	Budapest, Hungria	European Organization for Quality Control: 23rd EOQC Annual Conference *Informações*: Hungarian Office for Standardization, EOQC Secretariat, H-1450 Budapest 9, P O Box 24, Hungary
04-07 setembro	Atenas, Grécia	Econometric Society: European Meeting *Informações*: Professor E Drandakis, Rector of the Athens School of Economics and Business Sciences, 76, Potison Street, Athens 104, Greece
04-14 dezembro	Manila, Filipinas	International Statistical Institute: 42nd Biennial Session *Informações*: ISI Permanent Office, 428 Prinses Beatrixlaan, 2270 AZ Voorburg, Netherlands

(*) Reuniões fechadas

IBGE
Presidente: Isaac Kerstenetzky
Diretor-Geral: Eurico de Andrade Neves Borba
Diretor-Técnico: Speridião Faissol
Diretor de Divulgação: Renato Pacheco Americano

CENTRO EDITORIAL
Superintendente: Waldir da Costa Godolphim
DEPARTAMENTO DE EDITORAÇÃO
Chefe: Mário Fernandes Paulo
DEPARTAMENTO DE DIAGRAMAÇÃO E ILUSTRAÇÕES
Chefe: Carlos Goldenberg