REVISTA BRASILEIRA DE ESTATÍSTICA

Órgão oficial do IBGE
e Sociedade Brasileira de Estatística

Endereço:

Av. Augusto Severo, 8 — 2.º andar — ZC-06 — Lapa
Rio de Janeiro, RJ — Brasil — Tel: 242-4466

Preço:

assinatura anual:	Cr$ 90,00
número avulso:	Cr$ 25,00

SUMÁRIO

Artigos

Bibliografia

R. bras. Estat.	Rio de Janeiro	v. 38	nº 150	p. 109 a 236	abr./jun. 1977

Revista Brasileira de Estatística ano 1- (n. 1-) jan/mar. 1940- Rio de Janeiro, IBGE, Centro Editorial.

v 27cm Trimestral

Substitui a "Revista de Economia e Estatística" editada pelo Serviço de Estatística da Produção do Ministério da Agricultura, v. 1-4, jul 1936-abr 1939 Mensal

órgão oficial do IBGE e Sociedade Brasileira de Estatística

Denominações anteriores do órgão editor: 1936-1967, Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, Conselho Nacional de Estatística, Diretoria de Documentação e Divulgação ——— 1967-1969, Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, Instituto Brasileiro de Estatística, Diretoria de Documentação e Divulgação ——— 1969-1973, Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, Instituto Brasileiro de Estatística, Departamento de Divulgação Estatística ——— 1973-1976, Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, Departamento de Divulgação Estatística

Índices: v 22-24, 1961-1963 em v 25
v 25-26, 1964-1965 em v 27
v 27-28, 1966-1967 em v 29

Apresenta índices anuais

1. Estatística — Periódicos I IBGE. Centro Editorial, ed

CDU 31:05(81)
CDD 310.5

Biblioteca Central

FORÇA-DE-TRABALHO E MORTALIDADE*

Ernani Thimoteo de Barros
Estatístico

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O objetivo do presente estudo consiste, primordialmente, em apresentar relações, no que tange à participação das pessoas na vida economicamente ativa, em comparação com as funções de sobrevivência, por idade, para a população masculina.

* Estudo elaborado no Centro Brasileiro de Estudos Demográficos do IBGE

Não se podendo, ainda, realizar um estudo muito extensivo da força-de-trabalho e da duração da vida ativa, as comparações abrangeram, apenas, alguns países típicos de vários estágios de desenvolvimento social e econômico para confrontação com o caso brasileiro.

A pesquisa, de início, ficou, como já foi advertido, limitada à população masculina, em vista da maior participação desta na força-de-trabalho. Posteriormente, em outro estudo, serão estendidas à população feminina as análises correspondentes, nas quais métodos especiais poderão ser aplicados.

Como se sabe, o desenvolvimento sócio-econômico está relacionado à elevação da capacidade produtiva e aos níveis de cultura da população e, mais especialmente, a sua força-de-trabalho. Assim, pesquisas visando a esclarecer aspectos ligados à força-de-trabalho se apresentam extremamente úteis, tendo-se em vista as possibilidades de aplicação à programação sócio-econômica do planejamento de um país. O progresso deste está vinculado às reservas de pessoal técnico e científico existentes e ao ritmo de formação desse potencial. A "modernização" da sociedade traz consigo a diversificação cada vez mais minuciosa das atividades profissionais, acarretando a necessidade de se intensificar a formação de novos especialistas. Observe-se, ainda, que o incremento do produto nacional depende não só do investimento material mas também do investimento no fator humano, agindo este último como um limitador do investimento produtivo. A capacidade de absorção de capital também depende da força-de-trabalho, volume e qualificação.

Compara-se a situação de diferentes países, no que se refere à força-de-trabalho, dimensões e características, visando a distinguir a influência de alguns fatores sociais, econômicos, culturais, históricos, etc. que agem diversamente em cada país e em cada estágio de seu desenvolvimento econômico.

Os fatores estritamente demográficos não são independentes destes, as duas categorias de fatores interagem uma em relação a outra. Por exemplo, variações sócio-econômicas se fazem seguir por mudanças no nível e nas características da fecundidade e da mortalidade, do que resultam diferenças na estrutura por sexo e idade (e, indiretamente, na taxa bruta de atividade).

2. CARACTERIZAÇÃO DA FORÇA-DE-TRABALHO

No estudo da força-de-trabalho analisa-se o modo pelo qual as pessoas obtêm os produtos e os serviços necessários à satisfação das necessidades de toda a população, tanto os simplesmente indispensáveis à subsistência como aqueles que resultam dos valores culturais de dado tipo de sociedade.

Nesse estudo o enfoque pode ser através das técnicas de pesquisa da Demografia, como da Economia, da Antropologia Cultural, etc. Pertence esse estudo, logo, ao domínio das Ciências Sociais, e nele o tratamento estatístico é exaustivamente aproveitado.

Evidentemente, ao nascer, todo indivíduo é considerado como consumidor. Antes mesmo do nascimento acarreta encargos, traduzíveis, ou não, em moeda, e, assim, já é um consumidor em potencial. Conforme os padrões sociais, ao subir da idade, atingindo determinados níveis de formação cultural e, especificamente profissional, tornam-se os indivíduos, também, produtores. A partir, no entanto, de certas idades maduras e senis, diminui a capacidade de produzir — que chega até a se anular — embora os indivíduos continuem na qualidade de consumidores, mesmo quando não mais produzem. Logo, são consumidores todos os componentes de uma população. Produtores apenas um segmento da mesma, dependendo, em grande parte, da idade, fator demográfico. Outros, ainda, embora em idades produtoras, conservam-se apenas consumidores: os não ativos, por exemplo, que vivem de rendas (*status* social, aspecto sócio-econômico), os inaptos pelas condições de saúde que apresentam (aspecto biossocial da Demografia), etc.

Numa população, a classificação básica em "economicamente ativos" e "não economicamente ativos" apresenta, na prática, algumas dificuldades. Encontram-se, de país para país, apesar de normas acertadas em nível internacional, diferenças marcantes de critério. De critério e de interpretação de critério. Em certos casos, em razão das classificações mais minuciosas disponíveis, aproximativamente, se torna possível homogeneizar os elementos estatísticos ao alcance do pesquisador, em relação a épocas diferentes e a regiões diversas.

Logo em seguida vem o problema da discriminação dos economicamente ativos nos diversos ramos de atividade, bem como nas ocupações que exercem. Aqui o relacionamento com a Economia e com a Demografia é evidente. Todos os aspectos das populações relacionados às suas estruturas por sexo, idade, nível cultural, anos de escolaridade, estado conjugal, etc. passam a ser combinados com a atividade econômica e a características ligadas à mesma.

A análise da dinâmica da população pode revelar os aspectos da estrutura da força-de-trabalho, em dado momento e lugar, segundo as variáveis demográficas consideradas de importância para determinar o potencial econômico virtual dos efetivos populacionais.

Pelo menos teoricamente, em economia de mercado, as pessoas são livres para ofertar sua capacidade de trabalho. Evidentemente, recebem em troca salários ou compensações várias por este esforço e com o que recebem procuram satisfazer suas necessidades de bens e de serviços.

Em economias de subsistência, ou de semi-subsistência, predominantemente agrárias, as pessoas consomem ou tudo ou parte do que produzem (sendo parte, se for o caso, destinada ao proprietário da terra). Assim, as utilidades de que necessitam são, o mais das vezes, produzidas por elas próprias, tornando-se difícil avaliar todos esses elementos — bens e serviços produzidos e consumidos — em unidades monetárias.

A composição da força-de-trabalho por ocupações depende, em grande parte, da preparação profissional dos habitantes para exercer a atividade econômica. Mas jazem na base da demanda elementos como as características da economia do país e os investimentos que são feitos na área econômica. Visa-se, planejadamente, a um equilíbrio entre a oferta e a procura, entre outras coisas, para evitar o desemprego ou o subemprego (este, "visível" ou "invisível"). As inter-relações entre a Demografia, a Economia e, também, a Educação aqui são bastante profundas. Para se atingir o desenvolvimento econômico, a força-de-trabalho deve estar adequadamente preparada. Para haver novos empregos, investimentos são necessários. E esses novos investimentos só se tornam, em geral, possíveis, conforme o estágio econômico, mercê da poupança interna, do empréstimo do exterior, da aplicação em bens de capital de parte do lucro das empresas, da criação de empresas com parte do capital levantado no exterior, do aumento da produtividade (que permite a utilização de lucros extras na ampliação da própria empresa), etc.

A população economicamente ativa, segundo conceito de ampla aceitação, abrange as pessoas dos dois sexos que constituem a *mão-de-obra disponível* para a produção de bens e serviços, durante o período de referência escolhido para a investigação.

Compõe-se de todas as pessoas que exercem uma atividade econômica, remunerada ou não, ou que aspiram a exercê-la quando ainda se encontram procurando um emprego.

Compreende os seguintes agrupamentos (os quais não se excluem mutuamente em certos casos):

1) empregadores civis, assalariados, trabalhadores por conta própria, trabalhadores familiais não remunerados, membros de cooperativas de produtores;
2) membros das forças armadas;
3) pessoas ativas mas desocupadas, inclusive aquelas procurando atividade pela primeira vez;
4) pessoas trabalhando em regime de tempo parcial;
5) domésticos.

A população não ativa compreende as pessoas que não exerciam, nem pretendiam exercer, nenhuma atividade econômica durante o período de referência do levantamento: "donas de casa", estudantes que não exerciam concomitantemente atividade econômica, aposentados, pessoas afastadas da vida ativa não aposentadas, pessoas internadas vivendo em instituições de assistência, crianças não tendo idade para trabalhar, etc.

A categoria dos trabalhadores familiais não remunerados é motivo freqüentemente de imperfeições na comparabilidade internacional. A produtividade desse grupo, em geral, é menor do que a dos demais, pois inclui pessoas idosas, adolescentes, mulheres. Nas economias essencialmente agrícolas este grupo pesa numericamente bastante, muito embora possa ser baixo o produto de seu trabalho. Nas economias essencialmente industriais esses grupos são antes classificados como inativos.

Em certos países as pessoas que trabalham em regime de tempo parcial são incluídas entre os ativos, enquanto em outros, entre os inativos.

Os membros das forças armadas, em alguns casos, são incluídos entre os ativos, ocorrendo, em outros casos, o contrário. O critério de classificação baseado ora no conceito de "ocupação habitual" ora no de "mão-de-obra disponível" (sendo este último — o qual foi explicitado anteriormente — o recomendado pelas organizações internacionais) pode gerar esta falha, como muitas outras, na situação comparativa.

Em alguns países os desempregados procurando atividade e os que pela primeira vez procuram emprego são classificados entre os ativos — aliás, corretamente do ponto de vista das recomendações internacionais — mas em outros países isso não ocorre.

Para que fique assegurada uma relativa comparabilidade internacional torna-se necessário adotar, nas elaborações e análises, arbitrariamente, um limite inferior de idade, pois numerosos países adotam limites inferiores diversos entre si, talvez devido à idade máxima de obrigatoriedade de freqüência escolar, ou por causa da legislação do trabalho do menor. Torna-se, às vezes, difícil obter a classificação dos menores que trabalham, em total, *abaixo* de uma certa idade, segundo o país. A situação difere bastante se se considera uma região de economia industrializada ou essencialmente agrícola.

Em virtude das dificuldades de comparação entre os dados femininos referentes à população ativa nos diversos países, preferiu-se, neste trabalho, inicialmente, considerar apenas a população masculina.

Embora se reconheça a importância da contribuição feminina no lar e para o lar, não se pode considerar essas atividades não remuneradas como economicamente produtivas, embora geradoras de bens e de serviços. Principalmente num estudo que apresenta comparações internacionais não parece prudente enveredar-se pelo discutível tema da avaliação econômica dos serviços da mulher no lar e para o lar. Observe-se, no entanto, que o trabalho prestado pela mulher no lar como colaboradora de atividades econômicas exercidas pelo marido, ou outro membro familial, é considerado como economicamente ativo, mesmo que não remunerado.

Não é provável que se possa dispor de uma definição de população economicamente ativa que elimine qualquer dúvida de classificação entre os ativos e não ativos.

As pessoas que ocupam situações fronteiriças quanto à classificação, e das quais já se falou, podem ou não ser incluídas, afetando seriamente os totais de ativos, muito embora sua contribuição para o produto seja, em geral, de pouca importância. Assim, proporcionam dúvidas e dificuldades os muito jovens e os muito velhos. Sua participação econômica, em geral, é pequena, mas em número afetam bastante o efetivo da força-de-trabalho, em especial os primeiros. O trabalho sazonal que ocupa parcialmente o trabalhador, conforme os critérios adotados pelo levantamento, é ou não levado em consideração. Os potencialmente ativos, saídos das escolas por graduação ou abandono, e que procuram emprego pela primeira vez, nem sempre são considerados ativos, ao contrário das recomendações internacionalmente aceitas. O resultado é a dificuldade de comparação entre os dados referentes a diversos países ou a épocas diferentes. Em certas regiões, por absoluta falta de oportunidade de trabalho, jovens ou adultos-jovens, nem mesmo procuram, pela primeira vez, trabalho, podendo figurarem como não ativos.

A comparabilidade entre os resultados obtidos pelos levantamentos da força-de-trabalho entre os diversos países, como já se ressaltou, está sujeita a grandes reservas: a organização social e econômica de vários países difere em vários pontos e, assim, uma determinada classificação nem sempre pode ser aplicada universalmente. Os países socialistas, por exemplo, apresentam uma estrutura econômica diversa da dos países da Europa ocidental ou nórdica. Regiões apresentando culturas tecnologicamente retardadas não se adaptam a um tipo de classificação característico de uma sociedade industrialmente evoluída (fase industrial ou pós-industrial).

O fato de o indivíduo estar ou não na força-de-trabalho, aparentemente simples, dá origem a muitas dúvidas na prática. A situação de estar ou não procurando emprego (às vezes, pela primeira vez), igualmente apresenta dificuldades. O período de referência, adotado na pesquisa, pode variar de país para país. O critério pode ser, também, o da atividade habitualmente exercida, embora este tenha sido desaconselhado pelos organismos internacionais.

Nos países em desenvolvimento o subemprego, por sua elevada freqüência, constitui problema dos mais importantes para a caracterização de força-de-trabalho, mas seu estudo está entre os mais difíceis. Nesses países o aproveitamento de menores de 12 anos em atividades econômicas é comum e os velhos trabalham, não raramente, até a morte.

É importante estudar-se a força-de-trabalho em dada época, bem como pesquisar os processos através dos quais ela evolui. Igualmente essencial é o estudo das implicações econômicas de suas variações estruturais de caráter demográfico. A investigação minuciosa dos fatores de mudança pode tornar viáveis previsões de suas dimensões e características, em época bem posterior em relação ao último levantamento disponível. Essas previsões ficam, no entanto, condicionadas às hipóteses admitidas sobre as componentes demográficas do movimento da população e às interações entre as características econômicas e as demográficas envolvidas.

Em quase todos os países os levantamentos censitários constituem, periodicamente, uma das mais importantes formas de detectar as dimensões e as características da força-de-trabalho. Pesquisas especiais por amostragem permitem obter dados da maior importância para períodos intercensitários. Estas últimas, mais minuciosas e preparadas com a colaboração de entrevistadores especializados, podem levar a resultados mais profundos e mais aproximados da realidade. A formulação de planos de desenvolvimento social e econômico depende, em não pequena proporção, de dados sobre os efetivos da força-de-trabalho, suas características estruturais, quer do ponto de vista demográfico quer econômico. Igualmente, é necessário conhecer-se a sua variação no tempo e que fatores determinam as mudanças de suas características

Novos investimentos que permitam desenvolver e aperfeiçoar os equipamentos, progressos na tecnologia adotada pelas empresas, descobrimento de novas riquezas do subsolo, abertura de novas frentes de exploração agrícola e pastoril, construção de hidrelétricas, prospecções bem sucedidas de novos lençóis petrolíferos na plataforma submarina, descobrimento de novos lençóis interioranos, industrialização no próprio país de seus recursos naturais, utilização de novas fontes de energia (por exemplo, as usinas nucleares), início ou ampliação da fase econômica "substitutiva" de importações, etc. levam a uma demanda crescente de mão-de-obra qualificada.

A essa demanda adapta-se a oferta que, por sua vez, deve ser, a tempo, preparada profissionalmente para atender, em qualidade e quantidade, ao novo ritmo de progresso econômico Assim, a Educação (Planificação) recorre a análises estatísticas minuciosas sobre a qualificação cultural da mão-de-obra, de modo a permitir a programação do ensino tecnológico e científico, o cálculo da estimativa do número de novos profissionais em cada especialidade necessários à economia em expansão, o planejamento da especialização mais aprofundada dos já diplomados em cursos de formação (pós-graduação, especialização no exterior, cursos de aperfeiçoamento e atualização, vinda ao país de especialistas do exterior para novos cursos etc.), o estudo dos investimentos no capital humano, principalmente despesas com as crianças e os jovens em idades anteriores às em que normalmente entram para a vida economicamente ativa, etc

Dado a importância das informações relativas à força-de-trabalho de uma comunidade ou de uma nação, não apenas o demógrafo profissional se dedica a seu estudo e interpretação como também qualquer especialista das diversas áreas das Ciências Sociais, principalmente economistas e sociólogos

Os censos demográficos, hoje realizados periodicamente em quase todos os países, incluem inúmeros quesitos sobre a participação na força-de-trabalho e sobre os rendimentos auferidos. Pesquisas especiais aprofundam o quadro fornecido pelos censos, inclusive por amostragem, e muito mais freqüentes que esses.

A situação econômica e o bem-estar de uma nação, ou de uma comunidade, estão em estreita relação com o efetivo de sua força-de-trabalho, as características demográficas por sexo e idade dessa força, sua expressão em dados culturais, sua composição por setores de atividade, segundo o *status* do trabalhador, as características de produtividade, a renda auferida, etc.

O inter-relacionamento entre os dados econômicos e os demográficos é evidente na análise da força-de-trabalho. Não há propriamente um vínculo de causa e efeito, mas esses dados interagem uns sobre os outros.

A participação de dada classe de pessoas ativas para o produto nacional deve ser objetivo de estudo, bem como o seu relacionamento com a forma de distribuição da renda.

A idade, característica biológica individual, mas demográfica quando para grupos de habitantes, é importante nesse estudo porque, conforme a atividade, varia, de acordo com a idade, em média, a produtividade do trabalhador.

Em países ainda em desenvolvimento, pessoas idosas são obrigadas a trabalhar além da idade média de aposentadoria, porque é deficiente a assistência social, bem como é baixa, em média, a renda familiar. Em países desenvolvidos, pelo contrário, se tem observado que a idade média de afastamento para a inatividade teria baixado sempre nos últimos decênios, atingindo, inclusive, pessoas ainda aptas para um bom desempenho no trabalho (apesar da elevação da vida média residual).

Já a idade de início da atividade produtora, em países em desenvolvimento, nos quais predominam, em geral, as atividades primárias, e é baixo o nível cultural, é, em geral, muito inferior à verificada em países desenvolvidos.

Assim, a escolarização dos jovens é prejudicada pela entrada precoce nas atividades produtivas. E o valor qualitativo da força-de-trabalho nessas regiões se ressente da falta de preparo profissional eficiente.

As dimensões da força-de-trabalho dependem de fatores demográficos, relativos a épocas passadas, e que determinam as atuais características da estrutura da população por sexo, idade, etc. Por exemplo, as taxas de natalidade, fecundidade, mortalidade, migrações externas e internas, verificadas no passado.

Assim, fatores culturais e demográficos, como também econômicos — dentre os quais se destaca o amplo processo de industrialização que também afeta fortemente muitos países em desenvolvimento — fazem com que a força-de-trabalho se transforme em suas características e se adapte à nova demanda de recursos humanos.

Torna-se, pois, necessário pesquisar os fatores sociais e econômicos e medir suas repercussões sobre o volume da força-de-trabalho, o seu incremento, a sua distribuição segundo variáveis sócio-econômicas, o modelo de suas transformações.

A aplicação da análise econômica ao exame da estrutura da população e de suas variações ressalta, inicialmente, um dos aspectos desvantajosos das regiões menos desenvolvidas, caracterizado pela elevada carga de "dependência" econômica resultante da alta fecundidade.

Uma primeira avaliação dessa carga de dependência econômica pode ser obtida pela razão entre as pessoas em idades consideradas demograficamente "dependentes" — menos de 15 (ou 10) anos e mais de 60 (ou 65) anos — e o número daquelas entre 15 (ou 10) e 60 (ou 65) anos — consideradas potencialmente "ativas", isto é, em idades aptas para o trabalho [1].

Como já se observou anteriormente, nem todas as pessoas em idade de trabalhar exercem atividades econômicas, bem como muitas outras, em idades abaixo ou acima das idades consideradas normais para o trabalho, realmente exercem atividades economicamente produtivas.

Já se viu, em trabalho anteriormente citado, do autor, a desvantagem econômica de certas estruturas etárias, em dado momento. Chegou-se, mesmo, a citar a adoção, por alguns estudiosos, de coeficientes virtuais de "produção" e de "consumo", por idade, para traduzir dada população em "unidades de produção" e em "unidades de consumo", estabelecendo-se relações entre esses indicadores [2].

Os países em desenvolvimento, geralmente caracterizados por elevada natalidade e mortalidade sensivelmente decrescente, se retratariam por relativamente grandes contingentes de crianças e jovens — ao contrário dos países desenvolvidos — e baixos efetivos de pessoas em idades aptas para o trabalho, em comparação, relativamente, com os efetivos elevados dos países desenvolvidos.

A classificação segundo o *exercício de uma atividade econômica,* como é também relevada pelos censos demográficos, censos econômicos, bem como pelas pesquisas domiciliares por amostragem, pelos levantamentos baseados na relação de trabalhadores nas empresas, nos dados baseados nos registros da previdência social, etc. se presta mais adequadamente aos objetivos dos estudos sociais do que uma simples relação entre *efetivos de certas faixas etárias.*

O número de pessoas engajadas na força-de-trabalho, no entanto, constitui ainda um indicador insuficiente da importância econômica dessa força. Um índice ainda mais esclarecedor seria aquele que levasse em consideração, para cada idade, sexo, ocupação, escolaridade, etc. o valor médio efetivo do produto elaborado, contra o valor dos bens e serviços consumidos.

---

[1] Vejam-se, com relação a diversos países desenvolvidos e em desenvolvimento, as tabelas 5a e 5b

[2] Veja-se *Algumas Implicações Econômicas da Estrutura Etária da População — o Caso Brasileiro, Comparações Internacionais,* Ernani Thimoteo de Barros (Encontro Brasileiro de Estudos Populacionais, Rio de Janeiro, 1974, 29 de julho a 3 de agosto)

Devem também ser considerados aspectos como o regime de trabalho quanto à duração — tempo integral ou parcial — as semanas-horas de trabalho, o trabalho sazonal, o trabalho intermitente, o desemprego, etc.

Em países desenvolvidos, com elevado grau de industrialização, as estatísticas sobre a força-de-trabalho, apesar de suas deficiências, se têm revelado um instrumento útil de pesquisa. As diversas categorias de ativos ficam mais fáceis de serem discernidas e obtêm-se classificações relativamente mais satisfatórias. Nos países em desenvolvimento, acentuadamente agrícolas, torna-se mais difícil classificar os ativos. Como já se disse, as categorias fronteiriças quanto à classificação, constituídas por trabalhadores membros da família não remunerados, pessoas com trabalho em tempo parcial de difícil avaliação, mulheres combinando o trabalho doméstico para o lar com atividades produtivas não remuneradas e dificilmente avaliadas quer em tempo ocupado quer em produto resultante, trabalhadores sazonais, jovens acumulando obrigações escolares com o trabalho em tempo parcial, velhos quase invalidados para a vida produtiva, etc... vêm a ser classificados ora como ativos ora como inativos, dependendo das instruções da pesquisa ou do modo de interpretá-las, modo esse que pode ser diverso dentro de um mesmo país ou entre um e outro país [3].

3. MEDIDAS BRUTAS, CONVENCIONAIS E ESPECÍFICAS DE PARTICIPAÇÃO NA ATIVIDADE ECONÔMICA

A medida mais simples da força-de-trabalho consiste na taxa bruta de atividade pela qual a população economicamente ativa é relacionada à população total.

Variando a participação na força-de-trabalho de acordo com a faixa de idade, resulta ser a taxa bruta de atividade muito influenciada pela composição por idade da população.

Além disso, como difere de país para país, ou de comunidade para comunidade, o limite inferior de idade considerado na classificação dos economicamente ativos, a taxa bruta de atividade pode ser mais elevada ou mais baixa, conforme o limite estabelecido, mantidas inalteradas as demais condições. Em certos países, como já se observou, esse limite está vinculado às injunções da obrigatoriedade de freqüência escolar ou das regulamentações sobre o trabalho remunerado do menor. Em outros, é estabelecido um limite, de certo modo, arbitrariamente, não sendo raro o caso daqueles países que não determinam nenhum limite, ficando a classe em aberto.

[3] Embora sua contribuição seja pequena para a formação do produto, sua importância maior se apresenta como criação de alternativas de subsistência

Quando um dos objetivos do estudo consiste justamente em ressaltar a influência dos fatores demográficos que agiram antes do período de referência do levantamento, o conceito de taxa bruta satisfaz: o incremento natural diverso entre as populações em exame, bem como as taxas diversas de incremento migratório se refletem na composição por idade, acarretando diferenças na taxa bruta de atividade.

Para facilitar a comparabilidade internacional, admite-se o estabelecimento de um limite inferior de idade convencional para ser aplicado aos ativos no cálculo da taxa de atividade, por exemplo, o de 15 anos.

Comparando-se essa taxa "convencional" com a bruta, para alguns países, observa-se a quase coincidência entre as duas, embora para outros países, em geral os em desenvolvimento, a taxa "convencional" fique nitidamente inferior à bruta.

Corre-se, de fato — convém advertir — o risco de, adotando um mesmo limite inferior de idade não muito baixo, excluir para determinados países um número de trabalhadores não desprezível. Observe-se, no entanto, que abaixo do limite de 15 anos se localizam os muito jovens, de produtividade baixa, os que combinam atividades discentes com outras extradomésticas em tempo parcial, etc.

Dentre os países selecionados para o presente trabalho, quatro não estabeleceram um limite inferior de idade: Hungria, Suécia, Iugoslávia e Nova Zelândia. Em todos eles a taxa bruta de atividade coincidiu estreitamente com a convencional (a partir dos quinze anos). Em El Salvador, Brasil e Irã foi estabelecido o limite inferior de 10 anos: para estes a diferença entre as duas taxas foi bem acentuada. No México, tendo sido adotado o limite de 12 anos, ficou sensível, mesmo assim, a diferença entre as mesmas (e elevado o número absoluto de ativos de 12 a 14 anos).

Naqueles países de mais elevado nível de desenvolvimento econômico, mesmo sem se definir um limite inferior de idade para a apuração dos dados sobre a atividade econômica, chegou-se a taxas coincidentes com as obtidas a partir da idade convencional de 15 anos, sendo, em geral, de menor importância relativa o número de ativos abaixo dessa idade. Nos países em desenvolvimento considerados, pelo contrário, as diferenças foram acentuadas, sendo, assim, elevado o número de ativos entre os dois limites (por exemplo, entre 10 e 14 anos, 12 e 14, etc.). Nesses países, sendo preponderante a atividade no ramo da agricultura, pecuária, etc., revelou-se comum o aproveitamento precoce de jovens do sexo masculino no campo, com prejuízo das atividades discentes (ou combinando as duas).

Dados mais detalhados sobre este assunto podem ser observados na Tabela 1. Pode ser, ainda, notado que, para os Estados Unidos, a taxa bruta de atividade, calculada a partir dos 14 anos, difere de pouco da convencional. Sendo, porém, elevada a população americana, essa diferença entre as taxas, embora pequena, resultou em um número absoluto acentuado de ativos de 14 anos.

Apresenta a Tabela 2 a distribuição das taxas convencionais de atividade para a série de países selecionados.

As mais elevadas dessas taxas corresponderam a países economicamente mais desenvolvidos, taxas essas que ficaram em geral acima dos 50%, ou mesmo dos 60%.

Os países em desenvolvimento foram aqueles que apresentaram as taxas mais baixas, entre 40% e 50%. O fator predominante dessa situação constrastante se prende, antes, à estrutura demográfica. Estes últimos países apresentam contingentes nas idades infantis, adolescentes e adultas-jovens, relativamente, mais acentuados do que os primeiros. As taxas brutas de natalidade são elevadas, as taxas brutas de mortalidade baixas (ou, em alguns casos, ainda intermédias), e as de incremento natural extremamente altas. As taxas gerais de fecundidade são elevadas entre os menos desenvolvidos (dentre esses países, o Chile — América Temperada — não chega a apresentar taxas bruta de natalidade e geral de fecundidade tão elevadas quanto os demais, sendo um país cuja situação demográfica é intermédia, mas a correspondente taxa de incremento natural é elevada em virtude do baixo nível da mortalidade). As taxas líquidas de reprodução ficariam entre 2,1 e 2,8, entre os menos desenvolvidos, e entre 0,9 e 1,5, entre os mais desenvolvidos (o Chile apresentando um nível intermédio) [4]. Veja-se, sobre este assunto, a Tabela 4.

De acordo com a Tabela 2, como já se disse, ao grupo de países em desenvolvimento corresponderam as mais baixas taxas convencionais de atividade. Calculando-se as taxas estandardizadas por idade — expostas na Tabela 3 — verifica-se que, para esses países, elas ficaram muito mais elevadas do que as convencionais — expostas na Tabela 2.

Para muitos países do grupo dos desenvolvidos as taxas estandardizadas ficaram, pelo contrário, inferiores às convencionais, mas esta não constituiu uma regra geral. Países como o Japão, a Inglaterra, a Suécia, a Hungria, etc. tiveram reduzidas as respectivas taxas, mas outros, como a Nova Zelândia e os Estados Unidos, as tiveram aumentadas em virtude do padrão adotado. Realizada a estandardização, ficou menor a amplitude entre as taxas correspondentes aos diversos países, todas elas abrangidas de 54% a 65%.

A taxa específica correspondente ao agrupamento de 15 anos e mais (pode ser encontrada na Tabela 2) ilustra melhor do que a convencional a situação comparativa dos diversos países. Observe-se, no entanto, que satisfazendo a objetivos diferentes, ambas podem ser muito úteis.

Neutralizada a influência da proporção diversa do contigente populacional de 0 a 14 anos, evidentemente no agrupamento das idades superiores a 15 anos, para o cálculo da taxa específica de atividade

---

[4] Correspondem à hipótese "medium variant" das Nações Unidas

para as idades de 15 e mais anos, ainda persistem diferenças de composição por idade das populações masculinas dos diversos países considerados [5].

As taxas máximas, entre os de 15 anos e mais, corresponderam a El Salvador, 91,4% de ativos, e ao Irã, 86,5%; as taxas mínimas, aos Estados Unidos, 74,7%, e à França, 73,0%.

Permanece, em face dos esclarecimentos expostos anteriormente, a dúvida sobre o grau de exatidão dessas taxas. É provável que em países como a Suécia, os Estados Unidos e a França, os dados sejam bem mais verossímeis do que, por exemplo, em El Salvador e no Irã. Os primeiros apresentam um alto nível de desenvolvimento sócio-econômico, com todas as suas implicações de cultura e organização.

Expõem-se, na Tabela 6, as taxas específicas de atividade por grupos de idade. No primeiro grupo de idade considerado, o de 15 a 19 anos, a variação entre os diversos países foi acentuada. Países como El Salvador, 71,4% de ativos, e o Irã, 68,0%, apresentam taxas elevadas, enquanto outros como a Polônia, 31,5%, e o Japão, 36,5%, apresentam-nas muito baixas nesse grupo. Com o aumentar da idade, as taxas correspondentes aos diversos países tendem a aproximar-se: entre os 25 e os 50 anos, em geral, as taxas ultrapassam 95% em quase todos os países considerados (no México, porém, ficam em torno de 90%). Já nas idades avançadas as diferenças são marcantes. Como não se dispusesse, por grupos qüinqüenais, para essas idades, de taxas de atividade, realizou-se o cálculo para a classe de 65 anos e mais, viável para quase todos os países. Em geral, nos países em desenvolvimento, observaram-se taxas elevadas, superiores a 40% (em El Salvador, 75,1%). Nos países industrializados ficaram, em geral, mais baixas, embora em alguns, como o Japão e a Polônia, se tivessem situado em torno de 55%. Pode ser consultada, a propósito, a Tabela 7.

4. APLICAÇÕES DAS SÉRIES DE TAXAS ESPECÍFICAS POR IDADE DE ATIVIDADE ECONÔMICA — O RECURSO ÀS TÁBUAS DE SOBREVIVÊNCIA PARA A DETERMINAÇÃO DE TÁBUAS DE VIDA ATIVA

As séries de taxas específicas por idade de atividade podem ser aproveitadas, entre outros, para dois tipos de elaborações.

No primeiro, admitindo-se a hipótese de trabalho de que a mortalidade não afetasse a população, obtém-se uma medida média virtual de atividade, apenas influenciada pelos níveis de participação na força-de-trabalho. Examinar-se-á, em primeiro lugar, este tipo de elaboração

[5] Para o grupo de mais de 15 anos poder-se-ia aplicar, igualmente, o processo de estandardização

o qual leva à determinação da chamada "média bruta de anos de atividade". Já num segundo tipo a mortalidade será levada em consideração, obtendo-se a "média líquida de anos de atividade".

Abstraindo-se o fator mortalidade, os economicamente ativos trabalhariam tantos anos em cada intervalo de idade quanto tenha sido o número de anos desse intervalo multiplicado pela correspondente taxa específica de atividade econômica [6]. Somando-se esses produtos, considerados, desde o início, convencionais da atividade econômica, até uma idade prefixada considerada normal para o término da atividade, obter-se-ia uma medida virtual média de atividade (não de "intensidade" da atividade [7].

Os resultados desse cálculo constam da Tabela 8, tendo sido considerado, no mesmo, o início da atividade aos 15 anos e o afastamento aos 65 anos.

Segundo esse cálculo, a média bruta de anos de atividade variou entre os mais elevados valores de 47,7 anos em El Salvador e de 46,1 na Inglaterra e Gales e os mais baixos de 41,7 na França e de 40,9 anos na Iugoslávia. Se em cada intervalo de idade todo habitante estivesse em atividade, atingir-se-ia um máximo teórico de 50 anos de vida ativa, na faixa dos 15 aos 64 anos. Apresenta-se, também na Tabela 8, a proporção da média bruta verificada nos diversos países em relação a esse valor máximo teórico da mesma. Em El Salvador e na Inglaterra e Gales essa proporção atingiu, respectivamente, 95,4% e 92,2%, e na França e na Iugoslávia, 83,4% e 81,8%.

É evidente que o cálculo para os países em desenvolvimento sofreu uma distorção para menos, pois é sabido que abaixo dos 15 anos se encontram muitos habitantes, principalmente nesses países, exercendo atividades econômicas. Outro fator de distorção é constituído pela fixação de uma idade máxima para o exercício da atividade econômica. Este fator também atinge, embora menos sensivelmente, países desenvolvidos. Para o Chile, país de desenvolvimento intermediário, dispõem-se de apurações por grupos qüinqüenais até o de 80 a 84 anos e o grupo de 85 e mais em conjunto, permitindo uma visão mais precisa, estendida a idades superiores ao limite convencional adotado (Quadro 1).

---

[6] Não considerando outros fatores, mais de natureza econômica que demográfica, como a correspondência ao número efetivo de semanas-horas de trabalho realmente exercidas, a produtividade do trabalho (que varia quer em função do fator humano quer do fator bens de equipamento), o subemprego — visível e invisível — o desemprego, a renda auferida, o tipo de atividade, etc

[7] A média bruta de anos de vida ativa apresenta uma desvantagem Admitindo-se ser o mesmo o intervalo de cada grupo de idade, está implícito em seu cálculo que se atribui igual ponderação às taxas específicas de atividade econômica em cada classe de idade. Isto leva a exagerar a importância das taxas nas idades mais elevadas, as quais pesam relativamente menos no cálculo da taxa bruta de atividade

QUADRO 1

CHILE

GRUPOS DE IDADE (Anos Completos)	TAXA ESPECÍFICA DE ATIVIDADE ECONÔMICA (%)
65 a 69 anos	54,1
70 a 74 anos	36,8
75 a 79 anos	27,9
80 a 84 anos	24,6
85 anos e mais	16,9

Mesmo em idades avançadas, é expressiva a participação na força-de-trabalho nesse país.

A fixação de um limite superior de idade arbitrário se deveu a convenções que estabelecem essa idade, *em média,* como de afastamento da atividade econômica.

Seria realmente difícil dispor, nas idades mais avançadas, de tabulações minuciosas para todos os países, o que tornaria mais grosseira a análise [8]. Dentre os desenvolvidos podem ser destacados, mas com menor discriminação do que o Chile, os Estados Unidos e a Suécia (Quadro 2).

Esses dois países, altamente industrializados e desenvolvidos, apresentaram padrões bem afastados do Chile.

QUADRO 2

GRUPOS DE IDADE (Anos Completos)	TAXA ESPECÍFICA DE ATIVIDADE ECONÔMICA (%)	
	Estados Unidos	Suécia
65 a 69 anos	38,9	45,7
70 a 74 anos	22,5	16,8
75 anos e mais	12,1	5,7

Nesse caso é possível atribuir-se à idade 90 a limitação máxima da atividade econômica Ora, por não se dispor de uma distribuição minuciosa, pelo menos até essa idade, das taxas específicas de atividade, não se poderia evitar a aplicação de uma média muito imprecisa de participação na atividade econômica, por exemplo, para o grupo de 65 e mais, a que corresponderia o intervalo fictício de 25 anos, para o de 70 e mais, a que corresponderia o intervalo fictício de 20 anos, etc

Para o México só se dispõem de apurações por grupos qüinqüenais até a idade de 55 anos e, em seguida, para um largo agrupamento de 55 e mais anos, o que tornaria muito arbitrário o cálculo

Observou-se, anteriormente, que as taxas para os diferentes países se aproximavam estreitamente entre si no intervalo de 25 a 49 anos, ficando também, nessa faixa, muito elevadas. Calculou-se a média bruta de anos de atividade para o intervalo de 25 a 54 anos, incluindo mais uma classe em que continuavam elevadas as respectivas taxas. Ficaram, como se pode observar na Tabela 9, todas elas muito próximas do máximo virtual de 30 anos, representando (com exceção do México) proporções superiores a 90% do máximo.

Para determinados países a taxa específica para o grupo de 65 a 69 anos foi ainda relativamente elevada. Entre eles se destacaram El Salvador, com a taxa de 93,7%, a Polônia, com a de 63,6%, o Brasil, com a de 61,3%, etc.

Para outros ela é extremamente baixa. Assim, se revelou útil a extensão do cálculo da média bruta de anos de atividade até o limite de 69 anos e que é exposta a seguir (Quadro 3). Observe-se que para vários países não se dispunha de uma discriminação dos ativos no intervalo de 65 a 69 anos, o que limitou as elaborações.

QUADRO 3

PAÍS	MÉDIA BRUTA DE ANOS DE ATIVIDADE NO INTERVALO DE		DIFERENÇA ENTRE AS DUAS MÉDIAS (Anos)
	15 a 64 anos	15 a 69 anos	
El Salvador (1971)	47,7	52,4	4,7
Estados Unidos (1970)	42,1	44,1	2,0
Brasil (1970)	43,3	46,4	3,1
Chile (1970)	42,0	44,7	2,7
Hungria (1970)	42,3	43,6	1,3
Polônia (1970)	43,3	46,5	3,2
Suécia (1965)	42,6	44,9	2,3
Inglaterra e Gales (1971)	46,1	47,6	1,5
Austrália (1966)	45,6	47,6	2,0
Nova Zelândia (1966)	45,5	47,6	2,1

Em El Salvador a diferença entre as duas médias é acentuada, 4,7 anos; na Polônia e no Brasil, igualmente, 3,2 e 3,1 anos. No primeiro desses países a média bruta passaria de 47,7 para 52,4 anos e nos dois últimos, respectivamente, de 43,3 para 46,5 e de 43,3 para 46,4 anos.

Recapitulando, inicialmente, neste trabalho, calcularam-se as taxas brutas de atividade econômica. Diante do fato de que as condições de trabalho na agricultura, silvicultura, pecuária, etc. (atividade caracerística dos países em desenvolvimento) permitem o emprego de crinças e adolescentes desde cedo, enquanto nas atividades industriais típicas dos países desenvolvidos), no momento, há menores oportuidades para isto (embora no início da revolução industrial tal não enha ocorrido), pensou-se no cálculo de um indicador que neutralizasse ssa diferença. Decidiu-se, então, pela taxa convencional de atividade ue abrangeria os ativos a partir de 15 anos. Mesmo assim, deve-se embrar que as nações economicamente avançadas possuem recursos ue permitem dedicar maiores investimentos à educação e podem maner sua juventude na escola maior número de anos. Assim, às idades, no a ano, pouco acima dos 15 anos, corresponderiam relativamente ienores contingentes de ativos, em geral, em países de alto grau de esenvolvimento. Apesar disso, o cálculo da taxa convencional — ativos e mais de 15 anos em relação à população de todas as idades — reresentou um modo de se obter um indicador sintético mais homogêneo ntre os países em desenvolvimento em comparação com os desenvolidos, bem como entre os países que, por motivos os mais variados, presentaram a apuração a partir de uma idade mínima diversa.

Mantendo-se constantes as demais condições, uma população com levada participação relativa das idades de mais intensa atividade ecoômica deverá mostrar mais elevada taxa convencional de atividade. ssim, os efeitos produzidos pelas diferentes estruturas por idade deem ser examinados. Um processo de neutralizar essa influência conste no cálculo das taxas estandardizadas. Essas pouco valor têm por mesmas, pois se baseiam na estrutura por idade da população toiada como padrão. Mas, para a comparação entre os diversos países u regiões, são extremamente úteis, pois confrontam os hipotéticos íveis da atividade econômica livres dos efeitos das diferenças na esutura por idade.

O processo de interpretar os dados sobre a população economicaiente ativa, por idade, para diferentes países — e apresentado no inío do capítulo — consistiu na eliminação virtual do fator mortalidade, qual age com diferente intensidade em cada país e em cada idade. Somando-se o número de anos de vida ativa correspondente a cada itervalo de idade (obtido pela multiplicação do número de anos do itervalo pela taxa específica de atividade correspondente) chegou-se chamada média bruta de anos de atividade. Essa média depende exusivamente do valor das taxas de atividade, dos limites convencionais e idade escolhidos para o início e o término da vida ativa, ou, se se uiser, das idades reais de início e término da vida ativa da população onsiderada.

Fez-se referência a um segundo processo de analisar as taxas de ividade, considerando o fator mortalidade: pode-se, de fato, interetar os dados sobre a população economicamente ativa, para diferens países ou regiões, avaliando o que implicam eles em termos de iração média da vida residual de trabalho de uma geração hipotética, ijeita a determinado padrão de mortalidade.

Considere-se, de início, o caso do Brasil. Dispõe-se para o nosso país de uma tábua de sobrevivência abreviada correspondente à mortalidade média do decênio 1960/70 para o sexo masculino.

Foi ela calculada pelo Prof. João Lyra Madeira e pelo Sr. Richard Irwin [9]. Evidentemente, a mortalidade média do período 1960/70 não correspondeu exatamente ao nível da observada em 1970, ano para o qual se dispõe da distribuição das taxas de atividade econômica, obtida com base no censo realizado nesse ano. *Num cálculo de primeira aproximação* foi essa tábua aplicada *como um ensaio,* reservando-se o autor a realizar, ao final do capítulo, outros cálculos visando a maior fidelidade, embora ainda de natureza conjectural.

O número de vivos da população estacionária, em cada intervalo de idade, e o de sobreviventes na idade exata, obtidos através da tábua Madeira-Irwin 1960/70, constam da Tabela 10. Ao número de vivos foram aplicadas as taxas de atividade econômica da classe considerada, obtendo-se o número de anos de atividade econômica, em cada intervalo de idade (não constam da tabela). Adotando-se o mesmo procedimento empregado no cálculo da expectativa de vida residual (vida média), obtiveram-se as médias residuais de anos de atividade econômica, até a extinção da geração, a partir da idade exata x — as chamadas "médias líquidas de atividade", por sobreviventes em total. Essas médias estão expostas na última coluna da Tabela 10.

Na idade exata 15, a média residual de anos de atividade atingiu 41,9; na idade exata 60, ainda, representou 8,4 anos. A média líquida de atividade ao nascimento reduzir-se-ia a 36,2 anos [10], em comparação com a de 41,9 na idade exata 15.

Comparando-se com os valores da vida média ao nascimento e na idade exata 15 anos, obtiveram-se para a média líquida residual de anos de *inatividade,* nessas idades, os valores de 21,4 e 9,6 anos.

Relacionaram-se, na Tabela 11, os valores da média líquida residual de anos de atividade até a extinção da geração aos valores da vida média em total. Até a idade exata de 35 anos e a partir de 15 anos, a proporção da vida ativa residual (ou do total cumulativo residual de anos de atividade *(T'_x)* em relação à vida média (ou ao total cumulativo residual de anos de vida *T_x)* se situou estreitamente em torno de 80%. Decrescendo sempre essa proporção nas idades sucessivas, verificou-se que na idade exata de 65 anos a vida média ativa atingiu 5,8 anos, enquanto a vida média em total alcançou 12,0 anos, constituindo a primeira, ainda, 48,3% da segunda.

Considerando-se também os ativos entre os 10 e 14 anos, pode ser elaborada uma tábua de vida ativa, cujas médias residuais, no en-

---

[9] *Uma Tábua de Vida Abreviada Brasil — 1960/70* Richard Irwin e João Lyra Madeira, Revista Brasileira de Estatística, Rio de Janeiro, *33* (131) : 447-480, julho/setembro 1972

[10] Para o mesmo número cumulativo em total de anos de atividade — a qual foi considerada, neste cálculo, a partir da idade exata de 15 anos — seria aplicado nesse caso o número inicial de componentes da coorte (l_0)

tanto, não se afastarão das médias expostas na Tabela 10, senão abaixo da idade exata de 15 anos. Veja-se a Tabela 12.

A média líquida de anos economicamente ativos, a partir da idade 0, 37,0 anos, ficou um pouco mais elevada do que a deduzida anteriormente, de 36,2 anos, em virtude da considerada diminuição da idade inicial de atividade.

Na última coluna da Tabela 12 apresentaram-se os anos de inatividade residual: na idade 0, de 20,6 em relação a uma esperança de vida de 57,6 anos; na idade 10, de 13,6 anos em relação a uma esperança de vida de 56,2 anos; na idade 15, de 9,6 anos em relação a uma esperança de vida de 51,5 anos, etc. Observe-se que para a idade exata de 70 anos obteve-se o número de 5,5 anos de inatividade para 9,3 de vida média resídua. Uma esperança, ainda, de 3,8 anos de atividade.

Admitindo-se constituir a média bruta de anos de atividade uma expectativa de vida ativa não afetada pelo fator mortalidade, pode a mesma ser comparada à vida média residual de anos de atividade, em cujo cálculo o fator mortalidade é considerado. A diferença entre os dois indicadores daria uma medida virtual da perda em anos de vida ativa motivada pela mortalidade.

A Tabela 13 expõe os resultados desse cálculo com base nos dados referentes ao Brasil, de acordo com várias hipóteses combinadas. fixando-se a vida ativa a partir de 10 ou 15 anos e o seu término aos 65 anos, aos 70 ou com a extinção da geração.

Em correspondência à idade 0 (logo, expectativa de vida ativa ao nascimento), e considerando-se a atividade econômica sendo exercida a partir da idade exata 15, ocorreria uma perda de 18,3 anos de atividade devida ao fator mortalidade, não se fixasse uma idade para o término da vida ativa; de 11,8 anos, quando se estabelecesse o término aos 70 anos; e de 10,2 anos, quando esse limite baixasse para 65 anos. Ainda em correspondncia à idade 0 (logo, expectativa de vida ativa ao nascimento), se os anos de atividade fossem computados a partir da idade de 10 anos em lugar de 15 anos, a perda em anos de atividade devida à mortalidade ficaria quase ao mesmo nível do cálculo anterior, admitidas, respectivamente, as mesmas hipóteses: perda de 18,5 anos de vida ativa, quando não se fixasse uma idade para o término da vida ativa, de 12,0 anos ativos quando se estabelecesse o término aos 70 anos e de 10,4 quando esse limite baixasse para 65 anos de idade.

Em correspondência à idade exata de 15 anos, a expectativa de vida ativa é bem mais elevada do que ao nascimento, o mesmo número residual cumulativo de anos de atividade (considerada a partir da idade de 15 anos) sendo relacionado a l_{15} em vez de a l_0, como no cálculo exposto anteriormente. Assim, a perda de anos de atividade em virtude da mortalidade *depois de 15 anos,* ficou bem menor do que no cálculo referente à idade exata 0. Se não se fixasse a idade final da atividade econômica, seria de 12,6 anos a perda de anos ativos devida à mortalidade depois da idade de 15 anos, se fosse fixado aos 70 anos o término, a perda seria de 6,4 anos ativos; se se baixasse esse limite para 65 anos, a perda seria de 5,0 anos ativos.

Em correspondência à idade exata de 10 anos, logo expectativa de vida ativa à idade exata 10, a perda de anos ativos, em virtude da mortalidade *depois da idade 10,* ficaria praticamente no mesmo nível, como para depois da idade 15, observadas as mesmas três hipóteses: perda de 12,9 anos de vida ativa quando não se fixasse o término da atividade econômica, perda de 6,6 anos de vida ativa quando se estabelecesse o término aos 70 anos de idade e perda de 5,2 anos quando esse limite baixasse para 65 anos.

Mediante determinados artifícios e a admissão de certas hipóteses, pode-se ensaiar o cálculo de médias residuais de atividade em relação ao número, em cada aniversário, de sobreviventes ativos, em lugar do número de sobreviventes em total.

Inicialmente, a partir das taxas específicas de atividade econômica para classes de idade, estimam-se as taxas teóricas correspondentes às idades exatas. Aplicando-se a série, assim obtida, de taxas para as idades exatas aos valores correspondentes da função de sobrevivência, são obtidos os sobreviventes ativos em cada aniversário.

Para o cálculo da população estacionária economicamente ativa admite-se que a taxa mais elevada de participação na vida ativa seja também verificada nas classes de idades anteriores àquela em que aparece, o que implica na hipótese de que os economicamente ativos só se retirem após atingida essa idade. Determinados, assim, os novos valores dos anos economicamente ativos em cada classe, passa-se ao cálculo dos somatórios a partir de cada idade.

Quanto à série de sobreviventes ativos em cada aniversário, substituem-se os valores obtidos nas idades abaixo daquela em que se verifica a máxima proporção de sobreviventes ativos pelo número fictício de sobreviventes ativos obtido pela aplicação dessa taxa máxima ao número correspondente de sobreviventes em total nessas idades.

Em seguida, pelo processo usual, determinam-se as médias residuais de anos de atividade por sobreviventes ativos.

Várias hipóteses, nem sempre correspondentes à realidade, estão implícitas nesse tipo de média residual: que a mortalidade em cada idade seja idêntica entre os economicamente ativos e os inativos, que nenhum sobrevivente ativo se retire antes da idade da máxima participação, etc. [11]. Assim, certa reserva deve ser observada ao se interpretar o resultado desse cálculo. Apresentam-se no Quadro 4, comparativamente, as médias residuais de vida ativa por sobreviventes em total e por sobreviventes ativos

---

[11] "Of course, none of these conditions can be expected to be perfectly satisfied, in any case, but near satisfaction of them is necessary if the measures of average remaining years of active life are to be accepted as valid within tolerable margins of error" (*Methods of Analysing Census Data on Economic Activities of the Population* — United Nations, New York, 1968)

UADRO 4

BRASIL — 1.º CÁLCULO

MÉDIA RESIDUAL DE ANOS ATIVOS NA IDADE EXATA *x,*

IDADE EXATA	POR SOBREVIVENTES EM TOTAL	POR SOBREVIVENTES ECONOMICAMENTE ATIVOS
anos	42,6	50,5
anos	41,9	45,8
anos	39,3	41,3
anos	35,5	36,9
anos	31,3	32,5
anos	27,1	28,2
anos	22,9	24,0
anos	18,9	20,1
anos	15,0	16,6
anos	11,5	13,6
anos	8,4	10,9
anos	5,8	8,6
anos	3,8	7,4

Nas idades centrais da distribuição as diferenças relativas entre s valores correspondentes às duas séries ficam bem inferiores às nas lades extremas.

Tendo sido examinados estudos nacionais e do exterior sobre o ílculo estimado da vida-média ao nascimento para o Brasil, verificou- : que a mais leve modificação na metodologia ou na natureza dos ados utilizados levava a um valor diferente, muito embora, em certos ısos, essas diferenças não fossem de todo exageradas, ficando evidente ıa justificativa. Dentre esses trabalhos podem ser citados.

tilização das Tábuas de Vida Modelo para se Estimar a Vida-Média do rasil (Estudo elaborado pela equipe técnica do Centro Brasileiro de studos Demográficos do IBGE, Revista Brasileira de Estatística, n.º 137, no XXXV, janeiro/março, 1974)

ıtrodução à Análise das Estimativas de Indicadores Demográficos Obdas Através de Diversas Metodologias, Richard Irwin e Evelyn Spielıan (Comunicação apresentada ao Encontro Brasileiro de Estudos opulacionais, Rio de Janeiro, 1974)

ma Tábua de Vida Abreviada, Brasil, 1960/70, Richard Irwin e João yra Madeira (Revista Brasileira de Estatística, n.º 131, Ano XXXIII, ılho/setembro, 1972)

Projeção da Vida Média — Brasil: 1970/2000, Evelyn Spielman (Boletim Demográfico CBED, v. 3, n. 3, jan./mar. 1973, IBGE) *Estudo Comparativo de Duas Tábuas de Mortalidade Construídas para o Brasil (1960/1970)*, Valéria da Motta Leite (Boletim Demográfico CBED, v. 3, n. 4, abr./jun. 1973, IBGE)

Estimativas para o Brasil, da Vida Média ao Nascer durante o Período 1960/70, a partir de Razões de Sobrevivência Inter-Censitárias, Robert Robichez Cassinelli (IBGE, Rio de Janeiro, 1971)

Demographic Estimates based on the 1970 Population Census of Brazil, Jerrold Huguet (Bureau of the Census, Washington, 1973 — Research Document n. 5)

Selected World Demographic Indicators by Countries, 1950/2000, Population Division, United Nations, 1975

Brasil: Estimativa da Mortalidade no Período Intercensitário 1960/70, através de Metodologia Proposta pelas Nações Unidas, Márcia Martins, Vera Regina de Souza Dias e Yvonne Barandier (Boletim Demográfico, v. 6, n. 1, jul./set. 1975, IBGE)

No trabalho realizado pela equipe técnica do Centro Brasileiro de Estudos Demográficos (IBGE) reconhece-se que as informações disponíveis indicam ser a mortalidade infantil no Brasil mais elevada do que a indicada pela tábua-modelo Oeste, adequadamente interpolada, embora com uma vida-média adulta semelhante. Daí sugerir uma modificação na metodologia de elaboração das tábuas de vida no Brasil. A própria Comissão Econômica e Social das Nações Unidas admitira e recomendara modificações na aplicação das tábuas-modelo em determinados casos.

Jerrold Huguet aplicou o método de análise da população estável, estimado em 57,19 anos a vida-média ao nascer, para os homens, na década 1960/70.

No trabalho pioneiro do Prof. Lyra Madeira e do Sr. Richard Irwin, realizado muito antes, já fora realizada uma adaptação no método de aplicação das tábuas-modelo, de modo a se ajustarem mais corretamente aos dados brasileiros. "O trabalho consistiu em adaptar esses modelos às peculiaridades da experiênciaa brasileira". Reconhece, ainda, que a tábua resultante para o Brasil, média do período 1960/70, apresenta uma curva de mortalidade de configuração diferente das tábuas modelo básicas usadas no cálculo. O valor de 5^{q}_{0} para o Brasil fica, assim, superior ao dado correspondente da tábua-modelo interpolada. Para todas as outras idades a mortalidade em nosso país fica mais baixa. A vida média ao nascer foi estimada em 57,61 anos para os homens, para a mesma década.

Foi também divulgada, em 1975, uma publicação da Organização das Nações Unidas preparada pela Divisão de População, *Selected World Demographic Indicators by Countries, 1950-2000,* onde são apresentadas estimativas da vida média ao nascimento correspondentes a períodos qüinqüenais, de acordo com três diferentes hipóteses: "The figures for he period 1970-2000, include the assumptions used in the revised population projections and measures derived from the projected populations. For each country and region, three variants of projections, namely "medium", "high" and "low" are "shown".

Experimentou-se utilizar a estimativa "medium variant" para os qüinqüênios 1965/70 e 1970/75, para se chegar a um valor da vida média ao nascimento, para o sexo masculino, válida aproximativamente para 1970: 57,8 anos. Este valor coincide estreitamente com a média dos níveis 17 e 18 das tábuas de autoria de Ansley Coale e Paul Demeny apresentadas em *Regional Model Life Tables and Stable Populations* (Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1966).

Embora o nível correspondente à média das duas tábuas-modelo possa ser aceito como aproximativamente representativo da mortalidade real da população brasileira em 1970, reconhece-se que o padrão, isto é, a forma da curva de mortalidade por idades correspondente se afaste de algum modo da realidade.

Experimentou-se aplicar, no presente trabalho, uma média das séries de valores da função de sobrevivência das tábuas modelo, tipo Oeste, níveis 17 e 18, para a determinação da média residual de anos economicamente ativos, válida aproximativamente para 1970. Os resultados constam da Tabela 14.

Os valores encontrados da média residual de anos ativos ficaram, em geral, um pouco inferiores aos do cálculo anterior, quando fora aplicada a tábua Madeira-Irwin baseada na experiência da mortalidade de 1960/70, salvo para a idade 0, quando coincidiram: 37,0 anos. Igualmente, como fora realizado quando da aplicação da tábua Madeira-Irwin 1960/70, determinaram-se os valores correspondentes à média residual de anos de atividade por sobreviventes ativos, além da média residual de anos de atividade por sobreviventes em total (Quadro 5).

QUADRO 5

BRASIL — 2.º CÁLCULO

MÉDIA RESIDUAL DE ANOS ATIVOS NA IDADE EXATA x

IDADE EXATA	POR SOBREVIVENTES EM TOTAL	POR SOBREVIVENTES ECONOMICAMENTE ATIVOS[1]
0 anos	42,0	49,9
5 anos	41,4	45,2
10 anos	38,8	40,8
15 anos	35,1	36,5
20 anos	31,0	32,2
25 anos	26,8	27,8
30 anos	22,7	23,7
35 anos	18,7	19,9
40 anos	14,8	16,4
45 anos	11,4	13,4
50 anos	8,3	10,7
55 anos	5,7	8,5
60 anos	3,7	7,2

[1] Relembre-se as restrições a esse tipo de cálculo, cujos resultados devem ser interpretados com reserva, ao contrário da média por sobreviventes em total

5. ALGUMAS COMPARAÇÕES ENTRE A SITUAÇÃO DO BRASIL E A DE DOIS PAÍSES ALTAMENTE DESENVOLVIDOS, FRANÇA E ESTADOS UNIDOS

Limitem-se, agora, as comparações ao Brasil e a dois países altamente desenvolvidos, a França e os Estados Unidos, aprofundando-as.

A taxa convencional de atividade econômica ficou muito mais baixa no Brasil, 48,0%, do que na França, 54,9%, e nos Estados Unidos, 52,4%. Essa situação contrastante se deveu essencialmente à diversa composição por idade da população: são relativamente mais representados, nos dois países desenvolvidos, os grupos de idade em que são exercidas as atividades econômicas: 70,17% nos Estados Unidos e 75,15% na França da população masculina correspondem às idades de 15 e mais anos, enquanto no Brasil apenas 57,39% pertencem a essas idades. Veja-se a Tabela 22. Calculando-se as taxas padronizadas por idade, de fato, a situação se inverteu: 58,5% no Brasil em comparação com 53,6% na França e 54,4% nos Estados Unidos. A própria taxa específica do grupo de 15 anos e mais, eliminando a influência da diferente quota de habitantes no grupo de 0 a 14 (que figuravam no denominador da taxa convencional de atividade), em parte já levara à determinação de taxas mais favoráveis para o Brasil, 83,6%, em comparação com 73,0% para a França, e 74,7% para os Estados Unidos (considerando-se os homens de 15 anos e mais, como pode ser visto na Tabela 22, para o Brasil se encontram proporções de composição mais elevadas do que nos Estados Unidos até a classe de 40 a 44 anos e do que na França até a classe de 35 a 39 anos).

Comparem-se, então, as taxas específicas para grupos qüinqüenais de idade, até o grupo não delimitado de 65 e mais, apresentados a seguir (Quadro 6).

Em relação à França e aos Estados Unidos, as taxas para o Brasil ficaram fortemente mais acentuadas nos grupos de idade de 15 a 19 e de 20 a 24 anos.

QUADRO 6

TAXAS ESPECÍFICAS DE ATIVIDADE

GRUPOS DE IDADE	PAÍSES		
	Brasil	França	Estados Unidos
15 a 19 anos .	61,9	42,5	40,7
20 a 24 anos	87,5	71,3	79,2
25 a 29 anos	95,2	94,2	92,2
30 a 34 anos	96,3	97,3	95,0
35 a 39 anos	96,1	97,3	95,6
40 a 44 anos	94,8	96,5	94,7
45 a 49 anos	92,7	95,4	93,2
50 a 54 anos	87,9	91,4	91,3
55 a 59 anos	81,9	82,4	87,0
60 a 64 anos	72,6	65,7	73,3
65 anos e mais	49,6	19,1	24,9

Em relação ao primeiro daqueles países desenvolvidos, a taxa para Brasil ainda foi mais elevada no grupo de 25 a 29 anos, invertendo- a situação nos grupos seguintes até o de 55 a 59 anos. Nos dois :upos posteriores novamente as taxas para o Brasil ficaram mais evadas, sendo muito acentuada a diferença no último desses dois :upos 49,6% em nosso país e 19,1% na França.

Quanto às comparações com os Estados Unidos, as taxas para o rasil ainda ficaram mais elevadas do que as desse país, sensivelmente) grupo de 25 a 29 anos, e levemente nos seguintes até o de 40 a 44 ıos. A situação voltou a ser favorável ao Brasil no grupo de 65 e ais, sendo que no de 65 a 69 a superioridade já era marcante: 61,3% n comparação com 38,9%

O Brasil apresentou, repita-se, o padrão característico dos países n desenvolvimento, com taxas muito elevadas em correspondência aos :imeiros grupos de idades ativas e aos grupos das idades senis. O)roveitamento precoce de jovens e adultos-jovens na força-de-trabalho, ım prejuízo das funções discentes, é característico dos países em de- nvolvimento A continuação da vida ativa em idades senis, revelando não generalização da previdência social, bem como a baixa renda miliar, é outro traço característico. Uma elevada correlação negativa fora verificada em pesquisa das Nações Unidas entre a participação ı força-de-trabalho e a escolaridade, em grande número de países em :senvolvimento, para os primeiros grupos de idades ativas.

Dispondo-se de uma tábua *completa* de sobrevivência, correspon- :nte ao período 1966/70, para a população da França, realizaram-se, ıra esse país, cálculos paralelos aos já elaborados para o Brasil, da édia líquida residual de anos de atividade, até a extinção da geração, partir da idade x. As taxas de atividade econômica aplicadas nesse ılculo, observe-se, correspondiam a 1968, data do censo e aproximada- ente central do período Os resultados desse cálculo estão expostos ı Tabela 15

Igualmente para os Estados Unidos, por se dispor de uma tábua *)reviada* de sobrevivência, com base na mortalidade de 1969, período :m próximo à data de realização do censo, 1970, realizaram-se cál- ılos da média líquida residual de anos de atividade. Os resultados)roximativos estão expostos na Tabela 17.

A vida média ficou sempre mais elevada na França e nos Estados nidos do que no Brasil, enquanto se verificou o contrário em relação média residual de anos de atividade a partir de cada idade exata ssim, obviamente, a proporção representada pela média residual de :ividade, em relação à vida média, ficou sempre mais elevada no Bra- l. Nas Tabelas 11, 16 e 18 apresentam-se essas proporções.

A diferença entre a vida média em total e a vida média economicamente ativa representa a média de anos de inatividade a partir de cada idade exata.

Essa média de anos inativos para o Brasil, segundo os dois cálculos diferentes realizados para este país, ficou bem inferior à verificada para a França, como para os Estados Unidos. A Tabela 19 apresenta esses resultados. Na idade exata de 15 anos encontraram-se os valôres de 14,7 e 13,7, respectivamente, para a França e os Estados Unidos, enquanto para o Brasil, segundo as duas hipóteses adotadas, o valor atingiu 9,3 e 9,6 anos. Em correspondência à idade de 65 anos, a média de anos inativos ficou em torno de 10 anos para os dois países desenvolvidos, atingindo cerca de 6 anos para o Brasil.

Se se admitir teoricamente o relacionamento do nível e do padrão de mortalidade franceses com a série de taxas específicas de atividade econômica brasileira, encontram-se valores da média residual de anos economicamente ativos mais elevados do que os revelados pelas Tabelas 12 e 14; logo, uma redução da mortalidade acarretaria um correspondente aumento do número médio de anos ativos, mantidas as demais condições inalteradas. A Tabela 20 apresenta os resultados desse cálculo virtual: à idade exata de 15 anos, um valor superior em 2,5 anos para a vida média economicamente ativa; à idade de 25 anos, um valor superior em 2,0 anos; à idade de 35 anos, um valor superior em 1,4 anos; etc. (Advirta-se a diferença entre as referências das duas tábuas de vida adotadas).

Já se viu que se pode admitir que a média bruta de anos de atividade econômica representa teoricamente o número médio de anos na força-de-trabalho de uma geração hipotética masculina (ou feminina), calculado de acordo com a condição de que todos sobrevivessem no fim do período potencial de vida ativa e que fossem submetidos em cada idade às taxas específicas de atividade econômica observadas em determinada população.

Assim, diferenças entre a média bruta de anos de atividade e a expectativa de vida ativa indicam a perda em anos ativos devido à mortalidade. A Tabela 13 apresenta para o Brasil cálculos baseados nessas diferenças, e já comentados. Parte desses cálculos são agora estendidos à França e aos Estados Unidos, comparativamente aos do Brasil.

A média bruta de anos de atividade é muito mais elevada no Brasil do que na França e nos Estados Unidos, quando a vida ativa é considerada nas idades de 15 anos e mais. As diferenças ficam menos acentuadas quando se limita a vida ativa até os 65 anos. Como a expectativa de vida ativa ao nascimento é mais baixa no Brasil, resultou uma perda em anos ativos devido à mortalidade a partir de 0 anos, mais elevada no Brasil do que nos dois países desenvolvidos tomados para comparação. Considerando-se o exercício da atividade nos anos de 15 e mais, a perda de anos ativos atingiria 18,3 no Brasil, baixando para

5, na França e 8,0 nos Estados Unidos. Considerando-se o exercício ı atividade entre os 15 e os 65 anos, a perda atingiria 10,2 anos ativos) Brasil para 4,3 e 5,1, respectivamente, na França e nos Estados nidos.

A expectativa de vida ativa ao nascimento é mais baixa do que a n correspondência à idade 15, sendo acentuada essa diferença no rasil e apenas sensível na França e nos Estados Unidos. Assim, a ɜrda de anos ativos depois da idade 15, devido à mortalidade, ficou ais baixa do que os valores anteriormente referidos. No Brasil, uma ɜrda de 12,6 anos ativos em comparação com 6,4 na França e 6,7 nos ɜtados Unidos, considerando-se os anos de atividade nas idades de ; e mais.

Quando a atividade fica limitada às idades de 15 a 65 anos, a ɜrda de anos ativos depois da idade 15 devido à mortalidade atingiu 0 no Brasil em comparação com 3,2, na França, e 3,9 anos ativos nos ɜtados Unidos.

FATORES DE VARIAÇÃO DA TAXA BRUTA DE ATIVIDADE ECONÔMICA NO BRASIL

As dimensões da força-de-trabalho são determinadas pelas taxas pecíficas de atividade por idade, em cada sexo, e pelo tamanho e trutura etária da população, igualmente em cada sexo. As variações ı população resultam de mudanças na natalidade, fecundidade, mor- .lidade, migrações, etc., as quais, por sua vez, são influenciadas por .tores sociais e econômicos. Estes últimos agem também sobre as ıriações nas taxas específicas de atividade. Os fatores interagem uns ›bre os outros, sugerindo prudência ao se analisarem as variações que :orrem nas taxas específicas de atividade, bem como na estrutura por ade da população

Considerando-se o caso específico do Brasil, observou-se uma dife- ·nça de 53,3 para 50,4 na taxa bruta de atividade (em relação à popu- .ção de idade conhecida), quando se passa de 1960 para 1970, obser- ındo-se uma variação líquida de — 2,9.

Se as taxas específicas de atividade observadas em 1970 fossem ɔlicadas à estrutura etária de 1960, a taxa bruta *virtual* de atividade :ingiria 50,5 (taxa virtual I); se as taxas específicas observadas em)60 fossem aplicadas à estrutura de 1970, a taxa bruta *virtual* de ati- dade seria igual a 53,3 (taxa virtual II). Veja-se a Tabela 23. O eito das variações nas taxas específicas, admitindo-se a estrutura de)60, levaria a uma diferença de — 2,8, admitindo-se a estrutura de)70, a uma diferença de — 2,9. O efeito da mudança de estrutura, ɔlicando-se as taxas específicas de 1960, levaria a uma diferença pra- camente nula, enquanto aplicando-se as taxas específicas de 1970, ıcontrar-se-ia uma diferença de — 0,1. Chega-se à diferença líquida, já inicialmente referida, de — 2,9, quer mediante a operação

$$(50,5 - 53,3) + (50,4 - 50,5) = (-2,8) + (-0,1) = -2,9$$

quer mediante

$$(53,3 - 53,3) + (50,4 - 53,3) = 0 + (-2,9) = -2,9.$$

Assim, o fator preponderante da variação da taxa bruta de atividade, que decresceu levemente no período considerado, decorreu das variações observadas nas taxas específicas de atividade por classes de idade.

TABELA 1

TAXAS DE ATIVIDADE ECONÔMICA, EM RELAÇÃO À POPULAÇÃO DE TODAS AS IDADES, PARA O SEXO MASCULINO, EM DATAS PRÓXIMAS A 1970, PARA ALGUNS PAÍSES

PAÍS E DATA DO CENSO	A PARTIR DA IDADE DE (Anos) PARA A POPULAÇÃO ATIVA	TAXA EM RELAÇÃO À POPULAÇÃO DE TODAS AS IDADES (%)
El Salvador (1971)	10	52,8
	15	48,2
México (1970)	12	42,6
	15	41,4
Estados Unidos (1970)	14	52,6
	15	52,4
Brasil (1970)	10	50,4
	15	48,0
Chile (1970)	12	46,4
	15	46,1
Irã (1966)	10	50,7
	15	46,3
Hungria (1970)		58,9
	15	58,9
Suécia (1965)		59,0
	15	59,0
Iugoslávia (1971)		56,4
	15	56,2
Nova Zelândia (1966)		55,5
	15	55,5

FONTE — *Demographic Yearbook, 1972*, para a primeira taxa; Tabela 2, constante deste trabalho, para a segunda taxa, de cada país Para o Brasil dados deduzidos de *Censo Demográfico, Brasil, 1970* (Série Nacional, Volume I)

TABELA 2

TAXAS DE ATIVIDADE ECONÔMICA, EM RELAÇÃO À POPULAÇÃO DE TODAS AS IDADES E EM RELAÇÃO À POPULAÇÃO DE 15 ANOS E MAIS, DO SEXO MASCULINO, EM DATAS PRÓXIMAS A 1970, PARA ALGUNS PAÍSES

PAÍS E DATA DO CENSO	POPULAÇÃO MASCULINA EM TOTAL (a)	POPULAÇÃO MASCULINA DE 15 ANOS E MAIS (b)	POPULAÇÃO MASCULINA ECONOMICAMENTE ATIVA DE 15 ANOS E MAIS (c)	(d) = 100 (c)/(a)	(e) = 100 (c)/(b)
Gana (1-3-1970)	4 247 809	2 227 000	1 859 395	43,8	83,5
Tunísia (3-5-1966)	2 314 419	1 230 586	1 027 266	44,4	83,5
El Salvador (29-6-1971)	1 760 618	929 277	849 078	48,2	91,4
México (28-1-1970)	24 065 614	12 708 253	9 958 563	41,4	78,4
Estados Unidos (1-4-1970)	98 912 192	69 407 460	51 825 242	52,4	74,7
Brasil (1-9-1970)	46 250 499	26 556 762	22 191 972	48,0	83,6
Chile (22-4-1970)	4 321 500	2 585 020	1 991 600	46,1	77,0
Irã (1 a 20-11-1966)	12 981 665	6 952 403	6 012 867	46,3	86,5
Japão (1-10-1970)	50 917 784	38 227 223	32 240 648	63,3	84,3
França (1-3-1968)	24 249 000	18 236 420	13 315 640	54,9	73,0
Hungria (1-1-1970)	4 998 300	3 887 600	2 942 400	58,9	75,7
Polônia (8-12-1970)	15 853 618	11 444 420	9 148 810	57,7	79,9
Suécia (1-11-1965)	3 879 941	3 053 468	2 289 531	59,0	75,0
Inglaterra e Gales (23-4-1971)	23 623 665	17 650 200	14 399 500	61,0	81,6
Iugoslávia (31-3-1971)	10 077 282	7 262 977	5 658 415	56,2	77,9
Austrália (30-6-1966)	5 816 359	4 078 621	3 421 814	58,8	83,9
Nova Zelândia (22-3-1966)	1 343 743	897 475	745 557	55,5	83,1

FONTE — Para os dados referentes ao Brasil: *Censo Demográfico, Brasil, 1970* (Série Nacional, Volume I) Para os demais países: *Demographic Yearbook, 1972* (United Nations)

TABELA 3

COMPARAÇÃO ENTRE A TAXA CONVENCIONAL E A ESTANDARDIZADA DE ATIVIDADE ECONÔMICA, PARA O SEXO MASCULINO, EM DATAS PRÓXIMAS A 1970, PARA ALGUNS PAÍSES

PAÍS E DATA DO CENSO	TAXA CONVENCIONAL DE ATIVIDADE (%)	TAXA ESTANDARDIZADA DE ATIVIDADE (%)
Gana (1970)	43,8	(1)
Tunísia (1966)	44,4	58,6
El Salvador (1971)	48,2	65,3
México (1970)	41,4	56,7
Estados Unidos (1970)	52,4	54,4
Brasil (1970)	48,0	58,5
Chile (1970)	46,1	55,7
Irã (1966)	46,3	60,3
Japão (1970)	63,3	59,0
França (1968)	54,9	53,6
Hungria (1970)	58,9	55,3
Polônia (1970)	57,7	57,7
Suécia (1965)	59,0	54,5
Inglaterra e Gales (1971)	61,0	59,3
Iugoslávia (1971)	56,2	55,3
Austrália (1966)	58,8	59,6
Nova Zelândia (1966)	55,5	59,5

NOTA: — Convencionalmente, para fins meramente comparativos, a população economicamente ativa foi considerada a partir da idade de 15 anos Tomou-se como padrão a composição relativa por idade, verificada para a população masculina da Austrália, em 1971

(1) Não se dispunha para Gana da distribuição por idades dos economicamente ativos

BELA 4

DADOS SOBRE A NATALIDADE, A MORTALIDADE E O INCREMENTO NATURAL DE ALGUNS PAÍSES

PAÍS	ANO DE REFE-RÊNCIA	TAXA BRUTA DE NATA-LIDADE	TAXA BRUTA DE MORTA-LIDADE	TAXA DE INCRE-MENTO NATURAL	TAXA GERAL DE FECUNDIDADE	TAXA DE MORTA-LIDADE INFAN-TIL
	1965-70	46,6	17,8	28,8	(1) (2) 203-224	(2) 156
ia	1965-70	46,3	16,0	30,3	(3) 131,2	(4) 125
lvador	1972	40,7	8,6	32,1	(5) 150,8	(5) 52,5
o	1965-70	43,2	8,9	34,3	(3) 153,6	(6) 60,9
os Unidos	1973	15,0	9,4	5,6	(6) 53,6	17,6
	1965-70	37,8	9,5	28,3	(1) (7) 164,5	
	1970	29,6	8,5	21,1	81,5	78,8
	1965-70	45,4	16,6	28,8	(5) 160,0	.
	1973	19,4	6,6	12,8	(6) 60,6	11,7
a	1973	16,4	10,7	5,7	(3) 60,6	12,9
ria	1973	15,0	11,8	3,2	(6) 50,6	33,5
ia	1972	17,4	8,0	9,4	55,9	28,5
a	1973	13,5	10,5	3,0	(6) 53,5	9,6
Unido	1973	13,9	12,0	1,9	(6) 57,3	(6) 17,5
lávia	1973	18,0	8,7	9,3	(5) 58,6	43,3
ália	1973	18,9	8,5	10,4	(5) 75,9	(6) 16,7
Zelândia	1973	20,5	8,5	12,0	(5) 80,8	16,2

4 — Taxa geral de fecundidade: número de filhos nascidos vivos de mulheres de 10 a 49 anos por 1 000 res nas mesmas idades

Por 1 000 mulheres de 15 a 49 anos (2) Para 1960 (3) Para 1970 (4) Para 1969 (5) Para 1971 Para 1972. (7) Extraído de *Selected World Demographic Indicators, by Countries* (United Nations, 1975), e não *mographic Yearbook* como os demais dados

TABELA 5a

CRIANÇAS E ADOLESCENTES DE MENOS DE 15 ANOS E VELHOS DE MAIS DE 65 ANOS, EM RELAÇÃO À POPULAÇÃO EM IDADES POTENCIALMENTE ATIVAS, 15 A 64 ANOS, PARA ALGUNS PAÍSES (AMBOS OS SEXOS)

PAÍS	ANO DE REFERÊNCIA	CRIANÇAS E ADOLESCENTES DE MENOS DE 15 ANOS E VELHOS DE MAIS DE 65 ANOS (a)	POPULAÇÃO DE 15 A 64 ANOS (b)	(c) = (a)/(b)
Gana	1970	4 327 460	4 231 853	1,023
Tunísia	1966	2 260 056	2 272 872	0,994
El Salvador	1971	1 760 963	1 788 277	0,985
México	1970	24 078 065	24 147 173	0,997
Estados Unidos	1970	77 965 554	125 246 372	0,622
Brasil	1970	42 055 514	50 899 545	0,826
Chile	1970	3 870 560	4 862 760	0,976
Irã	1966	12 528 434	12 550 489	0,998
Japão	1970	32 546 071	72 119 100	0,451
França	1968	18 453 444	31 201 112	0,591
Hungria	1970	3 361 005	6 961 094	0,483
Polônia	1970	11 363 195	21 258 362	0,535
Suécia	1965	2 609 973	5 156 451	0,506
Inglaterra e Gales	1971	18 071 445	30 678 120	0,589
Iugoslávia	1971	7 115 157	13 315 536	0,534
Austrália	1966	4 378 892	7 171 570	0,611
Nova Zelândia	1966	1 095 492	1 581 427	0,693

TABELA 5b

CRIANÇAS E ADOLESCENTES DE MENOS DE 15 ANOS, EM RELAÇÃO À POPULAÇÃO EM IDADES POTENCIALMENTE ATIVAS, 15 A 64 ANOS, PARA ALGUNS PAÍSES (AMBOS OS SEXOS)

PAÍS	ANO DE REFERÊNCIA	CRIANÇAS E ADOLESCENTES DE MENOS DE 15 ANOS (a)	POPULAÇÃO DE 15 A 64 ANOS (b)	(c) = (a)/(b)
Gana	1970	4 015 965	4 231 853	0,949
Tunísia	1966	2 099 324	2 272 872	0,924
El Salvador	1971	1 638 602	1 788 277	0,916
México	1970	22 286 680	24 147 173	0,923
Estados Unidos	1970	57 900 052	125 246 372	0,462
Brasil	1970	39 130 433	50 899 545	0,769
Chile	1970	3 456 700	4 862 760	0,711
Irã	1966	11 560 329	12 550 489	0,921
Japão	1970	25 152 779	72 119 100	0,349
França	1968	11 790 960	31 201 112	0,378
Hungria	1970	2 176 507	6 961 094	0,313
Polônia	1970	8 627 476	21 258 362	0,406
Suécia	1965	1 608 513	5 156 451	0,312
Inglaterra e Gales	1971	11 575 790	30 678 120	0,377
Iugoslávia	1971	5 500 255	13 315 536	0,413
Austrália	1966	3 392 488	7 171 570	0,473
Nova Zelândia	1966	872 399	1 581 427	0,552

TABELA 6

TAXAS ESPECÍFICAS DE ATIVIDADE ECONÔMICA POR IDADE, A PARTIR DE 15 ANOS, PARA O SEXO MASCULINO, EM DATAS PRÓXIMAS A 1970, PARA ALGUNS PAÍSES (EM PERCENTAGENS)

GRUPOS DE IDADE (Anos Completos)	PAÍS							
	Tunísia (1966)	El Salvador (1971)	México (1970)	Estados Unidos (1970)	Brasil (1970)	Chile (1970)	Irã (1966)	Japão (1970)
15 a 19 anos	51,4	71,4	52,2	40,7	61,9	42,3	68,0	36,5
20 a 24 anos	91,0	93,7	78,3	79,2	87,5	83,0	90,8	83,5
25 a 29 anos	96,1	98,5	87,6	92,2	95,2	95,1	96,6	98,2
30 a 34 anos	96,8	99,4	89,6	95,0	96,3	96,3	97,7	98,6
35 a 39 anos	96,7	99,5	90,2	95,6	96,1	96,4	97,9	98,5
40 a 44 anos	96,2	99,4	89,8	94,7	94,8	95,0	97,5	98,3
45 a 49 anos	95,1	99,2	89,6	93,2	92,7	92,8	95,9	98,1
50 a 54 anos	92,5	98,4	88,0	91,3	87,9	87,2	91,2	97,3
55 a 59 anos	86,8	98,0		87,0	81,9	80,7	86,4	94,2
60 a 64 anos	74,2	96,4		73,3	72,6	71,2	74,1	85,8
65 a 69 anos		93,7		38,9	61,3	54,1		
70 a 74 anos		74,8	76,0	22,5		36,8		
75 a 79 anos	46,6				40,4	27,9	46,8	54,5
80 a 84 anos		52,3		12,1		24,6		
85 anos e mais						16,9		

GRUPOS DE IDADE (Anos Completos)	PAÍS							
	França (1968)	Hungria (1970)	Polônia (1970)	Suécia (1965)	Inglaterra e Gales (1971)	Iugoslávia (1971)	Austrália (1966)	Nova Zelândia (1966)
15 a 19 anos	42,5	46,1	31,5	44,6	61,1	41,3	66,2	62,7
20 a 24 anos	71,3	91,5	85,7	67,1	90,5	81,9	93,8	93,6
25 a 29 anos	94,2	98,7	96,3	90,2	97,4	95,1	97,2	98,3
30 a 34 anos	97,3	98,3	97,1	95,0	98,2	97,7	97,7	98,9
35 a 39 anos	97,3	98,4	96,8	95,8	98,4	97,6	97,6	99,0
40 a 44 anos	96,5	97,0	96,1	95,8	98,2	94,9	97,1	98,8
45 a 49 anos	95,4	94,8	95,1	95,6	98,2	88,0	96,3	98,1
50 a 54 anos	91,4	92,0	94,1	94,5	97,2	84,7	94,7	96,8
55 a 59 anos	82,4	85,9	90,9	91,9	95,2	74,2	91,2	92,7
60 a 64 anos	65,7	43,8	83,0	82,4	86,7	62,7	79,5	71,9
65 a 69 anos		24,6	63,6	45,7	31,4		39,7	42,1
70 a 74 anos		14,4	56,3	16,8			21,0	19,3
75 a 79 anos	19,1					50,9		
80 a 84 anos		6,8	42,5	5,7	10,9		10,8	6,9
85 anos e mais								

TABELA 7

TAXAS DE ATIVIDADE ECONÔMICA PARA O GRUPO DE 65 ANOS E MAIS, EM ALGUNS PAÍSES

PAÍS E DATA DO CENSO	TAXA DE ATIVIDADE PARA O GRUPO DE 65 ANOS E MAIS (%)
Tunísia (1966)	46,6
El Salvador (1971)	75,1
México (1970)	
Estados Unidos (1970)	24,9
Brasil (1970)	49,6
Chile (1970)	40,3
Irã (1966)	46,8
Japão (1970)	54,5
França (1968)	19,1
Hungria (1970)	16,9
Polônia (1970)	56,4
Suécia (1965)	23,9
Inglaterra e Gales (1971)	19,6
Iugoslávia (1971)	50,9
Austrália (1966)	24,9
Nova Zelândia (1966)	23,6

TABELA 8

MÉDIA BRUTA DE ANOS DE ATIVIDADE, ENTRE OS 15 E OS 64 ANOS, EM DADOS ABSOLUTOS E EM RELAÇÃO AO VALOR MÁXIMO TEÓRICO DESSA MÉDIA, PARA O SEXO MASCULINO, EM DATAS PRÓXIMAS DE 1970, PARA ALGUNS PAÍSES

PAÍS E DATA DO CENSO	MÉDIA BRUTA DE ANOS DE ATIVIDADE	
	Dados Absolutos	Percentagem em Relação ao Valor Máximo Teórico Dessa Média
Tunísia (1966)	43,8	87,6
El Salvador (1971)	47,7	95,4
Estados Unidos (1970)	42,1	84,2
Brasil (1970)	43,3	86,6
Chile (1970)	42,0	84,0
Irã (1966)	44,8	89,6
Japão (1970)	44,5	89,0
França (1968)	41,7	83,4
Hungria (1970)	42,3	84,6
Polônia (1970)	43,3	86,6
Suécia (1965)	42,6	85,2
Inglaterra e Gales (1971)	46,1	92,2
Iugoslávia (1971)	40,9	81,8
Austrália (1966)	45,6	91,2
Nova Zelândia (1966)	45,5	91,0

NOTA — Neutralizada a influência da mortalidade que não foi considerada neste primeiro cálculo. Quando se passar ao estudo da média líquida, os dados obtidos das tábuas de sobrevivência serão devidamente coordenados sobre a participação na força-de-trabalho para que se avalie a perda média em anos devido à mortalidade

TABELA 9

MÉDIA BRUTA DE ANOS DE ATIVIDADE, ENTRE OS 25 E OS 54 ANOS, EM DADOS ABSOLUTOS E EM RELAÇÃO AO VALOR MÁXIMO TEÓRICO DESSA MÉDIA, PARA O SEXO MASCULINO, EM DATAS PRÓXIMAS DE 1970, PARA ALGUNS PAÍSES

PAÍS E DATA DO CENSO	MÉDIA BRUTA DE ANOS DE ATIVIDADE	
	Dados Absolutos	Percentagem em Relação ao Valor Máximo Teórico Dessa Média
Tunísia (1966)	28,7	95,7
El Salvador (1971)	29,7	99,0
México (1970)	26,7	89,0
Estados Unidos (1970)	28,1	93,7
Brasil (1970)	28,2	94,0
Chile (1970)	28,1	93,7
Irã (1966)	28,8	96,0
Japão (1970)	29,4	98,0
França (1968)	28,6	95,3
Hungria (1970)	29,0	96,7
Polônia (1970)	28,8	96,0
Suécia (1965)	28,3	94,3
Inglaterra e Gales (1971)	29,4	98,0
Iugoslávia (1971)	27,9	93,0
Austrália (1966)	29,0	96,7
Nova Zelândia (1966)	29,5	98,3

NOTA — Neutralizada a influência da mortalidade, que não foi considerada neste tipo de cálculo

TABELA 10

COORDENAÇÃO ENTRE A DISTRIBUIÇÃO DAS TAXAS DE ATIVIDADE, POR IDADE, E AS FUNÇÕES DA TÁBUA DE SOBREVIVÊNCIA, PARA O SEXO MASCULINO

BRASIL (1.º Cálculo hipotético)

Tábua abreviada de sobrevivência correspondente à mortalidade média do decênio 1960-70, e taxas de atividade baseadas no censo de 1970

IDADE EXATA x	l_x	$_5L_x$	MÉDIA LÍQUIDA RESIDUAL DE *ANOS DE ATIVIDADE*, ATÉ A EXTINÇÃO DA GERAÇÃO, A PARTIR DA IDADE EXATA *x*
15 anos	86 347	429 405	41,9
20 anos	85 415	423 628	39,3
25 anos	84 036	416 535	35,5
30 anos	82 578	408 760	31,3
35 anos	80 926	399 595	27,1
40 anos	78 912	388 032	22,9
45 anos	76 301	372 868	18,9
50 anos	72 846	352 448	15,0
55 anos	68 133	324 872	11,5
60 anos	61 816	288 125	8,4
65 anos	53 434	241 095	5,8
70 anos	43 004	(1)400 445	3,8

NOTA — Tábua abreviada de sobrevivência apresentada no estudo de Richard Irwin e João Lyra Madeira à II Conferência Nacional de Estatística (Rio de Janeiro) Cálculo, pelo autor da presente comunicação, da "média líquida residual de anos de atividade até a extinção da geração, a partir da idade exata x"

(1) Interpretar como "70 e mais"

TABELA 11

BRASIL — COMPARAÇÃO ENTRE A MÉDIA RESIDUAL DE VIDA ATIVA E A VIDA MÉDIA, PARA O SEXO MASCULINO

IDADE EXATA *x*	MÉDIA LÍQUIDA RESIDUAL DE ANOS DE ATIVIDADE, ATÉ A EXTINÇÃO DA GERAÇÃO (a)	VIDA MÉDIA NA IDADE *x* (b)	$(c) = 100 \frac{(a)}{(b)}$
15 anos	41,9	51,5	81,4
20 anos	39,3	47,0	83,6
25 anos	35,5	42,8	82,9
30 anos	31,3	38,5	81,3
35 anos	47,1	34,2	79,2
40 anos	22,9	30,0	76,3
45 anos	18,9	25,9	73,0
50 anos	15,0	22,1	67,9
55 anos	11,5	18,4	62,5
60 anos	8,4	15,0	56,0
65 anos	5,8	12,0	48,3
70 anos	3,8	9,3	40,9

TABELA 12

BRASIL — TÁBUA ABREVIADA DE VIDA ECONOMICAMENTE ATIVA, SEXO MASCULINO

IDADE EXATA (x)	TAXA ESPECÍFICA DE ATIVIDADE NO INTERVALO DE (x) A ($x+5$) (%)	SOBREVIVENTES NA IDADE (x) (EM TOTAL) (l_x)	POPULAÇÃO ESTACIONÁRIA NO INTERVALO DE (x) A ($x+5$)		POPULAÇÃO ESTACIONÁRIA CUMULATIVA NO INTERVALO DE (x) A (w)		VIDA MÉDIA RESIDUAL		
			Em Total ($_5L_x$)	Economicamente Ativa	Em Total (T_x)	Economicamente Ativa (T'_x)	Anos em Total ($\mathring{e}_x$)	Anos Economicamente Ativos	Anos Inativos
0 ano	0	100 000	446 355	0	5 761 489	3 702 118	57,6	37,0	20,6
5 anos ..	0	87 639	436 278	0	5 315 134	3 702 118	60,6	42,2	18,4
10 anos	19,18	86 872	433 048	83 059	4 878 856	3 702 118	56,2	42,6	13,6
15 anos	61,92	86 347	429 405	265 888	4 445 808	3 619 059	51,5	41,9	9,6
20 anos	87,46	85 415	423 628	370 505	4 016 403	3 353 171	47,0	39,3	7,7
25 anos	95,25	84 036	416 535	396 750	3 592 775	2 982 666	42,8	35,5	7,3
30 anos .	96,34	82 578	408 760	393 799	3 176 240	2 585 916	38,5	31,3	7,2
35 anos	96,11	80 926	399 595	384 051	2 767 480	2 192 117	34,2	27,1	7,1
40 anos	94,85	78 912	388 032	368 048	2 367 885	1 808 066	30,0	22,9	7,1
45 anos	92,67	76 301	372 868	345 537	1 979 853	1 440 018	25,9	18,9	7,0
50 anos	87,89	72 846	352 448	309 767	1 606 985	1 094 481	22,1	15,0	7,1
55 anos	81,89	68 133	324 872	266 038	1 254 537	784 714	18,4	11,5	6,9
60 anos	72,63	61 816	288 125	209 265	929 665	518 676	15,0	8,4	6,6
65 anos	61,30	53 434	241 095	147 791	641 540	309 411	12,0	5,8	6,2
70 anos	(1)40,36	43 004	(1)400 445	(1)161 620·	(1)400 445	(1)161 620	9,3	3,8	5,5

(1) Entenda-se "70 anos e mais"

TABELA 13

BRASIL — CÁLCULO DA PERDA DE ANOS DE VIDA ATIVA, POR EFEITO DA MORTALIDADE (SEXO MASCULINO)

	ESPECIFICAÇÃO	ANOS DE ATIVIDADE NAS IDADES DE 15 E MAIS	ANOS DE ATIVIDADE ENTRE AS IDADES DE 15 E 70	ANOS DE ATIVIDADE ENTRE AS IDADES DE 15 E 65
0	Média bruta de anos de vida ativa	54,5	46,4	43,3
2	Expectativa de vida ativa ao nascimento	36,2	34,6	33,1
3	Perda de anos ativos, por mortalidade (1)–(2)	18,3	11,8	10,2
4	Expectativa de vida ativa na idade 15	41,9	40,0	38,3
5	Perda de anos ativos por mortalidade, depois da idade 15(1)–(4)	12,6	6,4	5,0

	ESPECIFICAÇÃO	ANOS DE ATIVIDADE NAS IDADES DE 15 E MAIS	ANOS DE ATIVIDADE ENTRE AS IDADES DE 10 E 70	ANOS DE ATIVIDADE ENTRE AS IDADES DE 10 E 65
1	Média bruta de anos de vida ativa	55,4	47,4	44,3
2	Expectativa de vida ativa ao nascimento	37,0	35,4	33,9
3	Perda de anos ativos, por moratalidade (1)–(2).. .	18,5	12,0	10,4
4	Expectativa de vida ativa na idade 10	42,6	40,8	39,1
5	Perda em anos ativos por mortalidade, depois da idade 10(1)–(4) .	12,9	6,6	5,2

TABELA 14

BRASIL — TÁBUA ABREVIADA DE VIDA ECONOMICAMENTE ATIVA, COM BASE NAS TÁBUAS-MODELO DE SOBREVIVÊNCIA DE ANSLEY J. COALE E PAUL DEMENY, SEXO MASCULINO

IDADE EXATA (x)	TAXA ESPECÍFICA DE ATIVIDADE NO INTERVALO DE (x) A ($x+5$) (%)	SOBREVIVENTES NA IDADE (x) (EM TOTAL) (l_x)	POPULAÇÃO ESTACIONÁRIA NO INTERVALO DE (x) A (x+5)		POPULAÇÃO ESTACIONÁRIA CUMULATIVA NO INTERVALO DE (x) A (w)		VIDA MÉDIA RESIDUAL		
			Em Total ($_5L_x$)	Economicamente Ativa	Em Total (T_x)	Economicamente Ativa (T'_x)	Anos em Total ($\mathring{e}_x$)	Anos Economicamente Ativos	Anos Inativos
0 ano	0	100 000	454 610	0	5 765 649	3 699 175	57,7	37,0	20,7
5 anos	0	89 092	443 052	0	5 311 039	3 699 175	59,6	41,5	18,1
10 anos	19,18	88 129	438 851	84 172	4 867 987	3 699 175	55,2	42,0	13,2
15 anos	61,92	87 412	434 253	268 889	4 429 136	3 615 003	50,7	41,4	9,3
20 anos	87,46	86 289	427 526	373 914	3 994 883	3 346 114	46,3	38,8	7,5
25 anos	95,25	84 721	419 505	399 579	3 567 357	2 972 200	42,1	35,1	7,0
30 anos	96,34	83 081	410 830	395 794	3 147 852	2 572 621	37,9	31,0	6,9
35 anos	96,11	81 251	400 796	385 205	2 737 022	2 176 827	33,7	26,8	6,9
40 anos	94,85	79 067	388 397	368 395	2 336 226	1 791 622	29,5	22,7	6,8
45 anos	92,67	76 291	372 386	345 090	1 947 829	1 423 227	25,5	18,7	6,8
50 anos	87,89	72 663	351 070	308 555	1 575 443	1 078 137	21,7	14,8	6,9
55 anos	81,89	67 765	322 544	264 131	1 224 373	769 582	18,1	11,4	6,7
60 anos	72,63	61 253	284 794	206 846	901 829	505 451	14,7	8,3	6,4
65 anos	61,30	52 665	236 725	145 112	617 035	298 605	11,7	5,7	6,0
70 anos	[1]40,36	42 025	[1]380 310	[1]153 493	[1]380 310	[1]153 493	9,0	3,7	5,3

NOTA — Média dos níveis 17 e 18, das tábuas-modelo de mortalidade, apresentadas em *Regional Model Life Tables and Stable Populations*, Ansley J Coale e Paul Demeny (Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1966)

1 Entenda-se "70 anos e mais"

TABELA 15

COORDENAÇÃO ENTRE A DISTRIBUIÇÃO DAS TAXAS DE ATIVIDADE, POR IDADE, E AS FUNÇÕES DA TÁBUA DE SOBREVIVÊNCIA, PARA O SEXO MASCULINO

FRANÇA Tábua completa de sobrevivência correspondente à morta lidade observada no período 1966-70, e taxas de atividad baseadas no censo de 1968

IDADE EXATA x	l_x	5_x^L	MÉDIA LÍQUIDA RESIDUAL DE ANOS DE ATIVIDADE, ATÉ A EXTINÇÃO DA GERAÇÃO, A PARTIR DA IDADE EXATA x
15 anos	97 273	485 115	40,1
20 anos	96 704	481 643	38,2
25 anos	95 946	477 780	35,0
30 anos.	95 156	473 515	30,5
35 anos	94 206	467 838	25,9
40 anos	92 841	459 408	21,4
45 anos	90 790	446 704	17,0
50 anos	87 690	427 799	12,8
55 anos	83 161	400 118	8,8
60 anos	76 470	359 875	5,2
65 anos	67 023	(1)851 056	2,4

NOTA — Os valores 5_x^L foram calculados pelo autor da presente comunicação com base nos elementos da tábu completa de sobrevivência, que apresentava a função l_x para todos os aniversários até a extinção da geraçã hipotética Vide "La Population de la France" (in "Population", Numero Spécial, juin, 1974). Cálcul também pelo autor da presente comunicação, da "média líquida residual de anos de atividade, até a extin ção da geração, a partir da idade exta x"

(1) Inteipretar como "65 e mais"

TABELA 16

FRANÇA — COMPARAÇÃO ENTRE A MÉDIA RESIDUAL DE VIDA ATIVA E A VIDA MÉDIA, PARA O SEXO MASCULINO

IDADE EXATA x	MÉDIA LÍQUIDA RESIDUAL DE ANOS DE ATIVIDADE, ATÉ A EXTINÇÃO DA GERAÇÃO (a)	VIDA MÉDIA NA IDADE x (b)	$(c) = 100 \frac{(a)}{(b)}$
15 anos .	40,1	54,8	73,2
20 anos	38,2	50,1	76,2
25 anos	35,0	45,5	76,9
30 anos	30,5	40,8	74,8
35 anos .	25,9	36,2	71,5
40 anos	21,4	31,7	67,5
45 anos.	17,0	27,4	62,0
50 anos .	12,8	23,2	55,2
55 anos .	8,8	19,4	45,4
60 anos	5,2	15,8	32,9
65 anos. .	2,4	12,7	18,9

TABELA 17

COORDENAÇÃO ENTRE A DISTRIBUIÇÃO DAS TAXAS DE ATIVIDADE, POR IDADE, E AS FUNÇÕES DA TÁBUA DE SOBREVIVÊNCIA, PARA O SEXO MASCULINO

ESTADOS UNIDOS Tábua abreviada de sobrevivência correspondente à mortalidade observada no ano de 1969, e taxas de atividade baseadas no censo de 1970

IDADE EXATA x	l_x	$_5L_x$	MÉDIA LÍQUIDA RESIDUAL DE *ANOS DE ATIVIDADE*, ATÉ A EXTINÇÃO DA GERAÇÃO, A PARTIR DA IDADE EXATA x
15 anos	96 774	482 066	40,3
20 anos	95 979	477 232	38,6
25 anos	94 900	472 072	35,1
30 anos	93 931	467 079	30,8
35 anos	92 857	460 815	26,4
40 anos	91 369	451 699	22,0
45 anos	89 146	438 068	17,7
50 anos	85 828	417 452	13,6
55 anos	80 854	387 127	9,8
60 anos	73 622	344 544	6,2
65 anos	63 787	289 624	3,2
70 anos	51 764	224 037	1,7
75 anos	37 695	(1)313 577	1,0

NOTA — Tábua abreviada de sobrevivência apresentada em "Life Tables" — Volume II, Section 5 (Vital Statistics of the United States, 1969, U S A , Department of Health, Education and Welfare) Cálculo, pelo autor da presente comunicação, da "média líquida residual de anos de atividade até a extinção da geração, a partir da idade exata x"

1) Interpretar como "75 e mais"

TABELA 18

ESTADOS UNIDOS — COMPARAÇÃO ENTRE A MÉDIA RESIDUAL DE VIDA ATIVA E A VIDA MÉDIA, PARA O SEXO MASCULINO

IDADE EXATA x	MÉDIA LÍQUIDA RESIDUAL DE ANOS DE ATIVIDADE, ATÉ A EXTINÇÃO DA GERAÇÃO (a)	VIDA MÉDIA NA IDADE x (b)	$(c) = 100\frac{(a)}{(b)}$
15 anos	40,3	54,0	74,6
20 anos	38,6	49,4	78,1
25 anos	35,1	45,0	78,0
30 anos	30,8	40,4	76,2
35 anos	26,4	35,8	73,7
40 anos	22,0	31,4	70,1
45 anos	17,7	27,1	65,3
50 anos	13,6	23,0	59,1
55 anos	9,8	19,3	50,8
60 anos	6,2	15,9	39,0
65 anos	3,2	13,0	24,6
70 anos	1,7	10,4	16,3
75 anos	1,0	8,3	12,0

TABELA 19

COMPARAÇÃO ENTRE OS VALORES DA VIDA MÉDIA EM TOTAL, DA VIDA MÉDIA ECONOMICAMENTE ATIVA E DA VIDA MÉDIA DE INATIVIDADE PARA DOIS PAÍSES DESENVOLVIDOS (FRANÇA E ESTADOS UNIDOS) E O BRASIL

IDADE EXATA (x)	Vida Média Residual											
	FRANÇA			ESTADOS UNIDOS			BRASIL (1ª Hipótese)			BRASIL (2ª Hipótese)		
	Anos em Total ($\mathring{e}_x$)	Anos Economicamente Ativos	Anos Inativos	Anos em Total ($\mathring{e}_x$)	Anos Economicamente Ativos	Anos Inativos	Anos em Total ($\mathring{e}_x$)	Anos Economicamente Ativos	Anos Inativos	Anos em Total ($\mathring{e}_x$)	Anos Economicamente Ativos	Anos Inativos
15 anos	54,8	40,1	14,7	54,0	40,3	13,7	51,5	41,9	9,6	50,7	41,4	9,3
20 anos	50,1	38,2	11,9	49,4	38,6	10,8	47,0	39,3	7,7	46,3	38,8	7,5
25 anos	45,5	35,0	10,5	45,0	35,1	9,9	42,8	35,5	7,3	42,1	35,1	7,0
30 anos	40,8	30,5	10,3	40,4	30,8	9,6	38,5	31,3	7,2	37,9	31,0	6,9
35 anos	36,2	25,9	10,3	35,8	26,4	9,4	34,2	27,1	7,1	33,7	26,8	6,9
40 anos	31,7	21,4	10,3	31,4	22,0	9,4	30,0	22,9	7,1	29,5	22,7	6,8
45 anos	27,4	17,0	10,4	27,1	17,7	9,4	25,9	18,9	7,0	25,5	18,7	6,8
50 anos	23,2	12,8	10,4	23,0	13,6	9,4	22,1	15,0	7,1	21,7	14,8	6,9
55 anos	19,4	8,8	10,6	19,3	9,8	9,5	18,4	11,5	6,9	18,1	11,4	6,7
60 anos	15,8	5,2	10,6	15,9	6,2	9,7	15,0	8,4	6,6	14,7	8,3	6,4
65 anos	12,7	2,4	10,3	13,0	3,2	9,8	12,0	5,8	6,2	11,7	5,7	6,0
70 anos	10,0			10,4	1,7	8,7	9,3	3,8	5,5	9,0	3,7	5,3

TABELA 20

EXPECTATIVA DE VIDA ATIVA, SEGUNDO DOIS PADRÕES DE MORTALIDADE E AS MESMAS TAXAS ESPECÍFICAS, POR IDADE, DE ATIVIDADE ECONÔMICA

IDADE EXATA (x)	MÉDIA LÍQUIDA RESIDUAL DE ANOS DE ATIVIDADE ATÉ A EXTINÇÃO DA GERAÇÃO, APLICANDO-SE AS TAXAS ESPECÍFICAS DE ATIVIDADE BRASILEIRAS E A		(c) = (a)—(b)
	Mortalidade da População Brasileira (1960-70) (a)	Mortalidade da População Francesa (1966-70) (b)	
15 anos	41,9	44,4	—2,5
20 anos	39,3	41,6	—2,3
25 anos	35,5	37,5	—2,0
30 anos	31,3	33,0	—1,7
35 anos	27,1	28,5	—1,4
40 anos	22,9	24,1	—1,2
45 anos	18,9	19,8	—0,9
50 anos	15,0	15,8	—0,8
55 anos	11,5	12,2	—0,7
60 anos	8,4	8,9	—0,5
65 anos	5,8	6,3	—0,5

TABELA 21

COMPARAÇÃO ENTRE A MÉDIA BRUTA DE ANOS DE ATIVIDADE E A EXPECTATIVA DE VIDA ATIVA, PARA O SEXO MASCULINO, NO BRASIL E EM ALGUNS PAÍSES DESENVOLVIDOS

ESPECIFICAÇÃO	PAÍS					
	Brasil		França		Estados Unidos	
	Anos de Atividade, nas Idades de 15 Anos e Mais	Anos de Atividade, entre as Idades de 15 e 65 Anos	Anos de Atividade, nas Idades de 15 Anos e Mais	Anos de Atividade, entre as Idades de 15 e 65 Anos	Anos de Atividade, nas Idades de 15 Anos e Mais	Anos de Atividade, entre as Idades de 15 e 65 Anos
1 Média bruta de anos de atividade .. .	54,5	43,3	46,5	41,7	47,0	42,1
2 Expectativa de vida ativa ao nascimento . .	36,2	33,1	39,0	37,4	39,0	37,0
3 Perda de anos de atividade devido à mortalidade (1) — (2)	18,3	10,2	7,5	4,3	8,0	5,1
4 Expectativa de vida ativa na idade de 15 anos	41,9	38,3	40,1	38,5	40,3	38,2
5 Perda de anos de atividade devido à mortalidade (1) — (4)	12,6	5,0	6,4	3,2	6,7	3,9

TABELA 22

DISTRIBUIÇÕES PROPORCIONAIS POR IDADE DAS POPULAÇÕES MASCULINAS DO BRASIL, FRANÇA E ESTADOS UNIDOS

GRUPOS DE IDADE (Anos Completos)	PROPORÇÃO DOS HABITANTES DE CADA GRUPO DE IDADE, EM RELAÇÃO AO TOTAL DE IDADE CONHECIDA			PROPORÇÃO DOS HABITANTES DE CADA GRUPO DE IDADE, ACIMA DE 15 ANOS, EM RELAÇÃO AO TOTAL DE 15 ANOS E MAIS		
	Brasil	Estados Unidos	França	Brasil	Estados Unidos	França
TOTAL	100,000	100,000	100,000	100,000	100,000	100,000
0 a 4 anos	15,074	8,842	7,324	—	—	—
5 a 9 anos	14,706	10,280	8,828	—	—	—
10 a 14 anos	12,834	10,707	8,694	—	—	—
15 a 19 anos	10,804	9,740	8,873	18,826	13,880	11,806
20 a 24 anos	8,731	8,004	7,997	15,215	11,407	10,641
25 a 29 anos	6,863	6,694	6,119	11,959	9,540	8,142
30 a 34 anos	6,057	5,657	6,589	10,555	8,062	8,768
35 a 39 anos	5,411	5,472	7,060	9,430	7,798	9,394
40 a 44 anos	4,949	5,883	6,906	8,624	8,384	9,188
45 a 49 anos	3,882	5,916	6,325	6,765	8,431	8,416
50 a 54 anos	3,215	5,407	3,938	5,602	7,705	5,240
55 a 59 anos	2,509	4,818	5,597	4,372	6,866	7,447
60 a 64 anos	1,953	4,071	5,161	3,404	5,802	6,868
65 a 69 anos	1,308	3,157	4,388	2,279	4,498	5,839
70 anos e mais	1,704	5,352	6,201	2,969	7,627	8,251

TABELA 23

CÁLCULO DE TAXAS VIRTUAIS DE ATIVIDADE ECONÔMICA, POPULAÇÃO MASCULINA BRASIL, 1960 E 1970

GRUPOS DE IDADE (Anos Completos)	ESTRUTURA ETÁRIA DE 1960	TAXAS ESPECÍFICAS DE ATIVIDADE ECONÔMICA 1970 (%)	CÁCULO DA TAXA VIRTUAL I	ESTRUTURA ETÁRIA DE 1970	TAXAS ESPECÍFICAS DE ATIVIDADE ECONÔMICA 1970 (%)	CÁCULO DA TAXA VIRTUAL II
0 e mais anos .	100,0	—	50,5	100,0	—	53,3
0 a 9 anos	30,7	—	—	29,8	—	—
10 a 14 anos	12,2	19,2	2,3	12,8	22,7	2,9
15 a 19 anos	10,0	61,9	6,2	10,8	71,7	7,7
20 a 24 anos	8,7	87,5	7,6	8,8	91,8	8,1
25 a 29 anos	7,3	95,2	6,9	6,8	96,5	6,6
30 a 34 anos	6,5	96,3	6,3	6,1	97,4	5,9
35 a 39 anos	5,6	96,1	5,4	5,4	97,2	5,2
40 a 44 anos	4,7	94,8	4,5	4,9	96,4	4,7
45 a 49 anos	4,0	92,7	3,7	3,9	95,4	3,7
50 a 54 anos	3,2	87,9	2,8	3,2	92,3	3,0
55 a 59 anos	2,4	81,9	2,0	2,5	87,6	2,2
60 a 64 anos	2,1	72,6	1,5	2,0	79,4	1,6
65 a 69 anos	1,1	61,3	0,7	1,3	69,1	0,9
70 anos e mais	1,5	40,4	0,6	1,7	48,2	0,8

RESUMO

O estudo visou a apresentar relações entre a participação na força-de-trabalho e as funções de sobrevivência (número de sobreviventes e população estacionária, ou melhor, número de pessoas-anos vividos pela geração da tábua em dado intervalo de idade). Recorreram-se, para esse objetivo, aos resultados de censos demográficos e às tábuas de vida baseadas na mortalidade observada em períodos correspondentes.

As comparações foram estendidas a países típicos de vários estágios de desenvolvimento sócio-econômico, sendo destacado o caso do Brasil. A análise reflete a preocupação da utilização de seus resultados em pesquisas visando a um melhor aproveitamento do capital-humano na programação do planejamento.

O capítulo dedicado à conceituação da força-de-trabalho se estendeu pela exposição da complexidade de se obterem dados comparáveis, a nível nacional, de seus efetivos, classificados por sexo, idade, etc., combinadamente a características sociais e econômicas, tendo em vista o estudo da interação entre fatores estritamente demográficos e os sociais, econômicos, culturais, históricos, etc.

Comentaram-se as limitações dos conceitos de taxas brutas, "convencionais" e específicas de atividade.

Desenvolveu-se, principalmente, a aplicação de tábuas de vida ativa para se obterem as medidas líquidas médias de permanência na força-de-trabalho, em relação aos sobreviventes em total e aos sobreviventes ativos.

Admitindo-se constituir a "média bruta" de anos de atividade uma expectativa de vida ativa não afetada pelo fator mortalidade, pode a mesma ser comparada à vida média residual de anos de atividade, em cujo cálculo o fator mortalidade é considerado. A diferença entre os dois indicadores daria uma medida virtual da perda em anos de vida ativa motivada pela mortalidade.

O contraste entre a situação dos países ditos "desenvolvidos" e dos ainda "em desenvolvimento" ficou bem elucidado, com a caracterização do desperdício de anos de atividade em virtude da mais elevada mortalidade entre os últimos. Logo, uma redução da mortalidade acarretaria um correspondente aumento do número médio de anos ativos, mantidas as demais condições inalteradas.

RESUMÉ

L'étude a pour but presenter des relations entre la participation dans la force-de-travail et les fonctions de survie (nombre des survivants et population stationnaire, c'est-à-dire, le nombre des personnes-années vécues par la cohorte de la table de survie dans un intervalle d'âge) pour la population du sexe masculin. Pour cet objectif, on a utilisés les résultats des recensements de population et les tables de survie basées sur la mortalité observé dans les périodes correspondentes.

Les comparaisons ont étées étendues à des pays typiques de chaque étage du développement social et économique, étant mis en evidence le cas spécifique du Brésil. L'Analyse réflète la préocupation d'utilisation de ses résultats aux recherches dont l'objectif serait un meilleur profit du capital-humain dans le programme du développement.

Le chapitre devoué au concept de force-de-travail a été étendu par l'exposition de la complexité d'obtention des données comparables, à niveau national de leurs effectifs, classifiés par sexe, âge, etc, en combinaison avec des caracteristiques sociales et économiques, ayant pour but l'analyse de l'interaction entre les facteurs strictement démographiques et les fauteurs sociaux, économiques, culturales, historiques, etc.

Les limitations des concepts de taux bruts, "conventionnels" et spécifiques d'activité ont étés développés.

On a étudiée, principalement, l'application des tables de vie active à l'obtention de mésures nettes moyenes de permanence dans la force-de-travail, en rélation avec le nombre total des survivants et le nombre des survivants actifs.

On a accepté constituer la moyenne brute des ans d'activité une expectative de vie active non affecteé par le facteur mortalité; ainsi cette moyenne peut être comparée à l'espérance de vie active, dont le calcul emploie le facteur mortalité. La différence entre ces deux indicateurs donne une mésure théorique de la perte des ans de vie active determinée par la mortalité.

Le contraste entre la situation des pays "développés" e les pays "en voie de développement" a été bien éclairci avec la caractérisation de la perte des ans d'activité determinée par la mortalité plus élevée parmi des derniers. Une réduction, ainsi, de la mortalité aurait par conséquence une correspondante augmentation du nombre moyen des anées vécues, inalterées toutes les autres conditions.

O FENÔMENO DO ÊXODO DEMOGRÁFICO NOS MUNICÍPIOS

François E. J. de Bremaeker
Economista e geógrafo

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A crescente concentração populacional em uns poucos aglomerados urbanos do país tem sido o fator responsável por uma preocupação cada vez maior com os efeitos deste processo, redundando na implementação de políticas de desenvolvimento urbano.

Constatou-se através dos resultados do Censo Demográfico de 1970 que mais da metade da população brasileira (56%) se localizava nas cidades e nas vilas. Análises mais detidas mostraram que pouco mais de 70% da população urbana brasileira, naquela data, estavam concentradas em 351 aglomerados urbanos com população superior a vinte mil habitantes [1].

[1] BREMAEKER, François E J de As cidades brasileiras *Revista Brasileira de Estatística,* Rio de Janeiro, 34 (135) : 283-406, jul /set 1973

A evolução do crescimento populacional brasileiro desde 1940 até 1970 apresentou diferentes tendências rítmicas, aumentando em 2,3 vezes. Neste mesmo espaço de tempo a população urbana apresentou um crescimento de 4,1 vezes, passando de 12,9 para 52,9 milhões de pessoas [2].

Foram institucionalizadas as regiões metropolitanas — através das Leis Complementares números 14 e 20, respectivamente de 8 de junho de 1973 e de 1 de julho de 1974 — que concentravam em seus 117 municípios (menos de 3% dos municípios brasileiros), em 1970, uma quarta parte da população brasileira e mais de 42% da população urbana do país [3].

Entretanto, a relativamente recente preocupação em encontrar uma solução para este novo problema levou ao esquecimento um antigo fantasma que assola os municípios brasileiros: o êxodo demográfico.

A migração interna, seja do campo para a cidade seja da cidade pequena para uma cidade média ou grande, é um fato. Nada menos de 32,5% da população brasileira se localizam em municípios de onde não é natural, 56,4% provêm de zona urbana — cidade ou vila — enquanto que os 43,6% restantes são oriundos da zona rural.

Do total de migrantes até a data do último recenseamento — entendendo-se como migrante aquele que não habita o município de nascimento — 58,8% destes se deslocaram no período entre 1960 e 1970, enquanto que os restantes o fizeram anteriormente a 1960. Estes que migraram nos dez anos compreendidos entre um recenseamento e outro representam 19,1% do total da população brasileira.

2. PANORAMA MUNICIPAL

Enquanto o Brasil cresce demograficamente a uma taxa anual equivalente a 2,90%, que o levará aos 125,8 milhões de habitantes em 1980; e a sua população urbana cresce a um ritmo avassalador, 5,15% ao ano, devendo assegurar-lhe no final da atual década uma população de 87,5 milhões de habitantes, nada menos que 907 municípios — 23% do total de municípios brasileiros — acusaram perda de população no período compreendido entre os Censos de 1960 e 1970.

Este fenômeno torna-se mais surpreendente ainda quando se verifica que quase dois terços destes municípios (64,3% do total) pertencem à Região Sudeste, aquela que apresenta os mais elevados índices de urbanização e onde se localizam nada menos que 53,1% das cidades brasileiras que em 1970 possuíam população superior a vinte mil habitantes.

---

[2] BEREMAEKER, François E J de Três décadas de urbanização no Brasil: 1940-1970 *Revista de Administração Municipal*, Rio de Janeiro, 23 (134) : 31-44, jan /fev 1976

[3] BREMAEKER, François E. J de As regiões metropolitanas brasileiras *Revista de Administração Municipal*, Rio de Janeiro, 22 (180) : 43-53, maio/jun. 1975

Do total de municípios da Região Sudeste, 41,4% deles acusaram perda de população nos dez anos que antecederam o último Censo. Nas demais regiões, a Nordeste apresentava 14,0% dos municípios perdendo população, a Sul 13,0% e a Norte 10,5%. A Região Centro-Oeste detinha o menor índice, tendo apenas 7,5% dos seus municípios a sofrer perda de população.

Sob o ponto de vista do tamanho da população, verifica-se maior incidência do fenômeno dentre os municípios de menor população. Dos municípios que em 1970 apresentavam até 2 mil e de 2 a 5 mil habitantes, respectivamente 35,1% e 35,6% deles apresentaram decréscimo populacional entre 1960 e 1970. Mesmo dentre os que se situavam na faixa de tamanho entre 5 mil e 10 mil habitantes, a cifra ainda era relativamente elevada: 30,5% dos casos.

Já para os municípios situados na faixa de tamanho de população entre 10 mil e 20 mil habitantes este índice cai para 20,9%, enquanto para os municípios entre 20 mil e 50 mil habitantes, os que perdiam população chegavam a 11,9% do total da faixa.

Para os municípios com população entre 50 mil e 100 mil habitantes, a incidência do fenômeno do esvaziamento demográfico era bastante fraca: 3,2% dos casos, enquanto que em nenhum município com população superior a 100 mil habitantes em 1970 havia casos de perda de população.

Na Região Sudeste, que participa com quase duas terças partes do número de municípios que perderam população, dois Estados — o de Minas Gerais, com 307 municípios e o de São Paulo, com 237 municípios — são praticamente os responsáveis por todos os municípios que perderam população: 92,9% do total de casos. Os restantes 7,1% ficam por conta dos Estados do Espírito Santo, com 3,8% e do Rio de Janeiro, com 3,3%.

TABELA 1

DISTRIBUIÇÃO DOS MUNICÍPIOS QUE PERDERAM POPULAÇÃO ENTRE 1960 E 1970, SEGUNDO AS GRANDES REGIÕES
BRASIL — 1970

FAIXAS DE TAMANHO DA POPULAÇÃO (Por Mil Habitantes)	BRASIL	GRANDES REGIÕES				
		Norte	Nordeste	Sudeste	Sul	Centro-Oeste
TOTAL	907	15	193	583	93	23
Até 2	20	—	6	10	1	3
2 ⊢ 5	218	2	23	166	17	10
5 ⊢ 10	328	8	59	219	36	6
10 ⊢ 20	239	5	72	127	33	2
20 ⊢ 50	97	—	32	58	5	2
50 ⊢ 100	5	—	1	3	1	—

FONTE: IBGE. Sinopse Preliminar do Censo Demográfico VII e VIII Recenseamentos Gerais do Brasil — 1960 e 1970

Na Região Nordeste, a segunda no número de municípios que perderam população entre 1960 e 1970, encontra no Estado da Bahia, com 68 casos — 35,2% do total regional — a maior participação individual. Segue-se-lhe em importância o Estado da Paraíba, com 38 casos — 19,7% do total regional Estes dois Estados detêm, pois, mais da metade dos municípios nordestinos que perderam população.

Em terceiro plano aparecem os Estados do Maranhão (23 casos) e de Pernambuco (22 municípios), vindo logo atrás o Estado de Alagoas (15 unidades) e o de Sergipe com 13 municípios. Representando menos de 5% do número de municípios, individualmente, aparecem o Rio Grande do Norte (8), o Ceará (3), o Piauí (2) e o Território Federal de Fernando de Noronha com seu único município

Quanto à Região Sul, a terceira em número de municípios que perderam população entre 1960 e 1970, mais da metade das ocorrências se encontra no Estado do Paraná (59 casos), vindo a seguir o Rio Grande do Sul (24) e Santa Catarina com 10 municípios.

Na Região Centro-Oeste, com 23 casos, duas terças partes dos municípios pertencem ao Estado de Goiás, sendo que a outra terça parte é representada pelos municípios mato-grossenses.

Finalmente, na Região Norte, os Estados do Amazonas e do Pará — únicas Unidades da Federação a apresentar municípios com perda de população — dividem os 15 municípios da região, ficando 60% com o Estado do Amazonas e 40% com o do Pará.

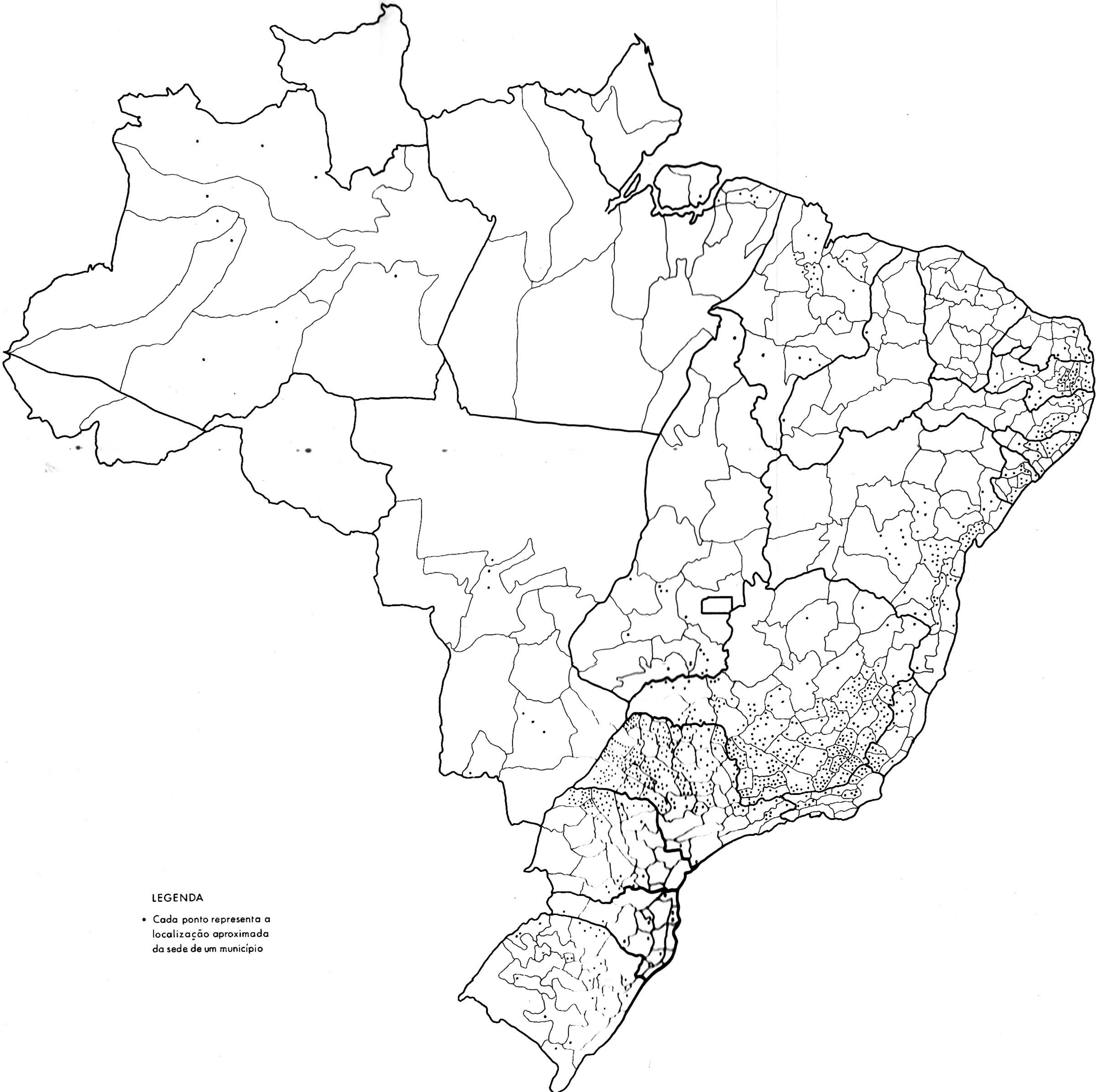
3. ALGUMAS RELAÇÕES

Procurou-se de início relacionar as causas da perda de população a situações supostamente lógicas, tais como· à instabilidade dos limites municipais ou à criação de novos municípios; à fraca densidade demográfica, ou ainda à já pouca expressão do contingente demográfico como estímulo à migração.

Entretanto, de todos os municípios que perderam população no Brasil, 28,1% foram criados entre 1960 e 1970; 16,5% sofreram desmembramento de área neste período, mas mais da metade deles, 55,4% dos municípios, manteve a mesma área nesta década.

A nível regional, as únicas distorções ocorreram nas Grandes Regiões Nordeste e Sul, que apresentaram um maior número de casos dentre os municípios criados no período, muito embora esta margem não vá além dos 43% do total regional no Nordeste e de 37,6% na Grande Região Sul.

MUNICÍPIOS QUE PERDERAM POPULAÇÃO ENTRE 1960 e 1970

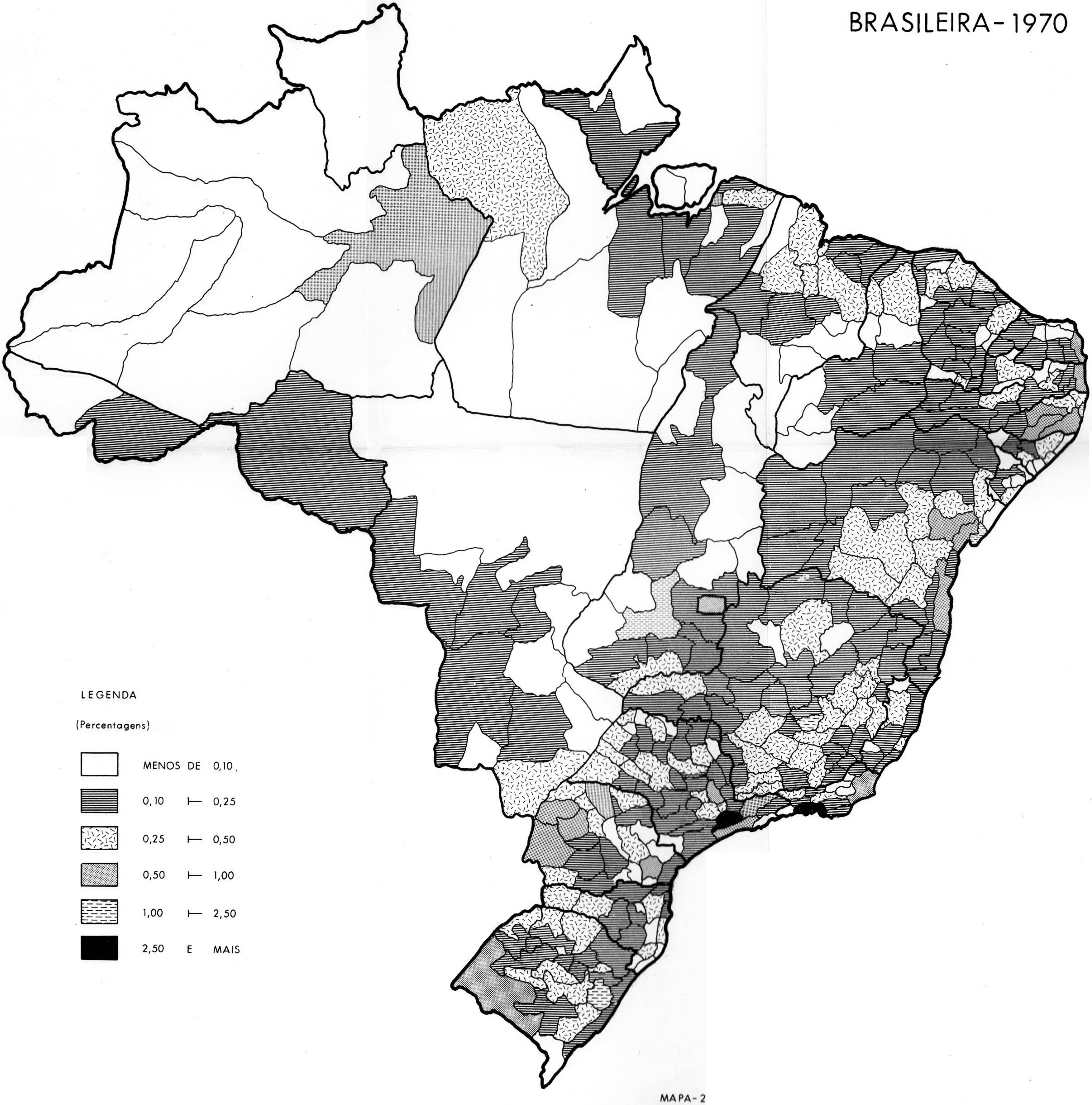


LEGENDA

- Cada ponto representa a localização aproximada da sede de um município

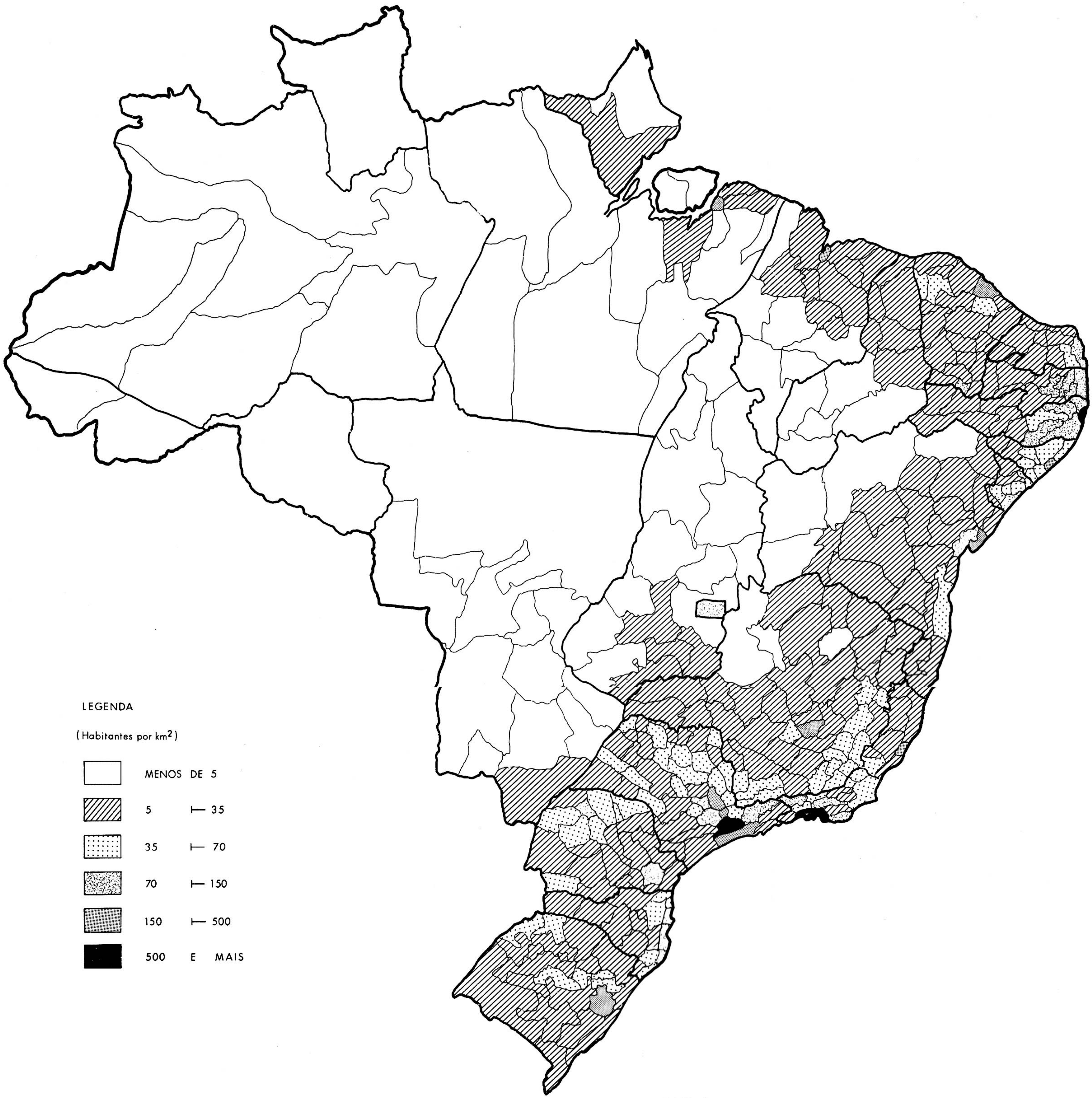
MAPA - 1

PARTICIPAÇÃO DA POPULAÇÃO TOTAL MICRORREGIONAL SOBRE A POPULAÇÃO BRASILEIRA - 1970



MAPA-2

DENSIDADE DEMOGRÁFICA MICRORREGIONAL - 1970



MAPA - 3

TABELA 2

DISTRIBUIÇÃO DOS MUNICÍPIOS QUE PERDERAM POPULAÇÃO ENTRE 1960 E 1970, SEGUNDO A SUA SITUAÇÃO TERRITORIAL

BRASIL E GRANDES REGIÕES	TOTAL	SITUAÇÃO TERRITORIAL		
		Normal	Criados no Período	Sofreram Desmembramento de Área
BRASIL	907	502	255	150
Norte	15	9	3	3
Nordeste	193	70	83	40
Sudeste	583	378	132	73
Sul	93	29	35	29
Centro-Oeste	23	16	2	5

FONTE: IBGE Sinopse Preliminar do Censo Demográfico VII e VIII Recenseamentos Gerais do Brasil — 1960 e 1970

Com relação à distribuição espacial dos municípios que apresentaram perda de população (Mapa 1), ao contrário do que se poderia talvez imaginar, estes se encontram quase que integralmente nas áreas onde é maior a participação do efetivo populacional (confrontar com o Mapa 2) e onde ocorrem, por conseguinte, os índices mais elevados de densidade demográfica (confrontar com o Mapa 3).

Isto importa em dizer que inexiste uma causa diagnosticável de maneira simplista. As raízes do problema da perda de população são mais profundas e complexas. Necessário se faz pesquisar os motivos que levam a quase uma quarta parte dos municípios acusarem êxodo populacional superior ao índice de nascimento nestes anos entre 1960 e 1970.

4. MOTIVOS, IMPLICAÇÕES E MEDIDAS PARA CONTER A MIGRAÇÃO

Esta situação levou-nos a pesquisar junto a uma pequena amostra de municípios que perderam população entre 1960 e 1970, indagando do Prefeito municipal quais seriam, na sua opinião, as causas desta perda de população [4]. Foi-lhes enviado um questionário para que respondessem basicamente a três perguntas:

1) Por que o município estaria perdendo população?

2) Quais as implicações que este fenômeno (perda de população) poderia ter no município?

3) Que medidas poderiam ser tomadas pelo Governo Federal para eliminar ou minimizar o problema?

[4] BREMAEKER, François E J de Os municípios e o êxodo populacional *Revista de Administração Municipal,* Rio de Janeiro, 23 (139) : 30-39, nov /dez. 1976

4.1 A opinião dos Prefeitos

A confiança depositada nas respostas parte da premissa de que ninguém melhor do que o chefe do executivo local deve conhecer os problemas que afligem sua comunidade.

Ratificando este ponto de vista, as respostas fornecidas pelos Prefeitos municipais eleitos em 1972 — quando estavam prestes a assumir a chefia do Governo municipal — a um questionário onde tinham a possibilidade de escolher três dentre quinze alternativas para identificar os problemas dos municípios, acusaram o seguinte resultado[5]. (Quadro 1):

QUADRO 1

PROBLEMAS DOS MUNICÍPIOS	INDICAÇÕES (%)
Infra-estrutura urbana deficiente (água, esgoto, energia, transporte, etc.)	57,0
Desemprego	34,3
Isolamento do município: dificuldades de acesso e de comunicações	32,1
Perda de população devido ao êxodo para outras cidades	26,5
Falta de escola secundária no município	21,4

FONTE — Centro de Pesquisas Urbanas do IBAM — 1975

OBS. Como cada respondente tinha o direito de marcar três alternativas, a soma dos percentuais ultrapassa a 100%

Como podemos observar, 26,5% dos Prefeitos afirmavam que seu município perdia população, quando a cifra constatada entre 1960 e 1970 não foi muito longe desta· 23,0%. As demais respostas também aparecerão como causas deste fenômeno.

4.2 Os motivos da perda de população

Segundo os Prefeitos pesquisados, os prováveis motivos que levaram à migração da população dos seus municípios seriam os problemas ligados ao setor primário da economia (33,3% dos casos); à deficiência do mercado de trabalho local (31,0%); à ausência de melhores oportunidades de educação (21,4%); à falta de indústrias (9,5%); e à inexistência de infra-estrutura urbana (4,8%).

Dentre os problemas ligados ao setor primário da economia destacam-se:

a) aqueles diretamente ligados à mão-de-obra: os colonos residentes nas fazendas têm sido substituídos seja pela força animal seja

[5] INSTITUTO BRASILEIRO DE ADMINISTRAÇÃO MUNICIPAL, Rio de Janeiro Centro de Pesquisas Urbanas *O prefeito brasileiro: características e percepções* Rio de Janeiro, 1975 145 p

pela máquina ou ainda pela mão-de-obra dos trabalhadores avulsos — os bóias-frias — para eliminar o vínculo empregatício e, conseqüentemente, reduzir as despesas;

b) os relacionados com a conjuntura agrícola brasileira, quais sejam, o baixo rendimento; a ocupação de grandes áreas mantidas sob regime de subsistência; a proliferação das pequenas propriedades; além da necessidade de obtenção de melhores preços mínimos para os produtos agrícolas e as enormes dificuldades encontradas pelo pequeno proprietário para obtenção de financiamento bancário destinado à aquisição de máquinas e equipamentos,

c) aqueles relacionados com a opção do proprietário da terra, que freqüentemente reduz a área cultivada ou simplesmente promove a completa erradicação das culturas para substituí-las pela criação de gado, a qual tem sido mais rentável e necessita de menor contingente de mão-de-obra para cuidar da mesma área; e

d) os problemas ligados a fatores incontroláveis ou físicos, quais sejam as geadas, secas ou enchentes e, por vezes, à topografia acidentada, que impede a modernização da agricultura, levando-a à decadência.

Pouco menos da terça parte dos motivos apontados como causadores da migração dizia respeito às deficiências do mercado de trabalho local, traduzidas quase que exclusivamente pela falta de oferta de empregos, motivada pela ausência de indústrias no município.

Paralelamente encontram-se referências ao baixo nível salarial e a sua acentuada diferença com os salários regionais. Houve mesmo o caso de um município em que a mão-de-obra treinada na indústria local, quando atinge o estado de qualificação, migra à procura de melhores salários na cidade grande.

Quanto aos problemas pertinentes à educação — que também assume papel de destaque — a ausência de estabelecimentos de ensino de segundo grau ou de ensino profissionalizante no município tem levado grande número de jovens à procura deste nível de ensino em cidades próximas. Ocorreu também, embora com intensidade bastante menor, a indicação de falta de ensino superior na região, e, por vezes, a afirmativa de que o ensino rural bem ministrado tem provocado no homem do campo a abertura de novos horizontes, que motivam a sua saída do meio em que vive.

No que diz respeito aos problemas ligados à falta de indústrias e à inexistência de infra-estrutura urbana, eles estão bastante interligados, pois é reclamado o pequeno número de estabelecimentos industriais, e é acusada a ausência de infra-estrutura que possibilite a instalação de indústrias de porte no município

4.3 As implicações da perda de população

Questionados sobre as implicações que o fenômeno poderia ter em seu município, os Prefeitos referiram-se a problemas econômico-sociais (32,2% dos casos); citaram a redução dos recursos financeiros (25,8%); implicações no setor agrícola e no de comércio e serviços, cada qual com 19,4% dos casos; e, por fim, problemas pertinentes à educação.

Dentre as implicações advindas de razões econômico-sociais, destaca-se a preocupação dos Prefeitos com o retrocesso no progresso do município, que leva ao seu gradativo empobrecimento. A partida dos jovens, logo que completam 18 anos, deixa no município apenas as crianças e os velhos, gerando falta de mão-de-obra, ainda que pouco qualificada, o que diminui as possibilidades de recuperação do progresso do município.

Tem ocorrido também com bastante freqüência, mesmo em municípios pequenos, o processo de inchação da periferia urbana, que passa a abrigar, por vezes em condições subumanas, os chamados bóias-frias; visto que estes não permanecem nas fazendas para morar nem durante o período em que estão empregados.

Quanto aos problemas de ordem financeira que atingem mais diretamente o município, houve unanimidade de opiniões em torno da redução das rendas municipais, o que tem gerado sérios transtornos para a administração local, impossibilitada assim de dar maior apoio à coletividade.

Ocorrem mesmo casos de municípios que, pelo fato de se situarem próximos aos limites inferiores das faixas de tamanho de população (para efeito dos coeficientes do FPM — Fundo de Participação Municipal), com a perda de população viram-se privados de até a metade dos recursos de que dispunham em exercícios anteriores.

Os reflexos da migração no campo são sentidos através da visível redução da produção agrícola, ocasionada pela falta de mão-de-obra para a lavoura e mesmo para serviços mais especializados junto ao setor primário.

Já no setor comercial e de serviços, as implicações se fazem sentir por meio da paralisação parcial das atividades ou da baixa do seu rendimento, o que indiretamente também leva à redução da receita municipal. Outro fator de atração tem sido a intensificação da dependência do município em relação às cidades maiores da região.

As implicações no setor educacional da perda de população correspondem para o município à manutenção de baixos níveis de escolaridade da população remanescente, isto porque migram justamente os que têm sua condição cultural melhorada.

A migração populacional assume proporções tão grandes que por vezes chega a época da colheita e não são encontrados trabalhadores em número suficiente para fazer frente ao serviço.

4.4 As medidas corretivas sugeridas ao Governo

Em resposta ao questionário, foi bastante variada a gama de opções apresentadas pelos Prefeitos municipais, como medidas que deveriam ser adotadas pelo Governo Federal com vistas a corrigir ou minimizar os problemas oriundos da perda de população.

Nada menos que 36,8% das opções apresentadas referem-se à necessidade de o Governo Federal incentivar ou facilitar a criação de indústrias nos municípios. A criação de indústrias produziria maior oferta de empregos, que seria capaz de beneficiar ou transformar a matéria-prima regional.

Acreditam os Prefeitos que deve ser estimulada a criação de vários pólos industriais pelo interior do país — por mais rudimentares que possam ser — nascendo das pequenas indústrias locais que sentem enorme dificuldade em obter financiamentos, dado sua reduzida capacidade financeira, oriunda do limitado capital genuinamente local [6]

Em segundo lugar (com 26,3% das opções), sugeriam os Prefeitos que o Governo Federal ou Estadual implantem no município estabelecimentos de ensino de segundo grau, de ensino técnico ou profissionalizante — principalmente nas áreas agropecuária e veterinária — além da implantação de estabelecimentos de ensino superior na região.

Nestes dois grupos de sugestões concentram-se praticamente duas terças partes das medidas que poderiam partir das esferas superiores de governo em favor dos municípios. As demais sugestões dizem respeito à necessidade da criação de condições ao homem do campo para o franco desenvolvimento de suas potencialidades — procurando incentivar o minifundiário e oferecendo a este financiamentos a juros mais baixos e a prazos mais longos — que só poderiam ser postos em prática com a criação de mais agências bancárias governamentais.

Outro ponto de destaque foi a sugestão no sentido de que o Governo Federal crie mais centros de estudos e pesquisas com a finalidade de melhorar as espécies agrícolas.

Na área financeira, reclamam os Prefeitos maior oferecimento de recursos aos pequenos municípios, além da elevação da quota-parte do FPM. Pedem igualmente que sejam abertas estradas para possibilitar o escoamento da produção agrícola.

---

6 A respeito do assunto ver BREMAEKER, François E J de A gênese do capital industrial em uma zona de frente pioneira: o caso do sudoeste paranaense *Revista Paranaense de Desenvolvimento,* Curitiba, 54: 29-40, maio/jun 1976

Em inúmeros casos o IBGE é acusado pelos Prefeitos, que reclamam da exatidão das estatísticas demográficas. Alegam que, por desconhecer as variações dos movimentos populacionais, o IBGE indiretamente prejudica alguns municípios, que já teriam se recuperado de épocas mais difíceis e que experimentam franco progresso e crescimento demográfico, enquanto que oficialmente são declarados como municípios que perdem população.

5. CONCLUSÕES

Como se pode observar, são bastante variados os motivos que envolvem a migração populacional, como também o são suas implicações na vida municipal. Variam muito também as opiniões dos Prefeitos, como eles vêm o modo pelo qual o Governo — seja o Federal seja o Estadual — deve agir para procurar eliminar ou minimizar o fenômeno que assola quase a quarta parte dos municípios brasileiros.

Em um ponto, entretanto, técnicos e políticos concordam: deve ser corrigida a visão que se tem do interior brasileiro, a fim de se poder evitar o êxodo quase total em direção às cidades médias e grandes.

No momento em que o país mergulha rápida e profundamente em direção à constituição e sedimentação de uma verdadeira sociedade urbana, sua população vai cada vez mais se concentrando em uns poucos aglomerados urbanos.

Faz-se necessário dinamizar o maior número possível de centros urbanos, localizados principalmente no interior do país, fornecendo-lhes meios de se tornarem atrativos para a população local e imediatamente vizinha. A difusão destes centros de equilíbrio é uma forma direta de atacar o problema do êxodo, contribuindo para o adensamento do povoamento do interior.

A política a ser adotada e a maneira de atingir estes objetivos deve ser objeto de urgentes estudos, pois o processo de concentração populacional em uns poucos aglomerados urbanos cresce a cada dia que passa, já ocorrendo no Brasil desde 1940, sem que dele nos apercebêssemos.

Atualmente representa fenômeno irreversível. Todos aqueles que já se instalaram em centros urbanos de médio e grande porte jamais retornarão para o interior. Deve-se, pois, pesquisar no sentido de minimizar, no futuro, os efeitos do êxodo demográfico em direção a estes centros urbanos.

A persistirem as tendências atuais do crescimento demográfico, teremos em 1980, 70% da população urbana e quase a metade da população total brasileira concentrada em pouco mais de 500 aglomerados urbanos com população superior a vinte mil habitantes.

ANEXO 1

DISTRIBUIÇÃO DOS MUNICÍPIOS QUE PERDERAM POPULAÇÃO ENTRE 1960 e 1970, SEGUNDO AS FAIXAS DE TAMANHO DE POPULAÇÃO PELAS UNIDADES DA FEDERAÇÃO

BRASIL GRANDES REGIÕES E UNIDADES DA FEDERAÇÃO	TOTAL	FAIXAS DE TAMANHO DE POPULAÇÃO (Por Mil Habitantes)					
		Até 2	2 ⊢ 5	5 ⊢ 10	10 ⊢ 20	20 ⊢ 50	50 ⊢ 100
BRASIL	907	20	218	328	239	97	5
Norte	15	—	2	8	5	—	—
Nordeste	193	6	23	59	72	32	1
Sudeste	583	10	166	219	127	58	3
Sul	93	1	17	36	33	5	1
Centro-Oeste	23	3	10	6	2	2	—
Norte							
Amazonas	9	—	2	4	3	—	—
Pará	6	—	—	4	2	—	—
Nordeste							
Maranhão	23	—	2	4	9	7	1
Piauí	2	—	1	—	1	—	—
Ceará	3	—	2	1	—	—	—
Rio Grande do Norte	8	2	1	3	2	—	—
Paraíba	38	—	10	8	14	6	—
Pernambuco	22	—	—	7	9	6	—
Alagoas	15	1	1	6	5	2	—
Fernando de Noronha	1	1	—	—	—	—	—
ergipe	13	2	3	7	1	—	—
Bahia	68	—	3	23	31	11	—
udeste							
Minas Gerais	307	6	94	115	66	26	—
Espírito Santo	22	—	2	5	5	9	1
Rio de Janeiro	19	—	—	3	10	5	1
ão Paulo	235	4	70	96	46	18	1
ul							
Paraná	59	1	12	20	23	3	—
anta Catarina	10	—	2	7	1	—	—
Rio Grande do Sul	24	—	3	9	9	2	1
Centro-Oeste							
Mato Grosso	8	—	5	1	2	—	—
Goiás	15	3	5	5	—	2	—

FONTE — IBGE Sinopse Preliminar do Censo Demográfico VII e VIII Recenseamentos Gerais do Brasil — 1960 e 1970

ANEXO 2

RELAÇÃO DOS MUNICÍPIOS QUE PERDERAM POPULAÇÃO ENTRE 1960 E 1970, SEGUNDO AS UNIDADES DA FEDERAÇÃO

AMAZONAS

Barcelos, Borba, Canutama, Fonte Boa, Ilha Grande, Japurá, Juruá, Pauini e São Gabriel da Cachoeira.

PARÁ

Augusto Corrêa, Bonito, Nova Timboteua, Peixe-Boi, Ponta de Pedras e São Francisco do Pará.

MARANHÃO

Afonso Cunha, Aldeias Altas, Anajatuba, Bacabal, Benedito Leite, Governador Eugênio Barros, Igarapé Grande, Ipixuna, Itapecuru-Mirim, Lago do Junco, Lago Verde, Nina Rodrigues, Palmeirândia, Pindaré-Mirim, Pio XII, Presidente Vargas, Riachão, Sambaíba, Santa Inês, Santo Antônio dos Lopes, São Bento, São Félix de Balsas e Vitorino Freire.

PIAUÍ

Palmeirais e Santa Filomena.

CEARÁ

General Sampaio, Guaramiranga e Itaiçaba.

RIO GRANDE DO NORTE

Coronel Ezequiel, Lagoa de Velhos, Nísia Floresta, Passagem, Pedro Velho, Pureza, Santo Antônio e Vila Flor.

PARAÍBA

Alagoa Grande, Alagoa Nova, Alagoínha, Alhandra, Araçari, Areia, Caiçara, Conde, Congo, Cruz do Espírito Santo, Cuiteji, Emas, Gurinhém, Ingá, Maçaranduba, Mataraca, Mogeiro, Montadas, Mulungu, Natuba, Pilar, Pilões, Pirpirituba, Pitimbu, Prata, Queimadas, Rio Tinto, Salgado de São Félix, Santana de Mangueira, São João do Tigre, São José de Espinharas, São Mamede, Sapé, Serra Branca, Serra da Raiz, Serra Grande, Serra Redonda e Teixeira.

PERNAMBUCO

Angelim, Barra de Guabiraba, Camocim de São Félix, Camutanga, Canhotinho, Correntes, Cumaru, Gameleira, Jurema, Lagoa do Ouro, Lagoa dos Patos, Machados, Orobó, Palmeirina, Passira, Pombos, Primavera, Sairé, Salgadinho, São Benedito do Sul, São Joaquim do Monte e Vicência.

ALAGOAS

Anadia, Capela, Feliz Deserto, Japaratinga, Maragogi, Minador do Negrão, Murici, Olivença, Passo de Camaragibe, Pindoba, Porto de Pedras, Quebrangulo, Santana do Mundaú, Tanque d'Arca e Viçosa.

FERNANDO DE NORONHA

Fernando de Noronha.

SERGIPE

Brejo Grande, Cedro de São João, Cumbé, Divina Pastora, Indiaroba, Itaporanga d'Ajuda, Japoatã, Malhada dos Bois, Pedra Mole, Riachuelo, Santa Luzia do Itanhi, Santo Amaro das Brotas e São Francisco.

BAHIA

Abaíra, Aiquara, Almadina, Amargosa, Amélia Rodrigues, Anagé, Andaraí, Antônio Cardoso, Aporá, Aramari, Aurelino Leal, Barra da Estiva, Barra do Rocha, Belmonte, Boninal, Brejões, Cachoeira, Cardeal da Silva, Conceição do Almeida, Cravolândia, Dário Meira, Dom Macedo Costa, Elísio Medrado, Floresta Azul, Gongogi, Ibicaraí, Ibicoara, Ibicuí, Ibiquera, Ibirapitanga, Iguaí, Itagi, Itagibá, Itamari, Itapé, Itapebi, Itapitanga, Itaquara, Itarantim, Ituaçu, Jaguaripe, Jiquiriçá, Jitaúna, Lafaiete Coutinho, Laje, Lajedão, Lamarão, Lençóis, Macarani, Mucugê, Mundo Novo, Muniz Ferreira, Nova Canaã, Piritiba, Planaltino, Santa Cruz da Vitória, Santa Inez, Santo Amaro, São Félix, São Felipe, São Miguel das Matas, Sapeaçu, Sátiro Dias, Tapiramutá, Teodoro Sampaio, Terra Nova, Ubaíra e Vera Cruz.

MINAS GERAIS

Abre Campo, Acaiaca, Açucena, Água Boa, Água Comprida, Aguanil, Aimorés, Airuoca, Alagoa, Albertina, Alpinópolis, Amparo da Serra, André Fernandes, Antônio Carlos, Antônio Prado de Minas, Aracitaba, Arapuá, Arceburgo, Areado, Ataléia, Baldim, Bandeira, Barão do Monte Alto, Barra Longa, Barreiro Grande, Belmiro Braga, Belo Vale, Berilo, Bias Fortes, Boa Esperança, Bocaina de Minas, Bom Jardim de Minas, Bom Jesus da Penha, Bom Jesus do Galho, Bom Sucesso, Botelhos, Braúnas, Brazópolis, Cabo Verde, Cachoeira de Minas, Cachoeira Dourada, Caiana, Cajuri, Caldas, Camacho, Campanário, Campo Florido, Campos Altos, Campos Gerais, Canaã, Canápolis, Cana Verde, Candeias, Caparaó, Capela Nova, Capetinga, Capitólio, Carangola, Carbonita, Carmésia, Carmo da Cachoeira, Carmo da Mata, Carmo de Minas, Carmo do Rio Claro, Carmópolis de Minas, Carvalhos, Cascalho Rico, Cassiterita, Cedro do Abaeté, Central de Minas, Chalé, Chiador, Claraval, Coimbra Conceição da Aparecida, Conceição da Pedra, Conceição das Alagoas, Conceição de Ipanema, Conceição do Mato Dentro, Conquista, Conselheiro Pena, Consolação, Coqueiral, Cordislândia, Coroaci, Coronal Pacheco, Córrego Danta, Córrego do Bom Jesus, Córrego Novo, Cristais, Cristina, Crucilândia, Delfinópolis, Descoberto, Diogo de Vasconcelos, Divinésia, Divino, Divino das Laranjeiras, Divinolândia de Minas, Divisa Nova, Dom Joaquim, Dom Viçoso, Dores de Guanhães, Doresópolis, Douradoquara, Elói Mendes, Engenheiro Caldas, Ervália, Estrela Dalva, Estrela do Indaiá, Eugenópolis, Fama, Faria Lemos, Felixlândia, Fernandes Tourinho, Ferros, Frei Gaspar, Frei Inocêncio, Galiléia, Gonçalves, Gonzaga, Grupiara, Guapé, Guaraciaba, Guaranésia, Guarará, Guidoval, Guiricema, Heliodora, Iapu, Ibiraci, Ibitiúra de Minas, Ibituruna, Iguatama, Ilicínea, Inconfidentes, Indianópolis, Ingaí, Ipanema, Ipiaçu, Iraí de Minas, Itabirinha de Mantena, Itambé do Mato Dentro, Itanhomi, Itaverava, Jaboticatubas, Jacuí, Jacutinga, Jaguaraçu, Jaceaba, Jequeri, Jequitibá, Jesuânia, Juruaia, Ladainha, Lajinha, Leandro Ferreira, Leopoldina, Liberdade, Luz, Malacacheta, Manhumirim, Mantena, Mar de Espanha, Marliéria, Materlândia, Matipó, Matutina, Medeiros, Mercês, Mirabela, Miradouro, Miraí, Monjolos, Monsenhor Paulo, Monte Alegre de Minas, Monte Belo, Monte Santo de Minas, Monte Sião, Morada Nova de Minas, Morro do Pilar, Mutum, Muzambinho, Nacip Raydan, Natércia, Nepomuceno, Nova Ponte, Nova Resende, Oliveira Fortes, Onça de Pitangui, Ouro Branco, Ouro Fino, Paiva, Palma, Paraguaçu, Passabém, Patrocínio do Muriaé, Paula Cândido, Paulistas, Peçanha, Pedra do Anta, Pedra do Indaiá, Pedra Dourada, Pedralva, Pedrinópolis, Perdizes, Pescador, Piau, Piedade do Rio Grande, Piedade dos Gerais, Pimenta, Pirajuba, Piranga, Piranguinho, Poço Fundo, Pocrane, Porto Firme, Poté, Pratinha, Presidente Bernardes, Presidente Soares, Quartel Geral, Raul Soares, Resplendor, Ribeirão Vermelho, Rio Casca, Rio Doce, Rio Espera, Rio Novo, Rio Paranaíba, Rio Pardo de Minas, Rio Preto, Ritápolis, Rochedo de Minas, Rodeiro, Santa Bárbara do Tugúrio, Santa Cruz do Escalvado, Santa Efigênia de Minas, Santa Juliana, Santa Margarida, Santa Maria de Itabira, Santa Maria do Suaçuí, Santana da Vargem, Santana de Cataguases, Santana de Pirapama, Santana do Deserto, Santana do Garambéu, Santana do Jacaré, Santana do Manhuaçu, Santa Rita de Jacutinga, Santa Rita do Ibitipoca, Santa Rita do Itueto, Santa Rosa da Serra, Santo Antônio do Grama, Santo Antônio do Monte, Santo Antônio do Rio Abaixo, São

Bento Abade, São Domingos do Prata, São Francisco de Oliveira, São Francisco do Glória, São Geraldo, São Geraldo da Piedade, São Gotardo, São João Batista do Glória, São João da Mata, São José da Safira, São José da Varginha, São José do Divino, São José do Goiabal, São Miguel do Anta, São Pedro da União, São Pedro dos Ferros, São Pedro do Suaçuí, São Roque de Minas, São Sebastião da Bela Vista, São Sebastião do Maranhão, São Sebastião do Rio Preto, São Tomás de Aquino, Sardoá, Senador Côrtes, Senhora do Porto, Sericita, Serra da Saudade, Serra dos Aimorés, Serra do Salitre, Silveirânia, Simonésia, Sobrália, Soledade de Minas, Tabuleiro, Tapiraí, Taquaraçu de Minas, Tarumirim, Teixeiras, Tiros, Tombos, Três Pontas, Tumiritinga, Tupaciguara, Turvolândia, Vargem Bonita, Veríssimo, Vieiras, Vila Matias, Virginópolis, Virgolândia e Volta Grande.

ESPÍRITO SANTO

Alegre, Apiacá, Atílio Vivacqua, Baixo Guandu, Barra de São Francisco, Castelo, Divino de São Lourenço, Dores do Rio Preto, Ecoporanga, Guaçuí, Iconha, Itaguaçu, Iúna, Jerônimo Monteiro, Mimoso do Sul, Mucurici, Muniz Freire, Muqui, Nova Venécia, Pancas, São Gabriel da Palha e São José do Calçado.

RIO DE JANEIRO

Bom Jardim, Bom Jesus do Itabapoana, Cambuci, Duas Barras, Engenheiro Paulo de Frontin, Itaperuna, Laje do Muriaé, Mendes, Miguel Pereira, Natividade, Porciúncula, Rio Claro, Rio das Flores, Santa Maria Madalena, Santo Antônio de Pádua, São Fidélis, São Sebastião do Alto, Sapucaia e Trajano de Morais.

SÃO PAULO

Adamantina, Águas da Prata, Alfredo Marcondes, Altair, Alto Alegre, Álvares Florence, Álvares Machado, Álvaro de Carvalho, Alvinlândia, Analândia, Anhumas, Arandu, Arealva, Ariranha, Avaí, Avanhandava, Bady Brassit, Balbinos, Bálsamo, Bariri, Bento de Abreu, Bernardino de Campos, Bilac, Boa Esperança do Sul, Bocaina, Bofete, Borá, Boracélia, Borborema, Braúna, Brodósqui, Brotas, Cabrália Paulista, Caconde, Cafelândia, Caiabu, Cajobi, Cananéia, Cássia dos Coqueiros, Catiguá, Cedral, Cerqueira César, Clementina, Colina, Colômbia, Coroados, Corumbataí, Cosmorama, Cristais Paulista, Descalvado, Dois Córregos, Duartina, Dumont, Echaporã, Estrela d'Oeste, Estrela do Norte, Fartura, Fernando Prestes, Flora Rica, Flórida Paulista, Gabriel Monteiro, Gália, Garça, Getulina, Glicério, Guaiçara, Guaimbê, Guapiaçu, Guaraçaí, Guaraci, Guarani d'Oeste, Guarantã, Guararapes, Herculândia, Iacanga, Iacri, Ibirá, Ibirarema, Iepê, Igarapava, Indiana, Inúbia Paulista, Ipeúna, Iporanga, Ipuã, Irapuru, Itajobi, Itaju, Itápolis, Itapuí, Itirapina, Itirapuã, Jacorandi, Jaci, Jambeiro, Jeriquara, Joanópolis, João Ramalho, Júlio Mesquita, Junqueirópolis, Lavínia, Lavrinhas, Lins, Lucélia, Lucianópolis, Luís Antônio, Luisiânia, Lutécia, Macatuba, Manduri, Mariápolis, Martinópolis, Meridiano, Mineiros do Tietê, Mirandópolis, Mirante do Paranapanema, Mirassolândia, Mombuca, Monte Alegre do Sul, Monte Castelo, Monteiro Lobato, Morro Agudo, Muritinga do Sul, Narandiba, Natividade da Serra, Neves Paulista, Nhandeara, Nova Aliança, Nova Europa, Nova Granada, Nova Guataporanga, Nova Independência, Ocauçu, Óleo, Onda Verde, Oriente, Orindiúva, Oscar Bressane, Osvaldo Cruz, Ouro Verde, Pacaembu, Palestina, Palmeira d'Oeste, Paraguaçu Paulista, Paraibuna, Paraíso, Paranapuã, Parapuã, Patrocínio Paulista, Paulicéia, Paulo de Faria, Pederneiras, Pedra Branca, Pedranópolis, Pedregulho, Pereiras, Piacatu, Pindorama, Pinhalzinho, Piquerobi, Pirajuí, Pirapozinho, Piratininga, Poloni, Pompéia, Pongaí, Populina, Porangaba, Potirendaba, Presidente Alves, Presidente Bernardes, Quatá, Queirós, Quintana, Redenção da Serra, Regente Feijó, Reginópolis, Restinga, Ribeirão Corrente, Rincão, Rinópolis, Rio das Pedras, Rubiácea, Rubinéia, Sabino, Sagres, Sales Oliveira, Salmourão, Salto Grande, Sandovalina, Santa Albertina, Santa Bárbara do Rio Pardo, Santa Clara d'Oeste, Santa Cruz do Rio Pardo, Santa Maria da Serra, Santa Mercedes, Santana da Ponte Pensa, Santa Rita d'Oeste, Santo Antônio do Jardim, Santo Expedito, Santópolis do Aguapeí, São Bento do Sapucaí, São João de Pau d'Alho, São José da Bela Vista, São José do Barreiro, São Manuel, São Pedro do Turvo, São Simão, Sarutaiá, Severínia, Tabapuã, Tabatinga, Taiúva, Tanabi, Tapiratiba, Tarabaí, Tejupá, Terra Roxa, Tietê, Timburi, Torrinha, Três Fronteiras, Tupã, Tupi Paulista, Turiúba, Turmalina, Ubirajara, Uchoa, Urânia, Uru, Urupês, Valentim Gentil, Valparaíso, Vera Cruz e Vista Alegre do Alto.

PARANÁ

Abatiá, Alto Paraná, Amaporã, Antônio Olinto, Açaí, Atalaia, Bom Sucesso, Cafeara, Centenário, Colorado, Cruzeiro do Sul, Cruz Machado, Floraí, Floresta, Flórida, Guairaçá, Guaraci, Iguaraçu, Inajá, Itaguajé, Itaúna do Sul, Jacarezinho, Jaguapitã, Jardim Olinda, Jataizinho, Kaloré, Lobato, Lupionópolis, Mallet, Mirador, Mirasselva, Nossa Senhora das Graças, Nova Aliança do Ivaí, Nova Fátima, Ourizona, Paiçandu, Paraíso do Norte, Paranacity, Paranapoema, Paulo Frontin, Pinhalão, Porto Amazonas, Porto Vitória, Presidente Castelo Branco, Ribeirão Claro, Rio Azul, Sabáudia, Santa Fé, Santa Inês, Santo Inácio, São Carlos do Ivaí, São João do Caiuá, São Jorge, Sertaneja, Sertanópolis, Tamboara, Terra Rica, Uniflor e Uraí.

SANTA CATARINA

Bom Retiro, Caibi, Campo Belo do Sul, Corupá, Ilhota, Itapema, Lontras, Nova Veneza, Piratuba, São Martinho.

RIO GRANDE DO SUL

Aratiba, Arroio do Meio, Arroio dos Ratos, Barracão, Barra do Ribeiro, Cacique Doble, Campina das Missões, Cândido Godi, Criciumal, Erval, Gaurama, Guaporé, Jaguari, Lavras do Sul, Machadinho, Marcelino Ramos, Nova Bassano, Pedro Osório, Pejuçara, Rolante, Santo Antônio, São Francisco de Paula, Selbach e Victor Graeff.

MATO GROSSO

Aripuanã, Caracol, Corguinho, Jaraguari, Nobres, Nossa Senhora do Livramento, Ribas do Rio Pardo e Rosário Oeste.

GOIÁS

Abadiânia, Amorinópolis, Anhanguera, Aruanã, Barro Alto, Campo Alegre de Goiás, Ceres, Goiandira, Marzagão, Nazaré, Nova América, Palmelo, Panamá, Rubiataba e Urutaí.

A FUNÇÃO DE PROBABILIDADES NO ESPAÇO PRODUTO DE UMA SEQÜÊNCIA DE PROVAS

Prof. Hervey Guimarães Cova
da Escola Nacional de Ciências Estatísticas

SUMÁRIO

1. APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

1.1 — O primeiro passo a ser dado na solução de algum problema é, obviamente, compreender, na íntegra, em que consiste o problema.

Ora, o problema de que vamos tratar aqui apresenta sutilezas, das quais só se apercebem as pessoas que dedicam alguma atenção aos aspectos teóricos que fundamentam o Cálculo de Probabilidades. Por isso mesmo, para entendê-lo é necessário rebuscar um pouco aqueles fundamentos teóricos.

Rev bras. Estat , Rio de Janeiro, 38(150) : 177-202 abr /jun 1977

Com tal propósito analisaremos, a seguir, dois exemplos de situações em que o referido problema ocorre.

1.2 — Exemplo n.º 1 — Uma urna, U_1, contém duas bolas brancas, uma bola preta e duas bolas vermelhas; uma segunda urna, U_2, contém três bolas brancas, duas pretas e uma vermelha; finalmente, uma terceira urna, U_3, contém uma bola branca, duas pretas e três vermelhas. As bolas, excluindo as cores, são supostamente iguais quanto a quaisquer outros aspectos.

Uma experiência aleatória, $\mathcal{E}$, consiste em extrair, ao acaso, uma bola de cada urna, observando-se a cor respectiva. Deseja-se calcular a probabilidade de que exatamente duas, das três bolas extraídas, sejam brancas.

A experiência $\mathcal{E}$ pode ser imaginada como uma seqüência de três provas (independentes) $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ e $\mathcal{E}_3$; consistindo $\mathcal{E}_i$ na extração, ao acaso, de uma bola da urna n.º i ($i = 1, 2, 3$). Isto posto, a solução desse problema costuma ser encaminhada, geralmente, do seguinte modo:

Considerem-se os eventos:

$B_i = \{$sai bola branca na i-ésima extração$\}$; $i = 1, 2, 3$

$B = \{$são extraídas, exatamente, duas bolas brancas$\}$

Nessas condições, resulta:

$$B = B_1 B_2 \overline{B}_3 \cup B_1 \overline{B}_2 B_3 \cup \overline{B}_1 B_2 B_3 \tag{1}$$

onde os eventos que participam da união são mutuamente exclusivos e $\overline{B}_1$ — para todo i — é o complementar do evento B_i.

Conseqüentemente, podemos escrever:

$$P(B) = P(B_1 B_2 \overline{B}_3) + P(B_1 \overline{B}_2 B_3) + P(\overline{B}_1 B_2 B_3)$$

e, como os eventos que participam de cada interseção são *independentes,* obtemos:

$$P(B) = P(B_1) \cdot P(B_2) \cdot P(\overline{B}_3) + P(B_1) \cdot P(\overline{B}_2) \cdot P(B_3) + \\ + P(\overline{B}_1) \cdot P(B_2) \cdot P(B_3) \tag{2}$$

Resta agora calcular as probabilidades que figuram no segundo membro da relação acima, o que é feito através dos raciocínios a seguir apresentados, para os quais pedimos a maior atenção:

No cálculo de $P(B_1)$ levamos em conta *apenas* a composição da primeira urna. Posto que existem nessa urna 2 bolas brancas (n.º de casos favoráveis ao evento B_1) para um total de 5 bolas (n.º de casos possíveis), fazemos $P(B_1) = 2/5$.

No cálculo de $P(\overline{B}_2)$ consideramos *apenas* a comopisção da se-unda urna. Tendo em vista que essa composição não se modifica com resultado da primeira extração, contamos 3 bolas brancas (n.º de asos favoráveis ao evento B_2) para um total de 6 bolas (n.º de casos ossíveis), de onde tiramos $P(B_2) = 3/6$.

No cálculo de $P(\overline{B}_3)$ levamos em conta *apenas* a composição da erceira urna — inalterada pelas duas extrações anteriores — que presenta 5 bolas *não brancas* (n.º de casos favoráveis ao evento $\overline{B}_3$) um total de 6 bolas (n.º de casos possíveis), o que nos dá $P(\overline{B}_3) = 5/6$.

Raciocínios idênticos seriam feitos, ainda, para o cálculo das de-aais probabilidades — $P(B_3)$, $P(\overline{B}_1)$ e $P(\overline{B}_2)$ — que figuram no se-undo membro da relação (2), conduzindo-nos, finalmente, à probabi-dade procurada: $P(B) = 1/4$.

1.3 — À primeira vista, os raciocínios desenvolvidos na obtenção e $P(B_1)$, $P(B_2)$, $P(B_3)$, etc., estariam livres de qualquer objeção. Toda-ia, uma análise mais demorada do problema revela que os mesmos onflitam — pelo menos aparentemente — com certas noções básicas a própria teoria das probabilidades. É isto, precisamente, que preten-emos esclarecer a seguir:

Cada uma das três provas $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ e $\mathcal{E}_3$, sendo uma experiência leatória, possui um espaço amostra que, no presente caso, pode ser epresentado, de modo genérico, pelo conjunto de três resultados even-uais *não equiprováveis*,

$$S_i = \{b,\ p,\ v\}; \qquad i = 1,\ 2,\ 3\ ,$$

nde b, p e v indicam, respectivamente, a saída de bola branca, preta u vermelha.

Por outro lado, o espaço amostra S, da experiência $\mathcal{E}$, como sabe-nos, é o produto cartesiano dos espaços S_i, isto é:

$$S = S_1 \times S_2 \times S_3 = \{(x,\ y,\ z) \mid x,\ y,\ z = b,\ p,\ v\}\ ,$$

endo representado, pois, por um conjunto de 27 ternos ordenados — esultados eventuais *não equiprováveis* — onde cada componente do erno pode identificar-se com b, p ou v.

Ora, quando fizemos a decomposição do evento B, traduzida pelo egundo membro da relação (1), ficou implícito ali que B_1, B_2, $\overline{B}_3$, tc eram eventos definidos no espaço produto S. Assim, por exemplo, B_1 seria o *subconjunto de S* definido por

$$B_1 = \{(x,\ y,\ z) \mid x = b\}\ ,$$

vale dizer, constituído pelos nove ternos cuja primeira componente, x, identifica-se a b; as demais podendo identificar-se, indiferentemente, a b, p ou v.

Outrossim, ao escrevermos a relação (2), ficou subentendido que todas as probabilidades ali indicadas seriam calculadas mediante a função de probabilidades $P(.)$ associada ao espaço produto S, posto que, teoricamente, esta função é que nos permite assinalar probabilidades aos eventos definidos em S. Entretanto, quando, de fato, procedemos ao cálculo de tais probabilidades — e aqui está o ponto crucial da questão — não levamos em conta os eventos definidos no espaço produto S; como também não utilizamos nesses cálculos a pressuposta função $P(.)$ associada ao referido espaço produto. O que fizemos foi *algo inteiramente diferente*:

Ao procurarmos $P(B_1)$, calculamos, em verdade, a probabilidade do evento $C_1 = \{b\}$, definido no espaço amostra fator S_1; utilizando nesse cálculo uma outra função de probabilidade $P_1(.)$ associada a S_1.

De modo análogo, no cálculo de $P(B_2)$ utilizamos uma terceira função de probabilidade $P_2(.)$ associada ao espaço fator S_2, mediante a qual calculamos, de fato, a probabilidade do evento $C_2 = \{b\}$ definido no espaço fator S_2.

Por sua vez, para obter $P(\overline{B}_3)$, calculamos a probabilidade do evento $C_3 = \{p, v\}$ definido no espaço fator S_3, utilizando para isso uma quarta função de probabilidade, $P_3(.)$ associada ao mesmo espaço S_3.

Procedimentos idênticos aos anteriores teriam sido adotados, ainda, nos cálculos de $P(B_3)$, $P(\overline{B}_1)$ e $P(\overline{B}_2)$.

Tudo isso pode parecer um pouco confuso e nos leva a formular a seguinte pergunta: até que ponto tal modo de conduzir os cálculos, na prática, encontra apoio na teoria das probabilidades?

Por enquanto deixaremos a pergunta acima sem resposta para focalizar nossa atenção em outro exemplo de experiência aleatória que, na prática, também conduz a procedimentos de cálculo aparentemente conflitantes com a teoria.

1.4 — **Exemplo n.º 2**— Voltemos a considerar as três urnas anteriormente referidas e imaginemos agora a seguinte experiência aleatória: o observador retira uma bola, ao acaso, da primeira urna, anota a cor e a coloca na segunda urna; em seguida retira uma bola, ao acaso, desta segunda urna, anota a cor e a coloca na terceira urna; finalmente, desta última, retira uma bola, ao acaso, e anota a cor. Pede-se a probabilidade de que as três bolas, assim extraídas, sejam brancas.

Esta segunda experiência aleatória $\mathcal{E}$ ainda pode ser considerada como uma seqüência de três provas (não independentes) $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ e $\mathcal{E}_3$, cada uma consistindo na extração de uma bola da urna de mesmo número. Outrossim, o espaço amostra S, desta experiência, continua sendo o produto cartesiano dos espaços S_1, S_2 e S_3, já definidos anteriormente.

Isto posto, a solução do novo problema pode ser encaminhada do seguinte modo:

Imaginemos os eventos definidos em S:

B = {as três bolas extraídas são brancas}

B_i = {sai bola branca na i-ésima extração}

$$i = 1, 2, 3.$$

Então, podemos escrever:

$$B = B_1, B_2, B_3$$

e, em seguida, lembrando que as provas não são independentes:

$$P(B) = P(B_1) \cdot P(B_2 \mid B_1) \cdot PB_3 \mid B_1 B_2) \qquad (3)$$

Na prática calculamos a probabilidade $P(B_1)$ e as probabilidades condicionais $P(B_2|B_1)$ e $P(B_3|B_1\ B_2)$ do seguinte modo: introduzimos os eventos

$$C_1 = \{b\}, \quad C_2 = \{b\} \quad \text{e} \quad C_3 = \{b\},$$

por hipótese definidos nos espaços S_1, S_2 e S_3, respectivamente, e fazemos:

$$P(B_1) = P_1(C_1), \; P(B_2 \mid B_1) = P_2(C_2;\ b) \text{ e } P(B_3 \mid B_1 B_2) = P_3(C_3;\ b,\ b), \qquad (4)$$

onde as funções de probabilidades $P_1(.)$, $P_2(.\ ;\ b)$ e $P_3(.\ ;\ b,\ b)$ estão associadas aos espaços S_1, S_2 e S_3, respectivamente.

Ora $P_1(C_1)$ representa a probabilidade de sair bola branca da primeira urna na realização de $\mathcal{E}_1$ portanto $P_1(C_1) = 2/5$. Por sua vez, $P_2(C_2;\ b)$ representa a probabilidade de sair bola branca da segunda urna na realização de $\mathcal{E}_2$, quando se sabe que já saiu bola branca da primeira urna; assim, $P_2(C_2;\ b) = 4/7$, tendo em vista o acréscimo de uma bola branca na segunda urna. Finalmente, lembramos, $P_3(C_3;\ b,\ b)$ representa a probabilidade de sair bola branca da terceira urna na realização de $\mathcal{E}_3$, quando já se sabe que saíram bolas brancas da primeira e da segunda urnas; isto é, $P_3(C_3;\ b,\ b) = 2/7$, pelo fato de ter sido acrescentada uma bola branca na terceira urna. Conseqüentemente, em virtude de (3) e de (4), encontramos:

$$P(B) = \frac{2}{5} \times \frac{4}{7} \times \frac{2}{7} = \frac{16}{245}$$

que é a probabilidade procurada.

Vimos, mais uma vez, que as probabilidades de eventos definidos no espaço produto S foram, simplesmente, igualadas às probabilidades de outros eventos, definidos nos espaços fatores S_1, S_2 e S_3; sendo que no cálculo destas últimas utilizamos funções de probabilidades associadas aos correspondentes espaços fatores, ficando omitida, pois, a função de probabilidade $P(.)$ associada ao espaço produto S.

1.5 — Nosso próximo objetivo será esclarecer e justificar esses procedimentos de cálculo, quer se trate ou não de uma seqüência de provas independentes.

Para isso faz-se mister rever o conceito de *seqüência de provas,* bem como recapitular outros aspectos teóricos pertinentes ao assunto.

2. SEQÜÊNCIA DE PROVAS. EVENTO DEPENDENTE DE UMA ÚNICA PROVA

2.1 — Sejam $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, ..., $\mathcal{E}_n$ n experiências aleatórias, consideradas nessa ordem. Admitamos agora que uma nova experiência aleatória $\mathcal{E}$ consista na realização, sucessiva, na ordem indicada, dessas n experiências. Diremos, então, que $\mathcal{E}$ representa uma seqüência de n provas, cada experiência $\mathcal{E}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sendo denominada uma prova.

Representemos por $S_1, S_2, \ldots, S_n$ os espaços amostra das experiências $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, . , $\mathcal{E}_n$, respectivamente. Ao ser realizada a primeira prova $\mathcal{E}_1$, o seu resultado, que indicaremos por x_1, será um elemento do conjunto S_1. De modo geral, ao ser realizada a prova $\mathcal{E}_i$, o seu resultado, indicado genericamente por x_i, deverá ser um elemento do conjunto S_i, ou seja: $x_i \in S_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Concluímos, então, que, na realização da experiência $\mathcal{E}$, o seu resultado será uma n-upla, cuja i-ésima componente deverá ser um elemento qualquer — porém, um só — do espaço amostra S_i, associado à prova $\mathcal{E}$

Isto nos leva a tomar como espaço amostra S, da seqüência de provas $\mathcal{E}$, o conjunto de n-uplas, assim definido:

$$\boxed{S = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in S_i;\ i = 1, 2, \ldots, n\}} \qquad (1)$$

Obviamente, tal definição de S implica em considerá-lo como o produto cartesiano dos espaços amostra $S_1, S_2, \ldots, S_n$, tomados na mesma ordem em que devam ser realizadas as provas correspondentes. Assim:

$$\boxed{\begin{array}{c} S = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n \\ \text{(produto cartesiano)} \end{array}} \qquad (2)$$

ficando bem claro que as relações (1) e (2) são equivalentes.

Por isso mesmo chamaremos S de espaço (amostra) produto, condo denominar qualquer S_i de espaço (amostra) fator.

2.2 — Um conceito necessário ao desenvolvimento do presente balho é o de *resultado efetivo* de uma experiência aleatória que nos aqui relembrar.

Seja, pois, uma dada experiência aleatória $\mathcal{E}$, de espaço amostra S.)emos que, antes da realização de $\mathcal{E}$, qualquer um dos seus resul:os eventuais — ou seja, qualquer um dos elementos de S — tem uma oportunidade de ocorrer. Todavia, após a realização da expeıcia, apenas um de tais resultados eventuais terá, realmente, ocoro. Precisamente este resultado eventual, que de fato ocorreu — e o conhecimento por parte do observador caracteriza o término ou .lização completa da experiência $\mathcal{E}$ — recebe o nome de *resultado tivo* da experiência aleatória.

Voltando agora à nossa seqüência de provas e para maior simpliade de exposição, indicaremos por x_i^o o resultado efetivo da i-ésima ›va $\mathcal{E}$, supondo-a completamente realizada. Por conseguinte, após 'ealização da experiência $\mathcal{E}$ (ou seja, após a realização da última ›va $\mathcal{E}_n$), o seu resultado efetivo será a n-upla $(x_1^o, x_2, \ldots, x_n)$.

2.3 — Outro conceito importante de que vamos necessitar é o de *nto dependente de uma única prova.*

Dizemos que o evento A_k, definido no espaço produto S de uma [üência de provas, depende apenas da k-ésima prova $\mathcal{E}_k$, quando)corrência ou não-ocorrência de A_k depende, exclusivamente, do retado efetivo x_k dessa k-ésima prova. De sorte que, para decidir se :vento A_k ocorreu ou não ocorreu, precisamos conhecer apenas o ultado efetivo x_k; não importando, pois, o conhecimento dos resullos efetivos das demais provas.

Esse conceito pode ser formalizado mediante a seguinte definição:

Definição — O evento A_k definido no espaço amostra produto S uma seqüência de provas, depende apenas da k-ésima prova $\mathcal{E}_k$ $= 1, 2, \ldots, n)$ se — e somente se:

$$A_k = \{ (x_1, x_2, \ldots, x_k, \quad , x_n) \mid x_k \in C_k \} \qquad (3$$

de $C_k \subset S_k$ é um evento definido no espaço amostra fator S_k, cor:pondente à k-ésima prova.

Por esta definição vemos que o evento A_k é formado por todas n-uplas — do espaço S — cuja k-ésima componente é um elemento subconjunto (evento) C_k; as demais componentes podendo identiar-se a qualquer elemento do correspondente espaço fator S_i $(i \neq k)$. ıí resulta, de imediato, que o evento A_k se decompõe no produto car:iano

$$A_k = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_{k-1} \times C_k \times S_{k+1} \times \ldots \times S_n \qquad (4)$$

posto que as n-uplas $(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n)$, que formam o segund membro da relação (4), estão caracterizadas também pelas condições

$$x_k \in C_k \text{ e } x_i \in S_i, \text{ se } i \neq k$$

Convém lembrar, pois, que as relações (3) e (4) são equivalente: Além disso, devemos notar este fato, da maior importância: send $(x_1^0, \ldots, x_k^0, \ldots, x_n^0)$ o resultado efetivo da experiência $\mathcal{E}$, a seguint equivalência é verdadeira:

$$x_k^o \in C_k \Longleftrightarrow (x_1^o, \quad , x_k^o, \quad , x_n^o) \in A_k,$$

onde a primeira relação de pertinência indica a ocorrência do event C_k e, a segunda, a ocorrência do evento A_k. Em outras palavras: a ocoı rência de C_k na realização da prova $\mathcal{E}_k$ impilca a ocorrência de A na realização de $\mathcal{E}$; e vice-versa. Por isso mesmo, diremos que C_k é *evento associado* ao evento A_k.

2.2 — Para melhor esclarecer os fatos já abordados vamos exam nar alguns exemplos:

Exemplo n.º 3 — Um dado correto é lançado duas vezes seguida: Consideremos como resultado eventual dessa experiência aleatória $\mathcal{E}$ o par ordenado (x, y), onde x indica o ponto obtido no primeiro lanc do dado e y o ponto obtido no segundo lance.

Tal experiência pode ser interpretada como uma seqüência de dua provas $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$, cada uma representando um dos lances do dad Além disso, podemos tomar

$$S_i = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; \quad i = 1, 2,$$

resultando

$$S = S_1 \times S_2 = \{(x, y) \mid x, y = 1, 2, \quad , 6\}$$

posto que a condição múltipla $x, y = 1, 2, \ldots, 6$ e equivalente às dua condições: $x \in S_1$ e $y \in S_2$.

Consideremos agora os eventos definidos no espaço produto S:

$$A_1 = \{(x, y) \mid x \text{ é par}\} \quad \text{e} \quad A_2 = \{(x, y) \mid y > 4\}$$

É fácil perceber que o evento A_1 depende apenas da primeira prov e que o evento A_2 depende apenas da segunda prova. De fato, se de finirmos em S_1 o evento $C_1 = \{2, 4, 6\}$ e em S_2 o evento $C_2 = \{5, 6\}$ podemos escrever

$$A_1 = \{(x,y) \mid x \in C_1\} \quad \text{e} \quad A_2 = \{(x,y) \mid y \in C_2\},$$

ou também em forma de produto cartesiano,

$$A_1 = C_1 \times S_2 \quad \text{e} \quad A_2 = S_1 \times C_2$$

Supondo, agora, que o resultado efetivo do primeiro lance do dado tenha sido o ponto $x_1^0 = 2$, teremos: $x_1^0 \in C_1$, relação que traduz a ocorrência do evento C_1, na realização da primeira prova. Conseqüentemente, qualquer que tenha sido o resultado efetivo x_2, da segunda prova, resulta: $(x_1^0, x_2^0) \in A_1$, ficando caracterizada, pois, a ocorrência do evento A_1, na realização de $\mathcal{E}$

De modo análogo, se o resultado efetivo do segundo lance for o ponto $x_2^0 = 3$, virá: $x_2^0 \notin C_2$, o que traduz a não-ocorrência do vento C_2 na segunda prova, logo, a não-ocorrência do evento A_2 na realização de $\mathcal{E}$, posto que para qualquer resultado efetivo x_1^0, da primeira prova, teremos: $(x_1^0, x_2^0) \notin A_2$.

Exemplo n.º 4 — A urna U_1 contém três bolas numeradas: 1, 2 e 3 a urna U_2 contém três bolas numeradas: 2, 3 e 4; finalmente a urna U_3 contém três bolas também numeradas: 3, 4 e 5. Supõe-se todas as bolas exatamente iguais quanto a quaisquer outros aspectos.

Uma experiência aleatória $\mathcal{E}$ consiste em retirar uma bola, ao acaso, de U_1, anotar-lhe o número e colocá-la em U_2; em seguida, retirar uma bola, ao acaso, de U_2, anotar-lhe o número e colocá-la em U_3; por último, retirar uma bola, ao acaso, de U_3 e anotar-lhe o número.

Podemos imaginar que $\mathcal{E}$ consiste de uma seqüência de três provas, $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ e $\mathcal{E}_3$, cada uma destas correspondendo a uma das extrações a serem feitas. Vemos que:

$$S_1 = \{1, 2, 3\}; \quad S_2 = \{1, 2, 3, 4\} \quad \text{e} \quad S_3 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

resultando:

$$S = S_1 \times S_2 \times S_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in S_i, \quad i = 1, 2, 3\}$$

Consideremos, em S_2, o evento $C_2 = \{2, 4\}$; em S_3, o evento $C_3 = \{1, 3, 5\}$; e, em S, os eventos

$$B_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_2 \in C_2\} \quad \text{e} \quad B_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3 \in C_3\}$$

Vemos que, por definição, os eventos B_2 e B_3 dependem, respectivamente, da segunda e da terceira provas.

Também neste exemplo, para se dar a ocorrência do evento B_2 na realização da experiência $\mathcal{E}$, é necessária e suficiente a ocorrência do evento C_2 na realização da prova $\mathcal{E}_2$. Assim, se $x_2^0 = 2$ ou $x_2^0 = 4$, vale dizer, se $x \in C_2$, este evento terá ocorrido na realização da prova $\mathcal{E}_2$; porém, nesse caso, resulta: $(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in B_2$, o que significa a ocorrência de B_2, na realização de $\mathcal{E}$. Reciprocamente, ocorrendo B_2, na realização de $\mathcal{E}$, devemos ter $x_2^0 = 2$ ou $x_2^0 = 4$; daí, $x_2^0 \in C_2$, o que traduz a ocorrência de C_2 na realização da prova $\mathcal{E}$.

De modo inteiramente análogo, podemos ver que a ocorrência de B_3 na realização de $\mathcal{E}$ implica a ocorrência de C_3 na realização da terceira prova $\mathcal{E}_3$; e vice-versa.

2.5 — Chegados a esta altura, convém salientar o seguinte importante fato: *dizer que a ocorrência* de um evento A_k, definido no espaço produto S de uma seqüência de provas, depende apenas da k-ésima prova $\mathcal{E}_k$, *não significa dizer que a probabilidade* desse evento é independente dos resultados efetivos das demais provas.

Assim, se voltarmos aos eventos A_1 e A_2 do exemplo n.º 3 poderemos constatar que a probabilidade de A_2 não é afetada pelo resultado efetivo da primeira prova, posto que $P(A_2) = 1/3$, quer se tenha $x_1 \in A_1$ quer se tenha $x_1 \in \overline{A_1}$; isto é:

$$P(A_2 \mid A_1) = P(A_2 \mid \overline{A_1}) = P(A_2) = 1/3$$

Entretanto, isto nem sempre acontece, bastando, para o confirmar um exame dos eventos B_2 e B_3 do exemplo n.º 4. De fato, a ocorrência de B_2 na segunda prova implica a introdução de bola com número par na urna U_3, o que diminui a probabilidade de sair desta urna bola com número ímpar — ocorrência de C_3 — na terceira prova, diminuindo, paralelamente, a probabilidade da ocorrência de B_3. Ao contrário, a ocorrência de B_2 na segunda prova acarreta a introdução de bola com número ímpar na urna U_3 o que aumenta a probabilidade de ocorrer C_3 — saída de bola com número ímpar — na terceira prova ficando aumentada, pois, a probabilidade de ocorrer B_3.

Essa diversidade de comportamento das probabilidades de evento dependentes de uma única prova permite-nos distinguir dois tipos gerais de seqüências de provas: as *seqüências de provas independentes* e as *seqüências de provas não-independentes*.

3. SEQÜÊNCIA DE PROVAS INDEPENDENTES

3.1 — Voltemos a considerar a experiência aleatória $\mathcal{E}$, que consiste na realização de uma seqüência de n provas $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_n$.

Seja S_k o espaço amostra da prova $\mathcal{E}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Para cada evento C_k tomando em S_k, é possível definir no espaço produto S um outro evento A_k dependente da k-ésima prova; bastando, para isso fazer

$$A_k = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_{k-1} \times C_k \times S_{k+1} \times \ldots \times S_n \qquad (5)$$

Sabemos ,aliás que se S_k for um conjunto finito formado de N elementos — resultados eventuais da experiência $\mathcal{E}_k$ — é possível definir 2^N subconjuntos de S_k, cada um deles dando origem a um evento A_k, da forma indicada em (5).

De um modo geral, o conjunto de todos os eventos que dependem apenas da k-ésima prova representa uma *família de eventos* que simbolizaremos, daqui em diante, por $\mathcal{A}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Convém observar, de passagem, que — para qualquer valor do índice k — tanto o evento certo S como o evento impossível ϕ (ambos considerados em relação à experiência $\mathcal{E}$), fazem parte da família $\mathcal{A}_k$, posto que, em (5), para $C_k = S_k$, obtemos:

$$S = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_k \times \quad \times S_n ;$$

e, para $C_k = \phi_k$ — onde ϕ_k simboliza o evento impossível relativo à experiência $\mathcal{E}_k$ — resulta:

$$\phi = S_1 \times S_2 \times \ldots \times \phi_k \times . \quad \times S_n$$

3.2 — Isto posto, alguns autores definem as n provas $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, ..., $\mathcal{E}_n$ como provas independentes quando — e somente quando — as famílias de eventos $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, ..., $\mathcal{A}_n$ forem independentes.

Entretanto, para o objetivo que temos em vista, é preferível adotar a seguinte definição equivalente, em cujo enunciado $\mathcal{A}_k$, para $k = 1, 2, \ldots, n$, continua representando a família dos eventos que dependem apenas da k-ésima prova; e a função de probabilidade $P(.)$ está associada, supostamente, ao espaço produto S.

Definição — Dizemos que n provas $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, ..., $\mathcal{E}_n$ formam, nessa ordem, uma seqüência de provas independentes se — e somente se — dados n eventos quaisquer, $A_1, A_2, \ldots, A_n$, tais que

$$A_k \in \mathcal{A}_k; \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

for válida a relação geral:

$$\boxed{P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \ldots P(A_n)} \tag{6}$$

Desta definição resulta o seguinte teorema:

Teorema — Dada uma seqüência de n provas, $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, ..., $\mathcal{E}_n$ e n eventos arbitrários, $A_1, A_2, \ldots, A_n$, tais que

$$A_k \in \mathcal{A}_k; \qquad k = 1, 2, \quad , n,$$

as n provas serão independentes se — e somente se — os n eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, assim considerados, forem independentes.

Demonstração — De fato, se os n eventos tomados, arbitrariamente, na forma do enunciado forem independentes, a relação (6) será, em conseqüência, verdadeira; logo as provas serão independentes por definição.

Reciprocamente, admitamos que as provas sejam independentes, isto é, que a relação (6) seja verdadeira para quaisquer n eventos tomados na forma do enunciado. Então, para provar que os n eventos do conjunto $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ são independentes, basta provar que, para qualquer subconjunto $\{A\ , A\ , \ldots, A\ \}$, do conjunto citado, a relação

$$P(A_{i_1}A_{i_2} \quad A_{i_r}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \ . \ P(A_{i_r})$$

também é verdadeira.

Para isso, consideremos o subconjunto de índices $\{J_1, J_2, \ldots, J_s\}$, complementar do subconjunto $\{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$, em relação ao conjunto de índices $\{1, 2, \ldots, n\}$. A seguir, em cada família $\mathcal{A}_{j_k}$ — para $k = 1, 2, \ldots, s$ — tomemos o evento certo S — sombolizando-o agora por S'_{j_k}, desde que pensado como membro da família $\mathcal{A}_{j_k}$. Então, podemos escrever:

$$A_{i_1}A_{i_2} \quad A_{i_r} = A_{i_1}A_{i_2} \quad A_{i_r}S'_{j_1}S'_{j_2} \quad S'_{j_s}$$

Entretanto, como no segundo membro da igualdade anterior figuram n eventos, tomados na forma do enunciado, resulta:

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_r}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \quad P(A'_{i_r}) \cdot P(S'_{j_1}) \cdot P(S'_{j_2}) \quad P(S'_{j_s})$$

Ora, lembrando que, para todo valor de k, tem-se

$$P(S'_{j_k}) = P(S) = 1\ ,$$

a igualdade anterior fornece, finalmente,

$$P(A_{i_1}A_{i_2} \quad A_{i_r}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \quad P(A_{i_r})$$

Nessas condições, os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, inicialmente considerados, são independentes, conforme restava provar.

3.3 — Como vimos, a definição de seqüência de provas independentes pressupõe a definição da função de probabilidade $P(.)$ no espaço produto S.

Todavia, numa situação concreta, quando estamos diante de uma seqüência de n provas, $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_n$, seria desaconselhável definir, previamente, a função de probabilidade $P(\cdot)$ no espaço S; e, em seguida, aplicar tal função para decidir, *a posteriori*, se as n provas são independentes ou não. Em verdade, esse procedimento implicaria em testar um grande número de relações da forma (6), o que nem sempre seria exequível e, mesmo quando o fosse, pouca utilidade acrescentaria à informação — positiva ou negativa — daí resultante.

Na prática, para decidir se n provas são independentes ou não, basta aplicar o seguinte critério:

Condição de independência — As n provas $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_n$ — de espaços amostra $S_1, S_2, \ldots, S_n$, respectivamente — serão independentes se for possível definir, em cada espaço fator S_k, uma função de probabilidades, $P_k(.)$, de tal sorte que a probabilidade $P_k(C_k)$, de qualquer evento — tomado no espaço S_k, — não dependa dos resultados efetivos das provas anteriores: $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_{k-1}$; ou, em outras palavras: de tal sorte que a probabilidade $P_k(C_k)$ esteja univocamente determinada — em cada espaço fator — pelo próprio evento C_k aí considerado.

Realmente, se esta condição se cumprir, poderemos definir a função $P(.)$ — no espaço produto S — a partir das funções $P_1(.)$, $P_2(.)$, $\ldots, P_n(.)$ — por hipótese já definidas — de modo a garantir, *a priori*, a independência das n provas. É o que veremos a seguir.

4. A FUNÇÃO P(.), NO ESPAÇO PRODUTO DE UMA SEQÜÊNCIA DE PROVAS INDEPENDENTES

4.1 — Admitamos, pois, que as n provas $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_n$, cumpram a condição de independência enunciada no título anterior.

Seja C um qualquer evento definido no espaço amostra S que admita, todavia, uma decomposição em produto cartesiano da forma

$$\boxed{C = C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_k \times \ldots \times C_n} \qquad (7)$$

onde $C_k \subset S_k$ é algum evento definido no espaço amostra S_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Sejam, ainda, $P_1(.)$, $P_2(.)$, $\ldots$, $P_n(.)$ as funções de probabilidades associadas aos espaços fatores $S_1, S_2, \ldots, S_n$, já definidas, supostamente, nos moldes previstos na condição de independência.

Então é possível associar ao espaço produto S uma função de probabilidades $P(.)$ — aplicável, em princípio, aos eventos que admitem decomposições da forma (7) — definida do seguinte modo:

$$\boxed{P(C) = P_1(C_1) \cdot P_2(C_2) \cdots P_n(C_n)} \qquad (8)$$

Veremos, logo a seguir, que, mediante a definição acima, as n provas consideradas serão independentes.

4.2 — *Teorema* — Toda seqüência de provas $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_n$ cumprindo a condição de independência e munida de uma função de probabilidades $P(.)$, definida mediante (8), é, de fato, uma seqüência de provas independentes.

Demonstração — Para demonstrar o teorema convém provar, de início, uma relação útil:

Consideremos, novamente, para $k = 1, 2, \ldots, n$, a família $\mathcal{A}_k$, dos eventos que dependem apenas da k-ésima prova.. Tomemos, arbitrariamente, n eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, tais que $A_k \in \mathcal{A}_k$ — para $k = 1, 2, \ldots, n$. Podemos escrever:

$$A_k = S_1 \times \ldots \times S_{k-1} \times C_k \times S_{k+1} \times \ldots \times S_n \tag{9}$$

onde $C_k \subset S_k$ é o evento associado a A_k. Isto posto, é verdadeira a igualdade:

$$\boxed{\begin{gathered} A_1 A_2 \ldots A_k = C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_k \times S_{k+1} \times S_{k+2} \times \ldots \times S_n \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{gathered}} \tag{10}$$

De fato, representemos abreviadamente: por x, o resultado eventual $(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n)$ da experiência $\mathcal{E}$; por M, o primeiro membro da igualdade (10); e por N, o seu segundo membro.

Ora, se $x \in M$, devemos ter $x \in A_i$ — para $i = 1, 2, \ldots, k$; logo, em virtude de (9), $x_i \in S_i$, para todo i, resulta que $x \in N$, ou seja: $M \subset N$. Reciprocamente, se $x \in N$, devemos ter $x_i \in C_i$ — para $i = 1, 2, \ldots, k$; e como $x_i \in S_i$, — para $i = 1, 2, \ldots, k$; e como $x_i \in S_i$ para todo i, resulta, em virtude de (9), que $x \in A_i$ — para $i = 1, 2, \ldots, n$. Conseqüentemente, $x \in M$, isto é: $N \in M$. Estas duas inclusões implicam $M = N$, como desejávamos provar.

Em particular, para $k = n$, a relação geral (10) fornece:

$$A_1 A_2 \ldots A_n = C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_n \tag{11}$$

Voltemos agora à demonstração do teorema. Se aplicarmos a função $P(.)$ ao evento $A_1, A_2, \ldots, A_n$, teremos, em face de (8) e de (11):

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P_1(C_1) \cdot P_2(C_2) \ldots P_n(C_n) \qquad (12$$

Por outro lado, aplicando a função $P(.)$ ao evento A_k, obtemos, ainda em virtude de (8) e de (9):

$$P(A_k) = P_1(S_1) \ldots P_{k-1}(S_{k-1}) \cdot P_k(C_k) \cdot P_{k+1}(S_{k+1}) \ldots P_n(S_n)$$

Porém, como $P_i(S_i) = 1$, para todo valor de i, a igualdade anterior reduz-se a

$$\boxed{\begin{gathered} P(A_k) = P_k(C_k) \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{gathered}} \tag{13}$$

Finalmente, levando estes resultados em (12), achamos:

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \ldots P(A_n)$$

Ora, o evento A_k — para $k = 1, 2, \ldots, n$ — é, por hipótese, um ɜmbro qualquer da família $\mathcal{A}_k$. Portanto, de acordo com a definição, n provas $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_n$ são independentes, conforme diz o enunıdo do teorema, que fica, pois, demonstrado.

4.3 — Observações importantes:

1.ª — Se o evento A_k definido no espaço produto S de uma seência de provas depende apenas da k-ésima prova, esse evento pode posto sob a forma

$$A_k = \{(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n) \mid x_k \in C_k\},$$

de C_k definido no espaço fator S_k é o respectivo evento associado.

Já sabemos que a ocorrência de A_k na realização de $\mathcal{E}$ implica a ɔrrência de C_k na realização de $\mathcal{E}_k$; e vice-versa.

Ora, as relações (13) afirmam, precisamente, que — no caso de ɔvas independentes — $P(A_k) = P_k(C_k)$.

Por conseguinte, quando estivermos, na prática, lidando com pro- independentes, e for necessário calcular $P(A_k)$, bastará usarmos a ıção $P_k(.)$ para calcular a probabilidade do respectivo evento assodo C_k, raciocinando apenas em termos da experiência $\mathcal{E}_k$, o que, em al, não oferece dificuldade.

2.ª — A função $P(.)$associada ao espaço produto S e definida diante (8) só seria aplicável, em princípio, aos eventos definidos S que admitem decomposição em produtos cartesianos da forı (7).

Sabemos, por outro lado, que nem todo evento em S pode ser composto em produto cartesiano daquela forma. Assim, aparentente, a função $P(.)$ não seria aplicável a certos eventos definidos S.

O problema de estender $P(.)$ a todos os eventos de S pode apresen- dificuldades quando esse conjunto é infinito não numerável. Entanto, quando S é finito, ou infinito numerável, tal problema se na simples.

De fato, nestes dois últimos casos, qualquer evento A contido em pode ser decomposto na união de um número finito ou numerável *eventos elementares*, da forma

$$E_j = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\},$$

le $x_i \in S_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ é um resultado eventual da experiência . Temos, pois:

$$A = \bigcup_{j=1}^{r} E_j \quad \text{ou} \quad A = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j,$$

ıforme ocorra uma ou outra situação.

Por sua vez, cada evento elementar E_j pode ser decomposto num produto cartesiano da forma (7), posto que

$$E = \{x_1\} \times \{x_2\} \times \,.\,.\, \times \{x_n\},$$

onde $\{x_i\} \subset S_i$ é um evento elementar definido no espaço amostra da experiência $\mathcal{E}_i$. Portanto, para os eventos elementares E_j, a função $P(.)$ ainda é aplicável.

Desde que os eventos elementares E_j são sempre, dois a dois, mutuamente exclusivos, e impondo a condição de que $P(.)$ mantenha as propriedades gerais das funções de probabilidades, podemos escrever, em qualquer das situações focalizadas:

$$P(A) = \sum_{j=1}^{r} P(E_j) \quad \text{ou} \quad P(A) = \sum_{j=1}^{\infty} P(E_j)$$

Conseqüentemente, a função $P(.)$ pode ser estendida a todos os eventos definidos no espaço produto S.

3.ª — Quando o evento A definido em S não pode ser decomposto *diretamente* num produto cartesiano de n eventos, definidos em $S_1, S_2, \ldots, S_n$, respectivamente, a decomposição de A em eventos elementares, como foi indicado na observação anterior, não oferece um caminho prático para o cálculo de sua probabilidade.

Na prática procedemos de outro modo: procuramos fazer a decomposição de A na união de eventos da forma $A_1\ A_2\ \ldots\ A_n$, onde A_k — para $k = 1, 2, \ldots, n$ — é um evento dependente apenas da k-ésima prova.

Foi este, precisamente, o procedimento seguido no cálculo da probabilidade do evento B quando buscávamos a solução do primeiro problema apresentado no Capítulo 1.

De fato, basta atentar na igualdade (1) que ali figura: os eventos B_i $(i = 1, 2, 3)$ e seus complementares, que participam da união, são dependentes apenas de uma única prova. Outrossim, no cálculo das probabilidades daqueles eventos foram utilizadas as relações (13) — conforme acentuamos na primeira observação deste subtítulo — o que facilmente se percebe reexaminando, à luz da teoria exposta, a solução do referido problema; ficando, por esta forma, inteiramente justificados os procedimentos de cálculo então empregados.

5. A FUNÇÃO P(.) NO ESPAÇO PRODUTO DE UMA SEQÜÊNCIA DE PROVAS NÃO INDEPENDENTES

5.1 — Consideremos, novamente, uma experiência aleatória $\mathcal{E}$, que consista na realização de n provas $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_n$, de espaços amostra $S_1, S_2, \ldots, S_n$, respectivamente.

Quando tal seqüência não satisfaz à definição formulada em 3.2, dizemos que se trata de uma *seqüência de provas dependentes* (ou não *independentes*).

Assim como no caso de provas independentes, a definição acima aludida pouco interesse apresenta, no momento de decidirmos se n provas são dependentes ou não. Na prática, apelamos novamente para a condição de independência introduzida em 3.3: se as n provas não atenderem à citada condição poderemos concluir, sem maiores exames, que elas são dependentes.

Cumpre atentar, todavia, que esta conclusão equivale a aceitar a impossibilidade de definir a função de probabilidade $P_k(.)$ — para todo valor k — de sorte que a probabilidade $P_k(C_k)$, de qualquer evento tomado no espaço fator S_k, esteja univocamente determinada pelo próprio evento C_k, isto é, independa dos resultados eventuais das provas anteriores.

Por conseguinte, em se tratando de uma seqüência de provas dependentes, a probabilidade $P_k(C_k)$ de eventos considerados em S_k será uma função também dos resultados $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$, das provas $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_{k-1}$, respectivamente.

Para exprimir esse fato usaremos a notação mais complexa

$$P_k(\cdot \,;\, x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}) ,$$

ao indicar essa probabilidade, ao invés de usar a notação simples até agora empregada, $P_k(.)$.

Fica subentendido, todavia, que uma vez *conhecidos* os resultados efetivos $x^o_1, x^o_2, \ldots, x^o_{k-1}$, das provas $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_{k-1}$ — supostas já realizadas — o valor de

$$P_k(C_k;\, x^o_1, x^o_2, \ldots, x^o_{k-1})$$

passará a depender, exclusivamente, do evento C_k, considerado no espaço fator S_k; isto é, a referida probabilidade ficará *univocamente determinada,* daí por diante, pelo próprio evento C_k.

5.2 — Após estas considerações preliminares, o problema que nos propomos é o de definir a função $P(.)$ no espaço produto S, supondo tratar-se de uma seqüência de provas dependentes.

Para lograr esse objetivo é necessário, todavia, analisar mais detidamente o problema em foco:

Imaginemos, por um momento, que o evento C definido em S possa ser decomposto em um produto cartesiano da forma (7);

$$C = C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_n ,$$

onde, lembramos, $C_k \subset S_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ é um evento definido no espaço fator S_k.

Sabemos — em virtude dos conceitos e esclarecimentos apresentados sob o Capítulo 2 — que a ocorrência do evento C na realização de $\mathcal{E}$ implica a ocorrência do evento C_k na realização da prova $\mathcal{E}_k$ para $k = 1, 2, \ldots, n$; e vice-versa.

Tal fato nos leva a pensar na possibilidade de definir a função $P(.)$ de sorte que a probabilidade $P(C)$ possa ser obtida através do cálculo da probabilidade de C_1 e, de modo geral, da probabilidade de C_k, na certeza da ocorrência de $C_1, C_2, \ldots, C_{k-1}$ para $k = 2, 3, \ldots, n$. Surge aqui, entretanto, uma dificuldade que precisamos contornar.

De fato, admitamos que, após a realização das provas $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\ldots$, $\mathcal{E}_{k-1}$, ficamos sabendo que seus resultados efetivos $x_1^o, x_2^o, \ldots, x_{k-1}^o$ — embora desconhecidos — cumpriram as condições: $x_1^o \in C_1$, $x_2^o \in C_2$, $\ldots$, $x_{k-1}^o \in C_{k-1}$. Embora, de um ponto de vista puramente teórico, esse *conhecimento parcial* sobre os resultados das provas anteriores não basta para determinar a probabilidade do evento C_k na realização da prova $\mathcal{E}_k$, em muitas situações práticas, todavia, tal conhecimento permite obter, univocamente, a probabilidade

$$P_k\ (C_k;\ x_1^o,\ x_2^o, \ldots\ x_{k-1}^o).$$

Para citar uma situação em que isto acontece, voltemos à experiência aleatória imaginada no exemplo n.º 4 do subtítulo 2.4. Vimos ali que o espaço amostra S da experiência $\mathcal{E}$ era representado pelo produto cartesiano.

$$S = S_1 \times S_2 \times S_3,$$

onde $S_1 = \{1, 2, 3\}$, $S_2 = \{1, 2, 3, 4\}$ e $S_3 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

indicavam os espaços fatores das provas $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ e $\mathcal{E}_3$, respectivamente. Consideremos, então, no espaço S o evento C, assim definido:

$C = \{$as três bolas extraídas apresentam número ímpar$\}$

Ora, se tomarmos em S_1 o evento $C_1 = \{1, 3\}$; em S_2 o evento $C_2 = \{1, 3\}$; e em $S_3 = \{1, 3, 5\}$, poderemos escrever:

$$C = C_1 \times C_2 \times C_3,$$

que é um produto cartesiano da forma (7).

Inicialmente, devemos notar que $P_1(C_1) = 1/3$, posto que esta probabilidade independe dos resultados das provas subseqüentes.

Admitamos agora que a prova $\mathcal{E}_1$ foi realizada e que seu resultado efetivo x_1 cumpriu a condição $x_1^o \in C_1$. Embora desconhecendo x_2^o, a informação parcial, acima referida, autoriza-nos a concluir que foi introduzida uma bola com numeração ímpar na segunda urna; de sorte que U_2 passou a ter duas bolas com numeração ímpar e duas com numeração par. Conseqüentemente, podemos garantir que

$$P_2(C_2;\ x_1^o) = \frac{1}{2}$$

Suponhamos ainda que foi realizada a prova $\mathcal{E}_2$, e que seu resultado efetivo x_2^o, embora desconhecido, cumpriu a condição $x_2^o \in C_2$. Esta informação parcial nos diz que uma bola com numeração ímpar foi introduzida na terceira urna; de modo que U_3 passou a ter três bolas com numeração ímpar e uma apenas com numeração par, resultando:

$$P_3(C_3;\ x_1^o,\ x_2^o) = \frac{3}{4}$$

Portanto, nesta situação particular, as probabilidades $P_2(C_2;\ x_1^o)$ e $P_3(C_3;\ x_1^o\ x_2^o)$ ficaram univocamente determinadas, com o simples conhecimento de que $x_1^o \in C_1$ e $x_2^o \in C_2$.

Para caracterizar todas as situações particulares análogas à que vimos de examinar, vamos introduzir um novo conceito:

Condição de determinação — Diremos que o evento C, definido no espaço S, e admitindo uma decomposição em produto cartesiano da forma (7),

$$C = C_1 \times C_2\ x\ \ldots \times C_n,$$

preenche a *condição de determinação,* se a probabilidade

$$P_k(C_k;\ x_1^o,\ x_2^o,\ \ldots,\ x_{k-1}^o);\ k = 2,\ 3,\ .\ .,\ n\ ,$$

na realização da prova $\mathcal{E}_k$ estiver univocamente determinada pelo próprio evento C_k e pelo conhecimento parcial, traduzido pelas relações $x_1^o \ominus C_1, x_2^o \in C_2,\ \ldots,\ x_{k-1}^o \in C_{k-1}$, sobre os resultados efetivos das provas anteriores, $\mathcal{E}_1,\ \mathcal{E}_2,\ \ldots,\ \mathcal{E}_{k-1}$.

5.3 — Estamos agora em condições de resolver o problema anteriormente proposto. Para isso retomemos as famílias $\mathcal{A}_1,\ \mathcal{A}_2,\ ..\ ,\ \mathcal{A}_n$ onde $\mathcal{A}_k$ — para $k = 1, 2, \ldots, n$ — é formada por todos os eventos do espaço produto S que dependem apenas da k-ésima prova.

Sejam, ainda, n eventos quaisquer, $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$, tais que

$$A_k \in \mathcal{A}_k;\quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

Ora, ao definir a função $P(.)$, devemos fazê-lo de modo a preservar as propriedades que caracterizam as funções de probabilidades. Em particular, considerando o evento

$$A = A_1\ A_2\ \ldots\ A_n,$$

a função $P(.)$, a ser definida, deverá satisfazer à relação

$$\boxed{P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1A_2) .\ . P(A_n|A_1A_2\ ..A_{n-1})} \quad (14)$$

que traduz o teorema da probabilidade composta e onde, por definição de probabilidade condicional,

$$P(A_k \mid A_1 A_2 \quad . \quad A_{k-1}) = \frac{P(A_1 A_2 \,.\quad .\, A_{k-1} A_k)}{P(A_1 A_2 \ldots A_{k-1})},$$

para $k = 2, 3, \ldots, n$, desde de que se tenha $P(A_1 \ A_2 \ \ldots \ A_{k-1}) \neq 0$.

Isto posto, seja C um evento definido em S, admitindo a decomposição em produto cartesiano da forma (7),

$$C = C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_n,$$

e preenchendo, além disso, a condição de determinação apresentada no item anterior. Então, para tais eventos, a função $P(.)$ será definida mediante a seguinte fórmula:

$$\boxed{\begin{array}{c} P(C) = P_1(C_1) \cdot P_2(C_2;\, x_1^o) \cdot P_3(C_3;\, x_1^o,\, x_2^o) \quad P_n(C_n;\, x_1^o,\, x_2^o, . \quad , x_{n-1}^o) \\ x_k^o \in C_k; \quad k = 1,\, 2, \quad , n-1 \end{array}} \qquad (15)$$

5.4 — Veremos a seguir que a função $P(.)$, definida pela fórmula acima, satisfaz à relação (14) do subtítulo anterior.

De fato, se A_k é um evento dependente da k-ésima prova, sabemos que

$$A_k = \{(x_1, \ldots, x_k, \quad , x_n) \mid x_k \in C_k\}; \quad k = 1,\, 2, \,.\, , n;$$

onde, lembramos, $C_k \subset S_k$. Portanto, para todo valor do índice k, podemos escrever:

$$A_k = S_1 \ x \quad .x \ S_{k-1} \ x \ C_k \ x \ S_{k-1} \ x. \quad x \ S_n$$

Tendo em vista a relação (10), demonstrada no subtítulo 4.2, resulta:

$$\begin{aligned} A_1 &= C_1 \times S_2 \times S_3 \times S_4 \times \quad . \times S_n \\ A_1 A_2 &= C_1 \times C_2 \times S_3 \times S_4 \times \qquad \times S_n \\ A_1 A_2 A_3 &= C_1 \times C_2 \times C_3 \times S_4 \times \qquad \times S_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_1 A_2 A_3 \quad A_n &= C_1 \times C_2 \times C_3 \times C_4 \times \qquad \times C_n \end{aligned}$$

Vemos, pois, que os eventos $A_1 \ A_2 \ \ldots \ A_k$, para $k = 1, 2, \ldots, n$ admitem decomposições em produtos cartesianos da forma (7). Suponhamos ainda que o evento $A = A_1 \ A_2 \ \ldots \ A_n$ — e, em conseqüência, os eventos A_1, $A_1 \ A_2$, $\ldots$, $A_1 \ A_2 \ \ldots \ A_{n-1}$ — preencha a condição de determinação introduzida no subtítulo anterior. Nessas condições, usando a definição de $P(.)$, achamos:

$$P(A_1) = P_1(C_1) \cdot P_2(S_2;\ x_1^o) \cdot P_3(S_3);\ x_1^o,\ x_2^o) \ldots P_n(S_n;\ x_1^o,\ x_2^o,\ \ldots,\ x_{n-1}^o)$$

Entretanto, quaisquer que sejam os resultados efetivos $x_1^o, x_2^o, \ldots, x_{n-1}$, ocorrerão os eventos $S_2, S_3, \ldots, S_n$; de sorte que

$$P_k(S_k;\ x_1^o,\ x_2^o, \ldots,\ x_{n-1}^o) = 1; \quad k = 2,\ 3,\ \ldots,\ n$$

Por conseguinte, a igualdade anterior fornece:

$$\boxed{P(A_1) = P_1(C_1)} \tag{16}$$

De um modo geral, usando a definição de $P(.)$, para os eventos $A_1\ A_2 \ldots A_{k-1}$ e $A_1\ A_2 \ldots A_k$, podemos escrever:

$$P(A_1\ A_2 \ldots A_{k-1}) =$$

$$= P_1(C_1) \cdot P_2(C_2;\ x_1^o) \cdot P_3(C_3;\ x_1^o,\ x_2^o) \ldots P_{k-1}(C_{k-1},\ x_1^o,\ x_2^o, \ldots,\ x_{k-2}^o) \tag{17}$$

e também

$$P(A_1\ A_2 \ldots A_{k-1}\ A_k) =$$

$$= P_1(C_1) \cdot P_2(C_2;\ x_1^o) \cdot P_3(C_3;\ x_1^o,\ x_2^o) \ldots P_k(C_k;\ x_1^o,\ x_2^o, \ldots,\ x_{k-1}^o) \tag{18}$$

Como estamos supondo $P(A_1\ A_2 \ldots A_k) \neq 0$, isto exige que se tenha $P_i(C_i;\ x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}) \neq 0$, para $i = 1, 2, \ldots, k$. Então podemos dividir, membro a membro, a (18) pela (17), resultando:

$$\frac{P(A_1 A_2 \ldots A_k)}{P(A_1 A_2 \ldots A_{k-1})} = P_k(C_k;\ x_1^o,\ x_2^o, \ldots,\ x_{k-1}^o),$$

ou ainda, lembrando a definição de probabilidade condicional:

$$\boxed{\begin{array}{c} P(A_k \mid A_1 A_2 \ldots A_{k-1}) = P_k(C_k;\ x_1^o,\ x_2^o, \ldots\ x_{k-1}^o) \\ k = 2,\ 3,\ \ldots,\ n \end{array}} \tag{19}$$

Agora, aplicando a definição de $P(.)$ ao evento $A_1\ A_2 \ldots A_n = C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_n$, obtemos

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P_1(C_1) \cdot P_2(C_2; x_1^o) \cdot P_3(C_3; x_1^o, x_2^o) \ldots P_n(C_n; x_1^o, x_2^o, \ldots, x_{n-1}^o),$$

a qual, levando em conta as relações (16) e (19), nos dá, finalmente:

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 A_2) \ldots P(A_n \mid A_1 A_2 \ldots A_{n-1}),$$

conforme desejávamos provar.

5.5 — Observações importantes

1.ª — Consideremos uma seqüência de provas dependentes $\mathcal{E}$ $\mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_n$, e seja $\mathcal{A}_k$ a família dos eventos que dependem apenas k-ésima prova ($k = 1, 2, \ldots, n$). Então, diante do exposto anteric mente, a probabilidade de qualquer evento $A_1 A_2 \ldots A_n$, tal que $A_k \in$, para todo valor de k é calculada mediante a utilização do conceito probabilidade condicional, de acordo com a relação (14). Entretanto, prática, o cálculo de $P(A_1)$ é feito aplicando a relação (16), do su título 5.4; ao passo que o cálculo de $P(A_k|A_1 A_2 \ldots A_{k-1})$ é feito ap cando a relação (19), do mesmo subtítulo.

Por conseguinte, as relações (16) e (19), no caso de provas depe dentes, fazem um papel análogo ao das relações (13) no caso de prov independentes.

Todavia, embora o evento $A_1 A_2 \ldots A_n$ admita sempre decomp sição em produto cartesiano da forma (7), o cálculo acima referido será válido — ou possível — quando o evento citado preencher tambė a condição de determinação formulada no subtítulo 5 2.

Ao resolvermos o problema formulado no Exemplo n.º 2, do Ca tulo 1, tivemos de calcular a probabilidade do evento $B_1 B_2 B_3$; e cor este evento, decomposto no produto cartesiano $C_1 \times C_2 \times C_3$ — vi subtítulo 1.4 — preenche a condição de determinação acima referida, procedimento de cálculo utilizado naquela oportunidade fica inteir mente justificada pela teoria aqui exposta.

2.ª — Cabem, no caso de seqüências de provas dependentes, con derações análogas às que foram feitas nas observações 2.ª e 3.ª, subtítulo 4.3, à propósito das seqüências de provas independente Contudo, ao decompor o evento considerado na união de eventos forma $A_1 A_2 \ldots A_n$ — onde A_k (para $k = 1, 2, \ldots, n$) é dependen apenas da k-ésima prova — é necessário ainda atender à condiç de determinação acima referida.

Remetemos o leitor aos exemplos que finalizam este subtítulo:

5.6 — Aplicações

Exemplo n.º 5 — A urna U_1 contém três bolas numeradas: 1, 2 3; a urna U_2 contém três bolas numeradas: 2, 3 e 4; finalmente, urna U_3 contém três bolas também numeradas: 3, 4 e 5. Supõe-se tod as bolas exatamente iguais quanto a quaisquer outros aspectos.

Uma experiência aleatória $\mathcal{E}$ consiste em retirar uma bola, acaso, de U_1, anotar-lhe o número e colocá-la em U_2; em seguida, retir uma bola, ao acaso, de U_2, anotar-lhe o número e colocá-la em U por último, retirar uma bola, ao acaso, de U_3 e anotar-lhe o númei

Pede-se a probabilidade de que as três bolas, assim extraídas, ap sentem número ímpar.

Solução: Já vimos que esta experiência aleatória equivale a uma seqüência de três provas $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ e $\mathcal{E}_3$, onde $\mathcal{E}_i$ representa a extração de uma bola da urna n.º i.

Vimos também que os espaços amostra fatores tinham as formas:

$$S_1 = \{1, 2, 3\},\ S_2 = \{1, 2, 3, 4\} \ \text{ e } \ S_3 = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

resultando daí o espaço produto $S = S_1 \times S_2 \times S_3$.

É fácil perceber que tal seqüência de provas não preenche a condição de independência formulada no subtítulo 3.3; portanto, concluímos tratar-se de uma seqüência de provas dependentes.

Consideremos agora no espaço produto S os eventos:

C = {as três bolas extraídas apresentam número ímpar}

A_i = {a i-ésima bola extraída apresenta número ímpar}

$$i = 1, 2, 3.$$

Desas definições tiramos, imediatamente:

$A_1 = C_1 \times S_2 \times S_3$, onde $C_1 = \{1, 3\}$ está definido em S_1;

$A_2 = S_1 \times C_2 \times S_3$, onde $C_2 = \{1, 3\}$ está definido em S_2;

$A_3 = S_1 \times S_2 \times C_3$, onde $C_3 = \{1, 3, 5\}$ está definido em S_3;

e ainda: $C = A_1\, A_2\, A_3 = C_1 \times C_2 \times C_3$

Portanto, a probabilidade de C — ou de $A_1\, A_2\, A_3$ — será dada mediante:

$$P(C) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1\, A_2)$$

Como o evento $C = A_1\, A_2\, A_3$ preenche — vide o subtítulo 5.2 — a condição de determinação, podemos usar as relações (16) e (19). Então, conforme já havíamos calculado, temos:

$$P(A_1) = P_1(C_1) = \frac{1}{3};\quad P(A_2 | A_1) = P_2(C_2;\, x_1^o) = \frac{1}{2}$$

$$\text{e}\quad P(A_3 | A_1\, A_2) = P_3(C_3;\, x_1^o,\, x_2^o) = \frac{3}{4}$$

resultando a probabilidade procurada:

$$P(C) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{8}$$

Exemplo n.º 6 — A urna U_1 contém 2 bolas brancas, 3 bolas pretas e 4 bolas vermelhas; a urna U_2 contém 1 bola branca, 2 pretas e 2 vermelhas.

Uma experiência aleatória $\mathcal{E}$ consiste em retirar, ao acaso, uma bola da urna U_1, anotar-lhe a cor e colocá-la na urna U_2; em seguida retirar, ao acaso, uma bola da urna U_2 e anotar-lhe a cor.

Deseja-se calcular a probabilidade de que: na primeira extração não saia bola branca e na segunda saia bola vermelha.

Solução: Podemos tratar a experiência $\mathcal{E}$ como uma seqüência de duas provas não independentes $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$, cada uma consistindo da extração de uma bola da urna de mesmo número, com os correspondentes espaços fatores

$$S_1 = \{b, p, v\} \quad \text{e} \quad S_2 = \{b, p, v\},$$

de onde resulta o espaço produto

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i = b, p, v; \quad i = 1, 2, 3\}$$

Se considerarmos os seguintes eventos — cada um dependente de uma única prova — assim definidos:

$A_1 = \{$a primeira bola extraída é não-branca$\}$ e

$A_2 = \{$a segunda bola extraída é vermelha$\}$,

o problema se reduz a calcular a probabilidade de evento $A = A_1 A_2$

Por outro lado, se tomarmos os eventos $C_1 = \{p, v\}$ e $C_2 = \{v\}$ definidos, respectivamente, em S_1 e S_2, podemos escrever:

$$A = A_1 A_2 = C_1 \times C_2$$

Nessas condições, seríamos tentados a fazer

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1),$$

objetivando calcular $P(A_2|A_1)$ mediante a relação (19).

Entretanto, um exame mais cuidadoso do problema revela que o evento $A = C_1 \times C_2$, embora estando reduzido a um produto cartesiano da forma (7), não preenche a condição de determinação prevista no subtítulo 5.2, o que desautoriza o cálculo acima referido.

De fato, no presente caso, o conhecimento parcial, traduzido por $x_1^o \in C_1$, não é bastante para determinar, univocamente, a probabilidade $P_2(C_2;\ x_1^o)$, posto que

$$P_2(C_2;\ x_1^o) = \frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad P_2(C_2;\ x_1^o) = \frac{1}{2}$$

conforme se tenha $x_1^o = p$ ou $x_1^o = v$, respectivamente.

Para resolver o problema, usando a teoria exposta, deveremos decompor o evento A_1 na seguinte união de eventos mutuamente exclusivos:

$$A_1 = B_1 \cup B_1'$$

onde:

$B_1 = \{$a primeira bola extraída é preta$\}$

$B_1' = \{$a primeira bola extraída é vermelha$\}$

Resulta, portanto,

$$A = A_1 A_2 = B_1 A_2 \cup B_1' A_2$$

e daí:

$$P(A) = P(B_1 A_2) + P(B_1' A_2)$$

Tomando em S_1 os novos eventos $C_1 = \{p\}$ e $C_1' = \{v\}$ e mantendo o evento $C_2 = \{v\}$, já definido em S_2, teremos:

$$B_1 A_2 = C_1 \times C_2 \quad \text{e} \quad B_1' A_2 = C_1 \times C_2$$

Percebemos facilmente que agora os eventos $B_1 A_2$ e $B_1' A_2$, além de estarem reduzidos a produtos cartesianos da forma (7), cumprem a condição de determinação. Portanto, podemos escrever:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A_2 | B_1) + P(B_1') \cdot P(A_2 | B_1'),$$

sendo aplicáveis as relações (16) e (19), resultando:

$$P(B_1) = P_1(C_1) = \frac{1}{3}, \quad P(B_1') = P_1(C_1') = \frac{4}{9}$$

e ainda:

$$P(A_2 | B_1) = P_2(C_2;\, x_1^o) = \frac{1}{3}, \quad \text{com} \quad x_1^o = p,$$

$$\text{e} \quad P(A_2 | B_1') = P_2(C_2;\, x_1^o) = \frac{1}{2}, \quad \text{com} \quad x_1^o = v.$$

Concluímos, então, que

$$P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{4}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

ficando resolvido o problema proposto.

5.7 — Observação final

É óbvio que, na prática, não temos necessidade de resolver c problemas desses tipos descendo a todos os detalhes aqui abordado: sendo suficiente conduzir os cálculos conforme fizemos, ao apresentа as soluções dos problemas formulados nos exemplos números 1 e 2.

O que importa, na verdade, é termos a consciência de que, fund: mentando nossos procedimentos simplificados, existe toda uma teori: cujas hipóteses ou condições especiais estão sendo cumpridas ou sati: feitas, garantindo, portanto, a consistência dos cálculos e raciocíni(realizados.

ESTIMADORES DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA DOS PARÂMETROS DA DISTRIBUIÇÃO DE DIRICHLET*

Fernando Holanda Barbosa
do Instituto de Pesquisas do IPEA

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objetivo apresentar os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros da distribuição de Dirichlet, bem como sugerir alguns processos para o cálculo de suas estimativas.

* O autor agradece os comentários e as sugestões de Clovis de Faro e de Maria da Conceição Silva sobre o presente estudo

A distribuição de Dirichlet é uma generalização da distribuição Beta, cuja função de densidade de probabilidade é expressa por:

$$g(x) = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\,\Gamma(\alpha_2)} x^{\alpha_1 - 1} (1-x)^{\alpha_2 - 1}, \qquad (1.1)$$

$$0 < x < 1$$
$$0 < \alpha_1, \alpha_2 < \infty$$

A distribuição Beta tem sido usada em economia no estudo da distribuição de renda e obviamente pode ser empregada no estudo da distribuição de variáveis que possam ser colocadas na escala $0 - 1$.[1] A distribuição de Dirichlet, por sua vez, pode ser usada no estudo da distribuição conjunta de variáveis que estão compreendidas na escala $0 - 1$.

O Capítulo 2 reproduz algumas propriedades, bem conhecidas na literatura estatística, da distribuição de Dirichlet. O Capítulo 3 apresenta os estimadores de máxima verossimilhança e mostra alternativas para o cálculo numérico das estimativas. O Capítulo 4 contém uma aplicação da distribuição de Dirichlet em economia, onde, ao Sistema de Despesa Linear, a teoria do comportamento aleatório racional associa as propensões marginais a gastar variáveis aleatórias que seguem uma distribuição de Dirichlet. Finalmente, no Capítulo 5, é efetuada uma aplicação prática do método proposto no Capítulo 3 aos dados de despesas de consumo na Holanda no período 1921/63.

2. A DISTRIBUIÇÃO DE DIRICHLET

As variáveis aleatórias $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ são distribuídas de acordo com a distribuição de Dirichlet quando a função de densidade de probabilidade destas variáveis é definida por.

$$g(x) = \frac{\Gamma(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i)}{\prod_{i=1}^{n} \Gamma(\alpha_i)} \prod_{i=1}^{n-1} x_i^{\alpha_i - 1} \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i\right)^{\alpha_n - 1}, \quad x \in R \qquad (2.1)$$

$$g(x) = 0, \quad \notin R$$

Os parâmetros α's são estritamente positivos, $\Gamma(\;)$ é a função gamma e a região R é dada por:

$$R = \left\{ x_i,\ i = 1, \quad , n-1;\ x_i > 0 \ \text{e} \sum_{i=1}^{n-1} x_i < 1 \right\}$$

[1] Veja, por exemplo: THUROW, L C The Effects of Public Policy Instruments on Black and White Income Equalization In: BOULDIN, K E & PFAFF, M *Redistribution to the Rich and the Poor.* California: Wadsworth, 1972

As médias, modas, variâncias e covariâncias das variáveis X_i são expressas através das seguintes fórmulas [2]:

$$EX_i = \frac{\alpha_i}{\alpha}, \quad i = 1, \quad , n-1, \tag{2,2}$$

$$MX_i = \frac{\alpha_i^{-1}}{\alpha^{-n}}, \quad i = 1, . \quad , n-1 \tag{2.3}$$

$$Var\ X_i = \frac{\alpha_i(\alpha - \alpha_i)}{\alpha^2(\alpha+1)}, \quad i = 1, \quad , n-1 \tag{2.4}$$

$$Cov\ X_iX_j = \frac{\alpha_i\alpha_j}{\alpha^2(\alpha+1)}, \; i \neq j, \; i, \quad j = 1, \ldots, n-1 \tag{2.5}$$

Os símbolos *E, M, Var e Cov* representam, respectivamente, o valor esperado, a moda, a variância e a covariância das variáveis indicadas e $\alpha = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$ Com a finalidade de demonstrar as propriedades acima listadas iremos considerar o caso de somente duas variáveis aleatórias, o que simplifica bastante a álgebra. Contudo, a generalização para um valor qualquer de n é trivial. A demonstração que se segue é reproduzida aqui por conveniência, pois, por exemplo, pode ser encontrada em maior detalhe no livro de Johnson e Kotz [3]. Em primeiro lugar, para provar que (2 1) é uma função de densidade de probabilidade temos que avaliar a integral:

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-x_2} x_1^{\alpha_1-1} x_2^{\alpha_2-1} (1 - x_1 - x_2)^{\alpha_3-1} dx_1\, dx_2 \tag{2 6}$$

A expressão acima pode ser escrita como:

$$\int^1 \left[\int_0^{1-x_2} x_1^{\alpha_1-1} (1 - x_1 - x_2)^{\alpha_3-1} dx_1 \right] x_2^{\alpha_2-1} dx_2 \tag{2.7}$$

A integral entre colchetes que aparece em (2.7) é facilmente obtida usando-se a função Beta, definida por:

$$B\ (s,r) = \frac{1}{a^{s+r-1}} \int_0^a x^{s-1} (a-x)^{r-1}\ dx \tag{2.8}$$

Na expressão (2.7) $a = 1 - x_2$, $s = \alpha_1$ e $r = \alpha_3$. Portanto, a integral (2 7) é igual a.

$$\int_0^1 B(\alpha_1,\alpha_3)\ (1 - x_2)^{\alpha_1+\alpha_3-1}\ x_2^{\alpha_2-1}\ dx_2 \tag{2.9}$$

---

[2] Como mostramos mais adiante, as modas só são definidas se $\alpha_i < 1$, $i = 1, \quad , n$

[3] JOHNSON, N & KOTZ, *Distribution in Statistics: Continuous Multivariate Distributions* New York, John Wiley, 1973

Aplicando novamente a função Beta a (2.9), isto é, fazendo-se agora $a = 1$, $s = \alpha_2$ e $r = \alpha_1 + \alpha_3$, obtemos:

$$I = B(\alpha_1, \alpha_3) \quad B(\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_3) \tag{2.10}$$

Tendo em vista a propriedade da função Beta,

$$B(s,r) = \frac{\Gamma(s)\,\Gamma(r)}{\Gamma(s+r)}$$

pode ser reescrita após alguma simplificação, como:

$$I = \frac{\Gamma(\alpha_1)\,\Gamma(\alpha_2)\,\Gamma(\alpha_3)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)} \tag{2.11}$$

Concluímos a partir de (2.11) que:

$$\int_0^1 \int_0^{1-x_2} \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)}{\Gamma(\alpha_1)\,\Gamma(\alpha_2)\,\Gamma(\alpha_3)} x_1^{\alpha_1 - 1} x_2^{\alpha_2 - 1} (1 - x_1 - x_2)^{\alpha_3 - 1} dx_1 dx_2 = 1,$$

o que significa dizer que a função de densidade de probabilidade $g(x)$ é própria. Obviamente, $g(x) > 0$ para $x \in R$.

O valor esperado de $X_1^p \; X_2^q$ é definido por:

$$E(X_1^p X_2^q) = \int_0^1 \int_0^{1-x_2} \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)}{\Gamma(\alpha_1)\,\Gamma(\alpha_2)\,\Gamma(\alpha_3)} x_1^{p+\alpha_1 - 1} \, x_2^{q+\alpha_2 - 1} \tag{2.12}$$
$$(1 - x_1 - x_2)^{\alpha_3 - 1} \; dx_1 \; dx_2$$

Aplicando-se a esta integral o mesmo procedimento na obtenção dos resultados derivados acima, temos que:

$$E(X_1^p X_2^q) = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)}{\Gamma(\alpha_1)\,\Gamma(\alpha_2)\,\Gamma(\alpha_3)} \cdot \frac{\Gamma(p + \alpha_1)\,\Gamma(q + \alpha_2)\,\Gamma(\alpha_3)}{\Gamma(p + \alpha_1 + q + \alpha_2 + \alpha_3)} \tag{2.13}$$

Para $q = 0$ e $p = 1$, (2.13) fornece o valor esperado de X_1

$$EX_1 = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)}{\Gamma(\alpha_1)\,\Gamma(\alpha_2)\,\Gamma(\alpha_3)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha_1 + 1)\,\Gamma(\alpha_2)\,\Gamma(\alpha_3)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 1)} \tag{2.14}$$

A expressão acima pode ser simplificada aplicando-se uma propriedade bastante conhecida da função Gamma, isto é, a de que $\Gamma(x + 1) = x\,\Gamma(x)$. Desta forma, (2.14) reduz-se, depois de algumas simplificações, a:

$$EX_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \tag{2.15}$$

que corresponde a (2.2) quando $n = 3$. Para $p = 0$ e $q = 1$ obteríamos a partir de (2.13) o valor esperado de X_2; para $q = 1$ e $p = 1$ obteríamos $EX_1 X_2$; para $q = 2$ e $p = 0$ teríamos o valor esperado de X_2^1; e assim por diante, (2.2), (2.4) e (2.5) seriam obtidos.

Cuidemos agora de derivar a moda de (2.1). A moda é o valor de x que maximiza (2.1); ou, equivalentemente, o valor de x que maximiza a função logaritmo neperiano de $g(x)$:

$$\log g(x) = \text{constante} + (\alpha_1 - 1) \log x_1 + (\alpha_2 - 1) \log x_2 + + (\alpha_3 - 1) \log (1 - x_1 - x_2) \tag{2.16}$$

A condição necessária para que (2.16) tenha um máximo é de que as derivadas parciais de $g(x)$ com respeito a x_1 e a x_2 sejam iguais a zero:

$$\frac{\partial \log}{\partial x_1} g(x) = \frac{\alpha_1 - 1}{x_1} - \frac{\alpha_3 - 1}{1 - x_1 - x_2} = 0 \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial \log}{\partial x_2} g(x) = \frac{\alpha_2 - 1}{x_2} - \frac{\alpha_3 - 1}{1 - x_1 - x_2} = 0 \tag{2.18}$$

Resolvendo-se o sistema acima, tem-se:

$$MX_1 = \frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 3} \tag{2.19}$$

$$MX_2 = \frac{\alpha_2 - 1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 3} \tag{2.20}$$

As derivadas parciais de segunda ordem do $\log g(x)$ são:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \log g(x) = -\left[\frac{\alpha_1 - 1}{x_1^2} + \frac{\alpha_3 - 1}{(1 - x_1 - x_2)^2}\right] \tag{2.21}$$

$$\frac{\partial^2 \log gx}{x_2^2} = -\left[\frac{\alpha_2 - 1}{x_2^2} + \frac{\alpha_3 - 1}{(1 - x_1 - x_2)^2}\right. \tag{2.22}$$

$$\frac{\partial^2 \log g(x)}{\partial x_1 \, \partial x_2} = - \frac{\alpha_3 - 1}{(1 - x_1 - x_2)^2} \tag{2.23}$$

Portanto, se $\alpha_i > 1$, $i = 1, 2, 3$, os valores de x_1 e x_2 em (2.19) e (2.20), respectivamente, são os valores que maximizam a função $g(x)$.

3. ESTIMADORES DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA DOS PARÂMETROS DA DISTRIBUIÇÃO DE DIRICHLET

Imagine uma amostra de tamanho T das variáveis aleatórias $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$, as quais, por hipótese, são distribuídas de acordo com uma distribuição de Dirichlet com função de densidade de probabilidade (2.1). A função de verossimilhança desta amostra é dada então por:

$$\left[\frac{\Gamma(\alpha)}{\prod_{i=1}^{n} \Gamma(\alpha_i)}\right]^T \left(\prod_{t=1}^{T} x_{1,t}\right)^{\alpha_1 - 1} \cdots \left(\prod_{t=1}^{T} x_{n-1,t}\right)^{\alpha_{n-1} - 1} \tag{3.1}$$

$$\prod_{t=1}^{T}\left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_{i,t}\right)^{\alpha_n - 1}$$

As médias geométricas de x_{it} são[4]:

$$G_i = \left[\prod_{t=1}^{T} x^{i,t}\right]^{1/T}, \; i = 1, \ldots, n-1, \tag{3.2}$$

$$G_n = \left[\prod_{t=1}^{T}\left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_{i,t}\right)\right]^{1/T} \tag{3 3}$$

e o logaritmo (base natural) da função de verossimilhança (3.1) pode ser escrito como:

$$\gamma = T\left[\log \Gamma(\alpha) - \log \prod_{i=1}^{n} \Gamma(\alpha_i)\right] + T \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - 1) \;\log G_i \tag{3 4}$$

3.1 Estimadores dos Parâmetros α's

Os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros da distribuição de Dirichlet são obtidos maximizando-se a função (3.4) com respeito aos parâmetros α's. A derivada parcial de (3.4) com respeito a α_i é igual a:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_i} = T\left[\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \log \Gamma(\alpha) - \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \log \Gamma(\alpha_i)\right] + T \log G_i \tag{3 5}$$

O valor de α_i, digamos α_i, que torna (3.5) igual a zero, é a solução da equação:

$$\log G_i + \Psi(\hat{\alpha}_i) - \Psi(\hat{\alpha}), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3.6}$$

onde $\hat{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} \hat{\alpha}_i$ e Ψ representa a função *Psi*[5]. Esta função, também chamada de função digamma, é definida por:

$$\frac{\partial}{\partial Z} \log \Gamma(Z) = \frac{\Gamma'(Z)}{\Gamma(Z)} = \Psi(Z) \tag{3.7}$$

---

[4] Estas médias geométricas são estatísticas suficientes para os parâmetros α_1, α_2, , α_n e portanto sintetizam toda a informação da amostra

[5] Usamos em (3 6) o fato de que:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \log \Gamma(\alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \log \Gamma(\alpha) = \Psi(\alpha)$$

O sistema de equações (3.6) é altamente não-linear nos parâmetros α's e portanto não pode ser solucionado analiticamente. Segue-se, então, que um procedimento numérico tem que ser desenvolvido para encontrarmos a solução do sistema (3.6). Abaixo sugerimos dois procedimentos para esta finalidade.

Como é bastante conhecido, a matriz de informações *Inf* é definida por [6]:

$$Inf = - E\left[\frac{\partial^2}{\partial\alpha_i\, \partial\alpha_j} \log \text{ função verossimilhança}\right] \tag{3.8}$$

A partir das derivadas parciais (3.5) os elementos da matriz entre colchetes na equação acima são facilmente obtidos:

$$\frac{\partial_2 \gamma}{\partial\alpha_i\, \partial\alpha_j} = T \frac{\partial^2 \log}{\partial\alpha_i\, \partial\alpha_j} \Gamma(\alpha), \text{ se } i \neq j \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial\alpha_i^2} = T\left[\frac{\partial^2}{\partial\alpha_i^2} \log \Gamma(\alpha) - \frac{\partial^2}{\partial\alpha_i^2} \log \Gamma(\alpha_i)\right], \text{ se } i = j \tag{3.10}$$

Tendo em vista que:

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha_i\, \partial\alpha_j} \log \Gamma(\alpha) = \Psi'(\alpha)$$

podemos reescrever as expressões (3.9) e (3.10) como:

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial\alpha_i\, \partial\alpha_j} = T\ \Psi'(\alpha), \text{ se } i \neq j \tag{3.11}$$

e

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial\alpha_i^2} = T\left[\Psi'(\alpha) - \Psi'(\alpha_i)\right], \text{ se } i = j. \tag{3.12}$$

É interessante observar que a solução do sistema (3.6) é, na verdade, um ponto de máximo da função (3.4), porque:

$$\Psi'(\alpha) - \Psi'(\alpha_i) < 0$$

A desigualdade acima pode ser obtida a partir da seguinte propriedade da função *Psi*: $\Psi(Z + 1) = \Psi(Z) + 1/Z$. A derivada desta expressão com respeito a Z é: $\Psi'(Z + 1) = \Psi'(Z) - 1/Z^2$. Tendo em vista que $Z > 0$, temos que: $\Psi'(Z + 1) - \Psi'(Z) < 0$. Logo, lembrando que $\alpha > \alpha_i$ e que $\Psi'(\ )$ é uma função contínua, concluímos que $\Psi'(\alpha) < \Psi'(\alpha_i)$.

---

[6] Veja, por exemplo: THEIL, H. *Principles of Econometrics* New York, John Wiley, 1971, cap. 8

As expressões (3.11) e (3.12) não dependem das variáveis aleatórias *X's* e desde que o valor esperado de uma constante é uma constante, a matriz de informação (3.8) dos parâmetros *α's* é dada por:

$$Inf_\alpha = T \begin{bmatrix} \Psi'(\alpha_i) - \Psi'(\alpha) & & - \Psi'(\alpha) & - \Psi'(\alpha) \\ - \Psi'(\alpha) & \Psi'(\alpha_2) & - \Psi'(\alpha) & - \Psi(\alpha) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ - \Psi(\alpha) & & - \Psi'(\alpha) & \Psi'(\alpha_n) - \Psi'(\alpha) \end{bmatrix} \qquad (3.13)$$

A inversa da matriz (3.13) é, para grandes amostras, a matriz de variância-covariância dos estimadores de máxima verossimilhança dos *α's*:

$$Var\, \bar{\alpha} = Inf_\alpha^{-1} = \frac{1}{T}\left[D^{-1} + \delta\, aa'\right] \qquad (3.14)$$

onde:

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\Psi'(\alpha_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/\Psi'(\alpha_n) \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} 1/\Psi'(\alpha_1) \\ \vdots \\ 1/\Psi'(\alpha_2) \end{bmatrix}$$

$$\delta = \Psi'(\alpha)\left[1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{\Psi'(\alpha)}{\Psi'(\alpha_2)}\right]^{-1}.$$

Uma estimativa da *Var* α é facilmente obtida substituindo-se as estimativas de α em (3.14).

3.2 Aproximações Numéricas para a Solução de (3.6)

Segundo Johnson e Kotz [7] a função *Psi* pode ser aproximada pela expressão:

$$\Psi(Z) \cong \log\,(Z - 1/2);\ Z \geq 2 \qquad (3.15)$$

Aplicando esta aproximação à equação (3.6) obtemos:

$$\log G_i = \log\,(\hat{\alpha}_i) - 1/2) - \log\,(\hat{\alpha} - 1/2) \qquad (3.16)$$

ou:

$$G_i = \frac{\hat{\alpha} - 1/2}{\hat{\alpha} - 1/2},\ i = 1, \ldots, n \qquad (3.17)$$

[7] JOHNSON, N & KOTZ, S. op cit

Lembrando que $\hat{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ a equação (3.17) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$G_i\alpha_1 + G_i\hat{\alpha}_2 + \ldots + (G_i - 1)\hat{\alpha}_i + \ldots + G_i\hat{\alpha}_n = 1/2\ (G_i^{-1}) \tag{3.18}$$

ou escrevendo (3.18) em notação matricial:

$$\begin{bmatrix} G_1^{-1} & G_1 & \ldots & G_1 \\ G_2 & G_2^{-1} & \ldots & G_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_n & G_n & \ldots & G_n^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_n \end{bmatrix} = 1/2 \begin{bmatrix} G_1^{-1} \\ G_2^{-1} \\ \vdots \\ G_n^{-1} \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

Um procedimento alternativo é o de utilizar-se um processo iterativo para a solução das equações de máxima verossimilhança e aproximações das funções $\Psi\ (Z)$ e $\Psi'(Z)$ baseadas nas expansões destas funções de acordo com a série de Bernouille [8].

$$\Psi\ (Z) \cong \log Z - \frac{1}{2Z}\left[1 + \frac{1}{6Z} - \frac{1}{60Z^3} + \frac{1}{126Z^5}\right] \tag{3.20}$$

e:

$$\Psi'(Z) \cong \frac{1}{Z}\left[1 + \frac{1}{2Z} + \frac{1}{6Z^3} - \frac{1}{30Z^4} + \frac{1}{42Z^6}\right] \tag{3.21}$$

4. O SISTEMA DE DESPESA LINEAR E A DISTRIBUIÇÃO DE DIRICHLET

4.1 Comportamento Aleatório Racional e o Sistema de Despesa Linear

A função de utilidade Klein-Rubin é expressa por

$$u(q_1, q_2, \ldots, q_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \log (q_i - \gamma_i) \tag{4.1}$$

onde μ_i e γ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, são parâmetros do modelo e $q_1, q_2, \ldots, q_n$ são as quantidades dos bens $1, 2, \ldots, n$, respectivamente, compradas pelo consumidor [9]. De acordo com a teoria do consumidor as equações de demanda são obtidas maximizando-se a função de utilidade, com a condição da restrição orçamentária, $\Sigma_i p_i q_i = y$, ser satisfeita na posição de equilíbrio, onde $p_1, p_2, \ldots, p_n$ são os preços pagos pelos bens adqui-

[8] Veja, por exemplo: JORDAN, C *Calculus of Finite Differences* 2 ed. New York, Chelsea Publishing, 1960. p 256-7

[9] Para uma apresentação mais detalhada deste sistema, bem como de outros sistemas de demanda, veja, por exemplo: THEIL, H *Theory and Measurement of Consumer Demand,* Amsterdam, North Holland, 1975 vol 1

ridos e y é a renda monetária do consumidor. Quando (4.1) é maxi mizada sujeita à limitação orçamentária, obtemos o Sistema de Des pesa Linear:

$$p_i q_i = p_i \gamma_i + \mu_i \left(Y - \sum_{k=1}^{n} p_k \gamma_k \right), \; i = 1, \ldots, n \tag{4.2}$$

o qual mostra que μ_i pode ser interpretado como a propensão margina a gastar no bem i ($\mu_i = \partial (p_i q_i) / \partial y$). A expressão $y - \sum_{k=1}^{n} p_k \gamma_k$ em (4.2) é conhecida como a "renda excedente" ("supernumerary in come"). Obviamente, para que a função de utilidade (4.1) seja defi nida, temos que impor a condição de $q_i > \gamma_i$. Se estivermos disposto a fazer a hipótese adicional de que $\gamma_i > 0$, os γ_i's podem ser interpre tados como as quantidades mínimas dos diversos bens comprados pelo consumidores. Neste caso, a interpretação da equação (4.2) é bastant interessante. O consumidor compra inicialmente uma quantidade γ_i d bem i ao preço p_i, e, portanto, gasta $p_i \gamma_i$ cruzeiros, digamos, na aquisi ção deste bem. Logo, o total gasto na compra das quantidades mínima dos diversos bens corresponde a $\Sigma_i q_i \gamma_i$ cruzeiros de sua renda. A diferen ça entre a renda y e este total, ou seja a "renda excedente" $Y - \sum_{k=1}^{n} p_k \gamma_k$ é o montante disponível para a aquisição de quantidades adicionais do diversos bens. De acordo com a equação (4.2), o consumidor gast uma proporção μ_i da 'renda excedente' na aquisição de $(q_i - \gamma_i)$ uni dades adicionais do bem i.

É conveniente, no exemplo dado a seguir, introduzir a variável x definida por [10]:

$$x_i = \frac{p_i q_i - p_i \gamma_i}{Y - \sum_{i=1}^{n} p_k \gamma_k} \tag{4.3}$$

É imediato de (4.3) que a variável x_i satisfaz as seguintes condições

$$x_i > 0 \text{ e } \sum_{i=1}^{n-1} x_i < 1$$

A teoria do comportamento aleatório racional afirma que, sob cer tas condições, o vetor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ é distribuído de acord com uma função de densidade de probabilidade do tipo Dirichlet defi nida por [11]:

$$g(x) = k \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i \right)^{\rho \mu_n} \prod_{i=1}^{n-1} x_i^{\rho \mu_i} \tag{4.4}$$

[10] Usaremos daqui por diante o mesmo símbolo para uma variável aleatória e o valor reali zado desta variável O significado deve ficar claro do contexto onde o símbolo fc usado

[11] Uma prova detalhada desta proposição está contida em: BARBOSA, F de *Rational Randon Behavior: Extensions and Applications* University of Chicago Center for Mathematice Studies in Business and Economics, 1975 Report 7534

onde $\rho = 1/C'$ e C' é o custo marginal de informação A função de densidade (4.4) é equivalente a função (2.1) especificando-se:

$$\alpha_i = \rho\mu_i + 1 \qquad \text{e} \qquad \alpha = \rho + n \tag{4 5}$$

e a região R, dada abaixo de (2.1), é satisfeita neste caso, como vimos anteriormente.

As médias, modas, variâncias e covariâncias das variáveis x_i do Sistema de Despesa Linear, tendo em vista as equações (2.2) — (2.4) e (4.5), são expressas por:

$$Ex_i = \frac{\rho\mu_i + 1}{\rho + n} \tag{4 6}$$

$$Mx_i = \mu_i \tag{4 7}$$

$$Var\ x_i = \frac{(\rho\mu_i + 1)\ [\rho(1 - \mu_i) + n - 1]}{(\rho + n)^2\ (\rho + n - 1)} \tag{4 8}$$

$$Cov\ x_i x_j = -\frac{(\rho\mu_i + 1)\ (\rho\mu_j + 1)}{(\rho + n)^2\ (\rho + n - 1)} \tag{4.9}$$

É interessante observar que, de acordo com a teoria do comportamento aleatório racional, quando um erro aleatório é acrescentado à equação (4.2) o valor esperado deste erro não é igual a zero Contudo, devido a (4.7), a moda deste erro é igual a zero.

4.2 Estimação das Propensões Marginais a Gastar

Usando o teorema bem conhecido da estatística que assegura que o estimador de uma função do estimador de máxima verossimilhança é também um estimador de máxima verossimilhança, podemos, uma vez conhecidos os estimadores dos α's, obter os estimadores dos μ's [12]. De fato, através de (4.5) temos que:

$$\hat{\mu}_i = \frac{\hat{\alpha}_i - 1}{\hat{\alpha} - n}, \ \hat{\rho} = \hat{\alpha} - n \tag{4.10}$$

onde $\alpha = \Sigma_i\, \hat{\alpha}_i$.

Os erros padrões dos μ's podem ser obtidos do seguinte modo. Considere o vetor $[\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}, \alpha_n]'$, o qual exclui a propensão marginal a gastar no enésimo bem, μ_n. A matriz de informação correspondente a este vetor é dada pela expressão seguinte [13].

$$(J^{-1})\ \ Inf\ \alpha\ \ (J')^{-1} \tag{4 11}$$

[12] Paıa uma apresentação deste teoıema veja, por exemplo: ANDERSON, T W *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*, New Yoık, John Wiley, 1958 p 48

[13] A pıova de (4 11) está contida, por exemplo, em: ZELNNER, A *An Introduction to Bayesian Infeernce in Econometrics* New York, John Wiley, 1971 p 48

onde J é a matriz Jacobiana associada com a transformação do novo vetor para o vetor dos α's:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mu_1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial \mu_1}{\partial \alpha_2} & \cdots & \frac{\partial \mu_1}{\partial \alpha_n} \\ \frac{\partial \mu_2}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial \mu_2}{\partial \alpha_2} & \cdots & \frac{\partial \mu_2}{\partial \alpha_n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial \mu_{n-1}}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial \mu_{n-1}}{\partial \alpha_2} & \cdots & \frac{\partial \mu_{n-1}}{\partial \alpha_n} \\ \frac{\partial \alpha_n}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial \alpha_n}{\partial \alpha_2} & \cdot & \frac{\partial \alpha_n}{\partial \alpha_n} \end{bmatrix} \qquad (4.12)$$

As derivadas parciais que aparecem na matriz acima são expressas por:

$$\frac{\partial \mu_i}{\partial \alpha_j} = \frac{\sum_{k \neq i} \alpha_k - (n-1)}{(\alpha - n)^2}, \text{ se } i = j \qquad (4.13)$$

$$\frac{\partial \mu_i}{\partial \alpha_j} = -\frac{(\alpha_i - 1)}{(\alpha - n)^2}, \text{ se } i \neq j \qquad (4.14)$$

$$\frac{\partial \alpha_n}{\partial \alpha_j} = 1, \text{ para } j = n \text{ e } \frac{\partial \alpha_n}{\partial \alpha_j} = 0, \text{ para } j = 1, \ \ldots, n-1 \qquad (4.15)$$

A matriz de variância-covariância do vetor $[\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}, \alpha_n]$ é, portanto, obtida invertendo-se a matriz (4.11). O resultado desta inversão é:

$$J' \ (Inf\ \alpha)^{-1} \ J \qquad (4.16)$$

Uma estimativa desta matriz de variância-covariância é, então, obtida usando-se os valores estimados de α através do método de máxima verossimilhança descrito no Capítulo 3 deste trabalho. A principal matriz de tamanho $(n-1)$ da matriz (4.15) será uma estimativa da matriz de variância-covariância do vetor $[\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}]'$. Como sabemos,

$$\mu_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i .$$

Segue-se, então, que a variância de μ_n será obtida pré e pós-multiplicando-se a matriz de variância-covariância do vetor $[\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}]$ por $l' = [1, \ldots, 1]'$.

5. UM EXEMPLO DA ESTIMAÇÃO DAS PROPENSÕES MARGINAIS A GASTAR

É importante notar que a variável aleatória x_i definida em (4.3), cuja moda é igual a propensão marginal a gastar no bem i, não é observável porque, em princípio, os parâmetros y's não são conhecidos. Uma maneira de contornar este problema é a de interpretar os γ's como sendo as quantidades mínimas dos diversos bens comprados pelos consumidores e então adotar a hipótese de que o consumo mínimo dos diversos bens observado para um determinado grupo de indivíduos é justamente igual ao valor dos γ's [14]. Neste caso, conhecendo-se os preços e as quantidades dos diversos bens, num determinado período, podemos computar os valores realizados das variáveis, $x_{i,t}$.

Com a finalidade de exemplificar o primeiro processo de estimação descrito no Capítulo anterior, tomaremos os valores de γ estimados por Theil, para alimentos (γ_1), bebidas e fumo (γ_2), duráveis (γ_3) e demais bens (γ_4), para a Holanda, no período 1921/63, excluído o período 1940/47, como sendo as quantidades mínimas consumidas destes bens [15]. Com auxílio dos dados coletados por Barten, calculamos os valores de x_{1t} (alimentos), x_{2t} (bebidas e fumo), x_{3t} (duráveis) e x_{4t} (demais bens), constantes do Quadro I [16].

---

[14] Obviamente, existe também a alternativa de considerar os γ's como parâmetros e maximizar a função de verossimilhança em relação a estes parâmetros Esta alternativa merece um estudo detalhado

[15] THEIL, H op cit, p 240

[16] BARTEN, A *Theorie en empirie van een stelsel van vraagvergelijkingen* BARTEN, A Escola de Economia da Holanda, 1966 Tese de Doutorado

QUADRO I

PROPENSÃO MARGINAL A GASTAR

(Holanda: 1921/1963

ANO	ALIMENTOS x_1	BEBIDAS E FUMO x_2	DURÁVEIS x_3	DEMAIS BENS x_4
1921	0,46	0,11	0,37	0,06
1922	0,44	0,09	0,40	0,07
1923	0,47	0,09	0,38	0,06
1924	0,47	0,10	0,38	0,05
1925	0,43	0,10	0,38	0,09
1926	0,43	0,11	0,37	0,09
1927	0,40	0,10	0,40	0,10
1928	0,39	0,10	0,39	0,12
1929	0,36	0,10	0,39	0,15
1930	0,34	0,10	0,38	0,18
1931	0,34	0,10	0,36	0,20
1932	0,35	0,08	0,35	0,22
1933	0,35	0,08	0,35	0,22
1934	0,37	0,08	0,33	0,22
1935	0,38	0,08	0,33	0,21
1936	0,36	0,08	0,34	0,22
1937	0,37	0,08	0,35	0,20
1938	0,37	0,09	0,32	0,22
1939	0,30	0,08	0,35	0,27
1948	0,27	0,12	0,31	0,30
1949	0,28	0,11	0,45	0,16
1950	0,29	0,11	0,46	0,14
1951	0,30	0,11	0,44	0,15
1952	0,34	0,11	0,40	0,15
1953	0,34	0,11	0,38	0,17
1954	0,32	0,11	0,40	0,17
1955	0,29	0,10	0,41	0,20
1956	0,27	0,10	0,42	0,21
1957	0,26	0,11	0,41	0,22
1958	0,27	0,11	0,39	0,23
1959	0,27	0,11	0,39	0,23
1960	0,25	0,11	0,40	0,24
1961	0,25	0,11	0,40	0,24
1962	0,25	0,11	0,40	0,24
1963	0,24	0,10	0,41	0,25

O Quadro II, abaixo, fornece as médias geométricas das propensões marginais a gastar nos quatro bens considerados. Estas médias geométricas, como já assinalamos anteriormente, são estatísticas suficientes para os parâmetros α, e contém toda a informação da amostra.

QUADRO II

MÉDIAS GEOMÉTRICAS DAS PROPENSÕES MARGINAIS A GASTAR

ALIMENTOS (G_1)	BEBIDAS E FUMO (G_2)	DURÁVEIS (G_3)	DEMAIS BENS (G_4)
0,33	0,10	0,38	0,16

A solução aproximada para os parâmetros α's é dada por (3.19) A solução desta equação é expressa por:

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_n \end{bmatrix} = 1/2 \begin{bmatrix} 1 - \sum\limits_{k \neq 1}^{n} G_k & G_1 & & G_1 \\ G_2 & 1 - \sum\limits_{k \neq 2}^{n} G_k & & G_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_n & G_n & & 1 - \sum\limits_{k \neq n}^{n} G_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 - 1 \\ G_2 - 1 \\ \vdots \\ G_n - 1 \end{bmatrix} \qquad (5\ 1)$$

Substituindo os valores de G_i do Quadro II na equação acima obtemos as seguintes estimativas dos parâmetros α's:

α_1	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\sum\limits_{i=1}^{4} \hat{\alpha}_i$
17,00	5,50	19,50	8,50	50,50

A matriz de variância-covariância estimada, usando-se (3.14), é a seguinte:

$\hat{\alpha}_1$	2	$\hat{\alpha}_3$	α_4	
5,659	1,572	5,974	2,575	$\hat{\alpha}_1$
	0,619	1,810	0,762	$\hat{\alpha}_2$
		7,422	2,896	$\hat{\alpha}_3$
			1,448	$\hat{\alpha}_4$

A solução acima é uma aproximação para a solução das equaçõe (3.6), e que pode servir como solução inicial num método mais refi nado, como o método de "Scoring"[17]. Com efeito, neste método as esti mativas de máxima verossimilhança são obtidas através de um process iterativo. A solução de α é dada por:

$$\alpha^{(1)} = \alpha^{(0)} + \left[Inf\ \alpha \right]^{-1}_{\alpha = \alpha^{(0)}} \cdot \left. \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} \right|_{\alpha = \alpha^{(0)}} \qquad (5.2$$

onde $\alpha^{(0)}$ é um valor inicial arbitrário. Uma vez especificado o $\alpha^{(0)}$ cal culamos $\alpha^{(1)}$, que servirá de novo $\alpha^{(0)}$; digamos $\alpha^{(0)} = \alpha^{(1)}$. Com este va lor calculamos o novo α, digamos $\alpha^{(2)}$. Procedemos desta maneira, su cessivamente, até termos $\alpha^{(n)} = \alpha^{(n-1)}$ que é a estimativa de máxim verossimilhança[18]. O valor α dado em (5.1) pode ser usado como valor $\alpha^{(0)}$ em (5.2). Neste trabalho não usamos este método, mas certa mente recomendaríamos seu uso para a obtenção de estimativas mai precisas dos parâmetros α. Entretanto, é interessante observar que qualidade da aproximação usada, através da equação (5.1), é bastant boa. Com efeito, calculando os valores de $\Psi(\tilde{\alpha}_i)$ e $\Psi(\alpha)$, com a apr ximação dada em (3.20), a qual é superior a (3.15), com oito casa decimais, obtemos os seguintes erros computados através de (3.6):

$\log G_i$	$\log G_i^* = \Psi(\hat{\alpha}_i) - \Psi(\hat{\alpha})$	ERROS
—1,10866263	—1,10852634	0,00013629
—2,30258509	—2,30094652	0,00163857
—0,96758403	—0,96748533	0,00009870
—1,83258146	—1,83194885	0,00063261

Os dados acima parecem indicar que quanto maior o valor dos α's m lhor a qualidade de aproximação (5.1).

As propensões marginais a gastar são estimadas usando-se (4.10 Os valores obtidos são dados no Quadro III, a seguir, onde os valore entre parênteses são os erros padrões das estimativas, os quais fora obtidos através da expressão (4.16).

[17] Paia uma apresentação do método de "Scoiing" veja, por exemplo: RAO C R *Linear St tistical Infeience and Its Applications* New York. John Wiley, 1965 Alteinativamen ao invés do método de "Scoring" podeiia usar-se o método proposto por GOLDFEL S M; QUANDT, R E; TROTTER, H F Maximization By Quadratic Hill-Climbin *Economet1ica,* New Haven, Conn, *34*: 541-51, 1966

[18] Na prática devemos especificar o erro que estamos dispostos a cometer, isto é, digam $e = \alpha^{(n)} - \alpha^{(n-1)} = 0{,}0001$,

QUADRO III

ESTIMATIVAS DAS PROPENSÕES MARGINAIS A GASTAR

ALIMENTOS (μ_1)	BEBIDAS E FUMO (μ_2)	DURÁVEIS (μ_3)	DEMAIS BENS (μ_4)
0,344 (0,014)	0,097 (0,053)	0,398 (0,020)	0,161 (0,035)

Isto é, a matriz de variância-covariância do vetor $[\mu_1, \mu_2, \mu_3]'$ é:

$\hat{\mu}_1$	$\hat{\mu}_2$	$\hat{\mu}_3$	
0,00020	—0,00040	0,00003	$\hat{\mu}_1$
	0,00280	—0,00070	$\hat{\mu}_2$
		0,00040	$\hat{\mu}_3$

A MATRIZ DE CORRELAÇÃO E OS COEFICIENTES DE REGRESSÃO E DE DETERMINAÇÃO: UMA EXPOSIÇÃO DIDÁTICA E CONSIDERAÇÕES ADICIONAIS

Prof. José Welisson Rossi
da UFRJ

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O objetivo destas notas é, principalmente, didático, já que grande parte do material aqui exposto representa ou um tratamento mais detalhado de resultados apresentados em outras fontes ou meras apresentações de provas omitidas nas fontes consultadas. Os Capítulos 2 e 4 se enquadram na primeira categoria. O Apêndice, por sua vez, pertence à segunda.

Rev bras Estat, Rio de Janeiro, 38(150) : 221-232, abr./jun 1977

Entretanto, algum material aqui também incluído é de cunho original, pelo menos na mente do autor. É o caso dos resultados do Capítulo 5.

No Capítulo 2 utilizou-se praticamente apenas informações da matriz de correlação para determinar-se, primeiramente, os coeficientes da regressão linear múltipla, e em seguida o coeficiente de determinação.

Uma aplicação numérica segue-se no Capítulo 3.

O Capítulo 4 é uma simples alternativa dos cálculos dos coeficientes da regressão, mas que fornece certos subsídios utilizados no item seguinte, onde são derivados os desvios padrões dos coeficientes.

É possível que a abordagem aqui seguida ofereça certas vantagens computacionais, principalmente se se dispõe de máquinas calculadoras (tipo HP-25, por exemplo) dotadas de programação para o cálculo de correlação simples entre variáveis.

2. O MODELO

2.1 Determinação dos Coeficientes da Regressão

Chamemos, inicialmente,

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \ldots & r_{1k} \\ r_{21} & r_{22} & r_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot \\ r_{k1} & r_{k2} \ldots & r_{kk} \end{bmatrix}$$

a matriz de correlação, onde $r_{ij} = r_{ji}$, para $j = 2, 3, \ldots, k$, é a correlação linear simples, definida adiante, entre Y e X_j.

Seja o modelo linear geral dado por[1]:

$$Y_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2_i} + \hat{\beta}_3 X_{3_i} + \ldots + \hat{\beta}_k X_{ki} + e_i ; \; i = 1,2 \; .. n$$

Então,

$$\overline{Y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \overline{X}_2 + \hat{\beta}_3 \overline{X}_3 + .. + \hat{\beta}_k \overline{X}_k + 0,$$

onde $\overline{Y}$ e $\overline{X}_j$ significam valores médios.

Portanto,

$$y = Y_i - \overline{Y} = \hat{\beta}^2(X_{2_i} - \overline{X}_2) + \quad + \hat{\beta}_k(X_{ki} - \overline{X}_k) + e_i$$

$$y_i = \hat{\beta}_2 x_{2_i} + \beta_3 x_{3_i} + \; .. + \hat{\beta}_k x_{ki} + e_i \therefore y_i = y_i + e_i$$

1 JOHNSTON, J *econometric methods* McGraw-Hill, London, 1972

O método de ajustamento dos mínimos quadrados consiste em minimizar $\Sigma\, e_i^2 = \Sigma\, (y_i - \hat{\beta}_2 x_{2i} - \ldots - \hat{\beta}_k x_{ki})^2$, onde o símbolo Σ significa somatório.

Então:

$$\frac{\delta \Sigma\, e_i^2}{\delta\, \hat{\beta}_j} = 0 \quad \text{para} \quad j = 2,\ 3, \ldots\ k,$$

fornece o conjunto das chamadas equações normais da regressão linear:

$$\hat{\beta}_2 \Sigma\, x_2^2 + \beta_3 \Sigma\, x_2\, x_3 + \ldots + \hat{\beta}_k \Sigma\, x_2\, x_k = \Sigma\, y\, x_2$$

$$\hat{\beta}\, \Sigma\, x_2 x_3 + \hat{\beta}_3 \Sigma\, x_3^2 + \ldots \hat{\beta}_k \Sigma\, x_3 x_k = y\, x_3$$

$$\vdots$$

$$\hat{\beta}_2 \Sigma\, x_2\, x_k + \hat{\beta}\, \Sigma\, x_3\, x_k + \ldots + \hat{\beta}_k \Sigma\, x_k\, x_k = \Sigma\, y\, x_k$$

(*NOTA*: O subíndice *i* foi eliminado para simplificação da notação).

Tais equações podem ser, convenientemente, escritas como:

$$\frac{\Sigma\, x_2\, x_2}{\sqrt{\Sigma\, x_2^2}\sqrt{\Sigma\, x_2^2}} \sqrt{\Sigma\, x_2^2}\sqrt{\Sigma\, x_2^2} + \ldots + \hat{\beta}_k \frac{\Sigma\, x_2\, x_k}{\sqrt{\Sigma\, x_2^2}\sqrt{\Sigma\, x_k^2}} \sqrt{\Sigma\, x_2^2}\sqrt{\Sigma\, x_k^2} = \frac{\Sigma\, y x_2}{\sqrt{\Sigma y^2}\sqrt{\Sigma\, x_2^2}} \sqrt{\Sigma y^2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\Sigma\, x_2\, x_k}{\sqrt{\Sigma\, x_2^2}\sqrt{\Sigma\, x_k^2}} \sqrt{\Sigma\, x_2^2}\sqrt{\Sigma\, x_k^2} + \ldots + \hat{\beta}_k \frac{\Sigma\, x_k\, x_k}{\sqrt{\Sigma\, x_k^2}\sqrt{\Sigma\, x_k^2}} \sqrt{\Sigma\, x_k^2}\sqrt{\Sigma\, x_k^2} = \frac{\Sigma\, y x_k}{\sqrt{\Sigma y_2}\sqrt{\Sigma\, x_k^2}} \sqrt{\Sigma y^2}$$

Uma vez que o coeficiente de correlação linear simples entre X_j e Y é dado por

$$r_{lj} = r_{jl} = \frac{\Sigma\, x_j y}{\sqrt{\Sigma\, x_j^2}\sqrt{\Sigma\, y^2}}$$

para $j = 2, 3, \ldots, k$, e o desvio padrão de X_j é definido como

$$s_j = \sqrt{\frac{\Sigma\, x_j^2}{n}},$$

então temos:

$$\hat{\beta}_2\, r_{22}\, s_2\, s_2 + \hat{\beta}_3\, r_{23}\, s_2\, s_3 + \ldots + \hat{\beta}_k\, r_{2k}\, s_2\, s_k = r_{21}\, s_2\, s_1$$

$$\hat{\beta}_2\, r_{32}\, s_3\, s_2 + \hat{\beta}_3\, r_{33}\, s_3\, s_3 + \ldots + \hat{\beta}_k\, r_{3k}\, s_3\, s_k = r_{31}\, s_3\, s_1$$

$$\vdots$$

$$\hat{\beta}_2\, r_{k2}\, s_k\, s_2 + \hat{\beta}_3\, r_{k3}\, s_k\, s_3 + \ldots + \hat{\beta}_k\, r_{kk}\, s_k\, s_k = r_{k1}\, s_k\, s_1$$

ou

$$\hat{\beta}_2 r_{22} s_2 + \hat{\beta}_3 r_{23} s_3 + \qquad + \hat{\beta}_k r_{2k} s_k = r_{21} s_1$$

$$\hat{\beta}_2 r_{32} s_2 + \hat{\beta}_3 r_{33} s_3 + \ldots + \hat{\beta}_k r_{3k} s_k = r_{31} s_1$$

$$\vdots$$

$$\hat{\beta}_2 r_{k2} s_2 + \hat{\beta}_3 r_{k3} s_3 + \ . \ + \hat{\beta}_k r_{kk} s_k = r_{k1} s_1$$

Resolvendo o sistema de equações acima (pela regra de Cramer, por exemplo), temos:

$$\hat{\beta}_2 = \frac{s_1 \cdot s_3 \cdot s_4 \ . \ s_k}{s_2 \ s_3 \ s_4 \ . \ s_k} \cdot \frac{\begin{vmatrix} r_{21} & r_{23} & & r_{2k} \\ r_{31} & r_{32} & . & r_{3k} \\ \vdots & & & \\ r_{k1} & r_{k2} & & r_{kk} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} r_{22} & r_{23} & & r_{2k} \\ r_{32} & r_{33} & . & r_{3k} \\ & & & \\ r_{k2} & r_{k3} & .. & r_{kk} \end{vmatrix}} = \frac{s_1}{s_2} \ \frac{M_{12}}{M_{11}},$$

onde M_{ij} é o menor do elemento r_{ij} da matriz R.

Da mesma maneira, para β_3, teremos:

$$\beta_3 = \frac{s_1}{s_3} \ \frac{\begin{vmatrix} r_{22} & r_{21} & r_{24} & & r_{2k} \\ r_{32} & r_{31} & r_{34} & \ldots & r_{3k} \\ \vdots & & & & \\ r_{k2} & r_{k1} & r_{k4} & & r_{kk} \end{vmatrix}}{M_{11}} = \frac{s_1}{s_3} \times \frac{-M_{13}}{M_{11}},$$

onde o sinal negativo decorre do fato de os elementos do determinante do numerador serem os mesmos de M_{13} com a intertroca da primeira e segunda colunas.

Por sua vez $\hat{\beta}_4$ seria:

$$\hat{\beta}_4 = \frac{s_1}{s_4} \times \frac{M_{14}}{M_{11}},$$

desde que os elementos do determinante do numerador sejam os mesmos de M_{14}, com duas intertrocas.

Generalizando, teríamos:

$$\hat{\beta}_j = (-1)^j \frac{s_1}{s_j} \ \frac{M_{1j}}{M_{11}}, \qquad \text{para } j = 2, 3, \quad k$$

Da teoria de matrizes, sabe-se que a relação entre co-fatores e menores é dada por:

$$C^{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

onde C_{ij} é o co-fator da matriz R, correspondente ao elemento r_{ij}.

Segue-se, então, que:

$$\hat{\beta}_2 = \frac{-s_1}{s_2}\frac{C_{12}}{C_{11}};\ \hat{\beta}_3 = \frac{-s_1}{s_3}\frac{C_{13}}{C_{11}};\ \hat{\beta}_4 = \frac{-s_1}{s_4}\frac{C_{14}}{C_{11}},$$

ou generalizando,

$$\hat{\beta}_j = \frac{-s_1}{s_j}\frac{C_{1j}^{[1]}}{C_{1f}}, \quad \text{para } j = 2, 3, ., k.$$

2.2 O Coeficiente de Determinação

$$R^2 = 1 \frac{-\Sigma e_i^2}{\Sigma y^2}$$

Vimos que

$$\hat{y} = \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{\beta}_3 x_3 + .. + \hat{\beta}_k x_k.$$

Substituindo os valores de $\hat{\beta}_j$, calculados acima, nesta relação, temos:

$$\hat{y} = \frac{-s_1}{s_2}\frac{C_{12}}{C_{11}} x_2 \frac{-s_1}{s_3}\frac{C_{13}}{C_{11}} x_3 - \ldots . - \frac{s_1}{s_k}\frac{C_{1k}}{C_{11}} x_k$$

Portanto,

$$\Sigma (y - \hat{y})^2 = \Sigma \left(y + \frac{s_1}{s_2}\frac{C_{12}}{C_{11}} x_2 + \ldots + \frac{s_1}{s_k}\frac{C_{1k}}{C_{11}} x_k\right)^2$$

Pode ser demonstrado (veja Apêndice) que [2]:

$$\Sigma e_i^2 = \Sigma (y_i - \hat{y}_i)^2 = n s_1^2 \frac{|R|}{M_{11}}$$

Portanto,

$$R_2 = 1 - \frac{\Sigma e_i^2}{\Sigma y^2} = 1 - \frac{|R|}{M_{11}}, \text{ já que } \Sigma\, y_2 = n s_1^2$$

[2] JOHNSTON, J. op cit.

3. APLICAÇÃO

Suponhamos os seguintes dados[3]:

Y	0	2	1	2	-1	1
X_2	-1	0	1	2	0	0
X_3	0	1	0	1	1	0

Então temos:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{31} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}552158 & 0{,}946943 \\ 0{,}552158 & 1 & 0{,}428746 \\ 0{,}943943 & 0{,}428146 & 1 \end{bmatrix}$$

Segue-se que:

$$|R| = 0{,}062948$$

$$C_{11} = (-1)^2 \, M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0{,}428746 \\ 0{,}428746 & 1 \end{vmatrix} = 0{,}816177$$

$$C_{12} = (-1)^3 \, M_{12} = \begin{vmatrix} 0{,}552158 & 0{,}428746 \\ 0{,}946943 & 1 \end{vmatrix} = -\,0{,}146160$$

$$C_{13} = (-1)^4 \, M_{14} = \begin{vmatrix} 0{,}552158 & 1 \\ 0{,}946943 & 0{,}428746 \end{vmatrix} = 0{,}71020$$

Adicionalmente, temos:

$$s_1 = 1{,}169045; \; s_2 = 1{,}032796; \; s_3 = 0{,}752773$$

Portanto:

$$R^2 = 1 - \frac{|R|}{C_{11}} = 0{,}922875$$

$$\hat{\beta}_2 = -\frac{s_1}{s_2}\,\frac{C_{12}}{C_{11}} = 0{,}20270$$

$$\hat{\beta}_3 = -\frac{s_1}{s_3}\,\frac{C_{13}}{C_{11}} = 1{,}351351$$

Por sua vez, $\hat{\beta}_1$, pode ser calculado da seguinte relação:

$$\hat{\beta}_1 = \overline{Y} - \hat{\beta}_2 \overline{X}_2 - \hat{\beta}_3 \overline{X}_3 = 0{,}540541$$

[3] GOLDBERGER, A S *Econometric Theory* New York, John Wiley, 1964 p 160

A relação estimada é, pois:

$$\hat{Y} = 0{,}540541 + 0{,}202703\ X_2 + 1{,}351351\ X_3$$

$$R_2 = 0{,}922875.$$

4. CÁLCULO ALTERNATIVO DOS COEFICIENTES $\hat{\beta}_j$

Talvez uma maneira mais adequada para o cálculo dos $\hat{\beta}_j$ seria como se segue:

Sabe-se que

$$y = \hat{\beta}_2\, x_2 + \hat{\beta}_3\, x_3 + \quad + \hat{\beta}_k\, x_k + e.$$

Após algumas operações algébricas simples, temos[4].

$$\frac{y}{s_1} = \hat{\beta}_2 \frac{s_2}{s_1} \frac{x_2}{s_2} + \hat{\beta}_3 \frac{s_3}{s_1} \frac{x_3}{s_3} + \ .\ .\ + \hat{\beta}_k \frac{s_k}{s_1} \frac{x_k}{s_k} + \frac{e}{s_1}$$

Utilizemos a seguinte notação:

$$y^* = \frac{y}{s_1};\ x_j^* = \frac{x_j}{s_j};\ \hat{\beta}_j^* = \frac{\hat{\beta}_j\, s_j}{s_1},\ s^* = \frac{e}{s_1}$$

A minimização de $\Sigma\, e^{*2} = \Sigma\, (y^* - \hat{y}^*)^2$ nos daria o seguinte conjunto de equações normais:

$$\begin{array}{l}
\hat{\beta}_2^*\ \Sigma\, x_2^{*} + \hat{\beta}_3^*\ \Sigma\, x_2^* x_3^* + \ .\ + \hat{\beta}_k^*\ \Sigma\, x_2^* x_k^* = \Sigma y^*\, x_2^* \\
\hat{\beta}_2^*\ \Sigma\, x_2^* x_3^* + \hat{\beta}_3^*\ \Sigma\, x_3^{*2} + \ .\ + \hat{\beta}_k^*\ \Sigma\, x_k^* x_3^* = \Sigma y^*\, x_3^* \\
\quad . \\
\\
\hat{\beta}_2^*\ \Sigma\, x_2^* x_k^* + \hat{\beta}_3^*\ \Sigma\, x_3^* x_k^* + \ .\ + \beta_k^*\ \Sigma\, x_k^{*2} = \Sigma y^*\, x_k^*
\end{array}$$

Escrevendo em forma matricial teremos:

$$\begin{bmatrix}
\Sigma\, x_2^{*2} & \Sigma\, x_2^* x_3^* & . & \Sigma\, x_2^* \bar{x}_k^* \\
\vdots & & & \\
\vdots & & & \\
\vdots & & & \\
\Sigma\, x_2^* x_k^* & \Sigma\, x_3^* x_k^* & .\ . & \Sigma\, x_k^{*2}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\hat{\beta}_2^* \\ \hat{\beta}_3^* \\ \\ . \\ \hat{\beta}_k^*
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\Sigma\, y^* x_2^* \\ \Sigma\, y^* x_3^* \\ \vdots \\ \vdots \\ \Sigma\, y^* x_k^*
\end{bmatrix}$$

---

[4] MARQUES, R M & BERQUÓ E Considerações sobre Modelos Causais *Revista Brasileira de Estatística*, Rio de Janeiro, *36* (141): 5-28, jan/mar 1975

Após substituirmos x_j^* e y^* pelos seus valores em termos de x_j, y e s_i, para $i = 1, \ldots, k$ e $j = 2, \ldots, k$, vem:

$$\begin{bmatrix} nr_{22} & nr_{23} & & nr_{2k} \\ nr_{32} & nr_{33} & & nr_{3k} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ nr_{k2} & nr_{k3} & \ldots & nr_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_2^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{\beta}_k^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} nr_{12} \\ nr_{13} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ nr_{1k} \end{bmatrix}$$

Simplificando notações, temos

$n\ [M_{11}]\ .\ \hat{\beta}^* = n.r$, onde $[M_{11}]$ é matriz de ordem $(k - 1) \times \times (k - 1)$; $\hat{\beta}^*$ e r são vetores de ordem $(k - 1) \times (1)$

Resolvendo para $\hat{\beta}^*$:

$$\hat{\beta}^* = [M_{11}]^{-1} \cdot r$$ [5]

Como

$$\hat{\beta}_j^* = \hat{\beta}_j\, x\, \frac{s_j}{s_1} \Longrightarrow \hat{\beta}_j = \hat{\beta}_j^*\, x\, \frac{s_1}{sj}$$

Aplicando ao problema anterior:

$$[M_{11}] = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}428746 \\ 0{,}428746 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow M_{11} = 0{,}816177$$

$$[M_{11}]^{-1} = \frac{1}{0{,}816177} \begin{bmatrix} 1 & 0{,}428746 \\ -0{,}428746 & 1 \end{bmatrix}$$

$$r = \begin{bmatrix} 0{,}552158 \\ 0{,}946943 \end{bmatrix}$$

Segue-se que:

$$\hat{\beta}^* = [M_{11}]^{-1} r = \begin{bmatrix} 0{,}17908 \\ 0{,}87016 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_2^* \\ \hat{\beta}_3^* \end{bmatrix}$$

Então:

$$\hat{\beta}_2 = \hat{\beta}_2^*\, x\, \frac{s_1}{s_2} = 0{,}20270$$

$$\hat{\beta}_3 = \hat{\beta}_3^*\, x\, \frac{s_1}{s_3} = 1{,}3513$$

[5] MARQUES, R M & BERQUÓ, E op cit

Conforme pode-se observar, estes resultados são idênticos aos da aplicação anterior.

5. ESTIMATIVAS DOS DESVIOS PADRÕES DOS $\hat{\beta}_j$

Pode-se demonstrar (veja Johnston) que se o modelo linear geral é dado por $J = \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{\beta}_3 x_3 + \ .. + \hat{\beta}_k x_k + e$, então a variância estimada dos β_j é:

$$V(\hat{\beta}) = \frac{\Sigma e^2}{n-k}(X'X)^{-1} \quad \text{onde } (X'X) = \begin{bmatrix} \Sigma x_2^2 & \Sigma x_2 x_3 . & \Sigma x_2 x_k \\ \vdots & & \\ \Sigma x_k x_2 & \ldots & \Sigma x_k^2 \end{bmatrix}$$

(*NOTA*. As variâncias são apresentadas na diagonal principal da matriz $V(\hat{\beta})$ e as convariâncias nas demais posições).

Da mesma maneira, se o modelo é

$$y^* = \hat{\beta}_2^* x_2^* + \qquad + \hat{\beta}_k^* x_k + e^*,$$

então:

$$V(\hat{\beta}) = \frac{\Sigma e^{*2}}{n-k}(X^{*\prime}X^*)^{-1},$$

onde

$$(X^{*\prime}X^*) = \begin{bmatrix} \Sigma x_2^{*2} & \Sigma x_2^* x_3^* & \Sigma x_2^* x_k^* \\ & & \\ \Sigma x_2^* x_k^* & & \Sigma x_k^* \end{bmatrix}$$

Conforme já mostrado,

$$(X^{*\prime}X^*) = n\ [M_{11}], \quad \text{e} \quad \Sigma e_2 = \frac{n\ s_1^2\ |R|}{M_{11}}.$$

Então,

$$V(\hat{\beta}^*) = \frac{|R|}{(n-k)\,M_{11}}\ x\ [M_{11}]^{-1} \text{ Da relação } \hat{\beta}_j^* = \hat{\beta}_j . \frac{S_j}{S_1},$$

segue

$$\hat{\beta}_j = \frac{S_1}{S_j}\hat{\beta}_j^* .$$

Então

$$V(\hat{\beta}_j) = \left(\frac{S_1}{S_j}\right)^2 \ V(\hat{\beta}_j^*)$$

Aplicando ao exemplo ilustrativo, temos:

$$V(\hat{\beta}^*) = \frac{0,062948}{3 \times 0,81617} \times \frac{1}{0,81617} \times \begin{bmatrix} 1 & -0,4287 \\ -0,4287 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 0,0314 \begin{bmatrix} 1 & -0,4287 \\ -0,4287 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$V(\hat{\beta}_j^*) = 0,0314; \quad V(\hat{\beta}_3^*) = 0,0314$$

Conseqüentemente:

$$V(\hat{\beta}_2) = 0,0403; \quad V(\hat{\beta}_3) = 0,0759$$

Os devidos desvios padrões são:

$$s\hat{\beta}_2 = \sqrt{V(\hat{\beta}_2)} = 0,2008; \qquad s\hat{\beta}_3 = \sqrt{V(\hat{\beta}_3)} = 0,2756.$$

Apresentação final da equação estimada:

$$\hat{Y} = 0,54054 + \underset{(0,2008)}{0,2027} X_2 + \underset{(0,2756)}{1,3513} X_3 \quad R^2 = 0,9228$$

(Dados entre parênteses representam os respectivos desvios padrões)

6. CONCLUSÃO

Na análise acima fica demonstrada a utilidade da matriz de cor relação tanto para a estimação dos coeficientes da regressão, com o devidos desvios padrões, bem como na estimação do coeficiente de de terminação Já foi também abordada a possível vantagem computacio nal oferecida.

Cumpre ainda salientar que a matriz de correlação se presta à detectação da presença de multicolinearidade Principalmente em se tratando de regressão linear com duas variáveis independentes (veja a multicolinearidade existente entre as variáveis X_2 e X_3, do exemplo ilus trativo). Naturalmente, no caso de regressão com mais de duas variá veis independentes, o problema se complica. Uma variável poderá ser a combinação de duas ou mais variáveis, o que não seria detectado na matriz de correlação.

APÊNDICE

Demonstração de que $\Sigma\, e_i^2 = ns_1^2 \dfrac{|R|}{M_{11}}$ para o caso de regressão múltipla com duas variáveis independentes:

$$\Sigma e_i^2 = \Sigma\,(y - \hat{y})^2 = \Sigma \left(y + \frac{s_1}{s_2}\, \frac{C_{12}}{C_{11}}\, x_2 + \frac{s_1}{s_3}\, \frac{C_{13}}{C_{11}}\, x_3 \right)^2 =$$

$$\Sigma \left[\left(y + \frac{s_1}{s_2}\, \frac{C_{12}}{C_{11}}\, x_2 \right)^2 + 2 \left(y + \frac{s_1}{s_2}\, \frac{C_{12}}{C_{11}}\, x_2 \right) \left(\frac{s_1}{s_3}\, \frac{C_{13}}{C_{11}}\, x_3 \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{s_1^2}{s_3^2}\, \frac{C_{13}^{\;2}}{C_{11}^{\;2}}\, x_3^2 \right] =$$

$$\Sigma \left(y^2 + 2y\, \frac{s_1}{s_2}\, \frac{C_{12}}{C_{11}}\, x_2 + \frac{s_1^2}{s_2^2}\, \frac{C_{12}^{\;2}}{C_{11}^{\;2}}\, x_2^2 + 2y \frac{s_1}{s_2}\, \frac{C_{13}}{C_{11}}\, x_3 + \right.$$

$$\left. + 2\, \frac{s_1^2}{s_2 s_3}\, \frac{C_{12} C_{13}}{C_{11}^{\;2}}\, x_2 x_3 + \frac{s_1^2}{s_3^2}\, \frac{C_{13}^{\;2}}{C_{11}^{\;2}}\, x_3^2 \right) =$$

$$\Sigma\, y^2 + \frac{2s_1}{s_2}\, \frac{C_{12}}{C_{11}}\, \Sigma\, yx_2 + \frac{s_1^2}{s_2^2}\, \frac{C_{12}^{\;2}}{C_{11}^{\;2}}\, \Sigma\, x_2^2 + \frac{2s_1}{s_3}\, \frac{C_{13}}{C_{11}}\, \Sigma\, yx_3 +$$

$$+ 2\, \frac{s_1^2}{s_2 s_3}\, \frac{C_{12} C_{13}}{C_{11}^2}\, \Sigma\, x_2 x_3 + \frac{S_1^2}{S_3^2}\, \frac{C_{13}^2}{C_{11}^2} \quad - \Sigma\, x_3^2$$

Note que:

$$\Sigma\, y^2 = ns_1^2,\ \Sigma\, x_2^2 = ns_2^2;\ \Sigma\, x_3^2 = ns_3^2;$$

$$\Sigma\, yx_2 = ns_1\ r_{12} s_2;\ \Sigma\, yx_3 = r_{13}\ ns_1 s_3;\ \Sigma\, x_2 x_3 = r_{23}\ ns_2 s_3$$

Então temos:

$$ns_1^2 + 2\, \frac{s_1}{s_2}\, \frac{C_{12}}{C_{11}}\, r_{12}\ n\ s_1 s_2 + \frac{s_1^2}{s_2^2}\, \frac{C_{11}^2}{C_{11}^2}\ n\ s_2^2 +$$

$$+ 2\, \frac{s_1}{s_3}\, \frac{C_{13}}{C_{11}}\, r_{13}\ n\ s_1 s_3 + 2\, \frac{s_1^2}{s_2 s_3}\, \frac{C_{12} C_{13}}{C_{11}^{\;2}}\, r_{23}\ n\ s_2 s_3 +$$

$$+ \frac{s_1^2}{s_3^2}\, \frac{C_{13}^{\;2}}{C_{11}^{\;2}}\ ns_3^2 =$$

$$= ns_1^2 + 2\ ns_1^2\ r_{12}\, \frac{C_{12}}{C_{11}} + n\ s_1^2\, \frac{C_{12}^{\;2}}{C_{11}^{\;2}} + 2ns_1^2\ r_{13}\, \frac{C_{13}}{C_{11}} + ns_1^2\, \frac{C_{13}^{\;2}}{C_{11}^{\;2}} =$$

$$= \frac{ns_1^2}{C_{11}} \left[C_{11} + 2\ r_{12}\ C_{12} + \frac{C_{12}^{\;2}}{C_{11}} + 2\ C_{13}\ r_{13} + \frac{C_{13}^{\;2}}{C_{11}} + 2\, \frac{C_{12} C_{13}}{C_{11}}\, r_{23} \right]$$

Agora deveremos demonstrar que a expressão entre parênteses igual a $|R|$:

$$\left[C_{11} + 2\ C_{12}\ r_{12} + \frac{C_{12}^2}{C_{11}} + 2\ C_{13}\ r_{13} + \frac{C_{12} C_{13}}{C_{11}} r_{23} + \frac{C_{12} C_{13}}{C_{11}} r_{23} + \frac{C_{13}^2}{C_{11}}\right] =$$

$$\left[C_{11} + C_{12}\left(\frac{2\ r_{12}\ C_{11} + C_{12} + C_{13}\ r_{23}}{C_{11}}\right) + \right.$$

$$\left. + C_{13}\left(\frac{2\ r_{13}\ C_{11} + r_{23}\ C_{12} + C_{13}}{C_{11}}\right)\right] =$$

$$= C_{11} + \frac{C_{12}}{C_{11}} (r_{12}\ C_{11} + r_{12}\ C_{11} + r_{22}\ C_{12} + r_{23}\ C_{13}) +$$

$$+ \frac{C_{13}}{C_{11}} (r_{13}\ C_{11} + r_{13}\ C_{11} + r_{23}\ C_{12} + r_{33}\ C_{13})$$

(Já que $r_{22} = r_{33} = 1$)

Note que

$r_{12}\ C_{11} + r_{22}\ C_{12} + r_{23}\ C_{13} = 0$ e $r_{13}\ C_{11} + r_{23}\ C_{12} + r_{33}\ C_{13} = 0$, que representam expansões de determinantes pelos elementos "estranhos" aos co-fatores.

Donde vem: $C_{11} + r_{12}\ C_{12} + r_{13}\ C_{13} = |R|$, pois temos aqui a expansão do determinante pelos elementos "identificados" com os co-fatores.

Então fica demonstrado que.

$$\sum e_i^2 = ns_1^2 \frac{|R|}{M_{11}}$$

Q.E.D.

Bibliografia

ANUÁRIO ESTATÍSTICO DO BRASIL — 1976

O IBGE acaba de publicar o trigésimo sétimo volume do ANUÁRIO ESTATÍSTICO DO BRASIL, correspondente ao ano de 1976.

Referida publicação, que constitui a mais importante contribuição da entidade à divulgação das estatísticas brasileiras, tem a sua elaboração calcada no mais rigoroso critério técnico, e integra o plano de oferecer aos usuários de estatísticas, com apreciável atualização, os principais resultados dos levantamentos estatísticos efetuados no País, para cuja realização contou com o trabalho conjunto e sincronizado de setores especializados estatísticos, geográficos, sócio-econômicos, editoriais e gráficos. Órgãos externos vinculados ao Sistema também colaboraram através de informações que foram harmonizadas e insertas no seu contexto.

O presente volume, com 816 páginas, fartamente enriquecido de gráficos e tabelas ilustrativos do assunto que enfoca, contém,

além da matéria habitual, tabelas novas, tais como as referentes às Normas Climatológicas e a Vegetação, na parte física; à População Residente, segundo as mesorregiões e à População Estimada, por microrregiões homogêneas e por municípios, na parte demográfica; à Pesquisa Industrial e às Unidades Habitacionais, na parte económica; aos Domicílios Particulares ocupados, por áreas metropolitanas, na parte social; e às Associações Culturais, Bibliotecas, Teatros e Cinemas, na parte cultural. Numerosas tabelas foram reformuladas visando a melhor apresentação, utilização e comparabilidade dos dados estatísticos. Houve também exclusões, sobretudo de dados censitários já publicados nas edições anteriores, permanecendo, no entanto, os confrontos entre os resultados nos diversos censos.

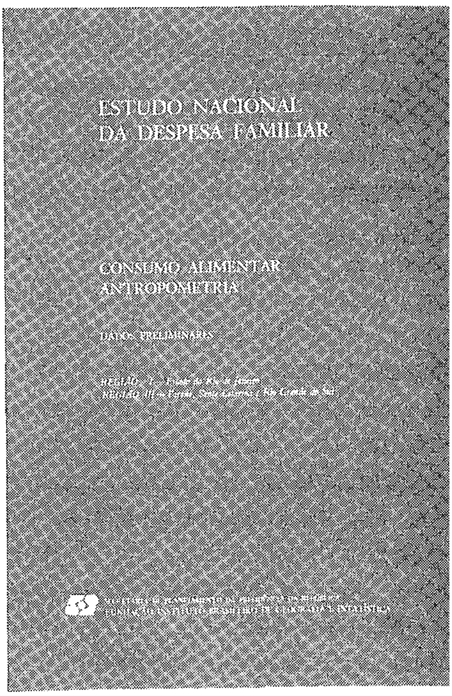
Assim, o ANUÁRIO, pela sua regularidade de publicação e seqüência dos campos investigados permite a determinação de série históricas, projeção e comparabilidade de dados para observação d fatos e fenômenos que evoluem a longo do tempo, se constituind num dos mais valiosos repositórios de dados estatísticos, indispensável a todos os setores econômicos e sociais, industriais e financeiros, políticos e educacionais bem como aos estudiosos em geral

ESTUDO NACIONAL DA DESPESA FAMILIAR

Consumo Alimentar — Antropometria

A FUNDAÇÃO INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA — IBGE, dando prosseguimento à divulgação dos resultados do ENDEF — Estudo Nacional da Despesa Familiar — apresenta, no Volume 1, Tomo 1 — Parte 1, "CONSUMO ALIMENTAR — ANTROPOMETRIA — 1977", uma nova coletânea de dados para a Região I (Rio de Janeiro) e para a Região III (Paraná, Santa Catarina e Rio Grande do Sul), relativos ao consumo de alimentos, em calorias e nutrimentos e estatísticas de medidas antropométricas, por sexo e classe de idade.

As informações sobre o consumo alimentar referem-se ao total das Regiões I e III e aos seguintes níveis de desagregação: área metropolitana, área urbana não metropolitana e área rural não metropolitana; e as estatísticas antropométricas, às Regiões I e III.



Nas tabelas que contêm dado de consumo alimentar têm-se um visão de conjunto dos aspectos nu tricionais através do consumo d calorias e de todos os nutriment para os quais se dispõe de elemen tos suficientes na literatura internacional para calcular necessidades nutricionais. Essa visão é complementada com a apresentação de informações relativas à importância de cada grupo de alimentos no consumo (em calorias e nutrimentos).

Em outro conjunto de tabelas apresentam-se informações estatísticas de particular interesse que permitem calcular, por exemplo, a qualidade do regime protéico através do correspondente índice de qualidade protéica da dieta. Divulgam-se, ainda, as qualidades consumidas para 120 produtos, a quantidade de alimentos comprados e não comprados e a estrutura quaternária do consumo, expressa em calorias provenientes das proteínas, dos lipídios, glicídios e do álcool.

As informações divulgadas sobre antropometria são o peso corporal, a altura e a circunferência do braço esquerdo (perímetro braquial médio).

Os dados ora divulgados estão sujeitos à revisão por se tratar de publicação de caráter preliminar. Os resultados definitivos só estarão disponíveis quando todo o trabalho de análise de consistência e processamento dos dados de todas as Regiões de pesquisa estiverem completados e examinados em conjunto.

Finalmente, ressalta-se que, no volume do ENDEF, são dadas, na introdução à apresentação das tabelas, algumas informações gerais sobre a pesquisa: um breve histórico, descrição dos objetivos e de aspectos metodológicos e explicativas sobre as tabelas.

PUBLICAÇÕES EDITADAS PELOS ÓRGÃOS DE ESTATÍSTICA DO IBGE NO PERÍODO DE JANEIRO-MARÇO DE 1977 *

Departamento de Divulgação Estatística — DEDIVE

31(81)(05)

BOLETIM ESTATÍSTICO. Rio de Janeiro, v. 33, n. 132, out./dez. 1975; v. 34, n. 133, jan./mar. 1976. Trimestral

Centro Brasileiro de Estudos Demográficos — CBED

312(81)
BOLETIM DEMOGRÁFICO CBED. Rio de Janeiro, v. 7, n. 3, jan./mar. 1977. Trimestral

Departamento de Estatísticas Industriais, Comerciais e de Serviços — DEICOM

31:66/69(81)

Indústrias de transformação — Pesquisa mensal — outubro de 1976. Rio de Janeiro, 1976. n. p., tab. Mimeografado

* Bibliografia preparada no Setor de Bibliografia do Centro de Documentação e Informação Estatística do IBGE

———. *novembro de 1976.* Rio de Janeiro, 1976, n. p , tab. Mimeografado

———. *dezembro de 1976.* Rio de Janeiro, 1976. n. p., tab. Mimeografado

31:69(81)
Indústria da construção. Inquérito mensal sobre edificações — janeiro/fevereiro/março de 1976. Rio de Janeiro, 1976. 119 p., tab. Mimeografado

———. *Preços de material de construção no comércio atacadista. Salários na indústria da construção — janeiro a junho de 1976.* Rio de Janeiro, 1976. 161 p., tab. Mimeografado

———. *julho a dezembro de 1976.* Rio de Janeiro, 1977. 159 p , tab. Mimeografado

338.5:31(81)
Inquérito nacional de preços. G neros alimentícios. Comércio v rejista das Capitais — 1974 junho de 1976. Rio de Janeir 1976. 55 p., tab. Mimeografad

———. *1975 a setembro de 197* Rio de Janeiro, 1976. 57 p., ta Mimeografado

381(813.3)
Comércio interestadual. Export ção por vias internas — Paraíl 1973. Rio de Janeiro, 1976 30 p tab. Mimeografado

381(814 1)
———. *Sergipe 1974.* Rio de J neiro, 1976. 55 p., tab. Mime grafado

381(817.2)
———. *Mato Grosso 1975.* R de Janeiro, 1976. 11 p , tab. M meografado

Todas as publicações do IBGE, inclusive as referentes às notas insertas nesta Revista, poderão ser adquiridas na sede da Instituição, à Avenida Augusto Severo, 8 — sobreloja, Rio de Janeiro — RJ, ou nas respectivas Delegacias de Estatística nas demais Unidades da Federação.