

REVISTA BRASILEIRA DE ESTATÍSTICA

Órgão oficial do IBGE
e Sociedade Brasileira de Estatística

Redação:

Av. Franklin Roosevelt, 166 — ZC-39
Rio de Janeiro, RJ — Brasil — Tel: 252-3605

Diretor responsável:

Amaro da Costa Monteiro

Secretário:

Mário Fernandes Paulo

A Revista não se responsabiliza
pelos conceitos emitidos
em artigos assinados

Preço:

assinatura anual:	Cr\$ 36,00
número avulso:	Cr\$ 10,00

Vendas:

Av. Franklin Roosevelt, 146-A — loja B
Tel: 242-7142

SUMÁRIO

Artigos

Demografia e desenvolvimento brasileiro	
— Prof. João Lyra Madeira . . .	619
O fenômeno urbano nas grandes cidades	
— François E. J. de Bremaeker ..	639
A integral generalizada de Riemann-Stieltjes	
— Prof. Hervey Guimarães Cova	661

Comunicações

Brasil: estimativa da mortalidade no período intercensitário 1960/70, através de metodologia proposta pelas Nações Unidas	
— Márcia Martins, Vera Regina de Souza Dias e Yvone Barandier	737
Bem-estar e indicadores de desigualdade	
— Ramonaval Augusto Costa	743

Bibliografia

— Resenha bibliográfica	753
— Sinopse Estatística do Brasil — 1975	758
— Registro Civil do Brasil	760
— Movimento Bancário do Brasil	760
— Os Recursos Naturais e o Planejamento	761
— Anuário Estatístico da Indústria Siderúrgica Brasileira-1975	762
— Estatística Portuária — 1974	762
— Anuário Estatístico da Borracha	763

Noticiário

— Estrutura organizacional do IBGE	764
— Reunião preparatória dos Censos Econômicos de 1975	766
— Comissões Regionais e Municipais de Estatísticas Agropecuárias	767

R bras Estat	Rio de Janeiro	v 36	n ° 144	p. 617 a 768	out /dez 1975
--------------	----------------	------	---------	--------------	---------------

Revista Brasileira de Estatística. v. 1- n. 1- jan./mar.
1940- Rio de Janeiro, Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e
Estatística. Diretoria de Divulgação. Centro Editorial, 1940-

v. 27cm Trimestral

Antiga estrutura deste órgão: Brasil. Conselho Nacional de Estatística.
Diretoria de Documentação e Divulgação; Instituto Brasileiro de Estatística.
Departamento de Divulgação Estatística e Diretoria Técnica. Departamento de
Divulgação Estatística.

1. Estatística — Periódicos. I. Fundação Instituto Brasileiro de Geo-
grafia e Estatística. Diretoria de Divulgação. Centro Editorial, ed.

CDD 310.5



CDU 31:05(81)

DEMOGRAFIA E DESENVOLVIMENTO BRASILEIRO*

Prof. João Lyra Madeira

do Centro Brasileiro de Estudos Demográficos
do IBGE

SUMÁRIO:

1. *Introdução*
2. *Volume da população e crescimento demográfico*
3. *Bases de uma política*

1. INTRODUÇÃO

1.1 Desde longa data os problemas de população vêm preocupando os sociólogos, economistas e administradores. Por outro lado, os aspectos teóricos matemáticos desses problemas passaram a ser estudados por atuários e especialistas em biometria, surgindo daí uma nova ciência — A Demografia — destinada a permitir a análise específica dos problemas de população em seus diferentes aspectos. A célebre polêmica entre os partidários de Malthus e os seguidores de Marx despertaram novo interesse pelos problemas de população, na segunda

* Conferência proferida na Escola Superior de Guerra, em 28 de agosto de 1974. Divulgação autorizada pela referida Entidade

metade do século passado. Depois os economistas voltaram a esquecê-los quando, na década dos 30, os problemas a curto prazo assumiram a primazia, relegando a 2.º plano os problemas de população. De fato, no quadro de soluções a curto prazo, a variável demográfica desempenhava um papel puramente exógeno, isto é, constituía apenas um dado a mais a ser considerado na solução dos problemas econômicos, mas não fazia parte da estrutura interna do modelo.

1.2 Foi só depois da segunda guerra mundial que os problemas de população voltaram a desempenhar um papel mais significativo na formulação dos modelos econômicos, dado o caráter endógeno que passou a desempenhar nesses modelos. Cabe aqui ressaltar o papel importante do avanço tecnológico no setor dos transportes e, mais ainda, no das comunicações, nesse novo impulso dado aos estudos populacionais. Esses progressos permitiram que todos os países entrassem em contato com uma dura realidade. Em torno de 1958, cerca de 67% da população do mundo, vivendo nos países mais pobres (com um produto bruto “per capita” não superior a 300 dólares anuais), recebia apenas 14% do produto bruto mundial, ao passo que 25% da população da Terra, vivendo nos países mais ricos (com um produto bruto “per capita” superior a 500 dólares anuais), detinha quase 79% daquele produto bruto. Essa tremenda desigualdade da distribuição mundial da riqueza (que de então para cá ainda se agravou) tornou-se evidente pela comparação dos modos de vida das diferentes nações, patenteada pelos poderosos meios de comunicação modernos, o que despertou o espírito desenvolvimentista que passou a vigorar nos países mais pobres. Por seu turno, esse fato motivou o estudo teórico do processo de desenvolvimento econômico-social e deu uma extraordinária importância política à população nos planos econômicos postos em prática nos países mais pobres.

1.3 De fato, o desenvolvimento econômico, embora realizado através de planos sucessivos a curto prazo, constitui, na sua essência, um objetivo a ser executado a longo prazo. Nessa nova posição as variáveis demográficas não podem figurar como dados do problema. A população constitui um elemento ao mesmo tempo determinante e determinado, isto é, deverá ser incluída no modelo geral de desenvolvimento econômico-social com um caráter endógeno. Por outras palavras, se o modelo de desenvolvimento tem como “out-put” o produto bruto “per capita”, por exemplo, esse elemento constituirá “input” de um sub-modelo demográfico, imbricado no modelo econômico geral, e exercerá um efeito mensurável sobre os fatores do crescimento demográfico, isto é, sobre a mortalidade, a fecundidade e as migrações internas. Não pretendendo fazer uma análise de profundidade da estrutura desse modelo, tentaremos, no entanto, desentranhar alguns aspectos e características importantes da população dentro do processo integrado de desenvolvimento econômico-social.

1.4 Nas estimativas da população brasileira, realizadas pelo Centro Brasileiro de Estudos Demográficos do IBGE, foram utilizadas as seguintes hipóteses, baseadas em suas próprias pesquisas.

Mortalidade — Adotou-se a esperança de vida ao nascer de 58 anos para o quinquênio 1970 — 1975, aumentando gradativamente, até atingir uma esperança de vida de 71 anos no período 1995 — 2000, correspondente à dos Estados Unidos na atualidade.

Fecundidade — Foram feitas duas hipóteses: a primeira, denominada alternativa superior, parte de uma fecundidade total de 5,27 no período 1970 — 1975, declinando lentamente até 4,60 no quinquênio 1995 — 2000. A segunda, denominada alternativa inferior, parte de 5,07 em 1970 — 1975 e declina mais rapidamente até 3,62 em 1995 — 2000

Resultaram, assim, duas séries de projeções da população por classe quinquênais de idades. De acordo com os resultados obtidos, a população do Brasil, no ano 2000, ficará entre 207 milhões (alternativa inferior) e 222 milhões (alternativa superior). A distribuição nas classes “0 — 15”, “15 — 65”, e “65 e mais”, nos anos inicial e final do período de projeção, é a seguinte:

TABELA 1

PROPORÇÕES DE PESSOAS POR GRANDES CLASSES DE IDADES

CLASSES DE IDADES	1970	2000	
		Alternativa Superior	Alternativa Inferior
0 — 15 .	424,8	399,8	391,7
15 — 65	543,9	558,8	569,6
65 e mais	31,3	41,4	38,7
TOTAL	1 000,0	1 000,0	1 000,0

De acordo com os resultados foram calculadas as taxas de crescimento natural por quinquênios, durante o período de projeção cujos valores encontram-se na Tabela 2.

TABELA 2**TAXAS DE CRESCIMENTO DA POPULAÇÃO BRASILEIRA SEGUNDO
AS PROJEÇÕES — CBED — IBGE**

QUINQUÊNIO	TAXAS DE CRESCIMENTO: ‰	
	Alternativa Superior	Alternativa Inferior
1970 — 75	28,84	27,58
1975 — 80	29,72	27,61
1980 — 85	29,79	26,92
1985 — 90	29,12	25,53
1990 — 95	28,54	24,07
1995 — 2000	28,42	22,79

Como se verifica, a taxa de crescimento, no caso da alternativa superior, ainda tenderia a aumentar até 1980-85, declinando lentamente a seguir e atingindo, no último quinquênio do século, um nível ligeiramente inferior ao do quinquênio inicial (1970-75). Isso resulta da ação combinada do forte declínio de mortalidade e um fraco declínio da natalidade associadas com uma ligeira modificação da composição por idade. A resultante final é um declínio mais rápido da taxa bruta de mortalidade até o quinquênio 1980-85, a partir de onde o declínio da natalidade passa a ser ligeiramente mais acentuado.

No caso da alternativa inferior, o declínio da natalidade é suficientemente intenso para compensar o declínio da mortalidade, resultando uma taxa de crescimento que atinge no final do século um nível cerca de 17% mais baixo do que o inicial. As estimativas de declínio são bastante moderadas, não sendo impossível que a fecundidade possa vir a apresentar uma redução mais forte, caso em que a população do país, no ano 2000, não atingiria os 200 milhões de habitantes.

2. VOLUME DA POPULAÇÃO E CRESCIMENTO DEMOGRÁFICO

2.1 Relacionados com a população há dois tipos de problemas:

- os que dizem respeito à taxa de crescimento da população, ligados essencialmente ao crescimento rápido, que é o caso do Brasil;
- os que dizem respeito ao volume da população e suas relações com os recursos econômicos.

As questões levantadas em cada um desses casos são bastantes diferentes e passaremos a examiná-las na medida que nos permitir o espaço disponível.

2.2 Analisaremos, inicialmente, dois aspectos principais relacionados com o crescimento rápido de uma população, isto é, os que decorrem da necessidade de o sistema econômico-social acompanhar o aumento do número de habitantes, e os que resultam da estrutura

demográfica inerente a cada nível de crescimento. É óbvio que uma população que cresce rapidamente se impõe um duplo encargo: o primeiro consiste em fazer com que toda a sua infra-estrutura econômico-social acompanhe esse crescimento, enquanto o segundo tem por objetivo realizar um certo progresso econômico. O primeiro é conseguido através de uma parcela das inversões totais denominadas inversões demográficas; o segundo se processa através das chamadas inversões econômicas. Admite-se, em geral, que as inversões totais são limitadas pela capacidade máxima de poupança da população; assim, torna-se claro que a taxa de crescimento demográfico, que comanda o montante das inversões demográficas, reduz na mesma medida as inversões econômicas, limitando-as ao resíduo entre as inversões totais e o montante das inversões demográficas. Em outras palavras podemos dizer que o montante total das inversões se decompõe em duas parcelas: uma destinada a assegurar ao acréscimo demográfico o mesmo nível de vida e o mesmo grau de equipamento da população atual, e outra destinada a melhorar o nível de vida e o equipamento de toda a população. A primeira constitui as inversões demográficas e a segunda as inversões econômicas. Veremos depois que essa distinção é válida até certo ponto, mas que, analisada rigorosamente, é algo inadequada. Entre as inversões demográficas podemos citar como exemplo a construção de novos domicílios para atender ao aumento da população.

2.3 É fácil verificar que a taxa de crescimento das novas construções é obrigatoriamente superior à taxa de crescimento da população, suposta constante se se mantém o número de pessoas por domicílio. De fato, além da construção anual dos domicílios necessários para atender à nova demanda, deve-se acrescer uma certa quantidade, que também cresce anualmente com a população, necessária para reposição de antigas moradias deterioradas. Supondo uma reposição igualmente distribuída no tempo e uma duração média de 100 anos por domicílio, uma população que crescesse a uma taxa anual constante de 2,8% teria que aumentar anualmente as construções a uma taxa de 3,2% para que, durante 50 anos, pudesse atender à nova demanda de domicílios e assegurar a reposição necessária. Essa taxa se refere ao período de 50 anos, já que varia com o período considerado, isto é, ela é variável com o tempo, apesar da constância suposta para a taxa de crescimento da população. O mesmo ocorre em todos os casos em que há necessidade de reposição, ou de manutenção, o que constitui, até certo ponto, uma outra forma de reposição. Assim, o processo citado atinge, praticamente, todos os bens necessários duráveis e semiduráveis.

2.4 Suponhamos que a relação capital/renda seja igual a 4, isto é, um capital 4 produz uma renda social igual a 1. Assim, se a taxa de crescimento da população é r , será necessário constituir o capital $4r$ para que o capital médio por habitante não fique diminuído. Havendo necessidade de reposição do capital, o montante necessário ainda será maior do que $4r$, face ao que vimos anteriormente. Nesse caso,

para uma inversão total de 18% do PIB e para uma taxa de crescimento demográfico de 2,8%, em um período de 50 anos, seria absorvido um total de $4 \times 3,2 = 12,8\%$ do PIB por ano para inversões demográficas, restando apenas 5,2% para inversões econômicas, isto é, para aquelas aplicações que se destinam a elevar o nível e melhorar o padrão de vida da população. Na melhor hipótese esse total seria igual a $4 \times 2,8 = 11,2\%$ do PIB, ficando apenas 6,8% para inversões econômicas. Assim, o crescimento demográfico estabelece uma alocação, automática de recursos entre inversões demográficas e inversões econômicas, destinando tanto mais às primeiras quanto mais elevada for a taxa de crescimento da população.

2.5 A idéia geral é de que as inversões demográficas não proporcionam desenvolvimento econômico mas tão somente asseguram a manutenção do “status quo”; o desenvolvimento decorreria apenas das inversões econômicas. Essa idéia, todavia, não é inteiramente exata. De fato, os bens econômicos que são repostos incorporam todo o progresso tecnológico havido entre a época da 1a. aquisição e a da sua reposição. Assim, para exemplificar, as máquinas de calcular manuais foram substituídas por máquinas eletromecânicas e estas por máquinas eletrônicas.

O mesmo ocorre com os novos equipamentos, com os novos domicílios destinados ao acréscimo da população, visto que, também eles incorporam gradativamente o progresso tecnológico normal do processo de desenvolvimento econômico. Portanto, as inversões demográficas não se limitam a manter o “status quo”; de uma forma ou de outra, ela promove algum desenvolvimento econômico. Todavia devemos reconhecer que os maiores progressos, as inovações mais importantes, se dão nas formas de inversões denominadas econômicas. Portanto, se não podemos dizer de uma maneira absoluta que, face à taxa alternativa de crescimento “adotada”, a população faz uma escolha entre quantidade de habitantes e qualidade da vida, há, todavia, uma escolha segundo a qual ela dá maior ênfase, ora à quantidade através das inversões demográficas, ora à qualidade mediante as inversões econômicas. Mas essa escolha que a população faz entre crescer e melhorar o padrão de vida resulta de várias escolhas, que se processam ao nível familiar, atendendo aos interesses que se apresentam a esse nível, e respondendo aos incentivos e motivações proporcionados pela comunidade a que pertencem (vilas, cidades, grandes metrópoles, etc.). Ora, se por um lado cabe à coletividade reduzir, tanto quanto possível, o nível da mortalidade, esse nível, por seu turno, interfere nas decisões dos grupos familiares, determinando o número de nascimentos necessários para que seja conseguido o número desejado de filhos e adultos. Em resumo, pois, a intensidade e o nível do progresso econômico-social e as condições de vida que auferem a coletividade ao nível macroeconômico determinam os incentivos que, em última análise, fixam, ao nível familiar, a dimensão média da família idealizada. Por outro lado, a mortalidade determina o número de nascimentos neces-

sários para se atingir essa dimensão, enquanto o conhecimento e o acesso aos métodos anti-conceptivos estabelecem a medida dos erros por excesso que se cometem na tentativa de conseguir a dimensão desejada da família. Desse conjunto de fatores resulta o crescimento demográfico que a população terá.

Portanto, a alocação de recursos entre número e qualidade de habitantes de um país constitui uma macrodecisão que é um resultado inevitável do conjunto de microdecisões que se processam ao nível dos grupos familiares, com o fim de atender outros objetivos que não os da população em conjunto. Voltaremos a examinar esse aspecto importante na fixação de uma política demográfica capaz de se adaptar, da melhor maneira possível, a uma política de desenvolvimento econômico.

2.6 Entre os diferentes aspectos do problema do crescimento demográfico devemos salientar, especialmente, o problema da urbanização. De fato, ao lado da explosão demográfica dos últimos decênios, em parte alimentado por ela e em parte pelas migrações do campo para as cidades, tem-se observado, também, uma explosão urbana de proporções inéditas, caracterizada por um crescimento excessivo das maiores cidades e das grandes áreas metropolitanas. Essa explosão se torna patente no Brasil se considerarmos que, enquanto o país, como um todo, cresceu no decênio 1960/1970 a uma taxa média anual de 2,86%, os aglomerados urbanos de mais de 100.000 habitantes cresceram a uma taxa anual de 6,30%; os de 10.000 habitantes ou mais, a uma taxa de 6,13% e os de menos de 10.000 habitantes, à razão de 2,30% ao ano. Assim, se a explosão demográfica do país faz a população dobrar em 24 anos e meio, os aglomerados urbanos de mais de 100.000 habitantes dobrarão seu volume demográfico em apenas 11 anos. Essa explosão urbana, considerada sob o ponto de vista geográfico da distribuição territorial, tem, na realidade, o caráter de uma imensa implosão, visto que, cada vez mais e com uma extraordinária velocidade, a população abandona grandes áreas em diversos pontos do país, para se concentrar nas cidades e grandes regiões metropolitanas as quais, como área, representam uma fração ínfima do território nacional. É possível, então, fixar-se uma meta relacionada com esse aspecto do movimento demográfico, estabelecida sob forma de um vetor, com quatro componentes, digamos correspondentes, respectivamente, às grandes áreas metropolitanas, às cidades grandes, às cidades pequenas e ao campo, determinando-se o "vetor intervenção", tal como foi sugerido em 2.3, capaz de conduzir a distribuição territorial, através das migrações, à meta desejada. No estabelecimento dessa meta ficaria explícito o pensamento dominante da necessidade reconhecida de um crescimento mais balanceado desses aglomerados, e o vetor intervenção determinaria os movimentos a serem conseguidos a fim de se realizar uma transferência, real ou aparente¹, da população dos grandes centros urbanos para os

¹ MADEIRA, João Lyra. Migrações internas no planejamento econômico. In: COSTA, Manuel Augusto et alii. *Migrações internas no Brasil*, Rio de Janeiro, IPEA/INPES, 1971 190 p., il (Brasil IPEA/INPES Monografia, 5) p. 35-58, il

centros de menor porte, existentes ou a serem criados "ad hoc". Com relação às migrações rural-urbanas, deve-se ter em vista que apesar dos problemas que podem criar a curto prazo, o permanente progresso tecnológico, devidamente orientado, proporcionará, a longo prazo, um aumento da produtividade agrícola, com a liberação conseqüente da mão-de-obra do campo. No tipo de estudo aqui considerado, com o objetivo de estabelecer um processo de urbanização controlada, deve-se separar a parcela devida ao crescimento geral do país daquela que decorre de movimentos migratórios específicos, porque cada um deles depende de um tipo diferente de ação corretiva. Estamos certos de que, muito mais grave do que o crescimento das necessidades humanas decorrentes do aumento rápido da população, é a deterioração do ambiente sócio-cultural e do ambiente natural conseqüente à tremenda implosão urbana desordenada, com a vida se concentrando nessas pequenas áreas barulhentas e regorgitantes de população, de veículos, de fábricas e de poluição. As necessidades humanas serão atendidas pelo progresso tecnológico e pela exploração dos recursos naturais inexplorados, em particular os imensos recursos dos mares² ao passo que, até agora, tem sido dada pouca ou nenhuma atenção aos outros problemas. Acreditamos que o ponto crítico da capacidade demográfica do país, a longo prazo, não se estabeleça em termos de limitações econômicas, mas em termos de limitações do meio físico e do ambiente sócio cultural. Portanto, os problemas de crescimento urbano, principalmente das grandes cidades e áreas metropolitanas, associados à deterioração dos processos de utilização do lazer e do aproveitamento espiritual do meio ambiente, merecem uma atenção muito maior, por parte dos pesquisadores e administradores, do que vem sendo atribuída na atualidade. Este será um imenso campo aberto à pesquisa, já que o bem-estar da população, no futuro, vai depender, em grande parte, dos conhecimentos que tenhamos adquirido neste setor e da medida em que possamos formular metas objetivas e utilizar ações corretivas eficientes, através do conhecimento das motivações que comandam o movimento para as cidades, da poderosa atração que elas exercem e dos meios de que disponhamos para contrabalançar essa atração.

Além dos problemas apontados, o crescimento desregrado das cidades atua num sentido desfavorável que pode agir como elemento freador do progresso econômico. É que, se em certas circunstâncias, o crescimento da população pode proporcionar o que se costumou denominar "economias de escala", pode acontecer, em outros casos, o aparecimento de "deseconomias de escala". De fato, quando as aglomerações urbanas ultrapassam uma determinada dimensão ou apresentam um crescimento excessivo, os novos problemas que surgem, associados a essa hipertrofia urbana acarretam, no custo dos serviços públicos, um acréscimo mais que proporcional ao aumento do número

² Há imensos recursos inexplorados nos mares, lagos e rios que poderão assegurar os meios de subsistência de uma população muito maior que a atual, se as nações se dispuserem a preservá-los, evitando a poluição que os ameaça. Como diz Cousteau, só agora se começa a descobrir o mar e, ao descobri-lo, verifica-se que ele está morrendo.

de habitantes, de modo que o sistema econômico pode passar a funcionar em regime de custos crescentes, comprometendo, assim, o progresso econômico do país.

2.7 O segundo aspecto desfavorável do crescimento rápido da população é que a distribuição por idade apresenta uma estrutura desfavorável. A pirâmide etária torna-se excessivamente larga na base e estreita nas idades adultas. Esse aspecto pode ser apreciado comparando-se, por exemplo, as pirâmides do Brasil, que cresce à taxa de 2,8% ao ano, e da França, onde a taxa de crescimento é de 0,6%.

TABELA 3

CARACTERÍSTICAS E CLASSES DE IDADES	BRASIL — 1970*	FRANÇA — 1970**
Esperança de vida ao nascer.	57,6 anos	71,6 anos
Fecundidade total.	5,67	2,32
Taxa de crescimento	28,0‰	6,1‰
Classes de idades: 0 — 15	417,4‰	244,7‰
15 — 65	558,6‰	624,3‰
65 e mais	24,0‰	131,0‰

FONTES: * — Censo de 1970
 ** — La population de France — C.I.C.R.E.D. — 1974

Como se verifica, o grupo 0 — 15 apresenta-se, no Brasil, com uma proporção superior em 70,6% ao da França, o que pode dar uma idéia da maior magnitude, em nosso país, dos problemas ligados à juventude, entre os quais se destacam a educação e a formação profissional. O grupo 15 — 65 apresenta-se no Brasil, reduzido de uns 10,5% em relação ao da França, o que pode servir de índice da deficiência relativa de mão-de-obra. O grupo 65 e mais se apresenta, no Brasil, com apenas 18,4% do correspondente na França. Se considerarmos, em conjunto, os dois grupos “0 — 15” e “65 e mais”, relacionados com o grupo central “15 — 65”, obteremos um índice de dependência econômica que é $375,7/624,3 = 60,2\%$ na França e $441,4/558,6 = 79,0\%$ no Brasil. Como veremos adiante, a análise teórica permite compreender os aspectos importantes que relacionam a forma da pirâmide aos fatores do crescimento demográfico. A fim de permitir uma visão mundial

TABELA 4

DISTRIBUIÇÃO DA POPULAÇÃO POR GRANDES CLASSES DE IDADES EM VÁRIAS REGIÕES DO MUNDO: %

CLASSES DE IDADES	REGIÕES						
	MUNDO	REGIÕES EM DESENVOLVIMENTO	REGIÕES INDUSTRIALIZADAS	EUROPA (EXCL. URSS)	ÁSIA	ÁFRICA	AMÉRICA DO NORTE
0 — 15.	36,8	40,3	27,7	25,6	40,5	40,9	28,2
15 — 60	55,9	54,8	59,5	60,4	54,9	54,6	57,7
60 e mais	7,3	4,9	12,8	14,0	4,6	4,5	14,1

ampla da distribuição por idade e suas relações com o desenvolvimento econômico, damos a seguir um quadro com a distribuição nas grandes classes "0 - 15", "15 - 60" (em lugar de 15 - 65) e "60 e mais".

Como se verifica, o grupo central é sempre mais elevado nas regiões economicamente desenvolvidas e o grupo jovem nas regiões subdesenvolvidas.

2.8 Consideremos agora os efeitos da mortalidade e da fecundidade sobre a estrutura etária de uma população. Em primeiro lugar, e contrariamente ao que geralmente se pensa, o declínio da mortalidade não contribui para envelhecer mas, para rejuvenescer a população. Isso se deve aos padrões de declínio da mortalidade observados na prática. A razão é simples: na luta contra a morte, o homem só conseguiu, até agora, um domínio franco sobre as causas exógenas de mortalidade, isto é, aquelas que provêm do meio ambiente, e cujo combate se processa através do saneamento básico, dos meios de imunização e do controle de vetores de moléstias. Ora, pelo menos as causas referidas nos dois primeiros grupos atingem em larga escala a infância e a juventude, ao passo que na idade adulta e na velhice as principais causas de morte são as de origem endógena (moléstias degenerativas em geral), sobre as quais a ação do homem pouco realizou até agora em termos de combate eficiente em larga escala. Assim, o padrão de declínio da mortalidade tem sido, até agora, um padrão uniforme, segundo o qual, à medida em que melhoram as condições sanitárias e imunológicas, o declínio da mortalidade ocorre em proporção muito maior na infância e juventude do que na idade adulta e na velhice. Exemplificando: se o nível da mortalidade se reduz, digamos em 20%, essa redução é superior a 30%, em média, nas idades jovens (até os 20 ou 25 anos digamos), o inferior a 10% depois dessas idades. Portanto, quando ocorre um declínio da mortalidade, ele economiza uma proporção muito maior de jovens e crianças do que de adultos e velhos, o que contribui obviamente, para o rejuvenescimento da população. No futuro, se o homem conseguir dominar as causas endógenas com a mesma eficiência com que tem dominado, até aqui, as causas exógenas, então o padrão de declínio da mortalidade poderá vir a ser tal que uma redução da mortalidade contribua para o envelhecimento da população.

2.9 Ao contrário, o declínio da fecundidade tem contribuído em escala extremamente importante para o envelhecimento da população. Os efeitos desse envelhecimento pode ser facilmente percebido por uma simples inspeção das Tabelas 3 e 4. Todavia, a fim de isolar os efeitos da mortalidade e da fecundidade sobre a composição por idade, com relação aos seus reflexos sobre as grandes classes "0 - 15", "15 - 65" e "65 e mais", que determinam a magnitude dos encargos e da capacidade de mão-de-obra, consideramos as populações teóricas correspondentes a 3 níveis de mortalidade e três níveis de fecundidade. Os níveis da mortalidade são caracterizados pela esperança de vida ao nascer representada por $\bar{e}_0$, de modo que se tem:

Mortalidade alta: $\bar{e}_0 = 30,1$ anos (Nível 6)

Mortalidade média: $\bar{e}_0 = 51,8$ anos (Nível 15)

Mortalidade baixa $\bar{e}_0 = 71,2$ anos (Nível 23)

Os níveis de fecundidade são caracterizados pelas taxas brutas de reprodução, R, assim escolhidas:

Fecundidade baixa: R = 1,000

Fecundidade média: R = 2,250

Fecundidade elevada: R = 3,500

Os resultados obtidos para as proporções de pessoas em cada uma das três classes de idades consideradas acham-se na Tabela 5.

TABELA 5

POPULAÇÕES ESTÁVEIS
SEXO MASCULINO

Modelo "West"
Coale e Demeny

GRUPOS DE IDADES	NÍVEL 6 — $\bar{e}_0 = 30,076$		
	TAXA BRUTA DE REPRODUÇÃO		
	1,000	2,250	3,500
0 — 15	16,65	33,77	44,37
15 — 65	71,91	62,46	53,85
65 e mais	11,44	3,77	1,78
GRUPOS DE IDADES	NÍVEL 15 — $\bar{e}_0 = 51,831$		
	TAXA BRUTA DE REPRODUÇÃO		
	1,000	2,250	3,500
0 — 15	19,31	38,14	49,03
15 — 65	67,90	57,93	49,19
65 e mais	12,79	3,93	1,78
GRUPOS DE IDADES	NÍVEL 23 — $\bar{e}_0 = 71,188$		
	TAXA BRUTA DE REPRODUÇÃO		
	1,000	2,250	3,500
0 — 15	19,94	39,71	50,84
15 — 65	64,84	55,74	47,15
65 e mais	15,22	4,55	2,01

FONTE: Dados básicos extraídos de "Regional Model Life Tables and Stable Populations", by Ansley Coale and Paul Demeny — 1966

As conclusões gerais que se podem tirar desses cálculos são as seguintes:

a) para cada nível de fecundidade, o declínio da mortalidade aumenta a proporção de jovens (classes 0 - 15), reduz a de adultos (classes 15 - 65) e aumenta a de pessoas idosas (65 e mais);

b) para cada nível de mortalidade, o declínio da fecundidade reduz a proporção de jovens e aumenta as de adultos e de pessoas idosas;

c) o declínio da fecundidade tem um efeito muito maior do que o da mortalidade, tanto sobre a redução da proporção de jovens como sobre o acréscimo da proporção de pessoas idosas. Esse efeito da fecundidade é quase o mesmo para os diferentes níveis de mortalidade, sendo, todavia, algo maior se a mortalidade é alta;

d) os índices de dependência, definidos no parágrafo, acham-se indicados na Tabela 6, por onde se verifica a forte influência de fecundidade, embora variem também com a mortalidade; esse índice aumenta consideravelmente à medida em que aumenta a fecundidade; com relação à mortalidade, porém, o efeito é contrário, ele cresce quando a mortalidade diminui.

TABELA 6

ÍNDICE DE DEPENDÊNCIA POR 1.000 ADULTOS

MORTALIDADE $\bar{e}_0$	FECUNDIDADE		
	TAXA BRUTA DE REPRODUÇÃO		
	1,000	2,250	3,500
30,076	390,6	601,0	857,0
51,831..	472,8	726,2	1 032,9
71,188. .	542,3	794,0	1 120,9

Assim, para cada nível de mortalidade, a elevação desse índice, com a fecundidade entre os limites considerados, é superior a 119% no caso da mortalidade alta ($\bar{e}_0 = 30,1$), a 118% no caso da mortalidade média ($\bar{e}_0 = 51,8$), e a 105% no caso da mortalidade baixa. Ao contrário, para cada nível de fecundidade, a sua elevação, com o declínio da mortalidade entre os limites considerados, é de menos de 40% se a fecundidade é baixa ($R = 1,000$), de cerca de 32% no caso de uma fecundidade alta. Supondo que o caminho normal de um país que se desenvolve seja passar de alta fecundidade e alta mortalidade para níveis baixos dessas duas componentes, o desenvolvimento econômico fará o país passar de um índice de dependência de 857,0‰ para outro de 542,3‰. Assim, esse índice de dependência sofre uma redução apreciável durante o processo de desenvolvimento econômico.

2.10 Apesar da importância que tem sido atribuída ao índice de dependência, ele não conta toda a verdade. De fato, é necessário considerar o homem não apenas como um fator de consumo mas, também, como fator de produção. Se o declínio da fecundidade reduz o número de jovens, por outro lado aumenta o número de pessoas idosas. E não é lícito somar os totais dos dois grupos para a determinação de um índice de dependência, uma vez que eles não têm o mesmo valor nem como produtores nem como consumidores. Em "Conceitos Econômicos na Demografia" (RBE n.º 97/98 de jan./jun. 1964), utilizando coeficientes de produção e de consumo por idades, propostos por Mortara, estabelecemos vários cálculos elucidativos sobre esse aspecto. Em primeiro lugar, calculamos para alguns países os dados constantes da Tabela 7.

TABELA 7

NÚMERO DE UNIDADES DE PRODUÇÃO E DE CONSUMO POR 1.000 HABITANTES, DE UNIDADES DE CONSUMO POR 1.000 DE PRODUÇÃO E DE UNIDADES DE PRODUÇÃO POR 1.000 DE CONSUMO

POPULAÇÃO E ÉPOCA (1)	NÚMERO DE UNIDADES DE CONSUMO POR 1 000 HABITANTES (2)	NÚMERO DE UNIDADES DE PRODUÇÃO POR 1 000 HABITANTES (3)	1 000 (2) (3)	1 000 (3) (2)
			(4)	(5)
Brasil (1950).	732,0	522,3	1 401,5	713,5
Índia (1951)	755,8	561,2	1 346,8	742,5
EE. UU. (1954)	794,4	626,0	1 269,0	788,0
Suécia (1950)	821,1	670,5	1 224,6	816,6
França (1954).	815,6	653,8	1 247,5	801,6

A apreciação desses dados permite concluir que os 3 países economicamente desenvolvidos apresentam um número de unidades de produção por 1.000 unidades de consumo superior aos 2 países em desenvolvimento. Esse número depende da estrutura demográfica e é maior nos países de estrutura etária mais envelhecida, como a Suécia e a França. Um cálculo especialmente destinado a ressaltar a influência da mortalidade e da natalidade foi feito no mesmo trabalho acima citado, utilizando modelos com 3 níveis de mortalidade e várias taxas de crescimento. Dessa análise podem-se extrair as seguintes conclusões gerais:

a) o número de unidades de produção por 1.000 unidades de consumo varia pouco com o nível da mortalidade, aumentando ligeiramente à medida que a mortalidade declina;

b) o fator decisivo na determinação desse índice é a taxa de crescimento da população e, conseqüentemente, o nível da natalidade. De fato, ele aumenta bastante à medida que aquela taxa declina, dentro de cada nível de mortalidade.

Em resumo, pois, mesmo corrigidos, os defeitos do índice de dependência, a conclusão final é que o crescimento rápido decorrente da alta natalidade estabelece uma estrutura etária da população com características desfavoráveis, do ponto de vista econômico.

2.11 Algumas considerações devem ser feitas sobre a influência econômica das correntes migratórias internacionais. De modo geral, essas correntes se processam em maior intensidade nos grupos etários correspondentes às idades adultas, contribuindo para aumentar a proporção de pessoas entre 15 e 65 anos, reduzindo assim o índice de dependência e aumentando, na população, o número de unidades produtivas por 1.000 unidades de consumo. Por outro lado, um imigrante adulto constitui uma unidade de trabalho que não exigiu nenhuma inversão para sua formação, que ficou inteiramente a cargo do país de origem. Assim, do ponto de vista estritamente econômico, uma forte corrente migratória representa um capital imenso posto à disposição do país de destino, constituindo assim um elemento favorável ao seu desenvolvimento econômico. Grande parte do imenso progresso dos Estados Unidos foi uma consequência da intensa corrente migratória vinda da Europa. Até agora ainda não foi adequadamente apreciada e calculada a imensa contribuição que a Europa aplicou no progresso econômico da América do Norte, sob forma de capital humano.

Naturalmente, devemos reconhecer, as correntes migratórias podem acarretar problemas políticos de natureza diversa que não estão sendo considerados aqui, e que devem ser ponderados ao se decidir sobre a política migratória a ser adotada pelo país; mas as suas vantagens econômicas não devem ser esquecidas ou subestimadas.

2.12 Algumas breves palavras sobre o volume da população. Em uma ampla explanação isso nos conduziria ao problema da população ótima. Em primeiro lugar caberia fixar o sentido do ótimo, porque há várias possibilidades. Há um ótimo de potência, há vários ótimos econômicos; os mais conhecidos são o ótimo de riqueza (produto bruto "per capita" máximo) e o ótimo de enriquecimento (produto bruto "per capita" crescendo) com a máxima intensidade³. Escolher entre esses dois "ótimos" equivale a se colocar a pergunta: o que será melhor; estar rico ou estar enriquecendo? Mas, ainda que se consiga escolher o tipo de ótimo mais desejável, ainda não existe, do meu conhecimento, uma metodologia aceitável para a determinação do volume de população que responda a qualquer tipo de otimização proposta. O que podemos afirmar é que o ótimo não depende da densidade da população, nem, dentro de certos limites, do seu valor absoluto. A densidade demográfica do Canadá é bem mais baixa que a do Brasil e o canadense desfruta de uma das mais altas rendas "per capita" do mundo. Há países ricos e países pobres com grande volume e pequeno volume de população e com densidades demográficas elevadas e baixas. Assim, se o desenvolvi-

³ O ótimo de potência conduz a uma população superior à do ótimo de riqueza que, por sua vez, fornece uma população superior à do ótimo de enriquecimento

mento econômico independe de circunstâncias tão variadas, não nos parece que se deva gastar muito esforço na fixação de uma população ótima para o Brasil. O problema do crescimento rápido é, ao nosso ver, muito mais importante.

3. BASES DE UMA POLÍTICA

3.1 Voltemos ao problema do crescimento demográfico. Para uma população praticamente fechada às correntes migratórias internacionais, a taxa de crescimento depende dos níveis da mortalidade e da natalidade. Mas a mortalidade, em qualquer política demográfica, não apresenta alternativa; o objetivo, nesse particular, é, sempre, conseguir a máxima expectativa de vida. Assim, o fator crítico em uma política destinada a interferir no crescimento demográfico é o nível da fecundidade, o qual depende essencialmente de três componentes básicos:

a) as pressões e condicionamentos sociais que determinam as motivações para que o casal deseje realizar um certo tamanho ideal da família dependendo do tipo de comunidade a que pertence;

b) o nível da mortalidade que condiciona o número de nascimentos necessários para se conseguir a realização do número ideal de filhos adultos;

c) o maior ou menor desconhecimento dos métodos de controle da natalidade cuja relativa ineficiência conduz sempre a um número de nascimentos superior ao que seria necessário para se atingir o tamanho ideal da família.

Convém esclarecer que o número ideal de filhos é um objetivo que, embora presente, não se manifesta sempre sob uma forma explícita de um plano do casal. Às vezes constitui apenas um desejo vago, para cuja realização exerce muitas vezes uma ação ineficiente. Por outro lado, nem sempre tem uma formulação prévia, tornando-se explícito no momento em que o casal, já com alguns filhos, decide que não deseja mais aumentar a família, ou simplesmente reconhece que tal é o seu desejo.

3.2 A componente econômico-social referida anteriormente é constituída por todos os fatores externos que condicionam psicologicamente o casal no sentido de desejar um determinado número de filhos. Esses condicionamentos estão intimamente relacionados com a estrutura econômico-social da coletividade. Somente a modificação dessa estrutura econômico-social será capaz de estabelecer novos condicionamentos psicológicos e alterar o número ideal de filhos que o casal venha a desejar. Um dos processos que acarretam profundas modificações na estrutura da sociedade é o processo de desenvolvimento econômico-social. É relativamente fácil estabelecer, nesse caso, o sentido em que se modificam condicionamentos básicos do casal. De fato, em uma cole-

tividade pobre, de estrutura predominantemente agrária, com um baixo nível educacional e profissional e um alto nível de mortalidade, todos os elementos colaboram no sentido de tornar desejável uma família de dimensões relativamente grandes. Cada filho adicional constitui, além de uma fonte de prazeres, dentre as poucas de que podem desfrutar os casais das comunidades pobres, uma perspectiva de renda adicional e de maior segurança no futuro quando, deixando os pais de trabalhar, poderão dispor da mão-de-obra dos filhos para os trabalhos do campo, assegurando uma sobrevivência calma na velhice, dentro do seio da própria família que conseguiu realizar. O baixo nível educacional e profissional contribui para reduzir o custo de formação do adulto e diminuir o tempo de formação, ao fim do qual poderá dispor da renda adicional que o filho irá proporcionar. Antes dos 10 anos já as crianças podem ajudar nos trabalhos do campo e nos afazeres da casa. Por outro lado, o alto nível da mortalidade exige, para a realização de um dado número de filhos adultos, um elevado número de nascimentos. As comunidades que sobreviveram no passado foram aquelas em que a natalidade foi suficientemente alta para deixar um pequeno saldo sobre os óbitos causados por uma mortalidade elevadíssima. A própria espécie humana só pode sobreviver graças a esse fato. Acresce, ainda, que, nas comunidades pobres, os processos utilizados de controle da natalidade, necessários para o dimensionamento da família, são extremamente ineficientes. Assim, os erros, que se produzem sempre no sentido de ampliar o dimensionamento desejado, são mais amplos e mais freqüentes do que seriam se fossem utilizados métodos mais eficientes. Dado o baixo nível educacional ocorre, também, com maior freqüência, que o número ideal de filhos constitui apenas uma idéia vaga, que não é acompanhada de qualquer iniciativa no sentido de torná-la efetiva.

3.3 O panorama é inteiramente outro em uma comunidade rica. Aqui a estrutura econômico-social está dominada pela industrialização e pela tecnologia, exigindo, na formação do homem adulto, um nível educacional elevado e uma formação profissional altamente especializada. Assim, os condicionamentos psicológicos são completamente diferentes, favorecendo em todos os sentidos a pequena família. De fato, cada filho adicional implica em uma considerável inversão a fim de torná-lo apto, profissionalmente, a exercer as atividades que o alto nível tecnológico exige de todos. Os pais não só desejam mas são compelidos, na luta pela manutenção ou melhoria do "status social", a proporcionar aos filhos esse nível de educação e formação profissional. Portanto, o custo de formação do homem adulto é elevado, exigindo pesadas inversões e dilatado tempo, de modo que nenhum incentivo ele representa como proporcionador de possível renda adicional, tornando-se ao mesmo tempo praticamente desnecessário como fonte de segurança no futuro. Além desses custos diretos, também os custos indiretos de uma família mais numerosa serão mais elevados na comunidade rica: uma mulher com muitos filhos perde a oportunidade de poder trabalhar e

assim ajudar nas despesas familiares. Mas não é só; os demais fatores enunciados anteriormente atuam no sentido de uma fecundidade mais moderada. De fato, sendo mais baixo o nível da mortalidade, o excedente de nascimentos necessários para assegurar o ideal da família já não precisará ter as mesmas proporções. Supondo que o ideal de um casal, quando declara que deseja ter 3 filhos, signifique a realização de 3 filhos adultos (com 18 anos, digamos), o nível da mortalidade transforma-se em um fator de grande importância na diferenciação dos níveis de fecundidade. Assim, em uma comunidade pobre, com uma expectativa de vida ao nascer de 35 anos, o excedente de nascimento para se conseguir que um dado número de filhos atinja os 18 anos é de cerca de 67%; para cada 100 pessoas que atingem 18 anos são necessários 167 nascimentos. Em uma comunidade rica, onde a expectativa de vida ao nascer é, digamos, de 70 anos, o excedente poderá ser apenas de 5%, isto é, para cada 100 pessoas atingirem 18 anos são necessários apenas 105 nascimentos. Portanto, se o tamanho ideal da família em uma comunidade pobre for, por exemplo, de 5 filhos, e em uma comunidade rica, de 3, a fecundidade aparentemente deveria ser 67% mais elevada na primeira. Em face, porém, da diferença de mortalidade, seriam necessários, para que 100 casais realizassem a média de 5 filhos adultos (com 18 anos), um total de 833 nascimentos, ao passo que 100 casais de comunidade rica apenas necessitariam, para realizar seus objetivos de 3 filhos adultos, 315 nascimentos. Nessas condições, a fecundidade efetiva na comunidade pobre deveria ser não apenas 67%, mas 165% superior à da comunidade rica, a fim de que as duas comunidades realizassem dimensões ideais de suas famílias, tendo em vista os condicionamentos sociais e os níveis da mortalidade. Mas, se levarmos em conta, ainda, as diferenças dos métodos utilizados para o controle da natalidade, as diferenças se ampliam mais. Assim, supondo que na comunidade rica os erros decorrentes da ineficiência dos métodos de controle da natalidade sejam da ordem de 10% e, nas comunidades pobres, três vezes maiores, o resultado final, levando em conta os três fatores básicos referidos anteriormente, será que, nas comunidades ricas de tipo indicado, cada 100 casais deverão dar lugar a 346 nascimentos, ao passo que, na comunidade pobre, os mesmos 100 casais deveriam produzir 1.083 nascimentos. Por outras palavras, fecundidade, na comunidade pobre, deveria ser 213% mais elevada do que na comunidade rica. Não é de estranhar, pois, que as comunidades mais pobres continuem a apresentar uma fecundidade elevada, sem que se possa taxá-las de manter um procedimento irracional, como tem sido alegado por alguns sociólogos, economistas e demógrafos, malgrado o fato incontestável, por nós apontados, das desvantagens macroeconômicas, decorrentes de um crescimento rápido da população. É que as decisões sobre o número de filhos ocorrem no seio do núcleo familiar, atendendo aos interesses legítimos da família, alheios aos problemas que se desenvolvem na escala macroeconômica, os quais preocupam os governos, os sociólogos, demógrafos e economistas, em um nível de

decisão muito mais amplo. Como ocorre em muitos casos, funciona aqui o conhecido *paradoxo da composição*, segundo o qual os interesses legítimos de uma pequena parcela de um grupo nem sempre concordam com os legítimos interesses do grupo. Um casal do interior, vivendo da agricultura, morando em uma pequena propriedade rural, deseja legitimamente uma família numerosa; mas se todos os casais do país desejassem a mesma coisa, o crescimento demográfico seria extremamente rápido, podendo, no conjunto, prejudicar o crescimento econômico e o desenvolvimento social da coletividade. Felizmente, nem todos vivem no interior, em uma pequena propriedade rural, de modo que, mesmo nos países subdesenvolvidos, já se manifesta uma atenuação do crescimento da população em relação ao que ocorreria naquela hipótese extrema, apesar do declínio da mortalidade, o qual, na sua difusão rápida, produziu temporariamente uma explosão demográfica sem precedentes na história da humanidade. A posição atual do Brasil é de uma mortalidade com tendência ainda a um declínio substancial proporcionando, pelas características ainda jovens da composição etária da população, um declínio da taxa bruta de mortalidade a níveis extremamente baixos nos próximos 30 anos: da ordem de 5‰, cerca de metade do seu nível atual. O nível da fecundidade já apresenta sinais de um lento declínio que provavelmente deverá intensificar-se nos próximos 30 anos, graças à influência cada vez mais acentuada do desenvolvimento econômico.

3.4 Qual a política demográfica para o Brasil com relação ao problema do crescimento demográfico? De acordo com os resultados da análise procedida anteriormente, o declínio da fecundidade vai depender da medida em que seja possível controlar os três fatores básicos apontados: motivações sobre as dimensões da família, conhecimento do nível da mortalidade, erros decorrentes da ineficiência dos métodos de controle da natalidade, e ignorância sobre esses métodos.

Pouco adianta a simples divulgação dos métodos eficientes de controle da natalidade, uma vez que tal procedimento não atinge o ponto central do problema, isto é, não modifica as motivações relativas às dimensões ideais da família. Só o desenvolvimento econômico-social, com todas as modificações estruturais que acarreta, será capaz de alterar essas motivações no sentido de reduzir o número ideal de filhos. No exemplo dado anteriormente, onde o nível da natalidade na comunidade pobre seria 214% mais elevado do que o da comunidade rica, a máxima divulgação, entre os membros da comunidade pobre, dos métodos ultra-eficientes adotados na comunidade rica, conseguiria, na melhor das hipóteses, baixar o nível da fecundidade desse grupo de uns 22%. De fato, essa divulgação apenas reduziria o excesso de nascimentos decorrentes da ineficiência dos métodos, mas não modificaria o tamanho ideal da família que a comunidade pobre continuaria a perseguir, nem o excedente necessário para compensar o nível mais elevado da sua mortalidade. Por outro lado, forçoso é reconhecer a importância,

e até mesmo a necessidade dessa divulgação, à medida que avança o processo de desenvolvimento econômico. De fato, de par com as alterações que vão ocorrendo nas motivações relacionadas com o tamanho ideal da família, é necessário que os casais possam dispor, não apenas do conhecimento dos métodos mais eficientes de controle da natalidade, mas que possam também ter acesso a esses métodos e possam adotar aqueles que julgarem mais adequados. As duas condições são, pois, complementares: o desenvolvimento econômico altera os padrões dimensionais da família e a divulgação dos métodos de controle coloca-os em situação de realizar, tanto quanto possível, aquelas dimensões de família que o desenvolvimento econômico-social requer, evitando assim as fricções que poderiam comprometer ou dificultar o curso do processo de desenvolvimento. Fica desde logo patente que alguns recursos deverão ser aplicados nessa tarefa de divulgação dos meios de controle da natalidade, como parte do próprio processo educativo, que consiste em transformar uma criança num adulto e, bem assim, para proporcionar o acesso a esses meios. Esses recursos têm por objetivo, pois, evitar possíveis dificuldades e fricções ao longo do processo de desenvolvimento econômico-social, as quais redundariam em desperdício de esforços. Mas, de modo nenhum se pode considerar os recursos aplicados em programas de planejamento familiar como capazes de proporcionar modificações essenciais de caráter permanente, nas motivações que conduzem à fixação do nível da fecundidade. Se o desenvolvimento econômico-social induz o declínio da fecundidade, o processo não é reversível: os programas de planejamento familiar por si sós não proporcionam nenhum desenvolvimento econômico. O que é fundamental, para alterar a fecundidade com caráter estável e permanente, não é proporcionar aos casais os meios eficientes de limitação da natalidade; é necessário induzi-los a desejar menos filhos. Os meios de limitação devem ser proporcionados na medida em que os casais o desejarem por força de decisões próprias, decorrentes das motivações proporcionadas durante o curso da evolução do processo de desenvolvimento econômico-social. Pressionar diretamente um casal que deseja muitos filhos a tê-los em menor número parece-nos tão ilegítimo como forçar aqueles que desejam poucos filhos a aumentar a sua prole. Só o desenvolvimento econômico-social reconhecido pela coletividade pode legitimar as pressões capazes de agir sobre as dimensões ideais da família. Os anticonceptivos devem constituir apenas os meios com que poderão realizar seus próprios desejos.

O FENÔMENO URBANO NAS GRANDES CIDADES

François E. J. Bremaeker

Economista e Geógrafo

SUMÁRIO

- 1 *O Brasil urbano em duas décadas*
 - 1 1 *A população regional*
 - 1 2 *A população urbana nas Grandes Regiões*
- 2 *A urbanização nas Grandes Cidades*
 - 2 1 *O crescimento das cidades*
 - 2 2 *Participação das cidades por faixa de tamanho de população*
- 3 *O impacto da urbanização*
- 4 *As cidades*
- 5 *1980, o futuro da urbanização*
 - 5 1 *As cidades menores crescerão mais*

Em um primeiro artigo, publicado no número 135 desta Revista, versando sobre as cidades brasileiras, tivemos a oportunidade de observar o fenômeno urbano nas grandes cidades sob a ótica quantitativa e espacial, tomando por base as cidades que possuíam mais de vinte mil habitantes na data do Recenseamento de 1970.

1. O BRASIL URBANO EM DUAS DÉCADAS

As perspectivas do acelerado aumento dos efetivos populacionais urbanos, bem como a paralela ou mais acentuada premência das necessidades desses efetivos, geram toda uma série de novos problemas, que vão assumindo uma dimensão alarmante com o tempo.

Já existe uma conscientização de que as grandes concentrações urbanas são geradoras de inúmeros inconvenientes. Procura-se já a algum tempo uma solução viável que amenize os seus efeitos, visto que pouco ou nada adianta reagir contrariamente à urbanização.

1.1 A população regional

A distribuição da população brasileira pelas Grandes Regiões não apresentou variações acentuadas neste período de duas décadas. Como se pode observar através da Tabela 1, duas Grandes Regiões — a Sul e a Centro-Oeste — apresentaram um significativo aumento relativo do seu efetivo populacional, passando dos 15,09% e 3,35%, respectivamente em 1950, para 17,65% e 5,45% em 1970.

A Grande Região Norte manteve a sua posição relativa inalterada no período, ao passo que as Grandes Regiões Sudeste e Nordeste apresentaram um declínio na participação do conjunto brasileiro. A primeira sofreu um pequeno decréscimo relativo, de menos de 1 ponto (43,41% em 1950 e 42,68% em 1970), enquanto que a segunda caiu em mais de 4 pontos, já que apresentava 34,60% em 1950 e 30,34% em 1970.

O maior destaque individual é o acréscimo da Grande Região Centro-Oeste, que passou de 1,7 milhão de habitantes em 1950 para.

TABELA 1

POPULAÇÃO SEGUNDO AS GRANDES REGIÕES NAS DATAS DOS
RECENSEAMENTOS GERAIS DE 1950, 1960 E 1970

BRASIL E GRANDES REGIÕES	RECENSEAMENTOS					
	1950		1960		1970	
	POPULAÇÃO	%	POPULAÇÃO	%	POPULAÇÃO	%
BRASIL.	51 944 397	100,00	70 992 343	100,00	94 508 544	100,00
Norte ..	1 844 655	3,55	2 601 519	3,67	3 650 750	3,86
Nordeste..	17 973 413	34,60	22 428 873	31,59	28 675 081	30,34
Sudeste . .	22 548 494	43,41	31 062 977	43,76	40 331 969	42,68
Sul.	7 840 870	15,09	11 892 107	16,75	16 683 551	17,65
Centro-Oeste ..	1 736 965	3,35	3 006 866	4,23	5 167 203	5,47

FONTE: IBGE. Sinopse Preliminar do Censo Demográfico, VIII Recenseamento Geral do Brasil — 1970

5,2 milhões em 1970. As Grandes Regiões Sul e Norte praticamente dobraram os seus efetivos, apresentando alguma semelhança com o ritmo de crescimento populacional brasileiro.

As Grandes Regiões Sudeste e Nordeste são as duas que em números absolutos não conseguiram dobrar o seu contingente nestes vinte anos.

1.2 A população urbana nas Grandes Regiões

Já a população urbana brasileira, definida censitariamente, quase que triplicou o seu efetivo no período de vinte anos entre as décadas de 1950 e 1970, quando contava com 18,7 milhões e passou a 52,9 milhões de habitantes.

A distribuição regional deste efetivo urbano se apresenta, entretanto, com níveis de concentração bem mais acentuados do que na distribuição da população brasileira como um todo. O que se nota é a destacada posição da Grande Região Sudeste que, embora decrescesse em 1,62 pontos em vinte anos — 57,09% em 1950 e 55,47% em 1970 — detém a maior parte do contingente urbano em seu território.

A segunda Grande Região é a Nordeste (2,5 vezes menos) que, a exemplo da Grande Região Sudeste, apresentou declínio na participação nacional de seu efetivo urbano total, como podemos notar através da Tabela 2. As demais Grandes Regiões apresentaram um aumento na sua participação relativa, sendo o mais expressivo de todos os índices da Grande Região Centro-Oeste, que mais do que dobrou a sua participação relativa.

Em termos absolutos a Grande Região Centro-Oeste praticamente sextuplicou sua população urbana de 1950 (423 mil) a 1970 (2.493 mil). As demais Grandes Regiões apresentam um comportamento próximo do nacional, apresentando em média uma quase triplicação do efetivo urbano nas duas últimas décadas.

TABELA 2

POPULAÇÃO URBANA SEGUNDO AS GRANDES REGIÕES NAS DATAS DOS RECENSEAMENTOS GERAIS DE 1950, 1960 E 1970

BRASIL E GRANDES REGIÕES	RECENSEAMENTOS					
	1950		1960		1970	
	POPULAÇÃO	%	POPULAÇÃO	%	POPULAÇÃO	%
BRASIL	18 782 891	100,00	32 004 817	100,00	52 904 744	100,00
Norte	580 867	3,09	983 278	3,07	1 649 430	3,12
Nordeste	4 744 808	25,26	7 680 681	24,00	11 980 937	22,65
Sudeste	10 720 734	57,09	17 818 649	55,68	29 347 170	55,47
Sul	2 312 985	12,31	4 469 103	13,96	7 434 196	14,05
Centro-Oeste	423 497	2,25	1 053 106	3,29	2 493 011	4,71

FONTE: IBGE. Sinopse Preliminar do Censo Demográfico VIII Recenseamento Geral do Brasil — 1970

2. A URBANIZAÇÃO NAS GRANDES CIDADES

É necessário que se observe o fenômeno da urbanização por um outro prisma: o da relação de crescimento entre a população das cidades — pois teoricamente o principal aglomerado urbano a nível municipal é a cidade — e o crescimento da população total que se localiza em determinada unidade do espaço.

Tornar-se-ia por demais complexa e até mesmo utópica, a análise detida do real crescimento populacional ocorrido no tempo em cada uma das 7.834 unidades urbanas (3 952 cidades e 3.882 vilas). Por este motivo é que trabalharemos apenas com as 303 cidades constantes do primeiro trabalho: As cidades brasileiras.

Desta forma, procuramos possibilitar uma real visão do impacto da urbanização que ocorre nos principais núcleos urbanos brasileiros, sedes municipais com população superior a vinte mil habitantes em 1970, facilitando a avaliação mais particularizada dos efeitos neste conjunto de Municípios.

2 1 O crescimento das cidades

É notável o crescimento das cidades brasileiras para o período intercensitário de 1960 a 1970, fazendo-se sentir, tanto sob a ótica regional quanto sob a da estratificação por faixas de tamanho de população, o seu indiscutível e acelerado ritmo de crescimento.

Sob a ótica regional podemos observar de imediato uma relativa homogeneidade quanto ao ritmo de crescimento para as Grandes Regiões Sudeste (60,3%), Sul (55,3%) e Nordeste (54,1%), principalmente, como também para a Grande Região Norte, que apresenta para o período intercensitário um ritmo relativamente mais acentuado — 71,8%.

TABELA 3

CRESCIMENTO RELATIVO APRESENTADO PELA POPULAÇÃO AGREGADA DAS CIDADES, POR FAIXAS DE TAMANHO DE POPULAÇÃO SEGUNDO AS GRANDES REGIÕES, NO PERÍODO 1960/1970

BRASIL E GRANDES REGIÕES	FAIXAS DE POPULAÇÃO (por 1 000 habitantes)							
	TOTAL	20 — 50	50 — 100	100 — 200	200 — 500	500 — 1 000	1 000 — 2 000	2 000 e mais
BRASIL	60,6	67,9	61,5	70,2	84,9	50,4	51,4	47,8
Norte	71,8	117,7	95,6	—	84,4	57,0	—	—
Nordeste	54,1	64,2	57,1	59,9	60,5	54,0	34,5	—
Sudeste	60,3	62,5	64,1	77,8	85,7	—	72,1	47,8
Sul	55,3	79,9	53,9	58,5	40,2	40,8	—	—
Centro-Oeste	137,6	108,0	88,2	102,9	181,4	—	—	—

Todos estes índices não se distanciam marcadamente do nacional, que é da ordem de 60,6%. É de se ressaltar a semelhança existente entre o ritmo de crescimento da Grande Região Sudeste e o do Brasil.

Bem mais afastada das demais Grandes Regiões está a Centro-Oeste, com um “espetacular” índice de 137,6%, isto é, mais de duas vezes superior ao do Brasil. Este fato se deve à presença de Brasília e também em virtude do pequeno contingente populacional da Grande Região.

No tocante ao crescimento das cidades por faixa de tamanho de população, podemos distinguir, a grosso modo, três comportamentos distintos:

1. As Grandes Regiões Norte e Sul tendem a apresentar um ritmo de crescimento mais intenso para as cidades que se situam nas faixas inferiores de tamanho de população. Este decresce à medida que nos deslocamos em direção aos estratos populacionais superiores

Releva notar que nenhuma das duas Grandes Regiões possui cidades com população superior a um milhão de habitantes. Outro fato que será abordado mais adiante é aquela pertinente à não existência, na Grande Região Norte, de qualquer cidade na faixa entre 100 e 200 mil habitantes.

2. As Grandes Regiões Sudeste e Nordeste apresentam praticamente o mesmo tipo de comportamento relativo, qual seja: o seu ritmo de crescimento se intensifica à medida que se passa da faixa de tamanho de população inferior à mediana (200 a 500 mil habitantes), passando a partir daí a declinar o ritmo de crescimento até as faixas superiores

As exceções a este comportamento global são: a faixa populacional de 20 a 50 mil habitantes na Grande Região Nordeste apresenta um ritmo mais intenso ao do crescimento da faixa imediatamente superior, além de não possuir cidades com população superior a dois milhões de habitantes; enquanto que a Grande Região Sudeste apresenta a ausência de cidades na faixa de 500 mil a um milhão de habitantes.

Analisando-se esta ausência apresentada pela Grande Região Sudeste, ela representa o mesmo sintoma da ausência apresentada pela Grande Região Norte, qual seja, a excessiva concentração populacional em cidades maiores. É o caso de Belém e de Manaus, na Grande Região Norte e de São Paulo, Rio de Janeiro e Belo Horizonte, na Grande Região Sudeste.

Esta centralização excessiva não possui, entretanto, a mesma significação para as suas respectivas Grandes Regiões. As três metrópoles do Sudeste concentram a metade do contingente urbano regional que vive em cidades com mais de vinte mil habitantes, ao passo que na Grande Região Norte, Belém e

Manaus concentram 80% deste contingente, como poderá ser observado posteriormente na Tabela 4.

3. A Grande Região Centro-Oeste apresenta um comportamento totalmente diverso das demais Grandes Regiões brasileiras. Este comportamento se deve, principalmente, — se não exclusivamente — à transferência da capital federal do Rio de Janeiro para Brasília, meses antes da realização do Recenseamento de 1960. Por isto mesmo, o comportamento denotado pela Grande Região Centro-Oeste é o declínio do ritmo de crescimento do primeiro para o segundo estrato populacional, passando, a partir daí, a uma discreta ascensão até o estrato de 100 a 200 mil habitantes e uma “violenta” ascensão para o estrato dos 200 a 500 mil habitantes.

O ritmo de crescimento médio brasileiro, como podemos verificar através do Gráfico 1, segundo as faixas de tamanho de população, se apresenta bastante semelhante ao da Grande Região Sudeste, muito embora sejam evidentes as influências que sofrem por parte da Grande Região Centro-Oeste.

Vale à pena notar que a Grande Região Nordeste é aquela que apresenta o mais longo *continuum* — indo até a faixa de 1 a 2 milhões de habitantes — além de acusar as menores variações relativas ao longo da sua trajetória.

No tocante à análise por estrato de população aquele que mais se aproxima do valor médio para todo o conjunto brasileiro (60,6%) é o estrato de 50 a 100 mil habitantes, com 61,5%. Os estratos com população superior a 500 mil habitantes praticamente apresentam índices em torno dos 50%, ao passo que os estratos de 20 a 50 mil e de 100 a 200 mil habitantes apresentam índices de crescimento em torno de 70%.

Já o estrato que se destaca pelo mais elevado índice de crescimento é aquele das cidades que possuem entre 200 e 500 mil habitantes, com 85%.

2.2 Participação das cidades por faixa de tamanho de população

Podemos observar na Tabela 4 a evolução da participação agregada por faixa de tamanho de população e por Grande Região, das cidades em 1960 e 1970. Nesta tabela as cidades foram agregadas segundo a sua população em 1970, por faixa de tamanho de população, tendo sido conservadas para 1960, com vistas a possibilitar uma comparação de unidades homogêneas, nas mesmas faixas populacionais que se encontravam nas tabulações de 1970.

De um modo geral o que se observa é que, para o conjunto brasileiro, a faixa populacional que agrega maior contingente populacional é a de mais de dois milhões de habitantes, com 30,5% em 1960, mantendo-se também no primeiro posto em importância em 1970, com 27,9%.

GRÁFICO 1

CRESCIMENTO RELATIVO APRESENTADO PELA POPULAÇÃO AGREGADA DAS CIDADES, POR FAIXAS DE TAMANHO DE POPULAÇÃO SEGUNDO AS GRANDES REGIÕES, PARA O PERÍODO 1960/1970

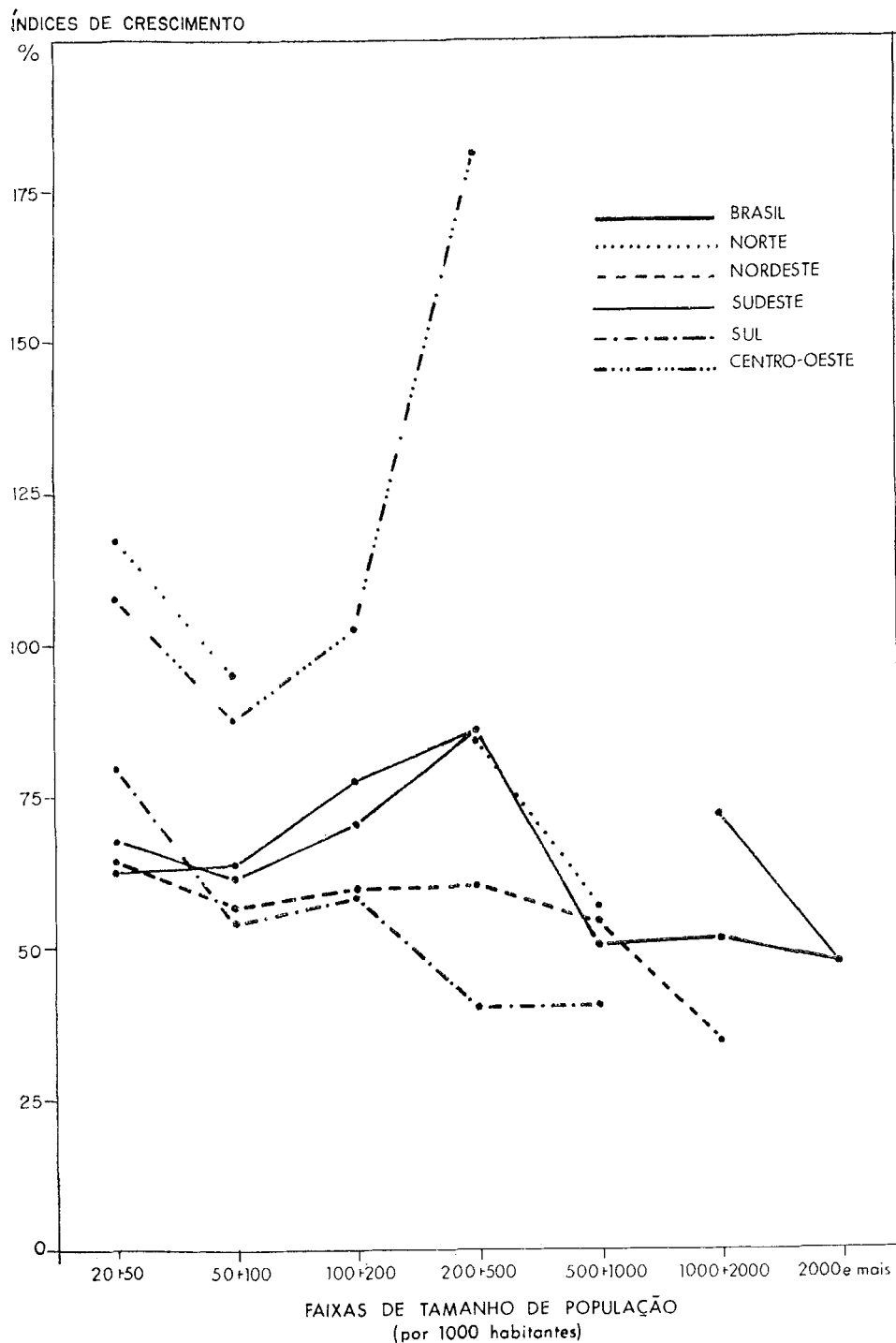


TABELA 4

PARTICIPAÇÃO RELATIVA DA POPULAÇÃO AGREGADA DAS CIDADES POR FAIXAS DE TAMANHO DE POPULAÇÃO, SEGUNDO AS GRANDES REGIÕES, PARA 1960 E 1970

FAIXAS DE POPULAÇÃO (por 1 000 habitantes)	1960						1970					
	BRASIL	GRANDES REGIÕES					BRASIL	GRANDES REGIÕES				
		Norte	Nordeste	Sudeste	Sul	Centro-Oeste		Norte	Nordeste	Sudeste	Sul	Centro-Oeste
TOTAL	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0
20 ─ 50	16,0	7,5	18,2	14,7	20,2	21,4	16,8	9,5	19,4	14,9	23,4	18,8
50 ─ 100	11,4	8,6	10,4	8,6	25,7	18,9	11,5	9,8	10,6	8,8	25,5	15,0
100 ─ 200	14,2	—	20,1	12,1	18,6	13,3	15,0	—	20,9	13,4	19,0	11,3
200 ─ 500	11,8	25,2	7,6	11,0	12,7	46,4	13,6	27,0	7,9	12,8	11,5	54,9
500 ─ 1 000	9,3	58,7	24,3	—	22,8	—	8,8	53,7	24,2	—	20,6	—
1 000 ─ 2 000	6,8	—	19,4	4,9	—	—	6,4	—	17,0	5,3	—	—
2 000 e mais	30,5	—	—	48,7	—	—	27,9	—	—	44,8	—	—

Todas as faixas populacionais até a dos 500 mil habitantes elevaram a sua participação de 1960 para 1970, sendo que, conseqüentemente, todas aquelas com população superior a 500 mil habitantes apresentaram declínio relativo na participação global. Isto nos levaria a concluir que houve um crescimento populacional mais intenso em cidades com população inferior a 500 mil habitantes.

Na Grande Região Norte o seu estrato de maior população (500 mil a um milhão de habitantes), representado por Belém, apresentou na década um substancial decréscimo relativo: passou de 58,7% para 53,7%.

Na Grande Região Nordeste novamente se repete o fenômeno brasileiro. Já na Grande Região Sudeste, todos os estratos populacionais apresentam um aumento relativo na sua participação, à exceção do último estrato (mais de dois milhões de habitantes), que cai de 48,7% em 1960, para 44,8% em 1970.

Para a Grande Região Sul não há um comportamento uniforme entre os seus estratos populacionais. Em oposição à regra geral, a Grande Região Centro-Oeste apresentou declínio de participação em todos os estratos populacionais, exceto para o mais elevado (200 a 500 mil habitantes), que de 46,4% em 1960, passa aos 54,9% em 1970. Esta "anomalia" é causada por Brasília.

3. O IMPACTO DA URBANIZAÇÃO

Com o auxílio da Tabela 5, podemos ter uma idéia global do impacto sofrido pelos governos locais com o crescimento de suas cidades. A população dos Municípios com cidades de mais de vinte mil habitantes cresceu nos últimos dez anos à base de 50,1% no Brasil, ao passo que as cidades cresceram à base de 60,6% no mesmo período.

Representa dizer, para este conjunto de Municípios, que de todo o crescimento demográfico neles ocorrido, em média 94,7% se processou nas suas cidades.

TABELA 5

CRESCIMENTO RELATIVO PARA O CONJUNTO DE MUNICÍPIOS CUJAS CIDADES POSSUEM MAIS DE VINTE MIL HABITANTES, DESTAS CIDADES E A RELAÇÃO DE CRESCIMENTOS DAS CIDADES SOBRE O TOTAL MUNICIPAL PARA AS GRANDES REGIÕES E PARA O BRASIL, NO PERÍODO ENTRE 1960 E 1970

BRASIL E GRANDES REGIÕES	ÍNDICE DE CRESCIMENTO POPULACIONAL DOS MUNICÍPIOS	ÍNDICE DE CRESCIMENTO POPULACIONAL DAS CIDADES	% DO CRESCIMENTO DAS CIDADES SOBRE O CRESCIMENTO DA POPULAÇÃO MUNICIPAL
BRASIL	50,1	60,6	94,7
Noite	66,6	71,8	79,9
Nordeste	45,8	54,1	82,3
Sudeste	47,2	60,3	96,9
Sul	45,0	55,3	84,5
Centro-Oeste	106,4	137,6	90,1

Na primeira coluna temos o índice de crescimento da população municipal, com sedes de mais de vinte mil habitantes em 1970, no período entre 1960 e 1970. Na segunda coluna é dado o índice de crescimento da população das cidades com mais de vinte mil habitantes em 1970, no mesmo período. Na terceira coluna é apresentada a percentagem do crescimento das cidades de mais de vinte mil habitantes sobre o crescimento populacional dos Municípios correspondentes, no período entre 1960 e 1970.

Analisando-se estes dados regionalmente, podemos verificar uma homogeneidade no crescimento municipal entre as Grandes Regiões Sudeste, Nordeste e Sul, que permanecem um pouco abaixo da média nacional. Para a Grande Região Norte, com 66,6%, já há um afastamento para além da média brasileira, ao passo que para a Grande Região Centro-Oeste (106,4%), seu índice é mais do que duas vezes superior ao da média nacional.

No que diz respeito ao crescimento das cidades, o que se tem a observar, além do comentário alusivo à Tabela 3, é de que a Grande Região Sudeste apresenta um índice bastante próximo ao nacional, permanecendo as Grandes Regiões Nordeste e Sul abaixo deste, e as Grandes Regiões Norte e Centro-Oeste acima do índice nacional.

O índice de maior significação, entretanto, é o referente à percentagem do crescimento urbano para as cidades com mais de vinte mil habitantes sobre a população total dos Municípios, correspondentes, no

período entre 1960 e 1970. O índice da Grande Região Sudeste é o único que supera o do Brasil, além de ser o que mais se aproxima deste. Todas as demais Grandes Regiões do País apresentam índices inferiores ao do nacional, o que vem a ratificar, mais uma vez, a posição da Grande Região Sudeste, como o baluarte da urbanização brasileira.

A segunda Grande Região em importância é a Centro-Oeste. Um pouco mais abaixo aparecem a Grande Região Sul, com 84,5% e a Grande Região Nordeste, com 82,3%. A Grande Região Norte apresenta o mais baixo de todos os índices: 79,9%.

4. AS CIDADES

Tivemos até o momento uma idéia global do crescimento das cidades. Com o objetivo de fornecer subsídios a nível local, oferecemos através da Tabela 6 a relação dos 303 Municípios possuidores de cidades com população superior a vinte mil habitantes (cuja população já se encontra no trabalho anterior), com os respectivos índices e taxas de crescimento geométrico anual da população dos Municípios e das cidades no período intercensitário 1960/1970.

TABELA 6

NOMINATA DOS 303 MUNICÍPIOS COM SEUS RESPECTIVOS ÍNDICES E TAXAS DE CRESCIMENTO GEOMÉTRICO ANUAL DA POPULAÇÃO MUNICIPAL E DAS CIDADES NO PERÍODO 1960/1970

(continua)

UNIDADES DA FEDERAÇÃO E MUNICÍPIOS	ÍNDICES		TAXAS	
	POPULAÇÃO MUNICIPAL	POPULAÇÃO DAS CIDADES	POPULAÇÃO MUNICIPAL	POPULAÇÃO DAS CIDADES
RONDÔNIA				
Porto Velho	168,9	212,2	5,40	7,80
ACRE				
Rio Branco.	176,1	200,2	5,80	7,20
AMAZONAS				
Manaus	178,0	184,4	5,95	6,30
PARÁ				
Belém.	157,6	157,0	4,65	4,60
Santarém.	147,6	205,1	3,95	7,45
Castanhal	175,4	260,4	5,80	10,05
AMAPÁ				
Macapá .	237,8	186,9	9,05	6,45
MARANHÃO				
São Luís.	166,4	134,4	5,10	3,00
Imperatriz.	278,1	385,5	10,75	14,45
Caxias ..	100,3	162,8	0,05	5,00
Bacabal	87,3	188,3	1,20	6,55

(continuação)

UNIDADES DA FEDERAÇÃO E MUNICÍPIOS	ÍNDICES		TAXAS	
	POPULAÇÃO MUNICIPAL	POPULAÇÃO DAS CIDADES	POPULAÇÃO MUNICIPAL	POPULAÇÃO DAS CIDADES
PIAUÍ				
Teresina	166,7	181,1	5,25	6,10
Parnaíba	124,8	142,8	2,25	3,65
Floriano	149,1	166,8	4,10	5,25
CEARÁ				
Fortaleza	166,9	146,6	5,25	3,90
Juazeiro do Norte	140,3	149,4	3,45	4,10
Sobral	138,8	160,7	3,35	4,85
Crato	119,7	133,2	1,80	2,90
Iguatu	146,5	168,4	3,90	5,35
Cratêus	150,1	171,7	4,20	5,55
RIO GRANDE DO NORTE				
Natal	162,8	162,6	5,00	5,00
Mossoró	193,8	198,9	6,85	7,10
Caicó	138,6	155,4	3,30	4,50
PARAÍBA				
João Pessoa	155,0	145,3	4,50	3,80
Campina Grande	138,1	140,4	3,30	3,45
Patos	127,4	146,1	2,45	3,85
Bayeux	204,8	207,2	7,45	7,55
Santa Rita	121,8	144,5	2,00	3,75
Cajazeiras	130,3	151,6	2,70	4,25
Sousa	126,5	198,8	2,40	7,10
Guarabira	122,2	142,8	2,05	3,65
PERNAMBUCO				
Recife	131,3	134,5	2,75	3,00
Olinda	168,7	186,5	5,35	6,45
Caruaru.	134,4	156,7	3,00	4,60
Jaboatão	191,4	154,7	6,70	4,45
Garanhuns	112,8	145,6	1,20	3,85
Vitória de Santo Antão	123,7	152,0	2,15	4,30
Petrolina	217,7	258,0	8,10	9,95
Arcoverde	167,1	184,4	5,25	6,30
São Lourenço da Mata	184,2	354,5	6,30	13,50
Palmares	127,5	180,5	2,45	6,10
Limoeiro	117,9	144,6	1,65	3,75
Cabo	146,4	265,1	3,90	10,25
Timbaúba	104,7	126,1	0,45	2,35
Carpina	111,0	148,6	1,05	4,05
Goiana.	117,9	128,3	1,65	2,50
Pesqueira	111,9	123,5	1,15	2,15
Serra Talhada	134,2	177,5	3,00	5,90
Gravatá	120,4	137,1	1,90	3,20
Paulista	135,4	114,9	3,10	1,40
Escada	111,3	145,3	1,10	3,80
ALAGOAS				
Maceió	154,9	158,4	4,45	4,70
Arapiraca.	176,8	222,2	5,85	8,30
Palmeira dos Índios	130,0	166,1	2,65	5,20
Penedo	130,6	137,0	2,70	3,20
Rio Largo	123,5	131,2	2,15	2,75

(continuação)

UNIDADES DA FEDERAÇÃO E MUNICÍPIOS	ÍNDICES		TAXAS	
	POPULAÇÃO MUNICIPAL	POPULAÇÃO DAS CIDADES	POPULAÇÃO MUNICIPAL	POPULAÇÃO DAS CIDADES
SERGIPE				
Aracaju	158,9	159,5	4,75	4,80
Estância.	115,6	125,8	1,45	2,30
BAHIA				
Salvador	168,5	158,2	5,35	4,70
Feira de Santana	154,8	206,3	4,45	4,70
Itabuna	145,5	165,7	3,80	5,20
Vitória da Conquis- ta	157,2	176,3	4,65	5,85
Jequié	133,6	155,2	2,95	4,50
Ilhéus	120,2	128,0	1,85	2,50
Alagoinhas	116,1	140,9	1,50	3,50
Paulo Afonso	183,3	197,4	6,25	7,05
Juazeiro.	151,3	171,1	4,25	5,50
Itapetinga	118,6	173,3	1,75	5,65
Candeias	186,0	207,7	6,40	7,60
Senhor do Bonfim	136,0	153,4	3,15	4,35
Santo Antônio de Jesus..	117,0	141,6	1,60	3,55
Valença	119,9	121,0	1,85	1,95
Santo Amaro	97,2	120,6	0,30	1,90
MINAS GERAIS				
Belo Horizonte	178,1	172,1	5,95	5,60
Juiz de Fora	140,8	175,1	3,50	5,75
Governador Valada- res.	149,3	177,6	4,10	5,90
Uberlândia..	141,5	156,2	3,55	4,55
Uberaba.	142,1	150,7	3,60	4,20
Montes Claros	109,9	201,2	0,95	7,25
Divinópolis	150,6	168,2	4,20	5,35
Teófilo Otoni	113,3	157,4	1,30	4,65
Sete Lagoas	160,0	168,2	4,80	5,35
Baibacena	134,3	137,8	3,00	3,25
Poços de Caldas	148,4	160,6	4,05	4,85
Araguari..	121,5	137,1	1,95	3,20
Ituiutaba	128,8	157,4	2,55	4,65
São João Del Rei	115,7	129,9	1,45	2,65
Conselheiro Lafaiete	144,7	153,7	3,75	4,40
Itajubá.	117,0	135,9	1,60	3,10
Patos de Minas	104,7	134,1	0,45	3,00
Itabira	150,8	258,3	4,20	9,95
Passos .	115,9	137,2	1,50	3,20
João Monlevade	130,8	143,1	2,75	3,65
Varginha .	130,2	146,1	2,65	3,85
Lavras	128,7	149,2	2,55	4,10
Ipatinga.	526,4	910,2	18,05	24,70
Nanuque	121,6	192,1	2,00	6,75
Muriae	110,9	151,2	1,05	4,20
Itaúna	134,9	146,7	3,05	3,90
Cataguases	125,9	151,4	2,35	4,25
Araxá	124,5	131,0	2,20	2,75
Curvelo	115,4	138,8	1,45	3,35
Timóteo	142,9	151,1	3,65	4,20
Pouso Alegre	137,4	155,3	3,25	4,50
Ubá..	109,4	133,3	0,90	2,90
Formiga	116,8	153,1	1,55	4,35
Ponte Nova	107,4	127,2	0,70	2,45
Caratinga .	102,1	126,2	0,20	2,35
Santos Dumont.	110,5	132,3	1,00	2,85
Nova Lima	120,5	129,6	1,90	2,65

(continuação)

UNIDADES DA FEDERAÇÃO E MUNICÍPIOS	ÍNDICES		TAXAS	
	POPULAÇÃO MUNICIPAL	POPULAÇÃO DAS CIDADES	POPULAÇÃO MUNICIPAL	POPULAÇÃO DAS CIDADES
MINAS GERAIS				
(conclusão)				
Contagem	396,7	743,0	14,80	22,20
Três Corações	115,5	146,9	1,45	3,90
Ouro Preto	136,1	163,4	3,15	5,05
Pará de Minas	134,4	151,8	3,00	4,25
Coronel Fabriciano	242,8	160,7	9,30	4,85
Além Paraíba	103,1	116,9	0,30	1,60
Alfenas	108,2	129,6	0,80	2,65
Leopoldina	98,1	119,3	0,20	1,80
Campo Belo	106,6	128,2	0,65	2,50
Patrocínio	111,7	142,3	1,10	3,60
ESPÍRITO SANTO				
Vitória	156,2	147,4	4,55	3,95
Cachoeiro de Itape- mirim	122,5	149,4	2,05	4,10
Colatina	100,9	172,0	0,10	5,55
Vila Velha	219,3	139,2	8,15	3,35
Linhares	141,7	438,0	3,55	15,90
RIO DE JANEIRO				
Rio de Janeiro	128,6	131,9	2,55	2,80
Nova Iguaçu	202,5	246,1	7,30	9,45
Niterói.	132,1	127,6	2,85	2,45
Duque de Caxias	177,1	148,2	5,90	4,00
São João de Meriti	158,1	158,4	4,70	4,70
São Gonçalo	173,7	253,1	5,70	9,75
Campos	109,2	169,2	0,90	5,40
Volta Redonda.	141,2	143,7	3,50	3,70
Petropolis	125,8	123,7	2,30	2,15
Nilópolis	132,7	132,7	2,85	2,85
Barna Mansa	159,4	158,2	4,75	4,70
Nova Friburgo	129,0	131,7	2,60	2,80
Teresópolis	139,8	181,0	3,40	6,10
Barna do Pirai	130,4	145,3	2,70	3,80
Três Rios	125,7	142,6	2,30	3,60
Macaé	111,3	148,0	1,10	4,00
Itaperuna	93,3	146,5	0,65	3,90
Resende.	137,6	188,4	3,25	6,55
Cabo Frio	162,0	192,2	4,95	6,75
Valença	113,2	127,7	1,25	2,50
Paracambi	162,7	306,1	5,00	11,85
SÃO PAULO				
São Paulo	159,6	163,9	4,80	5,05
Santo André	170,7	180,3	5,50	6,05
Santos	130,2	130,2	2,70	2,70
Campinas	173,3	172,8	5,65	5,60
Osasco	246,6	884,9	9,45	24,35
Guarulhos	233,9	284,2	8,85	11,00
Ribeirão Preto	147,6	164,3	4,00	5,10
São Bernardo do Campo	244,5	303,9	9,35	11,75
Sorocaba	145,4	151,9	3,80	4,25
São Caetano do Sul	131,2	131,7	2,75	2,80
Jundiaí.	160,5	183,3	4,85	6,25
São José dos Cam- pos	191,5	235,1	6,70	8,95
Piracicaba	131,4	155,6	2,80	4,50
Bauru	140,5	141,0	3,45	3,50

(continuação)

UNIDADES DA FEDERAÇÃO E MUNICÍPIOS	ÍNDICES		TAXAS	
	POPULAÇÃO MUNICIPAL	POPULAÇÃO DAS CIDADES	POPULAÇÃO MUNICIPAL	POPULAÇÃO DAS CIDADES
SÃO PAULO (continuação)				
São Vicente	167,5	157,8	5,30	4,65
São José do Rio Preto	145,1	162,9	3,80	5,00
Mauá	351,7	718,9	13,40	21,80
Taubaté.	140,6	152,5	3,45	4,30
Presidente Prudente	144,8	168,7	3,80	5,35
Mogi das Cruzes.	146,8	141,7	3,90	3,55
Fianca	164,3	183,8	5,10	6,30
Araçatuba	133,7	159,9	2,95	4,80
Araçaguara	127,5	142,2	2,45	3,60
Limeira	150,1	170,7	4,15	5,50
São Carlos	137,8	149,6	3,25	4,10
Marília	108,0	141,3	0,80	3,50
Rio Claro	133,5	142,6	2,95	3,60
Diadema	641,5	5 213,1	20,40	48,50
Americana	176,7	195,0	5,85	6,90
Guaratinguetá	131,6	143,8	2,80	3,70
Carapicuíba.	312,1	375,3	12,05	14,15
Barretos.	110,9	132,8	1,05	2,90
Jacareí	173,4	173,1	5,65	5,65
Catanduva	117,6	129,9	1,65	2,65
Assis.	131,2	150,7	2,75	4,20
Andradina	152,2	212,2	4,30	7,80
Cruzeiro.	144,7	156,9	3,75	4,60
Botucatu	116,0	124,7	1,50	2,25
Itapetininga	133,2	143,7	2,90	3,70
Jad. .	104,0	131,3	0,40	2,75
Taboão da Serra	571,0	1 458,1	19,05	30,75
Araras	137,0	171,3	3,20	5,55
Ouinhos	143,4	158,4	3,65	4,70
Bragança Paulista	113,5	144,8	1,30	3,80
Loana	139,9	152,1	3,40	4,30
Lins	95,2	118,2	0,45	1,70
Cubatão	202,7	197,3	7,30	7,05
Itu	131,4	153,2	2,75	4,35
Tupã.	93,0	121,0	0,70	1,95
Suzano .	205,3	282,9	7,45	10,95
São João da Boa Vista	112,7	131,0	1,20	2,75
Poá.	204,6	205,8	7,40	7,50
Guarujá.	230,5	472,5	8,70	16,80
Tatuí	125,7	137,0	2,30	3,20
Mogi-Guaçu	173,5	229,1	5,65	8,65
Avaré	114,0	146,9	1,30	3,90
Jaboticabal	114,9	143,4	1,40	3,65
Votuporanga	119,7	155,6	1,80	4,50
Bebedouro .	118,4	157,9	1,70	4,65
Mogi-Mirim	130,8	154,9	2,70	4,45
Pindamonhangaba	121,7	147,4	2,00	3,95
Fernandópolis.	133,7	193,2	2,95	6,80
Itapevi	270,8	595,4	10,50	19,55
Birigui . .	111,8	145,0	1,15	3,80
Itapira	106,3	150,4	0,60	4,15
Pirassununga	136,7	151,2	3,20	4,25
Caçapava	126,9	308,3	2,40	11,90
Ferraz de Vasconce- los	248,3	251,0	9,50	9,65
Penápolis	118,8	170,8	1,75	5,50
Itapeva	145,1	179,4	3,80	6,00
Dracena.	107,5	150,0	0,75	4,15

(continuação)

UNIDADES DA FEDERAÇÃO E MUNICÍPIOS	ÍNDICES		TAXAS	
	POPULAÇÃO MUNICIPAL	POPULAÇÃO DAS CIDADES	POPULAÇÃO MUNICIPAL	POPULAÇÃO DAS CIDADES
SÃO PAULO				
(conclusão)				
Aparecida	125,6	151,3	2,30	4,25
Leme	145,3	199,5	3,80	7,15
Ribeirão Pires	168,8	254,9	5,40	9,80
Votorantim	155,3	262,1	4,50	10,10
Santa Bárbara d'Oes- te	137,2	164,7	3,20	5,10
Indaiatuba	155,1	165,5	4,50	5,15
Adamantina	93,1	121,1	0,65	1,95
Gaíça	97,4	120,5	0,25	1,90
Itaquaquecetuba	254,5	317,8	9,80	12,25
Jales	124,0	205,5	2,20	7,45
Sertãozinho	117,5	164,3	1,65	5,10
Batatais	109,2	138,0	0,90	3,25
Mococa	109,5	147,4	0,90	3,95
Itatiba	135,9	168,3	3,10	5,35
Atibaia	157,8	227,9	4,65	8,60
São Joaquim da Barra	120,8	142,6	1,90	3,60
Cotia	214,8	642,9	7,95	20,45
PARANÁ				
Curitiba	168,4	140,2	5,35	3,45
Londrina	169,5	211,4	5,40	7,80
Ponta Grossa	139,8	117,7	3,40	1,65
Maringá	182,4	122,2	6,20	2,05
Pianaguá	170,6	185,8	5,50	6,40
Apucarana	146,1	197,1	3,85	7,00
Pianavaí	125,7	169,5	2,30	5,40
Arapongas	134,6	172,7	3,05	5,60
Cascavel	434,4	693,7	15,80	21,40
Umuarama	365,7	479,7	13,85	17,00
Campo Mourão	259,4	337,7	10,00	12,95
Coinélio Procópio	109,7	142,8	0,95	3,65
Cianorte	164,0	270,7	5,05	10,50
Telêmaco Borba	147,5	151,9	3,95	4,25
São José dos Pinhais	167,5	279,7	5,30	11,55
SANTA CATARINA				
Florianópolis	140,6	155,6	3,45	4,50
Blumenau	149,5	184,5	4,10	6,30
Lages	167,1	234,5	5,25	8,90
Joinville	178,4	175,7	5,95	5,80
Itajaí	133,4	139,2	2,95	3,35
Tubarão	142,0	172,6	3,55	5,60
Criciúma	165,4	199,1	5,15	7,15
Brusque	129,1	201,1	2,60	7,25
Rio do Sul	141,9	160,3	3,55	4,85
RIO GRANDE DO SUL				
Porto Alegre	138,1	140,8	3,30	3,50
Pelotas	116,7	123,9	1,55	2,15
Canoas	147,5	156,0	3,95	4,55
Santa Maria	129,7	153,4	2,65	4,35
Caxias do Sul	153,2	177,4	4,35	5,90
Rio Grande	116,4	118,8	1,55	1,75
Novo Hamburgo	158,3	317,3	4,70	12,25
Passo Fundo	136,6	146,2	3,15	3,90
São Leopoldo	141,0	153,2	3,50	4,35
Uruguaiana	118,0	125,5	1,65	2,30

(conclusão)

UNIDADES DA FEDERAÇÃO E MUNICÍPIOS	ÍNDICES		TAXAS	
	POPULAÇÃO MUNICIPAL	POPULAÇÃO DAS CIDADES	POPULAÇÃO MUNICIPAL	POPULAÇÃO DAS CIDADES
RIO GRANDE DO SUL (conclusão)				
Bagé..	116,9	119,0	1,60	1,75
Cachoeira do Sul..	111,6	129,3	1,10	2,60
Santana do Livramento.	113,4	128,6	1,25	2,55
Alegrete.	119,2	134,9	1,75	3,05
Cruz Alta	125,5	131,3	2,30	2,75
Sapucaia do Sul	228,1	875,6	8,60	24,25
Alvorada .	293,1	772,5	11,35	22,65
Santo Ângelo .	133,0	141,7	2,90	3,55
Erechim.	110,9	130,0	1,05	2,65
Esteio	155,7	152,0	4,55	4,30
Ijuí	115,1	162,1	1,40	4,95
Santa Cruz do Sul	112,9	161,4	1,20	4,90
Cachoeirinha.	269,0	277,7	10,40	10,75
São Borja	131,8	142,0	2,80	3,55
Carazinho	133,5	150,2	2,95	4,55
São Gabriel..	112,2	120,5	1,15	1,85
Vacaria .	117,1	162,5	1,60	5,00
Rosário do Sul..	129,2	154,5	2,60	4,45
Santa Rosa.	125,5	192,6	2,30	6,80
Santiago .	119,4	145,7	1,80	3,85
Montenegro	104,8	148,3	0,45	4,00
Dom Pedrito	116,2	133,0	1,50	2,90
Camaquã.	134,7	203,2	3,00	7,35
MATO GROSSO				
Campo Grande..	189,0	202,9	6,60	7,35
Cuiabá .	174,3	194,0	5,70	6,85
Corumbá	137,4	132,3	3,25	2,85
Três Lagoas	226,7	276,6	8,55	10,70
Dourados.	187,5	241,5	6,50	9,20
Rondonópolis	279,8	532,2	10,85	18,20
GOIÁS				
Goiânia.	253,5	273,2	9,75	10,55
Anápolis	175,1	183,0	5,75	6,25
Itumbiara	131,2	237,9	2,75	9,05
Jataí .	147,8	190,5	4,00	6,65
Rio Verde.	150,9	198,2	4,20	7,10
DISTRITO FEDE- RAL				
Brasília .	293,2	293,2	11,35	11,35

Em menos de 9% dos casos ocorreu um menor crescimento relativo da população total municipal em relação à da cidade. Grande parte destes Municípios, capitais de Unidades da Federação, localizam-se em Regiões Metropolitanas ou são centros de reconhecida importância, seja industrial, seja comercial.

Os Municípios que apresentam tal comportamento são: Belém (PA); Macapá (AP); São Luís (MA); Fortaleza (CE); Natal (RN); João

Pessoa (PB); Jaboatão (PE); Salvador (BA); Belo Horizonte e Coronel Fabriciano (MG); Vila Velha e Vitória (ES); Barra Mansa, Duque de Caxias, Niterói e Petrópolis (RJ); Campinas, Cubatão, Jacareí, Mogi das Cruzes e São Vicente (SP); Curitiba, Maringá e Ponta Grossa (PR); Joinville (SC); Esteio (RS); e, Corumbá (MT).

5 1980, O FUTURO DA URBANIZAÇÃO

Com o auxílio dos índices e taxas de crescimento poderíamos fazer uma projeção para 1980 de como estariam, possivelmente, as 303 cidades que possuíam em 1970 população superior a vinte mil habitantes. Dado o risco de se individualizar as estimativas de população a nível de cidade — pois existem casos em que a população cresceu até 64 vezes entre 1960 e 1970 — procurou-se efetuar uma estimativa aproximada, tomando as cidades agrupadas por faixa de tamanho de população dentro de cada Grande Região.

Para tal, foi necessário identificar a população da cidade em 1960 e agregar esta população, observando-se a mesma estratificação por faixa de tamanho de população com base no ano de 1970.

A se manter o atual ritmo de crescimento populacional, o Brasil deverá ter em 1980 uma população de 125,8 milhões de habitantes, sendo 87,5 milhões em cidades e vilas. Esta população urbana representará cerca de 70% do efetivo brasileiro total.

Estas 303 cidades com população superior a vinte mil habitantes em 1970, tomadas por base, representavam 29,65% da população total brasileira em 1960 e deverão representar cerca de 45% do contingente brasileiro em 1980.

Como já foi esclarecido anteriormente, com vistas a possibilitar não só a mais exata comparação, como também elevar a precisão da estimativa populacional do contingente agregado por faixa de tamanho de população, tomou-se o cuidado de manter nos três períodos as mesmas composições em cada faixa populacional.

Um exemplo flagrante é o de Belo Horizonte, que em 1970 ocupava a faixa populacional de 1 a 2 milhões de habitantes. Em 1960, aquela capital possuía 643 mil habitantes e, como pode ser observado na Tabela 7, foi mantida na mesma faixa populacional de 1970.

Esta sistemática foi mantida para se ter a estimativa por faixa de tamanho de população dos subconjuntos das 303 cidades. A sistemática foi imposta face, sobretudo, ao problema que significaria a inclusão de 131 cidades, que alcançaram o limite de vinte mil habitantes entre 1960 e 1970 e que não se enquadrariam, obviamente na faixa populacional de 1960.

TABELA 7

POPULAÇÃO AGREGADA DAS 303 CIDADES, POR FAIXA DE TAMANHO DE POPULAÇÃO, SEGUNDO AS GRANDES REGIÕES — 1960

BRASIL E REGIÕES	FAIXAS DE POPULAÇÃO (por 1 000 habitantes)							
	TOTAL	20 ├─ 50	50 ├─ 100	100 ├─ 200	200 ├─ 500	500 ├─ 1 000	1 000 ├─ 2 000	2 000 e mais
BRASIL	21 052	3 419	2 398	2 972	2 480	1 333	2 062	6 388
Norte	613	46	53	—	154	360	—	—
Nordeste	4 073	751	424	816	308	355	1 419	—
Sudeste	13 157	1 961	1 129	1 588	1 448	—	643	6 388
Sul	2 724	557	700	504	345	618	—	—
Centro-Oeste	485	104	92	64	225	—	—	—

FONTE: IBGE Sinopse Preliminar do Censo Demográfico VII Recenseamento Geral do Brasil — 1960

Através das Tabelas 7 e 8, pode-se ter uma exata idéia da participação em números absolutos das 303 cidades, nos anos de 1960 e 1970, respectivamente.

Na Tabela 9 temos a estimativa da população para 1980, segundo as Grandes Regiões e por faixa de tamanho de população, observando-se o critério acima descrito.

TABELA 8

POPULAÇÃO AGREGADA DAS 303 CIDADES, POR FAIXA DE TAMANHO DE POPULAÇÃO, SEGUNDO AS GRANDES REGIÕES — 1970

BRASIL E GRANDES REGIÕES	FAIXAS DE POPULAÇÃO (por 1 000 habitantes)							
	TOTAL	20 ├─ 50	50 ├─ 100	100 ├─ 200	200 ├─ 500	500 ├─ 1 000	1 000 ├─ 2 000	2 000 e mais
BRASIL	34 207	5 765	3 775	5 046	4 860	1 990	3 214	9 557
Norte	1 066	102	105	—	286	573	—	—
Nordeste	6 384	1 200	726	1 131	709	530	2 088	—
Sudeste	21 265	3 224	1 776	2 863	2 719	—	1 126	9 557
Sul	4 312	1 018	991	918	498	887	—	—
Centro-Oeste	1 180	221	177	134	648	—	—	—

FONTE: IBGE, Sinopse Preliminar do Censo Demográfico VIII Recenseamento Geral do Brasil — 1970

TABELA 9

ESTIMATIVA DE POPULAÇÃO PARA 1980 DA POPULAÇÃO AGREGADA DAS 303 CIDADES, POR FAIXA DE TAMANHO DE POPULAÇÃO, SEGUNDO AS GRANDES REGIÕES

BRASIL E GRANDES REGIÕES	FAIXAS DE POPULAÇÃO (por 1 000 habitantes)							
	TOTAL	20 └─ 50	50 └─ 100	100 └─ 200	200 └─ 500	500 └─ 1 000	1 000 └─ 2 000	2 000 e mais
BRASIL	56 607	9 770	5 990	8 694	9 847	2 983	5 040	14 283
Norte	1 882	224	211	—	532	915	—	—
Nordeste	10 208	1 918	1 240	1 565	1 632	792	3 061	—
Sudeste	34 628	5 302	2 785	5 175	5 104	—	1 979	14 283
Sul	6 945	1 858	1 412	1 676	723	1 276	—	—
Centro-Oeste	2 944	468	342	278	1 856	—	—	—

5.1 As cidades menores crescerão mais

Uma síntese destas três últimas tabelas é possibilitada através da Tabela 10, que apresenta a participação percentual da população agregada das cidades por faixa de tamanho de população.

Pode-se notar que, de um modo geral, as cidades situadas nas faixas populacionais superiores a 500 mil habitantes apresentam uma tendência no sentido de ter reduzida a sua participação relativa. Isto significa dizer que já atingiram um tamanho tal que o seu crescimento automaticamente se vê freiado. O que se observa, pois, é uma tendência à desconcentração populacional motivada pelo surgimento e crescimento de centros urbanos de menor tamanho.

Englobando-se as faixas de tamanho de população, as que vão de 20 até 500 mil habitantes obtiveram um ganho de 3,8 pontos, sendo a grande responsável por este ganho a faixa de 200 a 500 mil habitantes, que cresceu exatamente 3,8 pontos. As demais faixas de tamanho de população compensaram-se entre si.

Quanto às faixas de tamanho de população superiores a 500 mil habitantes, estas apresentaram oscilações bastante fortes, nunca abaixo dos 2,5 pontos. Por analogia, a perda relativa destas três faixas foi de 3,8 pontos.

Acentuando ainda mais as tendências apontadas através da agregação das cidades, temos como ilustração o Gráfico 2, que nos mostra, para todas as cidades com população superior a vinte mil habitantes em 1970, a combinação entre o seu tamanho de população e a sua taxa geométrica de crescimento anual para o período 1960/1970.

As cidades aparecem representadas pelos pontos enquanto que as sete cruces determinam o ponto de cruzamento, para cada faixa de tamanho de população, entre o tamanho médio das cidades e a taxa média de crescimento anual.

TABELA 10

PARTICIPAÇÃO PERCENTUAL DA POPULAÇÃO AGREGADA DAS CIDADES, POR FAIXA DE TAMANHO DE POPULAÇÃO, PARA 1960, 1970 E ESTIMATIVA PARA 1980

FAIXAS DE POPULAÇÃO (por 1 000 habitantes)	PARTICIPAÇÃO PERCENTUAL		
	1960	1970	1980
TOTAL	100,0	100,0	100,0
20 ┤ 50	16,0	16,8	17,3
50 ┤ 100	11,4	11,5	10,6
100 ┤ 200	14,2	15,0	15,4
200 ┤ 500	11,8	13,6	17,4
500 ┤ 1 000	9,3	8,8	5,3
1 000 ┤ 2 000	6,8	6,4	8,9
2 000 e mais	30,5	27,9	25,1

Muito embora existam poucos casos nas faixas de tamanho de população superiores a 500 mil habitantes, podemos observar nitidamente que ocorre apenas um discreto e plenamente normal afastamento do ponto médio, tanto no sentido horizontal (taxa de crescimento), quanto no vertical (tamanho de população).

A medida que descemos às classes de menor tamanho de população vamos verificando que se intensificam os afastamentos do ponto médio, principalmente na sua horizontalidade.

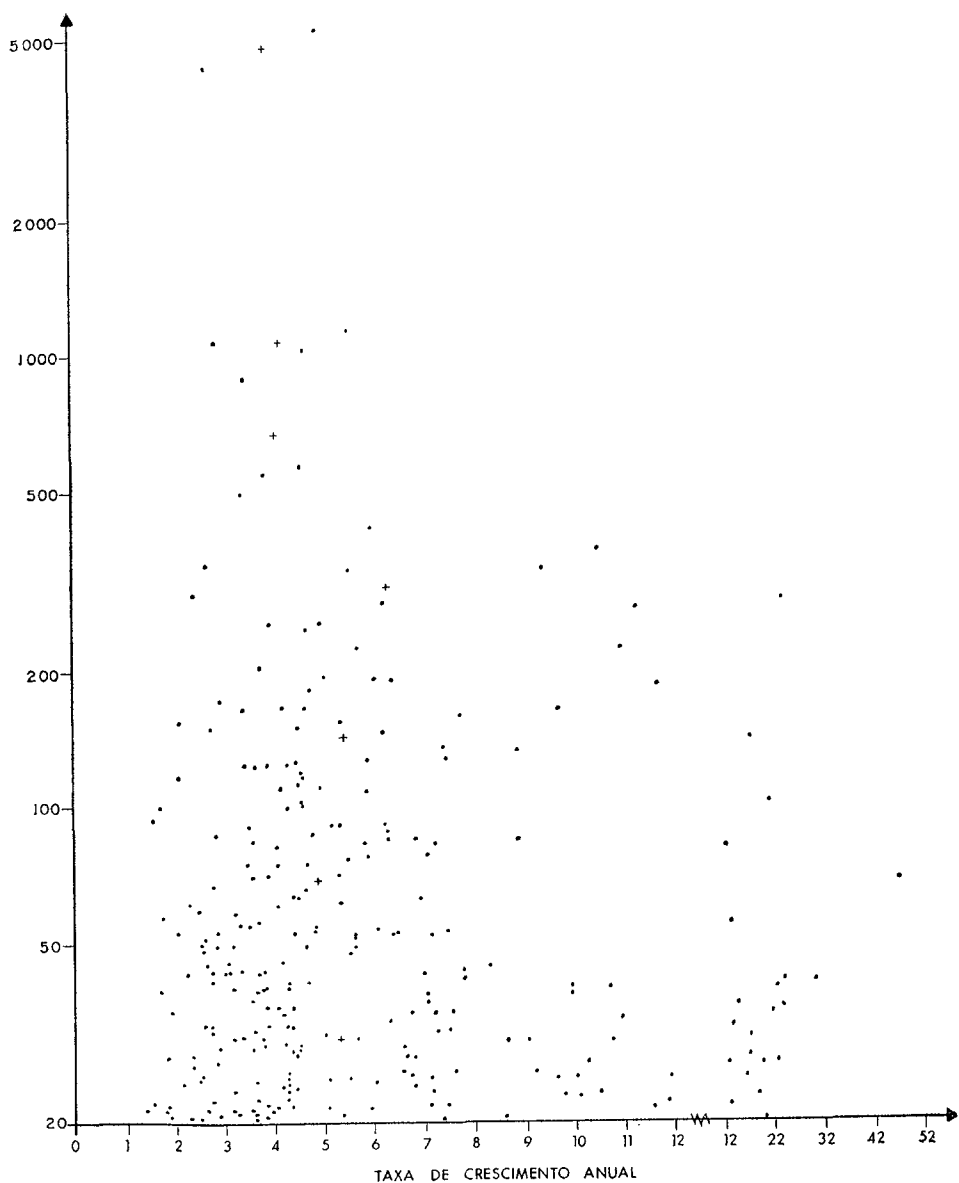
Pode ser sentida uma forte concentração de casos na faixa compreendida entre 1% e 5% de crescimento ao ano, que se dilui um pouco até a altura dos 8% ao ano, rarefazendo-se a partir daí. Até a marca dos 12% ao ano a escala adotada é de intervalos unitários, decuplicando a partir deste ponto, motivo pelo qual se apresentam mais concentradas as ocorrências acima desta marca.

Interessante ainda se faz notar, que por mais modesto que seja o crescimento populacional das grandes cidades, nenhuma delas cresceu menos de 1,35% ao ano, o que significa dizer, um aumento na década de 14,5%.

GRÁFICO 2

**CIDADES COM POPULAÇÃO SUPERIOR A VINTE MIL HABITANTES,
SEGUNDO O TAMANHO E A TAXA ANUAL DE CRESCIMENTO**

POPULAÇÃO
(por 1000 habitantes)



A INTEGRAL GENERALIZADA DE RIEMANN-STIELTJES

Prof. Hervey Guimarães Cova

da
Escola Nacional de Ciências Estatísticas

SUMÁRIO

- 1 *Introdução*
 - 1 1 *Classes contíguas e cortes de Dedekind*
 - 1 2 *Cotas e extremos de um conjunto linear*
 - 1 3 *Relações de ordem; conjuntos dirigidos*
 - 1 4 *Límite superior e limite inferior*
 - 1 5 *Límite de um conjunto dirigido*
 - 1 6 *Conjuntos dirigidos monotônicos; conjunto cofinal*
 - 1 7 *Teorema de Bolzano-Cauchy*
 - 1 8 *Funções de variação limitada*
- 2 *A integral de Riemann*
 - 2.1 *As somas de Darboux*
 - 2 2 *As integrais de Riemann-Darboux*
 - 2.3 *Definição da R-integral*
 - 2 4 *Condições de integrabilidade, segundo Riemann*
 - 2 5 *Propriedade da R-integral*
 - 2 6 *A integral de Riemann, como elemento de separação de classes contíguas*
- 3 *A integral generalizada de Riemann-Stieltjes*
 - 3 1 *Generalizações dos conceitos de abscissa e de somas de Darboux*
 - 3 2 *Definição da St-integral*
 - 3 3 *Condições de integrabilidade, segundo Stieltjes*
 - 3 4 *Propriedades fundamentais das St-integral*
 - 3 5 *Relações entre a R-integral e a St-integral*
- 4 *Exercícios resolvidos*

Bibliografia

O conceito de integral de uma função, como limite de uma soma, encontra, na teoria da integral de Riemann, a sua mais perfeita formulação matemática. Outrossim, a referida teoria admite generalizações que conduzem a um conceito mais amplo de integral de uma função: a integral de Stieltjes.

Sua larga aplicação em estudos mais avançados no campo das probabilidades, aliada à vantagem de permitir um tratamento uniforme às distribuições discretas, contínuas e mistas, fazem, da integral de Stieltjes, um instrumento matemático indispensável a quem deseje aprofundar seus conhecimentos nessa área.

Com o presente trabalho — que, esperamos, possa ser útil ao alumnado da ENCE —, procuramos, de início, dar a fundamentação teórica da integral de Riemann; partindo, após sua definição em termos de limite comum das somas superiores e inferiores de Darboux, para as generalizações que levam à integral de Stieltjes. A seguir, apresentamos as propriedades fundamentais desta última, focalizando, por fim, as relações entre os dois conceitos de integral.

1. INTRODUÇÃO

1.1 Classes contíguas e cortes de Dedekind

Chamam-se, em geral, *classes contíguas* a dois conjuntos não vazios, A e B , de números (reais ou simplesmente racionais) que cumpram as condições:

1.^a — *Ordenação*: Todo número $\alpha \in A$ é menor que todo número $\beta \in B$

2.^a — *Contiguidade*: Para cada $\varepsilon > 0$, arbitrariamente pequeno, existe um par de números, $\alpha \in A$ e $\beta \in B$, tais que:
 $\beta - \alpha < \varepsilon$

Corte no campo racional — Sejam A e B duas classes contíguas, definidas no campo dos números racionais, que, além das condições de ordenação e contiguidade, ainda satisfaçam às condições:

3.^a — Todo número menor que algum número da classe A (classe inferior) pertence a esta classe;

4.^a — Todo número maior que algum número da classe B (classe superior) pertence a esta classe.

Nesse caso, dizemos que o conjunto das duas classes define um *corte*, $(A; B)$, no campo racional.

Convém observar que, em face das condições 3.^a e 4.^a, dado um corte, $(A; B)$, no campo racional, pode existir, no máximo, um número racional, γ , não classificado inicialmente, isto é, não pertencente a A ou a B .

De fato, se existissem dois números racionais, γ_1 e γ_2 , nessa situação, resultariam as duas consequências seguintes:

$$\alpha < \gamma_1 \quad \text{para todo } \alpha \in A;$$

$$\beta > \gamma_2 \quad \text{para todo } \beta \in B;$$

Logo, teríamos (supondo $\gamma_1 < \gamma_2$).

$$\alpha < \gamma_1 < \gamma_2 < \beta$$

e, tomando $\varepsilon = \gamma_2 - \gamma_1$, viria

$$\beta - \alpha > \varepsilon$$

para todo $\alpha \in A$ e todo $\beta \in B$, não cumprindo, pois, a condição de contiguidade.

Deduzimos, daí, que podem apresentar-se quatro situações distintas para um corte $(A; B)$, no campo racional.

1.^a — *Existe um número racional, γ , não classificado*

Então, os números da classe A são todos os números racionais menores que γ ; e os números da classe B são todos os números racionais maiores que γ .

Dizemos, nesse caso, que o número γ define o corte $(A; B)$ e, reciprocamente, que o corte $(A; B)$ define o número γ .

2.^a — *Existe, na classe A , um número racional, α , maior que qualquer outro número dessa classe, isto é, α é o máximo da classe A*

Nesse caso, a classe A é formada por todos os números racionais não maiores que α e a classe B — que não possui mínimo — é formada por todos os números racionais maiores que α .

Dizemos, agora, que o número α define o corte e que, reciprocamente, o corte define o número α .

3.^a — *Existe, na classe B , um número racional, β , menor que qualquer outro número dessa classe, isto é, β é o mínimo da classe B .*

Nesse caso, a classe B , é formada por todos os números racionais não menores que β e a classe A — que não possui máximo — é formada pelos números racionais menores que β .

Dizemos, ainda, que o número β define o corte e, reciprocamente, que este último define o número β .

4.^a — *Todos os números racionais estão classificados, porém, a classe A não possui máximo e a classe B não possui mínimo.*

Dizemos, nesse caso, que o corte (A, B) define um número *irracional* ρ , e este número é maior que todos os números da classe A e menor que todos os números da classe B .

Como vemos, os números irracionais podem ser definidos mediante cortes no campo racional. Outrossim, sabemos que o conjunto dos números reais se obtém fazendo a união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais.

Entretanto, se aplicarmos o processo de cortes no campo real, não conseguiremos definir outros números, além dos racionais e dos irracionais, vale dizer: *o conjunto dos números reais não pode ser ampliado mediante cortes realizados no próprio conjunto*

Corte de Dedekind — Se um $(A; B)$, de classes não vazias, classifica todos os números racionais e satisfaz à condição de ordenação, é possível provar que satisfaz às demais condições, vistas anteriormente, inclusive a de contiguidade. Dizemos, ainda, que o par $(A; B)$ representa um corte (no sentido introduzido por Dedekind), no campo dos números racionais.

Número fronteira ou elemento de separação — Em qualquer das situações anteriores, se ρ é o número (racional ou irracional) definido pelo corte $(A; B)$, dizemos que ρ é o *número fronteira* ou *elemento de separação das classes contíguas*, A e B , o qual fica caracterizado pelas condições:

$$\begin{array}{l} \rho \geq \alpha, \text{ para todo } \alpha \in A \\ \rho \leq \beta, \text{ para todo } \beta \in B \end{array} \quad (11)$$

1.2 Cotas e extremos de um conjunto linear

Cota de um conjunto limitado — Seja C um conjunto linear. Se existe um número real, a , tal que $a \leq x$ para todo $x \in C$, dizemos que C é um conjunto *limitado inferiormente*, sendo a uma *cota inferior* de C .

De modo análogo, quando existe um número real, b , tal que $b \geq x$ para todo $x \in C$, dizemos que C é um conjunto *limitado superiormente*, sendo b uma *cota superior* de C .

Quando C é limitado inferior e superiormente dizemos, apenas, que C é *limitado*; em caso contrário, C será dito *ilimitado* (ou *não limitado*) inferiormente, ou superiormente, ou em ambos os sentidos.

Observação Se o conjunto C admite uma cota inferior, a (superior, b), admitirá uma infinidade de cotas inferiores (superiores), representadas por todos os números reais a' (ou b') tais que $a' < a$ (ou $b' > b$)

* * *

Extremo superior (supremo) de um conjunto — a) Se C é um conjunto linear não limitado superiormente, chama-se *extremo superior* de C ao número impróprio $+\infty$

Em notação: $\overline{\text{extr}} C = +\infty$

b) Se C é um conjunto linear limitado superiormente, chama-se extremo superior de C ao número real E tal que:

E.1 — $x \leq E$, para todo $x \in C$;

E.2 — Dado $\varepsilon > 0$, arbitrariamente pequeno, existe pelo menos um número $x_0 \in C$ tal que: $x_0 > E - \varepsilon$.

Em notação: $\overline{\text{extr}} C = E$

Extremo inferior (ínfimo) de um conjunto — a) Se C é um conjunto linear não limitado inferiormente, chama-se *extremo inferior* de C ao número impróprio $-\infty$.

Em notação: $\underline{\text{extr}} C = -\infty$

b) Se C é um conjunto linear limitado inferiormente, chama-se extremo inferior de C ao número real e tal que:

e.1 — $x \geq e$, para todo $x \in C$;

e.2 — Dado $\varepsilon > 0$, arbitrariamente pequeno, existe pelo menos um número $x_0 \in C$ tal que: $x_0 < e + \varepsilon$.

Em notação: $\underline{\text{extr}} C = e$

As definições anteriores pressupõem a existência dos números E e e . Todavia, é necessário provar a existência e a unicidade de tais números. É o que faremos a seguir

Teorema n.º 1 — Todo conjunto linear não vazio, C , admite sempre um único extremo superior (inferior).

Demonstração: — Vamos considerar, apenas, o caso do extremo superior, uma vez que o raciocínio desenvolvido se aplica, com ligeiras modificações, ao caso do extremo inferior.

Assim, pois, seja C um conjunto linear não vazio. Se C é não limitado superiormente, o seu extremo superior, por definição, existe e é único, posto que:

$$\overline{\text{extr}} C = +\infty$$

Admitamos, então, que C seja limitado superiormente e consideremos as seguintes classes de números reais:

a) a classe A formada por todos os números reais α tais que a relação $\alpha \leq x_0$ seja verdadeira para um, pelo menos, elemento $x_0 \in C$;

b) a classe B formada por todos os números reais β tais que a relação $\beta > x$ seja verdadeira para todo elemento $x \in C$.

As classes A e B , assim definidas, são não vazias. De fato, sendo C não vazio, existe pelo menos um número $x_0 \in C$; logo, existe uma infinidade de números reais α que, satisfazendo à condição $\alpha \leq x_0$, estão classificados em A (inclusive o próprio x_0); outrossim, sendo C limitado superiormente, existe uma infinidade de números reais β (cotas superiores de C), tais que $\beta > x$, qualquer que seja $x \in C$, estando esses números, por isso mesmo, classificados em B .

Por outro lado, todos os números reais estão classificados, posto que, sendo ξ real, ou se cumpre a condição $\xi \leq x_0$ para algum $x_0 \in C$ — e nesse caso ξ estaria classificado em A — ou se cumpre a condição $\xi > x$, para todo $x \in C$ — o que levaria ξ a ser classificado em B .

Finalmente, é óbvio que todo $\alpha \in A$ é menor que todo $\beta \in B$ (condição de ordenação), uma vez que $\alpha \leq x_0$ e $\beta > x_0$, para algum $x_0 \in C$.

Nessas condições, as duas classes consideradas determinam um corte ($A; B$) — no sentido de Dedekind — no conjunto dos números reais e definem, pois, um número real, E , elemento de separação das duas classes, caracterizado — vide relações (1.1) — pelo fato de ser não inferior a qualquer elemento da classe A e não superior a qualquer elemento da classe B . Esse número real, E , preenche as condições de extremo superior, para o conjunto C .

Realmente, qualquer elemento $x \in C$, estando — como já vimos — classificado em A , satisfaz à relação:

$$x \leq E \quad (\text{condição E.1})$$

Outrossim, dado $\varepsilon > 0$, arbitrariamente pequeno, existe pelo menos um $x_0 \in C$ tal que

$$x_0 > E - \varepsilon \quad (\text{condição E.2}),$$

pois, do contrário, para todo $x \in C$, seria válida a relação

$$x \leq E - \varepsilon < E - \frac{\varepsilon}{2},$$

de sorte que o número real $E - \varepsilon/2$ estaria classificado em B ; porém, isto é impossível, porque o elemento de separação das duas classes, E (maior que $E - \varepsilon/2$), deve ser menor que qualquer número da classe B (salvo, eventualmente, o próprio E).

Uma vez demonstrada a existência do extremo superior, E , para provar que ele é único, imaginemos que um outro real, E' , também pudesse ser extremo superior do conjunto C . Supondo, por exemplo, $E' < E$ e tomando

$$\varepsilon = \frac{E - E'}{2},$$

resultaria a dupla desigualdade

$$E' < E - \varepsilon < E \quad (1)$$

Entretanto, para esse número ε fixado, existiria pelo menos um $x_0 \in C$ tal que

$$E - \varepsilon < x_0 \quad (2)$$

posto que E satisfaz à condição E 2'. Combinando (1) e (2), podemos escrever:

$$E' < x_0$$

isto é, o número E' não preencheria a condição E 1, para ser um extremo superior de C .

A hipótese $E < E'$ levaria a uma conclusão idêntica, relativamente ao número E . Logo, o extremo superior de C existe e é único, como desejávamos provar

1.3 Relações de ordem; conjuntos dirigidos

Definição: Chama-se *relação de ordem* ou *critério de ordenação* entre os elementos de um conjunto C não vazio, a toda relação que possa ser definida para dois elementos quaisquer de C — relação simbolizada por “ π ” (lê-se: “precede a”) — que satisfaça às seguintes condições, denominadas *postulados da ordem*:

- 0.1 — Se a e b são dois elementos de C , verifica-se uma e somente uma das situações: $a = b$, ou $a \pi b$, ou $b \pi a$;
- 0.2 — Se $a \pi b$ e $b \pi c$, então: $a \pi c$ (propriedade transitiva).

Um exemplo assaz conhecido é o da relação simbolizada por “ $<$ ” (lê-se: “menor que”), traduzindo a ordenação natural dos números inteiros, ordenação que se estende, de imediato, aos números racionais e reais.

O conjunto C , munido de uma relação de ordem, π , chama-se *conjunto ordenado*: $(C; \pi)$.

É óbvio que o mesmo conjunto admite mais de um critério de ordenação de seus elementos. Outrossim, a cada critério de ordenação, π , corresponde um outro, denominado “critério inverso”, simbolizado por “ σ ” (lê-se: “segue a”), mediante a seguinte convenção: $a \sigma b$ se e somente se $b \pi a$.

É fácil constatar que a relação σ , assim definida, satisfaz aos postulados da ordem. De fato, dados a e b pertencentes a C , aplicando o critério π resulta, em face de 0.1, uma das situações: $a = b$, $a \pi b$, ou $b \pi a$, isto é, tendo em vista a definição de σ : $a = b$, $b \sigma a$, ou $a \sigma b$. Além disso, se $a \sigma b$ e $b \sigma c$, podemos deduzir que $b \pi a$ e $c \pi b$, das quais tiramos, em virtude de 0.2: $c \pi a$, ou seja: $a \sigma c$.

Dizemos que $(C; \sigma)$ está ordenado na *ordem inversa* de $(C; \pi)$. Por exemplo, sendo R o conjunto dos reais, $(R; <)$ e $(R; >)$ estão ordenados inversamente

Um conceito mais geral que o de conjunto ordenado é o conceito de *conjunto dirigido*:

Definição: Chama-se *conjunto dirigido* a todo conjunto não vazio, $C = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$ tal que, para alguns pares de seus elementos, está definida uma relação — simbolizada por “ ε ” (lê-se: “segue a”) — possuindo as seguintes propriedades:

D.1 — $a \varepsilon b$ e $b \varepsilon c$ implicam: $a \varepsilon c$

D.2 — Dados dois elementos quaisquer, a e b , pertencentes a C , existe pelo menos um elemento $c \in C$, tal que:

$c \varepsilon a$ e $c \varepsilon b$

Convém observar que D.1 traduz o fato de ser transitiva a relação ε , enquanto D.2 exprime que dois elementos quaisquer de C admitem, sempre, um sucessor comum.

É fácil constatar que todo conjunto, C , ordenado mediante a relação π , pode ser considerado um conjunto dirigido, tomando-se como relação ε a inversa de π e mediante a convenção adicional de que o último elemento de C — se existir — siga a ele mesmo. De fato, a propriedade 0.2 — válida para a relação inversa σ — é equivalente à propriedade D.1. Por outro lado, dados dois elementos quaisquer, a e b , pertencentes a C , se um deles — b , por exemplo — for o último elemento de C , existirá um sucessor comum de a e b , que é o próprio b ; mas, se nem a e nem b forem o último elemento de C , eles terão um sucessor comum, c , distinto de ambos. Em qualquer situação, pois, σ satisfaz à propriedade D.2.

Seguem alguns exemplos de conjuntos dirigidos:

1) Todo conjunto infinito, C , de pontos da reta (ou do plano), que admita um ponto de acumulação, ξ , não pertencente ao conjunto; desde que os elementos de C sejam orientados na razão inversa de suas distâncias ao ponto ξ , isto é, $x \varepsilon y$ se e somente se $|x - \xi| < |y - \xi|$.

Se convencionarmos que $\xi \varepsilon \xi$, a condição $\xi \notin C$ poderá ser dispensada.

2) O conjunto dos números naturais, tomando-se como relação ε a condição “é múltiplo de”, vale dizer:

$a \varepsilon b$ se e somente se “ a é múltiplo de b ”.

3) A família, $\rho(C)$, dos subconjuntos de um conjunto não vazio, C , dirigida mediante a relação $\supset$ com o significado de ε .

Em todos os três exemplos citados, pode-se ver, facilmente, que são preenchidas as condições D.1 e D.2.

1.4 Limite superior e limite inferior

Seja $\Lambda = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$ um conjunto dirigido e seja $\{u_\alpha, u_\beta, u_\gamma, \dots\}$ um conjunto de números reais, não necessariamente distintos, em correspondência com os elementos $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ do conjunto Λ . Esse novo conjunto, que indicaremos abreviadamente por $\{u_\alpha\}$, fica orientado pelos seus índices, podendo ser considerado, por isso mesmo, um novo conjunto dirigido

Fixado um elemento α , qualquer, de Λ , fica bem definido o conjunto

$$\{u_\beta \mid \beta \preceq \alpha\},$$

formado por todos os elementos de $\{u_\alpha\}$ cujos índices seguem o índice α fixado. Como sabemos, tal conjunto possui um e um só extremo superior, que simbolizaremos E_α , isto é:

$$E_\alpha = \overline{\text{extr}} \{u_\beta \mid \beta \preceq \alpha\} \quad (1)$$

Se fizermos, agora, α variar sobre Λ , o extremo superior E_α , assim definido, também deverá, em geral, variar. Indicaremos, então, por

$$\{E_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$$

o conjunto de todos os extremos superiores obtidos mediante (1), quando α varia sobre o conjunto Λ .

Esse novo conjunto, por sua vez, admite um e um só extremo inferior, que, por definição, será chamado *limite superior*, L , do conjunto $\{u_\alpha\}$, ou seja:

$$\begin{aligned} L &= \overline{\lim}_{\alpha \preceq} \{u_\alpha\} = \overline{\text{extr}} \{E_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\} = \\ &= \overline{\text{extr}}_{\alpha \in \Lambda} \{\overline{\text{extr}} \{u_\beta \mid \beta \preceq \alpha\}\} \end{aligned} \quad (1.2)$$

De modo análogo, podemos definir o *limite inferior*, l , do conjunto $\{u_\alpha\}$, mediante a consideração do extremo superior do conjunto

$$\{e_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$$

onde

$$e_\alpha = \underline{\text{extr}} \{u_\beta \mid \beta \preceq \alpha\}$$

ou seja.

$$\begin{aligned} l &= \lim_{\alpha \preceq} \{u_\alpha\} = \overline{\text{extr}} \{e_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\} = \\ &= \overline{\text{extr}}_{\alpha \in \Lambda} \{\underline{\text{extr}} \{u_\beta \mid \beta \preceq \alpha\}\} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Quando se conhece, efetivamente, o conjunto Λ e o critério de direção dos índices $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ pode-se suprimir a notação " $\alpha \Leftarrow$ ". Outrossim, para situações particulares são usadas notações especiais:

Por exemplo, quando Λ coincide com o conjunto dos inteiros, $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, o conjunto $\{u_\alpha\}$ — nesse caso, ordenado pela relação $<$ — recebe o nome de *sucessão*; e as notações tomam a forma:

$$L = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n \quad \text{e} \quad l = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$$

Do mesmo modo, se Λ coincide com os pontos do eixo real, dirigidos inversamente a suas distâncias a um ponto fixo, ξ , são usadas as notações:

$$L = \overline{\lim}_{x \rightarrow \xi} u(x) \quad \text{e} \quad l = \lim_{x \rightarrow \xi} u(x)$$

Todavia, se Λ possui apenas pontos à esquerda de ξ , modifica-se, ligeiramente, a notação anterior, escrevendo-se " $x \rightarrow \xi - 0$ " (ou, " $x \rightarrow \xi -$ "), no lugar de " $x \rightarrow \xi$ ". Analogamente, se Λ possui somente pontos à direita ξ , usamos " $x \rightarrow \xi + 0$ " (ou, " $x \rightarrow \xi +$ ").

Existência e unicidade dos limites superior e inferior — De acordo com as definições (1.2) e (1.3), os limites superior e inferior envolvem, apenas, os extremos superior e inferior de conjuntos não vazios. Tendo em vista que tais extremos existem, sempre, e são únicos, chegamos à seguinte conclusão, da maior importância:

Os limites superior e inferior de um conjunto dirigido (não vazio) existem, sempre, e são únicos.

* * *

Teorema n.º 2 — O número real, L , é limite superior de um conjunto $\{u_\alpha\}$, dirigido segundo seus índices, se e somente se cumpre as seguintes condições:

Dado, arbitrariamente, o número $\varepsilon > 0$;

L.1 — pode determinar-se um índice $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que, para todo índice $\beta \Leftarrow \delta$, fique satisfeita a relação: $u_\beta < L + \varepsilon$;

L.2 — para cada índice α existe pelo menos um índice, γ , tal que: $\gamma \Leftarrow \alpha$ e $u_\gamma > L - \varepsilon$.

Demonstração — Seja $\{u_\alpha\}$ um conjunto dirigido segundo os seus índices $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, pertencentes ao conjunto dirigido Λ . Admitamos, inicialmente, que seja

$$L = \overline{\lim}_{\alpha \Leftarrow} \{u_\alpha\}$$

De acordo com a definição de limite superior, temos:

$$L = \underline{\text{extr}} \{E_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\} \quad (1)$$

onde:

$$E_\alpha = \overline{\text{extr}} \{u_\beta \mid \beta \varepsilon \alpha\} \quad (2)$$

Em virtude da igualdade (2), podemos escrever:

$$u_\beta \leq E_\alpha, \text{ para todo } \beta \varepsilon \alpha \quad (3)$$

Da mesma igualdade (2) concluídos, ainda, que, para cada índice α , dado $\varepsilon > 0$, arbitrariamente, existe pelo menos um índice, γ , tal que:

$$u_\gamma > E_\alpha - \varepsilon, \quad \gamma \varepsilon \alpha \quad (4)$$

Por outro lado, a partir da igualdade (1), podemos concluir que

$$L \leq E_\alpha, \text{ para todo } \alpha \quad (5)$$

e que, para o mesmo $\varepsilon > 0$ já fixado, existe $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que $\delta \in \Lambda$ e

$$E_\delta < L + \varepsilon \quad (6)$$

Agora, para demonstrar que L satisfaz à condição L.1, basta fazer $\alpha = \delta = \delta(\varepsilon)$ e combinar (3) e (6), resultando:

$$u_\beta \leq E_\delta < L + \varepsilon, \quad \beta \varepsilon \delta$$

Outrossim, para demonstrar que L satisfaz à condição L.2, basta notar que (5) fornece:

$$L - \varepsilon \leq E_\alpha - \varepsilon,$$

de onde, tendo em vista (4), obtemos:

$$u_\gamma > E_\alpha - \varepsilon \geq L - \varepsilon, \quad \gamma \varepsilon \alpha$$

Reciprocamente, se o número real L satisfaz às condições L.1 e L.2, para todo $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, podemos verificar que esse número é o limite superior do conjunto $\{u_\alpha\}$.

De fato, em virtude de L.1, podemos escrever:

$$E_\delta = \overline{\text{extr}} \{u_\beta \mid \beta \varepsilon \delta\} \leq L + \varepsilon$$

Conseqüentemente:

$$\overline{\lim}_{\alpha \varepsilon} \{u_\alpha\} = \overline{\text{extr}} \{E_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\} \leq E_\delta \leq L + \varepsilon$$

Entretanto, sendo ε arbitrariamente pequeno, a relação anterior acarreta:

$$\overline{\lim}_{\alpha \varepsilon} \{u_\alpha\} \leq L \quad (7)$$

Por outro lado, em face de L.2, para cada $\alpha \in \Lambda$, existe pelo menos um $\gamma \in \alpha$ tal que:

$$u_\gamma > L - \varepsilon$$

Desse modo, resulta:

$$E_\alpha = \overline{\text{extr}} \{u_\beta \mid \beta \in \alpha\} \geq L - \varepsilon$$

Todavia, como a relação acima vale para todo índice α , obtemos:

$$\overline{\lim}_{\alpha \in \Lambda} \{u_\alpha\} = \underline{\text{extr}} \{E_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\} \geq L - \varepsilon$$

ou seja, em face da arbitrariedade de ε :

$$\overline{\lim}_{\alpha \in \Lambda} \{u_\alpha\} \geq L \quad (8)$$

Tendo em conta (7) e (8), concluímos:

$$\overline{\lim}_{\alpha \in \Lambda} \{u_\alpha\} = L$$

O teorema está, assim, completamente demonstrado

Teorema n.º 3 — O número real, l , é o limite inferior de um conjunto $\{u_\alpha\}$, dirigido segundo seus índices, se e somente se cumpre as seguintes condições:

Dado, a arbitrariedade, o número $\varepsilon > 0$;

l.1 — pode determinar-se um índice $\delta' = \delta'(\varepsilon)$ tal que, para todo índice $\beta \in \delta'$, fique satisfeita a relação: $u_\beta > l - \varepsilon$;

l.2 — para cada índice α , existe pelo menos um índice, γ , tal que:
 $\gamma \in \alpha$ e $u_\gamma < l + \varepsilon$

Demonstração: — A demonstração segue um raciocínio análogo ao que foi desenvolvido para o teorema anterior, com as necessárias adaptações. Por isso mesmo, será omitida.

Lema n.º 1 — Qualquer que seja o conjunto dirigido $\{u_\alpha\}$ — não vazio —, são válidas as seguintes desigualdades:

$$\boxed{\underline{\text{extr}} \{u_\alpha\} \leq \underline{\lim} \{u_\alpha\} \leq \overline{\lim} \{u_\alpha\} \leq \overline{\text{extr}} \{u_\alpha\}} \quad (1.4)$$

Demonstração: — Inicialmente, devemos notar que é verdadeira a inclusão:

$$\{u_\beta \mid \beta \in \alpha_s\} \subset \{u_\alpha\}, \text{ para todo } \alpha_s \in \Lambda$$

Conseqüentemente, podemos escrever:

$$E_{\alpha_s} = \overline{\text{extr}} \{u_\beta \mid \beta \prec \alpha_s\} \leq \overline{\text{extr}} \{u_\alpha\} \quad (1)$$

e também:

$$e_{\alpha_s} = \underline{\text{extr}} \{u_\beta \mid \beta \prec \alpha_s\} \geq \underline{\text{extr}} \{u_\alpha\}, \quad (2)$$

para todo $\alpha_s \in \Lambda$.

Ora, tendo em vista que

$$L = \lim_{\alpha \in \Lambda} \{u_\alpha\} = \underline{\text{extr}} \{E_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\},$$

decorre, da relação (1).

$$L \leq \overline{\text{extr}} \{u_\alpha\} \quad (3)$$

Do mesmo modo, posto que

$$l = \lim_{\alpha \in \Lambda} \{u_\alpha\} = \overline{\text{extr}} \{e_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\},$$

resulta, da relação (2):

$$l \geq \underline{\text{extr}} \{u_\alpha\} \quad (4)$$

Agora, para demonstrar o lema, basta provar que $l \leq L$, e combinar (3) e (4).

Consideremos, pois, $\alpha_2 \prec \alpha_1$. É fácil observar que $\beta \prec \alpha_2$ implica $\beta \prec \alpha_1$. Logo, é válida a inclusão:

$$\{u_\beta \mid \beta \prec \alpha_2\} \subset \{u_\beta \mid \beta \prec \alpha_1\}$$

Conseqüentemente, temos.

$$E_{\alpha_2} = \overline{\text{extr}} \{u_\beta \mid \beta \prec \alpha_2\} \leq \overline{\text{extr}} \{u_\beta \mid \beta \prec \alpha_1\} = E_{\alpha_1}$$

e

$$e_{\alpha_2} = \underline{\text{extr}} \{u_\beta \mid \beta \prec \alpha_2\} \geq \underline{\text{extr}} \{u_\beta \mid \beta \prec \alpha_1\} = e_{\alpha_1}$$

ou melhor

$$E_{\alpha_2} \leq E_{\alpha_1} \quad , \quad \text{se } \alpha_2 \prec \alpha_1 \quad (5)$$

$$e_{\alpha_2} \geq e_{\alpha_1} \quad , \quad \text{se } \alpha_2 \prec \alpha_1 \quad (6)$$

Lembrando, ainda, que o extremo inferior de um conjunto é sempre menor ou igual que seu extremo superior (condições E.1 e e.1), resulta:

$$e_\alpha \leq E_\alpha \quad , \quad \text{para todo } \alpha \in \Lambda \quad (7)$$

Isto posto, admitamos, contrariando a tese, que se tivesse $l > L$. Então, fixemos ε de modo que se tenha

$$0 < \varepsilon < \frac{l - L}{2}$$

de onde deduzimos

$$l - \varepsilon > \frac{l + L}{2} > L + \varepsilon \quad (8)$$

Outrossim, pela definição de l — vide relações (1.3) — como extremo superior de um conjunto, existe pelo menos um índice α_1 , tal que:

$$e_{\alpha_1} > l - \varepsilon \quad (9)$$

e, analogamente, pela definição de L — vide relações (1.2) —, como extremo inferior de um conjunto, existe pelo menos um índice α_2 , tal que.

$$E_{\alpha_2} < L + \varepsilon \quad (10)$$

Então, usando D.2, se tomarmos o índice α como sucessor, ao mesmo tempo, de α_1 e α_2 , devemos ter, em virtude de (5) e (6), combinadas com (8), (9) e (10):

$$e_{\alpha} \geq e_{\alpha_1} > l - \varepsilon > \frac{l + L}{2} > L + \varepsilon > E_{\alpha_2} \geq E_{\alpha}$$

ou seja.

$$e_{\alpha} > E_{\alpha},$$

o que é absurdo, em face de (7). Por conseguinte, devemos ter $l \leq L$, e o lema está completamente demonstrado

1.5 Limite de um conjunto dirigido

Pode acontecer que os limites superior e inferior, de um conjunto dirigido, coincidam. Nesse caso, dizemos que seu valor comum, λ é o *limite* de $\{u_{\alpha}\}$, e escrevemos.

$$\lambda = \lim_{\alpha \in \mathfrak{A}} \{u_{\alpha}\} \quad \text{ou} \quad u_{\alpha} \xrightarrow{\mathfrak{A}} \lambda$$

Teorema n.º 4 — A condição necessária e suficiente para que o conjunto dirigido $\{u_{\alpha}\}$ admita um limite finito, λ , é que, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, possa determinar-se um índice $\alpha_0 = \alpha_0(\varepsilon)$ tal que

$$|u_{\beta} - \lambda| < \varepsilon, \quad \text{para todo } \beta \in \alpha_0$$

Demonstração. — A condição é necessária — Suponhamos que os limites superior e inferior de $\{u_\alpha\}$ sejam iguais, isto é

$$\lambda = l = L$$

e tomemos, arbitrariamente, $\varepsilon > 0$

Então, em virtude de L. 1 (Teorema n.º 2), existe o índice $\delta = \delta(\varepsilon)$, tal que (com $L = \lambda$).

$$u_\beta < \lambda + \varepsilon, \quad \text{se } \beta \prec \delta \quad (1)$$

De modo análogo, em virtude de l. 1 (Teorema n.º 3), existe o índice $\delta' = \delta'(\varepsilon)$, tal que (com $l = \lambda$).

$$u_\beta > \lambda - \varepsilon, \quad \text{se } \beta \prec \delta' \quad (2)$$

Tendo em conta D. 2, podemos achar o índice $\alpha_0 = \alpha_0(\varepsilon)$ satisfazendo às condições $\alpha_0 \prec \delta$ e $\alpha_0 \prec \delta'$, o que nos permite escrever as relações (1) e (2) da seguinte forma

$$u_\beta - \lambda < \varepsilon \quad \text{e} \quad -\varepsilon < u_\beta - \lambda, \quad \text{se } \beta \prec \alpha_0,$$

ou melhor, combinando as duas desigualdades

$$|u_\beta - \lambda| < \varepsilon, \quad \text{se } \beta \prec \alpha_0 \quad (3)$$

A condição é suficiente — Suponhamos, agora, que a relação (3) seja verdadeira, para $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeno. Então, de (3), deduzimos as relações

$$-\varepsilon < u_\beta - \lambda \quad \text{e} \quad u_\beta - \lambda < \varepsilon$$

que, em seguida, fornecem

$$u_\beta < \lambda + \varepsilon, \quad \text{se } \beta \prec \alpha_0$$

$$u_\beta > \lambda - \varepsilon; \quad \text{se } \beta \prec \alpha_0$$

Vemos, pois, que λ satisfaz às condições L. 1 e L. 2, do Teorema 2, podendo ser tomado como limite superior, L , do conjunto $\{u_\alpha\}$; e, do mesmo modo, λ satisfaz às condições l. 1 e l. 2, do Teorema n.º 3, podendo ser tomado como limite inferior, l , do mesmo conjunto. Portanto, resulta

$$\lambda = l = L,$$

e o teorema fica inteiramente demonstrado.

1.6 Conjuntos dirigidos monótonos; conjunto cofinal

Definição: Um conjunto dirigido $\{u_\alpha\}$ se diz *monótono não decrescente* quando $\beta \prec \alpha$ implica $u_\beta \geq u_\alpha$, diz-se *monótono não crescente* quando $\beta \prec \alpha$ implica $u_\beta \leq u_\alpha$.

Teorema n.º 5 — Todo conjunto dirigido monótono admite limite, o qual coincide com seu extremo superior — se $\{u_\alpha\}$ for não decrescente — ou coincide com seu extremo inferior — se $\{u_\alpha\}$ for não crescente.

Demonstração — Admitamos, inicialmente, que $\{u_\alpha\}$ seja não decrescente. Então,

$$u_\beta \geq u_\alpha, \text{ se } \beta \varepsilon \alpha \quad (1)$$

Por outro lado, sabemos que

$$e_\alpha = \underline{\text{extr}} \{u_\beta \mid \beta \varepsilon \alpha\} \quad (2)$$

Nessas condições, em virtude de (1), todos os elementos do conjunto $\{u_\beta \mid \beta \varepsilon \alpha\}$ são não inferiores a u_α . Logo, mediante (2), resulta:

$$e_\alpha \geq u_\alpha \text{ para todo } \alpha \in \Lambda,$$

e, conseqüentemente:

$$l = \overline{\text{extr}} \{e_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\} \geq \overline{\text{extr}} \{u_\alpha\} \quad (3)$$

Usando, agora, a relação (1.4), temos:

$$\overline{\text{extr}} \{u_\alpha\} \geq L \geq l$$

Combinando (3) e (4), podemos escrever:

$$l \geq \overline{\text{extr}} \{u_\alpha\} \geq L \geq l \quad (4)$$

de onde concluímos pela existência do limite de $\{u_\alpha\}$ — por ser $l = L = \lambda$ — resultando, além disso:

$$\lambda = \lim_{\alpha \varepsilon} \{u_\alpha\} = \overline{\text{extr}} \{u_\alpha\}$$

A demonstração seria a mesma, substancialmente, se $\{u_\alpha\}$ fosse não crescente, levando à conclusão:

$$\lambda = \lim_{\alpha \varepsilon} \{u_\alpha\} = \underline{\text{extr}} \{u_\alpha\}$$

* * *

Definição: Seja $\{u_\alpha\}$ um conjunto dirigido cujos índices pertencem ao conjunto dirigido $\Lambda = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$ e consideremos, em relação ao primeiro, o subconjunto $\{u_{\alpha'}\}$, cujos índices pertencem ao conjunto $\Lambda' = \{\alpha', \beta', \gamma', \dots\}$, subconjunto de Λ .

Dizemos que — nas hipóteses anteriores — o conjunto $\{u_{\alpha'}\}$ é *co-final* com $\{u_\alpha\}$ se, dado qualquer $\alpha \in \Lambda$, existe sempre $\alpha' \in \Lambda$ tal que $\alpha' \varepsilon \alpha$.

Em particular, quando $\Lambda = N$ (conjunto dos inteiros), isto é, quando $\{u_n\}$ é uma sucessão, o conjunto cofinal $\{u_{n'}\}$ chama-se *sub-sucessão*.

Teorema n.º 6 — Se o subconjunto $\{u_{\alpha'}\}$ é cofinal com o conjunto dirigido $\{u_{\alpha}\}$, a existência de $\lambda = \lim \{u_{\alpha}\}$ implica: $\lambda = \lim \{u_{\alpha'}\}$

Demonstração — Admitamos que λ seja o limite do conjunto dirigido $\{u_{\alpha}\}$. Então, de acordo com o Teorema n.º 4, para cada $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, existe em λ o índice $\alpha_0 = \alpha_0(\varepsilon)$, tal que

$$|u_{\alpha} - \lambda| < \varepsilon; \text{ se } \alpha \succ \alpha_0 \quad (1)$$

Entretanto, como estamos supondo $\{u_{\alpha'}\}$ cofinal com $\{u_{\alpha}\}$ existe o índice $\alpha'_0 \in \Lambda'$ tal que $\alpha'_0 \prec \alpha_0$

Seja, agora, $\alpha'_0 \in \Lambda'$ satisfazendo à condição $\alpha' \prec \alpha'_0$. Nessas condições, aplicando D.1, resulta também que $\alpha' \prec \alpha_0$, valendo, para $u_{\alpha'}$ a relação (1), ou seja

$$|u_{\alpha'} - \lambda| < \varepsilon, \text{ se } \alpha' \prec \alpha'_0$$

Portanto, em virtude do mesmo Teorema n.º 4, existe o limite de $\{u_{\alpha'}\}$, ou melhor

$$\lambda = \lim \{u_{\alpha'}\} = \lim \{u_{\alpha}\},$$

como se desejava provar.

1.7 Teorema de Bolzano-Cauchy

Antes de abordar esse teorema, faremos a demonstração do seguinte lema:

Lema n.º 2 — Seja $\{u_{\alpha}\}$ um conjunto dirigido segundo os seus índices. Então, para todo índice $\alpha \in \Lambda$, mantido fixo, é válida a seguinte relação

$$\overline{\text{extr}}_{\alpha', \alpha'' \prec \alpha} \{ |u_{\alpha'} - u_{\alpha''}| \} = E_{\alpha} - e_{\alpha}$$

Demonstração — De acordo com as definições e notações anteriores, temos:

$$E_{\alpha} = \overline{\text{extr}} \{ u_{\beta} \mid \beta \prec \alpha \}$$

$$e_{\alpha} = \underline{\text{extr}} \{ u_{\beta} \mid \beta \prec \alpha \}$$

Supondo, então, que $\alpha' \prec \alpha$ e $\alpha'' \prec \alpha$, resulta

$$e_{\alpha} \leq u_{\alpha'} \leq E_{\alpha} \quad (1)$$

$$e_{\alpha} \leq u_{\alpha''} \leq E_{\alpha} \quad (2)$$

Entretanto, podemos escrever a (2) sob a forma

$$-E_{\alpha} \leq -u_{\alpha''} \leq -e_{\alpha}$$

que, combinada com a (1), fornece:

$$-(E_\alpha - e_\alpha) \leq u_{\alpha'} - u_{\alpha''} \leq E_\alpha - e_\alpha$$

ou seja.

$$|u_{\alpha'} - u_{\alpha''}| \leq E_\alpha - e_\alpha, \quad \alpha', \alpha'' \in \alpha \quad (3)$$

Por outro lado, ainda tendo em conta as definições de E_α e e_α , dado $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, existem os índices $\beta' \in \alpha$ e $\beta'' \in \alpha$, tais que

$$u_{\beta'} > E_\alpha - \frac{\varepsilon}{2} \quad (4)$$

$$u_{\beta''} < e_\alpha + \frac{\varepsilon}{2} \quad (5)$$

Multiplicando a (5) por (-1) e somando a nova desigualdade com a (4), resulta:

$$u_{\beta'} - u_{\beta''} > E_\alpha - e_\alpha - \varepsilon, \quad (6)$$

ou ainda, se ε for suficientemente pequeno para conservar positivo o segundo membro da (6):

$$|u_{\beta'} - u_{\beta''}| > E_\alpha - e_\alpha - \varepsilon; \quad \beta', \beta'' \in \alpha \quad (7)$$

Agora, em virtude de (3) e de (7), observamos que $E_\alpha - e_\alpha$ satisfaz às condições E.1 e E.2, de extremo superior, relativamente ao conjunto $\{|u_{\alpha'} - u_{\alpha''}|\}$, conforme desejávamos provar

Teorema n.º 7 (Bolzano-Cauchy) — A condição necessária e suficiente para que um conjunto dirigido, $\{u_\alpha\}$, admita limite finito é que:

— dado $\varepsilon > 0$, arbitrariamente, possa determinar-se o índice $\alpha_0 = \alpha_0(\varepsilon)$ tal que, para dois índices quaisquer, α' e α'' , cumprindo as condições $\alpha' \in \alpha_0$ e $\alpha'' \in \alpha_0$, seja sempre verdadeira a relação:

$$|u_{\alpha'} - u_{\alpha''}| < \varepsilon \quad (1)$$

Demonstração. A condição é necessária — De fato, admitamos que $\{u_\alpha\}$ tenha limite finito λ . Então, de acordo com o Teorema 4, dado $\varepsilon > 0$ arbitrariamente, podemos achar o índice $\alpha_0 = \alpha_0(\varepsilon)$ tal que:

$$|u_{\alpha'} - \lambda| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad |u_{\alpha''} - \lambda| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{se} \quad \alpha', \alpha'' \in \alpha_0$$

Daí, resulta:

$$\begin{aligned} |u_{\alpha'} - u_{\alpha''}| &= |(u_{\alpha'} - \lambda) - (u_{\alpha''} - \lambda)| \leq \\ &\leq |u_{\alpha'} - \lambda| + |u_{\alpha''} - \lambda| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

ou melhor:

$$|u_{\alpha'} - u_{\alpha''}| < \varepsilon, \quad \text{se } \alpha', \alpha'' \in \alpha_o$$

A condição é suficiente — Reciprocamente, admitamos que a (1) seja sempre verdadeira, nas condições do enunciado. Então, combinando essa hipótese com o lema demonstrado anteriormente, resulta:

$$\overline{\text{extr}}_{\alpha', \alpha'' \in \alpha_o} \{ |u_{\alpha'} - u_{\alpha''}| \} = E_{\alpha_o} - e_{\alpha_o} \leq \varepsilon,$$

de onde tiramos

$$E_{\alpha_o} \leq e_{\alpha_o} + \varepsilon \quad (2)$$

Entretanto, pelas definições de limite superior e limite inferior, temos:

$$L \leq E_{\alpha_o} \quad \text{e} \quad e_{\alpha_o} \leq l \quad (3)$$

Nessas condições, combinando (2) e (3), podemos escrever

$$L \leq E_{\alpha_o} \leq e_{\alpha_o} + \varepsilon \leq l + \varepsilon$$

o que, pela arbitrariedade de ε , implica

$$L \leq l \quad (4)$$

Outrossim, de acordo com o Lema n.º 1, devemos ter, também

$$L \geq l \quad (5)$$

Finalmente, as desigualdades (4) e (5) acarretam a igualdade dos dois limites, isto é: $l = L = \lambda$, como se desejava provar

1.8 Funções de variação limitada

Seja $f(x)$ uma função real definida no intervalo fechado $[a, b]$ e façamos uma qualquer decomposição, δ , desse intervalo, por meio de pontos intermediários, $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$, de sorte que

$$\delta: a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$$

Consideremos, agora, as diferenças

$$\Delta_i f = f(a_{i+1}) - f(a_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

É óbvio que $\Delta_i f$, assim definida, é o incremento da função $f(x)$, nos extremos do intervalo parcial $[a_i, a_{i+1}]$, da decomposição δ

Formemos, então, a soma:

$$T_\delta = |f(a_1) - f(a_0)| + |f(a_2) - f(a_1)| + \dots + |f(a_n) - f(a_{n-1})|$$

ou, abreviadamente:

$$T_{\delta} = \sum_{i=0}^{n-1} |\Delta_i f| \quad (1)$$

Se fizermos, de todos os modos possíveis (em número infinito), a decomposição δ variar — pelo acréscimo de novos pontos ou pela mudança de suas posições — a soma T_{δ} também deverá variar, percorrendo um certo conjunto de números reais (não negativos), que indicaremos por $\{T_{\delta}\}$. Esse conjunto, não vazio, possui um extremo superior, indicado por $V(a, b)$, que será chamado *variação total* da função $f(x)$, no intervalo $[a, b]$.

$$V(a, b) = \overline{\text{extr}} \{T_{\delta}\} \quad (2)$$

Definição: Dizemos que a função real $f(x)$, definida no intervalo $[a, b]$, é de variação limitada, quando sua variação total, $V(a, b)$, no referido intervalo, for um número real finito.

Decorre, desta definição e da definição de variação total, que, se $f(x)$ for de variação limitada, no intervalo $[a, b]$, também será de variação limitada em qualquer subintervalo fechado, do intervalo $[a, b]$; posto que as somas do tipo (1), relativas ao subintervalo, não podem ser maiores que as somas do mesmo tipo, relativas ao intervalo total.

Assim, tomando os pontos x e x' tais que $a \leq x \leq x' \leq b$, poderíamos definir, do mesmo modo, as variações totais de $f(x)$, nos intervalos parciais $[a, x]$ e $[x, x']$, representadas por $V(a, x)$ e $V(x, x')$, respectivamente; ficando convencionado que $V(x, x') = 0$, se $x = x'$.

Isto posto, supondo que $f(x)$ é de variação limitada em $[a, b]$, podemos provar, facilmente, a relação:

$$V(a, x') \geq V(a, x) + V(x, x') \quad (3)$$

De fato, pelas definições de $V(a, x)$ e $V(x, x')$, como extremos superiores finitos de conjuntos não vazios, dado $\varepsilon > 0$, arbitrariamente pequeno, existem as decomposições δ' , do intervalo $[a, x]$, e δ'' , do intervalo $[x, x']$ — em virtude de E.2 — tais que:

$$T_{\delta'} > V(a, x) - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad T_{\delta''} > V(x, x') - \frac{\varepsilon}{2},$$

onde $T_{\delta'}$ e $T_{\delta''}$ representam as somas do tipo (1), relativas às decomposições δ' e δ'' , acima citadas. Portanto, resulta:

$$T_{\delta'} + T_{\delta''} > V(a, x) + V(x, x') - \varepsilon \quad (4)$$

Entretanto, as decomposições δ' e δ'' podem ser combinadas para formar a decomposição δ , do intervalo $[a, x']$; e indicando por T a soma do tipo (1), relativa à decomposição δ , resulta, em face da definição de tais somas:

$$T_{\delta} = T_{\delta'} + T_{\delta''} \quad (5)$$

Outrossim, sendo $V(a, x')$ o extremo superior (finito) das somas do tipo (1), relativas às decomposições do intervalo $[a, x']$, temos, em virtude de E.1:

$$V(a, x') \geq T_{\delta} \quad (6)$$

Combinando (4), (5) e (6), achamos:

$$V(a, x') > V(a, x) + V(x, x') - \varepsilon$$

ou seja, pela arbitrariedade de ε :

$$V(a, x') \geq V(a, x) + V(x, x'),$$

conforme se desejava provar.

Obviamente, podemos considerar $V(a, x)$ como sendo uma função real de x . Assim, a mesma relação (3), em virtude de ser $V(x, x') \geq 0$, mostra que:

$$V(a, x') \geq V(a, x); \text{ se } x' \geq x,$$

isto é, $V(a, x)$ é uma função real não decrescente.

Se introduzirmos, agora, a função real

$$g(x) = V(a, x) - f(x), \quad (7)$$

teremos, para todo $x' \geq x$:

$$g(x') - g(x) = V(a, x') - V(a, x) - [f(x') - f(x)]$$

Porém, em vista de (3), resulta:

$$V(a, x') - V(a, x) \geq V(x, x')$$

e, conseqüentemente,

$$g(x') - g(x) \geq V(x, x') - [f(x') - f(x)]$$

Todavia, é um exercício banal, verificar que a variação total, $V(a, b)$, de uma função $f(x)$, no intervalo $[a, b]$, é não menor que o módulo do incremento dessa função, nos extremos do intervalo. Assim:

$$V(x, x') \geq |f(x) - f(x')|$$

o que nos permite escrever, finalmente

$$g(x') - g(x) \geq |f(x') - f(x)| - [f(x) - f(x)] \geq 0$$

Nessas condições, $g(x)$ é, também, uma função real não decrescente.

Agora, tirando $f(x)$, em (7), obtemos:

$$f(x) = V(a, x) - g(x)$$

o que nos permite enunciar a seguinte conclusão, da maior importância:

I — *Toda função real, de variação limitada no intervalo fechado $[a, b]$, é igual à diferença entre duas funções reais, não decrescentes, definidas no mesmo intervalo.*

Outrossim, ainda em decorrência das definições anteriores, se $f(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$ e f_1 e f_2 forem funções de variação limitada em $[a, b]$, também $f(x)$ será de variação limitada nesse intervalo, posto que a relação

$$|f(a_{i+1}) - f(a_i)| \leq |f_1(a_{i+1}) - f_1(a_i)| + |f_2(a_{i+1}) - f_2(a_i)|,$$

nesse caso, seria verdadeira para todo intervalo parcial $[a_i, a_{i+1}]$, de qualquer decomposição, δ , do referido intervalo.

Ora, sendo $g(x)$ não decrescente em $[a, b]$, sua variação total, nesse intervalo, será $V(a, b) = g(b) - g(a)$, como facilmente se observa; logo: uma função, $g(x)$, não decrescente no intervalo fechado $[a, b]$, é de variação limitada, nesse mesmo intervalo.

Estas duas últimas inferências nos levam a outra conclusão importante;

II — *Se $f(x) = g_1(x) - g_2(x)$ representa a diferença de duas funções reais não decrescentes, no intervalo $[a, b]$, então, a função $f(x)$ será de variação limitada, nesse mesmo intervalo.*

Nota: Uma função $f(x)$ pode ser contínua, no intervalo fechado $[a, b]$, e não ser de variação limitada nesse intervalo. Reciprocamente, uma função $g(x)$ pode ser de variação limitada, em $[a, b]$, e não ser contínua no dito intervalo.

2. A INTEGRAL DE RIEMANN

2.1 As somas de Darboux

Suponhamos que $f(x)$ seja uma função real, limitada no intervalo finito $[a, b]$. Indiquemos por δ uma decomposição desse intervalo, por meio de pontos intermediários:

$$\delta : a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$$

Seja $h_i = a_{i+1} - a_i$, para $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, e façamos, ainda:

$$m_i = \underline{\text{extr}} \{f(x) \mid x \in [a_i, a_{i+1}]\}$$

$$M_i = \overline{\text{extr}} \{f(x) \mid x \in [a_i, a_{i+1}]\}$$

Então, as somas

$$s_\delta = \sum_{i=0}^{n-1} h_i m_i \quad (1)$$

e

$$S_\delta = \sum_{i=0}^{n-1} h_i M_i \quad (2)$$

são denominadas, respectivamente, *soma inferior* e *soma superior* de Darboux, relativas à função $f(x)$, no intervalo $[a, b]$.

Se variarmos, arbitrariamente, a decomposição, δ , do intervalo $[a, b]$ — pelo acréscimo de novos pontos ou pela mudança de suas posições — obteremos um conjunto $\{s_\delta\}$ de somas inferiores e um conjunto $\{S_\delta\}$ de somas superiores.

Teorema n.º 8 — O extremo superior do conjunto $\{s_\delta\}$ e o extremo inferior do conjunto $\{S_\delta\}$ são, ambos, finitos.

Demonstração — Posto que $f(x)$ é limitada em $[a, b]$, pondo

$$m = \underline{\text{extr}} \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$$

e

$$M = \overline{\text{extr}} \{f(x) \mid x \in [a, b]\},$$

resulta que os números m e M são finitos. Outrossim, tendo em vista que

$$m \leq m_i \leq M_i \leq M; \quad \text{para } i = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

qualquer que seja a decomposição δ , tem-se:

$$s_\delta = \sum_{i=0}^{n-1} h_i m_i \leq M \sum_{i=0}^{n-1} h_i = M (b - a) \quad (3)$$

e

$$S_\delta = \sum_{i=0}^{n-1} h_i M_i \geq m \sum_{i=0}^{n-1} h_i = m (b - a) \quad (4)$$

Vemos, então, pela relação (3), que o conjunto $\{s_\delta\}$ é limitado superiormente; e, pela relação (4), que o conjunto $\{S_\delta\}$ é limitado inferiormente. Nessas condições, os extremos

$$j = \overline{\text{extr}}_{\delta} \{s_\delta\} \quad \text{e} \quad J = \underline{\text{extr}}_{\delta} \{S_\delta\}$$

são, ambos, finitos, como queríamos provar.

2.2 As integrais de Riemann-Darboux

Definições — Chamam-se *integral superior* e *integral inferior* (de Riemann-Darboux) da função $f(x)$, limitada no intervalo finito $[a, b]$, ao extremo inferior do conjunto $\{S_\delta\}$ e ao extremo superior do conjunto $\{s_\delta\}$, respectivamente.

Em notações:

$$\begin{aligned} J &= \int_a^b f(x) dx = \overline{\text{extr}} \{S_\delta\} \\ j &= \int_a^b f(x) dx = \underline{\text{extr}} \{s_\delta\} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Diante do exposto, se $f(x)$ é limitada no intervalo finito $[a, b]$, essas integrais existem, sempre, e são finitas. Outrossim, representam limites especiais, conforme veremos a seguir.

* * *

O conjunto, $\{\delta\}$, das decomposições do intervalo finito $[a, b]$, pode ser transformado em um conjunto dirigido, mediante a seguinte convenção: a decomposição δ'' segue a decomposição δ' se e somente se o conjunto dos pontos que definem δ' está contido no conjunto dos pontos que definem δ'' .

Obviamente, o conjunto $\{\delta\}$, assim orientado, satisfaz à condição D.1, ou seja: $\delta'' \Leftarrow \delta'$ e $\delta' \Leftarrow \delta$ implicam: $\delta'' \Leftarrow \delta$.

Por outro lado, dadas duas decomposições quaisquer, δ' e δ'' , se acrescentarmos, a uma delas, os pontos, da outra, que lhe estão faltando, obteremos uma terceira decomposição, δ , tal que: $\delta \Leftarrow \delta'$ e $\delta \Leftarrow \delta''$; logo, o conjunto $\{\delta\}$ também satisfaz à condição D.2

Em virtude do exposto, os conjuntos $\{S_\delta\}$ e $\{s_\delta\}$, das somas superiores e inferiores, podem ser tratados, agora, como sendo conjuntos dirigidos, uma vez que seus elementos fiquem orientados na mesma direção dos respectivos índices.

* * *

Teorema n.º 9 — As somas superiores — de Darboux —, relativas à função $f(x)$, formam um conjunto dirigido monótono não crescente; e as somas inferiores, relativas à mesma função, formam um conjunto dirigido monótono não decrescente.

Demonstração — Consideremos o conjunto $\{S_\delta\}$, das somas superiores, orientado pelos seus índices. Sejam δ' e δ'' duas decomposições,

do intervalo $[a, b]$, tais que $\delta'' \Leftarrow \delta'$; e admitamos, inicialmente, que δ'' possa ser obtida de δ' pelo acréscimo, a esta última, de um único ponto, $[a'_k, a_{k+1}]$; de sorte que teremos:

$$[\delta' : a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_k < a_{k+1} < \dots < a_{n-1} < a_n = b]$$

$$\delta'' : a = a_0 < a_1 < \dots < a_k < a'_k < a_{k+1} < \dots < a_{n-1} < a_n = b$$

Mantendo as notações anteriores, consideremos, para $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$:

$$h_i = a_{i+1} - a_i, \quad M_i = \overline{\text{extr}} \{f(x) \mid x \in [a_i, a_{i+1}]\}$$

e façamos, ainda:

$$h'_k = a'_k - a_k; \quad M'_k = \overline{\text{extr}} \{f(x) \mid x \in [a_k, a'_k]\}$$

$$h''_k = a_{k+1} - a'_k; \quad M''_k = \overline{\text{extr}} \{f(x) \mid x \in [a'_k, a_{k+1}]\}$$

Resultam, de imediato, as seguintes relações:

$$h_k = h'_k + h''_k, \quad M'_k \leq M_k \quad \text{e} \quad M''_k \leq M_k \quad (1)$$

Entretanto, por definições, teremos:

$$S_{\delta'} = \sum_{i=0}^{n-1} h_i M_i \quad (2)$$

$$S_{\delta''} = \sum_{i=0}^{k-1} h_i M_i + h'_k M'_k + h''_k M''_k + \sum_{i=k+1}^{n-1} h_i M_i \quad (3)$$

Outrossim, em virtude das relações (1), podemos escrever:

$$h'_k M'_k + h''_k M''_k \leq (h'_k + h''_k) M_k = h_k M_k,$$

o que, em face de (2) e (3), fornece:

$$S_{\delta''} \leq \sum_{i=0}^{k-1} h_i M_i + h_k M_k + \sum_{i=k+1}^{n-1} h_i M_i = S_{\delta'}$$

ou seja:

$$\boxed{S_{\delta''} \leq S_{\delta'}, \quad \text{se} \quad \delta'' \Leftarrow \delta'} \quad (2.2)$$

confirmando-se, para esse caso particular, a primeira parte do teorema.

Agora, no caso mais geral em que δ'' possa obter-se de δ' pelo acréscimo de dois ou mais pontos, procederíamos do seguinte modo: partindo de δ' e acrescentando-lhe um primeiro ponto, obteríamos a decomposição δ'_1 ; em seguida, acrescentando um novo ponto a δ'_1 , chegaríamos à decomposição δ''_2 ; ... e assim sucessivamente, até obtermos δ' , pelo acréscimo do último ponto que lhe faltava.

Obviamente, resultaria: $\delta'' \Leftarrow \dots \Leftarrow \delta''_2 \Leftarrow \delta''_1 \Leftarrow \delta'$ e, em virtude do que já foi demonstrado:

$$S_{\delta''} \leq \dots S_{\delta''_2} \leq S_{\delta''_1} \leq S_{\delta'},$$

de onde concluímos que a relação (2.2) é geral.

A demonstração da segunda parte do teorema segue um raciocínio análogo, utilizando-se, em lugar dos extremos superiores, os extremos inferiores:

$$m_i = \underline{\text{extr}} \{f(x) \mid x \in [a_i, a_{i+1}]\},$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$m'_k = \underline{\text{extr}} \{f(x) \mid x \in [a_k, a'_k]\},$$

e

$$m''_k = \underline{\text{extr}} \{f(x) \mid x \in [a'_k, a_{k+1}]\}$$

e levando em conta, além disso, que

$$m'_k \geq m_k \quad \text{e} \quad m''_k \geq m_k$$

Resultaria, finalmente:

$$\boxed{s_{\delta''} \geq s_{\delta'}; \text{ se } \delta'' \Leftarrow \delta'} \quad (2.3)$$

completando-se, dessa forma, a demonstração do teorema.

Corolário — A integral superior e a integral inferior (de Riemann-Darboux) da função $f(x)$, limitada no intervalo finito $[a, b]$ coincidem, respectivamente, com o limite das somas superiores e o limite das somas inferiores, dessa função, no referido intervalo.

Demonstração — Em virtude do teorema que acabamos de demonstrar e tendo em vista o Teorema n.º 5, resulta, de imediato:

$$\boxed{\begin{aligned} \lim_{\delta} \{S_{\delta}\} &= \underline{\text{extr}} \{S_{\delta}\} = \int_a^b f(x) dx \\ \lim_{\delta} \{s_{\delta}\} &= \overline{\text{extr}} \{s_{\delta}\} = \int_a^b f(x) dx \end{aligned}} \quad (2.4)$$

2.3 Definição da (R)-integral

Mantendo as notações já introduzidas, voltemos a considerar as somas superiores e inferiores da função $f(x)$, limitada no intervalo finito $[a, b]$.

Qualquer que seja a decomposição δ , desse intervalo, devemos ter $m_i \leq M_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$); de sorte que as parcelas de s_δ são, todas, menores ou iguais que as parcelas correspondentes de S_δ . Por conseguinte, a relação $s_\delta \leq S_\delta$ é verdadeira para toda decomposição, δ , do intervalo $[a, b]$.

Ora, se δ' e δ'' forem duas decomposições quaisquer do intervalo $[a, b]$, podemos achar uma terceira decomposição, δ , do mesmo intervalo, tal que $\delta \leq \delta'$ e $\delta \leq \delta''$; então, em face do Teorema n.º 9, resulta:

$$s_{\delta'} \leq s_\delta \quad \text{e} \quad S_\delta \leq S_{\delta''}$$

e tendo em vista que $s_\delta \leq S_\delta$, obtemos, finalmente:

$$s_{\delta'} \leq S_{\delta''}; \quad \text{sendo} \quad \delta' \text{ e } \delta'' \text{ quaisquer} \quad (2.5)$$

Em decorrência do exposto, retomando os conjuntos $\{s_\delta\}$ e $\{S_\delta\}$, os respectivos limites — sempre existentes — cumprem a condição:

$$\lim_{\delta} \{s_\delta\} \leq \lim_{\delta} \{S_\delta\} \quad (1)$$

Portanto, lembrando o corolário acima demonstrado, podemos escrever:

$$j = \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx = J \quad (2)$$

O caso mais importante ocorre quando os dois limites, referidos em (1), coincidem. Nesse caso, resulta $j = J$, e o valor comum das duas integrais de (2), representado por

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

recebe o nome de *integral de Riemann* — ou *R-integral* — da função $f(x)$, limitada no intervalo finito $[a, b]$. Dizemos, então, que a função $f(x)$ é *R-integrável* em $[a, b]$.

Quando se deseja deixar bem claro que a função $f(x)$ está sendo integrada segundo Riemann, convém preceder, do símbolo (R), o sinal de integração. Podemos, assim, escrever, com o mesmo sentido dado anteriormente:

$$(R) \int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx \quad (2.6)$$

2.4 Condições de integrabilidade, segundo Riemann

De acordo com a definição da R-integral e tendo em vista o corolário do Teorema n.º 9, a condição necessária e suficiente para que $f(x)$, limitada no intervalo finito $[a, b]$, seja R-integrável nesse intervalo, é que

$$\lim_{\delta} \{s_{\delta}\} = \lim_{\delta} \{S_{\delta}\} \quad (1)$$

Ora, posto que o conjunto dirigido $[S_{\delta}]$ é monótono não crescente e que

$$\lim_{\delta} \{S_{\delta}\} = \underline{\text{extr}} \{S_{\delta}\} = \lambda$$

dado $\varepsilon > 0$, arbitrariamente, existe o índice $\delta' = \delta'(\varepsilon)$ tal que:

$$S_{\delta} - \lambda < \frac{\varepsilon}{2}; \quad \text{se } \delta \leq \delta' \quad (2)$$

Outrossim, sendo $\{S_{\delta}\}$ monótono não decrescente, e supondo, ainda, que

$$\lim_{\delta} \{s_{\delta}\} = \overline{\text{extr}} \{s_{\delta}\} = \lambda$$

para o mesmo ε já fixado, existe o índice $\delta'' = \delta''(\varepsilon)$ tal que

$$\lambda - s_{\delta} < \frac{\varepsilon}{2}; \quad \text{se } \delta \leq \delta'' \quad (3)$$

Tomando, agora, δ_0 , de modo que $\delta_0 \leq \delta'$ e $\delta_0 \leq \delta''$, as relações (2) e (3) permanecerão válidas para todo δ satisfazendo à condição $\delta \leq \delta_0$. Então, somando membro a membro as duas desigualdades, obtemos:

$$S_{\delta} - s_{\delta} < \varepsilon; \quad \text{se } \delta \leq \delta_0 \quad (4)$$

Concluimos, pois, em face de (4) e em decorrência do Teorema n.º 4, que o conjunto dirigido $\{S_{\delta} - s_{\delta}\}$ possui limite igual a zero, isto é:

$$\lim_{\delta} \{S_{\delta} - s_{\delta}\} = 0 \quad (5)$$

se $f(x)$ for R-integrável em $[a, b]$.

Todavia, a relação (5) pode ser escrita sob a forma

$$\lim_{\delta} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} h_i (M_i - m_i) \right\} = 0 \quad (6)$$

onde as parcelas do somatório se referem à decomposição δ , do intervalo $[a, b]$, mantidos os significados dos símbolos.

As relações (1), (5) e (6) traduzem, substancialmente, o mesmo fato; e qualquer uma delas pode ser tomada como condição necessária e suficiente para a R-integrabilidade de $f(x)$, no intervalo $[a, b]$. Entretanto, é mais conveniente apresentar essa condição sob outra forma:

Lembrando que $M_i - m_i = \omega_i$ define a oscilação de $f(x)$, no intervalo parcial $[a_i, a_{i+1}]$, da decomposição δ , do intervalo $[a, b]$, podemos escrever a (6) do seguinte modo:

$$\lim_{\delta} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} h_i \omega_i \right\} = 0,$$

que nos permite — usando o citado Teorema n.º 4 — enunciar a condição de integrabilidade, segundo Riemann:

A condição necessária e suficiente para que a função real $f(x)$, limitada no intervalo $[a, b]$, seja R-integrável, nesse intervalo, é que, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, exista uma decomposição, δ_0 , de $[a, b]$, tal que:

$$\delta : \sum_{i=0}^{n-1} h_i \omega_i < \varepsilon; \text{ se } \delta \prec \delta_0$$

(2.7)

2.5 Propriedade da R-integral

Teorema n.º 10 — Se a função real $f(x)$ é R-integrável no intervalo finito $[a, b]$, então:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} h_i f(\xi_i) \right\},$$

onde δ representa uma qualquer decomposição do intervalo $[a, b]$, pelos pontos $a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$, e $a_i \leq \xi_i \leq a_{i+1}$, para $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$

Demonstração — Dada a decomposição δ , do intervalo $[a, b]$ e tomando os pontos ξ_i de acordo com o enunciado, resulta que $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$, para todo intervalo parcial da decomposição. Nessas condições, tendo em vista que $h_i > 0$, para todo índice i , podemos escrever:

$$h_i m_i \leq h_i f(\xi_i) \leq h_i M_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

e, conseqüentemente:

$$s_{\delta} = \sum_{i=0}^{n-1} h_i m_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} h_i f(\xi_i) \leq \sum_{i=0}^{n-1} h_i M_i = S_{\delta} \quad (1)$$

Sendo, por hipótese, $f(x)$ R-integrável em $[a, b]$, temos:

$$\lim_{\delta} \{s_{\delta}\} = \int_a^b f(x) \, dx = \lim_{\delta} \{S_{\delta}\}$$

e como a relação (1) é verdadeira para toda decomposição δ , concluímos, forçosamente:

$$\lim_{\delta} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} h_i f(\xi_i) \right\} = \int_a^b f(x) \, dx$$

conforme queríamos provar.

* * *

Além da propriedade acima demonstrada, citaremos as seguintes, também sob a forma de teoremas:

Teorema n.º 11 — A soma, a diferença e o produto de funções R-integráveis em $[a, b]$ são funções R-integráveis nesse intervalo. Além disso:

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)] \, dx = \int_a^b f_1(x) \, dx \pm \int_a^b f_2(x) \, dx$$

(supondo existentes as integrais do segundo membro)

Teorema n.º 12 — Se a função real $f(x)$ é R-integrável em $[a, b]$ e $f(x) \geq k > 0$ — sendo k uma constante — a função inversa $1/f(x)$ também é R-integrável no mesmo intervalo.

Teorema n.º 13 — Toda função real limitada e monótona no intervalo $[a, b]$ é R-integrável nesse intervalo.

Teorema n.º 14 — Toda função real de variação limitada no intervalo $[a, b]$ é R-integrável nesse intervalo.

Teorema n.º 15 — Toda função real contínua no intervalo $[a, b]$ — fechado — é R-integrável nesse intervalo.

Teorema n.º 16 — Se a função real $f(x)$ é limitada e R-integrável no intervalo $[a, b]$, também o será em qualquer intervalo parcial. Além disso, se $a \leq p < q < r \leq b$, tem-se:

$$\int_p^q f(x) \, dx + \int_q^r f(x) \, dx = \int_p^r f(x) \, dx$$

Nota: As demonstrações dos teoremas de números 11 a 16 são facilmente encontráveis em livros de Análise Matemática. Outrossim, as propriedades a que se referem esses teoremas são meros casos par-

ticulares de propriedades análogas, da St-integral, conforme veremos adiante. Por tais razões, omitiremos, aqui, as demonstrações dos referidos teoremas.

2.6 A integral de Reimann, como elemento de separação de classes contíguas

Dada a função real $f(x)$, limitada no intervalo finito $[a, b]$, voltemos a considerar o conjunto $A = \{s_\delta\}$ das somas inferiores e o conjunto $B = \{S_\delta\}$ das somas superiores, relativas a essa função, no referido intervalo.

Já vimos — relação (2.5) — que, para duas quaisquer decomposições, δ' e δ'' , do intervalo $[a, b]$, vale a desigualdade

$$s_{\delta'} \leq S_{\delta''} \quad (1)$$

Isto significa que as duas classes de números reais, A e B , satisfazem à condição de ordenação, prevista no parágrafo 1.1

Se admitirmos, então, que $f(x)$ satisfaz à condição de integrabilidade, segundo Riemann — traduzida por qualquer das relações (1), (5) ou (6), apresentadas no parágrafo anterior —, isto implicará na contiguidade das classes A e B , uma vez que tais classes passarão, agora, a satisfazer à condição de contiguidade, prevista no referido parágrafo 1.1.

Nessas condições, o limite comum das classes $A = \{s_\delta\}$ e $B = \{S_\delta\}$ — isto é, a R-integral de $f(x)$ — coincidirá com o elemento de separação das referidas classes.

Reciprocamente, suponhamos que $A = \{s_\delta\}$ e $B = \{S_\delta\}$ formam duas classes contíguas. Ora, lembrando que sempre existem os limites

$$\begin{aligned} \lim_{\delta} \{s_\delta\} &= \overline{\text{extr}} \{s_\delta\} \\ e \quad \lim_{\delta} \{S_\delta\} &= \underline{\text{extr}} \{S_\delta\} \end{aligned}$$

e tendo em conta a relação

$$s_{\delta'} \leq \overline{\text{extr}} \{s_\delta\} \leq \underline{\text{extr}} \{S_\delta\} \leq S_{\delta''}$$

a condição de contiguidade das duas classes exige a igualdade dos dois limites, acarretando que seu valor comum — isto é, a R-integral de $f(x)$ — coincida com o elemento de separação das referidas classes.

Em face do exposto, poderíamos dar a seguinte definição:

— Chama-se R-integral da função real $f(x)$, limitada no intervalo finito $[a, b]$, ao elemento de separação das classes $A = \{s_\delta\}$ e $B = \{S_\delta\}$, quando estas classes forem contíguas.

3. A INTEGRAL GENERALIZADA DE RIEMANN-STIELTJES

3.1 Generalizações dos conceitos de abscissa e de somas de Darboux

Na definição das somas superior e inferior, de Darboux, relativas à função real $f(x)$, limitada no intervalo $[a, b]$, mediante a decomposição

$$\delta : a = a_0 < a_1 < a_2 \dots < a_{n-1} < a_n = b$$

do referido intervalo, foram introduzidas as quantidades (incrementos de abscissas):

$$h_i = a_{i+1} - a_i; \text{ para } i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Essas quantidades representam a amplitude dos intervalos parciais $[a_i, a_{i+1}] - i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ — quando se utiliza, como medida dessa amplitude, a diferença entre as abscissas cartesianas dos dois pontos consecutivos que definem cada intervalo parcial.

Nada impede, entretanto, a introdução de uma nova métrica, que generalize o conceito de abscissa. Basta utilizar, para isso, qualquer função monótona não decrescente, $g(x)$, e medir os incrementos de abscissas mediante a relação

$$\eta_i = g(a_{i+1}) - g(a_i); \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Evidentemente, quando tomamos $g(x) = x$, resulta $\eta_i = h_i$, e voltamos, como caso particular, às abscissas cartesianas anteriormente citadas.

* * *

Consideremos, novamente, uma função real, $f(x)$, definida e limitada no intervalo finito $[a, b]$.

Em decorrência da generalização do conceito de abscissa, as somas de Darboux, introduzidas no parágrafo 2.1, também podem ser generalizadas, dando origem, agora, às novas somas, inferior e superior, obtidas mediante a decomposição δ , do intervalo $[a, b]$:

$$s_{\delta}^* = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \eta_i = \sum_{i=0}^{n-1} m_i [g(a_{i+1}) - g(a_i)]$$

$$S_{\delta}^* = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \eta_i = \sum_{i=0}^{n-1} M_i [g(a_{i+1}) - g(a_i)]$$

onde m_i e M_i representam, ainda, os extremos inferior e superior, respectivamente, da função $f(x)$, no intervalo parcial $[a_i, a_{i+1}] - i = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

* * *

Retomemos uma decomposição qualquer do intervalo $[a, b]$, dada por

$$\delta : a = a_0 < a_1 < \dots < a_k < a_{k+1} < \dots < a_{n-1} < a_n = b$$

e consideremos, ainda, o ponto a'_k pertencente ao intervalo parcial $[a_k, a_{k+1}]$.

Um reexame das demonstrações dadas nos parágrafos 2.1 e 2.2 revela que tais demonstrações, no que concerne às quantidades $h_i = a_{i+1} - a_i$ (incrementos de abscissas cartesianas), estão fundamentadas nas duas propriedades seguintes:

- a) $h_i \geq 0$; $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$;
- b) $h_k = h'_k + h''_k$, onde $h'_k = a'_k - a_k$ e $h''_k = a_{k+1} - a'_k$

Ora, os novos incrementos de abscissas generalizadas, $\eta_i = g(a_{i+1}) - g(a_i)$, gozam dessas mesmas propriedades, isto é:

- a) $\eta_i \geq 0$; $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ — por ser $g(x)$ monótona não decrescente;
- b) $\eta_k = \eta'_k + \eta''_k$, onde $\eta'_k = g(a'_k) - g(a_k)$ e $\eta''_k = g(a_{k+1}) - g(a'_k)$.

Por conseguinte, aquelas demonstrações poderiam ser reproduzidas sem modificações nos raciocínios (bastando substituir h_i por η_i nas relações utilizadas), quando consideramos as somas generalizadas s_δ^* e S_δ^* ; permanecendo válidas, portanto, para estas novas somas, todas as propriedades, ali focalizadas, das somas de Darboux. Em particular:

$$S_{\delta''}^* \leq S_{\delta'}^*; \text{ se } \delta'' \prec \delta' \quad (3.1)$$

$$s_{\delta''}^* \geq s_{\delta'}^*; \text{ se } \delta'' \prec \delta' \quad (3.2)$$

$$s_\delta^* \leq S_{\delta''}^*; \text{ sendo } \delta' \text{ e } \delta'' \text{ quaisquer} \quad (3.3)$$

* * *

Em virtude das propriedades (3.1) e (3.2), os conjuntos dirigidos $\{S_\delta^*\}$ e $\{s_\delta^*\}$ permanecem com a característica de monotonia; logo, existem sempre e são finitos os limites:

$$\begin{aligned} \lim_{\delta} \{S_\delta^*\} &= \underline{\text{extr}} \{S_\delta^*\} \\ \lim_{\delta} \{s_\delta^*\} &= \overline{\text{extr}} \{s_\delta^*\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

3.2 Definição da St-integral

Tal como ocorre com as somas de Darboux, a relação (3.3) acarreta:

$$\lim_{\delta} \{s_{\delta}^*\} \leq \lim_{\delta} \{S_{\delta}^*\} \quad (1)$$

Quando esses dois limites coincidem, o seu valor comum, representado por

$$\int_a^b f(x) dg(x), \quad (2)$$

é chamado *integral de Stieltjes* — ou *integral generalizada de Riemann-Stieltjes* — da função $f(x)$, no intervalo $[a, b]$, relativamente à métrica $g(x)$.

Nesse caso, dizemos, ainda, que $f(x)$ é St-integrável em $[a, b]$, segundo a métrica $g(x)$; sendo conveniente, quando desejamos deixar bem claro esse fato, acrescentar o símbolo (St) diante do sinal de integração. Por conseguinte:

$$(St) \int_a^b f(x) dg(x) = \lim_{\delta} \{s_{\delta}^*\} = \lim_{\delta} \{S_{\delta}^*\} \quad (3.5)$$

Observações:

1a. — Se os dois limites, em (1), forem distintos, poderão ser tomados como definições da integral inferior e da integral superior, respectivamente, da função $f(x)$, segundo a métrica $g(x)$.

2a. — Convém notar que, em (2), $dg(x)$ não tem o significado de uma diferencial, mas, sim, o de um incremento, isto é:

$$dg(x) = \Delta g(x)$$

3a. — As definições de S_{δ}^* e s_{δ}^* não dependem da hipótese de ser $g(x)$ monótona. Mas, se usarmos como métrica uma qualquer função $g(x)$, limitada em $[a, b]$, não subsistem, necessariamente, as propriedades traduzidas pelas relações (3.1), (3.2) e (3.3). Todavia, embora usando uma métrica mais geral, $g(x)$, nada impede, em situações particulares, a existência dos limites dos conjuntos dirigidos $\{S_{\delta}^*\}$ e $\{s_{\delta}^*\}$. Nessas condições, sempre que ocorrer

$$\lim_{\delta} \{s_{\delta}^*\} = \lim_{\delta} \{S_{\delta}^*\}$$

continuaremos dizendo que o seu valor comum representa a St-integral da função $f(x)$, no intervalo $[a, b]$, segundo a métrica $g(x)$, mesmo que esta última função não goze da propriedade de monotonia.

Mais adiante veremos que a St-integral de $f(x)$ existe, sempre que uma das funções, $f(x)$ ou $g(x)$, for de variação limitada e a outra for contínua, no intervalo finito $[a, b]$.

4a. — Em virtude da observação anterior, daqui por diante, quando for o caso, declararemos, textualmente, no enunciado dos teoremas, que $g(x)$ é monótona em $[a, b]$; ficando subentendido, em caso contrário, que se trata de uma função mais geral, definida nesse intervalo.

5a. — Se $g(x)$ for monótona não decrescente, a existência da St-integral de $f(x)$ acarreta a contiguidade das classes $A = \{s_\delta^*\}$ e $B = \{S_\delta^*\}$ e vice-versa. Portanto, tal como no caso da R-integral, podemos definir a St-integral como sendo o elemento de separação das classes A e B , quando estas forem contíguas.

3.3 Condições de integrabilidade, segundo Stieltjes

Em última análise, a condição necessária e suficiente para que a função real $f(x)$, limitada no intervalo finito $[a, b]$, seja St-integrável nesse intervalo, segundo a métrica $g(x)$, é que:

$$\lim_{\delta} \{s_\delta^*\} = \lim_{\delta} \{S_\delta^*\} = \lambda \quad (1)$$

independentemente do fato de $g(x)$ ser monótona.

Ora, supondo que isso aconteça, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe, de acordo com o Teorema n.º 4, o índice δ_1 tal que:

$$|s_\delta^* - \lambda| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ se } \delta \leq \delta_1 \quad (2)$$

Do mesmo modo, existe o índice δ_2 tal que:

$$|S_\delta^* - \lambda| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ se } \delta \leq \delta_2 \quad (3)$$

Se tomarmos, então, $\delta_0 \leq \delta_1$ e $\delta_0 \leq \delta_2$, a condição $\delta \leq \delta_0$ acarreta $\delta \leq \delta_1$ e também $\delta \leq \delta_2$, permanecendo válidas, portanto, as duas relações (2) e (3) das quais tiramos:

$$|S_\delta^* - s_\delta^*| \leq |S_\delta^* - \lambda| + |s_\delta^* - \lambda| < \varepsilon, \text{ se } \delta \leq \delta_0$$

Nessas condições o mesmo Teorema n.º 4 nos diz que:

$$\lim_{\delta} \{S_\delta^* - s_\delta^*\} = 0 \quad (4)$$

relação que pode ser escrita sob a forma:

$$\lim_{\delta} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i) \eta_i \right\} = 0 \quad (5)$$

ou, ainda, sob a forma:

$$\lim_{\delta} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i [g(a_{i+1}) - g(a_i)] \right\} = 0, \quad (6)$$

onde $\omega_i = M_i - m_i$ representa, como já dissemos, a oscilação de $f(x)$ no intervalo parcial $[a_i, a_{i+1}]$ — para $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Qualquer uma das relações (1), (4), (5) ou (6) pode ser tomada como condição necessária e suficiente para a St-integrabilidade de $f(x)$, como facilmente se observa; todavia, a (6), em face do teorema citado, permite-nos o seguinte enunciado:

A condição necessária e suficiente para que a função real $f(x)$, limitada no intervalo finito $[a, b]$, seja St-integrável nesse intervalo, relativamente à métrica $g(x)$, é que, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, exista uma decomposição δ_0 , do intervalo $[a, b]$ tal que:

$$\delta : \left| \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i [g(a_{i+1}) - g(a_i)] \right| < \varepsilon ; \text{ se } \delta \prec \delta_0 \quad (3.6)$$

No caso particular em que se supõe $g(x)$ monótona, a condição (3.6) pode ser substituída por esta outra, equivalente

$$\delta : \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i |\eta_i| < \varepsilon, \text{ se } \delta \prec \delta_0 \quad (3.6-a)$$

na qual, por simplicidade, representamos os incrementos de abscissas por η_i .

* * *

Demonstraremos, a seguir, dois teoremas que, não obstante traduzirem, apenas, condições suficientes de St-integrabilidade, apresentam grande importância prática.

Teorema n.º 17 — Se, no intervalo finito $[a, b]$, $f(x)$ é contínua e $g(x)$ é monótona, então, nesse intervalo, $f(x)$ é St-integrável, segundo a métrica $g(x)$.

Demonstração — Se tivermos $g(b) - g(a) = 0$, $g(x)$ será constante em $[a, b]$; logo, as somas s e S serão sempre nulas, existindo, pois, o seu limite comum, $\lambda = 0$. Assim, existirá, sendo igual a zero, a St-integral de $f(x)$. Admitamos, portanto, $g(b) - g(a) > 0$ (isto é, $g(x)$ monótona não decrescente).

Dado $\varepsilon > 0$ arbitrariamente, tomemos

$$\omega_0 = \frac{\varepsilon}{g(b) - g(a)}$$

Sendo $f(x)$ contínua em $[a, b]$, é também, aí, uniformemente contínua; logo, é possível achar uma decomposição δ_0 , desse intervalo, tal que, no intervalo parcial $[a_i, a_{i+1}]$, se tenha:

$$\omega_i < \omega_0, \quad \text{para } i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Como a oscilação de uma função, em qualquer intervalo, não pode crescer, quando se restringe o intervalo, tomando a decomposição δ de modo que $\delta \leq \delta_0$, resulta.

$$\begin{aligned} \delta : 0 &< \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i [g(a_{i+1}) - g(a_i)] < \sum_{i=0}^{n-1} \omega_0 [g(a_{i+1}) - g(a_i)] = \\ &= \omega_0 \sum_{i=0}^{n-1} [g(a_{i+1}) - g(a_i)] = \omega_0 [g(b) - g(a)] = \varepsilon \end{aligned}$$

ficando satisfeita, portanto, a condição de integrabilidade prevista em (3.6), ou seja, $f(x)$ é St-integrável, como desejávamos provar.

A demonstração seria a mesma, substancialmente, se admitíssemos $g(x)$ monótona não crescente, como facilmente se observa.

Teorema n.º 18 — Se, no intervalo finito $[a, b]$, $f(x)$ é monótona e $g(x)$ é contínua, então, nesse intervalo, $f(x)$ é St-integrável, segundo a métrica $g(x)$.

Demonstração — Se tivermos $f(b) - f(a) = 0$, $f(x)$ será constante em $[a, b]$, e isto, como na demonstração anterior, acarretará a existência da St-integral de $f(x)$, também nesse caso igual a zero. Admitamos, pois, que se tenha $f(b) - f(a) > 0$ (isto é, $f(x)$ monótona não decrescente).

Dado $\varepsilon > 0$, arbitrariamente, tomemos

$$h = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$$

Ora, sendo $g(x)$ contínua em $[a, b]$, é também, aí, uniformemente contínua. Portanto, podemos achar uma decomposição δ_0 , do intervalo $[a, b]$, tal que a oscilação de $g(x)$, em qualquer intervalo parcial dessa decomposição, seja inferior ao número positivo h , isto é:

$$|g(a_{i+1}) - g(a_i)| < h, \quad \text{para } i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Agora, se tomarmos a decomposição δ de modo que $\delta \leq \delta_0$, permanecerão válidas as desigualdades anteriores, resultando:

$$\delta : \left| \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i [g(a_{i+1}) - g(a_i)] \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i |g(a_{i+1}) - g(a_i)| < h \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \quad (1)$$

onde ω_i — para $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ — é a oscilação da função $f(x)$, no intervalo parcial $[a_i, a_{i+1}]$.

Entretanto, como estamos supondo $f(x)$ monótona não decrescente em $[a, b]$, resulta:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i = f(b) - f(a)$$

Conseqüentemente, a (1) fornece:

$$\delta : \left| \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i [g(a_{i+1}) - g(a_i)] \right| < h [f(b) - f(a)] = \varepsilon$$

estando, assim, satisfeita a condição de integrabilidade prevista em (3.6), o que demonstra o teorema.

A demonstração seria a mesma, substancialmente, se tivéssemos $f(b) - f(a) < 0$ (isto é, $f(x)$ monótona não crescente).

* * *

Condições mais gerais de St-integrabilidade

Os dois teoremas que acabamos de demonstrar permitem-nos abordar os dois casos fundamentais de existência da St-integral, conforme veremos a seguir:

Teorema n.º 17-a — Se, no intervalo finito $[a, b]$, $f(x)$ é contínua e $g(x)$ é de variação limitada, então, nesse intervalo, $f(x)$ é St-integrável, segundo a métrica $g(x)$.

Demonstração — Sendo $g(x)$ de variação limitada em $[a, b]$, pode ser decomposta (vide parágrafo 1.8) na diferença de duas funções, $g_1(x)$ e $g_2(x)$, monótonas não decrescentes em $[a, b]$:

$$g(x) = g_1(x) - g_2(x)$$

Pelo Teorema 17, existem as St-integrais de $f(x)$, em $[a, b]$, relativamente às métricas $g_1(x)$ e $g_2(x)$.

Considerando, pois, uma decomposição, δ , do intervalo $[a, b]$, podemos escrever, para todo índice i :

$$g(a_{i+1}) - g(a_i) = [g_1(a_{i+1}) - g_1(a_i)] - [g_2(a_{i+1}) - g_2(a_i)]$$

Portanto, se ω_i é a oscilação de $f(x)$ no intervalo parcial $[a_i, a_{i+1}]$, resulta:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i [g(a_{i+1}) - g(a_i)] &= \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i [g_1(a_{i+1}) - g_1(a_i)] - \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i [g_2(a_{i+1}) - g_2(a_i)] \end{aligned}$$

Conseqüentemente:

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i [g(a_{i+1}) - g(a_i)] \right| \leq \left| \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i [g_1(a_{i+1}) - g_1(a_i)] \right| + \left| \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i [g_2(a_{i+1}) - g_2(a_i)] \right| \quad (1)$$

Entretanto, sendo $f(x)$, conforme já vimos, St-integrável em relação a $g_1(x)$ e a $g_2(x)$, dado $\varepsilon > 0$, arbitrariamente, podemos achar uma decomposição, δ_0 , do intervalo $[a, b]$, tal que, para $\delta \prec \delta_0$, cada uma das parcelas (entre barras) do segundo membro de (1) seja inferior a $\varepsilon/2$. Nessas condições, obtemos:

$$\delta : \left| \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i [g(a_{i+1}) - g(a_i)] \right| < \varepsilon; \quad \text{se } \delta \prec \delta_0$$

cumprindo-se, assim, a condição (3.6), que garante a St-integrabilidade de $f(x)$, em relação a $g(x)$.

Teorema n.º 18-a — Se, no intervalo finito $[a, b]$, $f(x)$ é de variação limitada e $g(x)$ é contínua, então, nesse intervalo, $f(x)$ é St-integrável, segundo a métrica $g(x)$.

Demonstração — Tal como no teorema anterior, sendo $f(x)$ de variação limitada no intervalo $[a, b]$, admite a decomposição:

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x),$$

onde $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são monótonas não decrescentes em $[a, b]$.

Pelo Teorema 18, existem as St-integrais de $f_1(x)$ e $f_2(x)$, relativamente à métrica $g(x)$.

Por outro lado, dados dois pontos quaisquer, x' e x'' , do intervalo $[a, b]$, vale sempre a igualdade:

$$f(x') - f(x'') = [f_1(x') - f_1(x'')] - [f_2(x') - f_2(x'')]$$

da qual deduzimos:

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f_1(x') - f_1(x'')| + |f_2(x') - f_2(x'')| \quad (1)$$

Portanto, considerando uma qualquer decomposição, δ , do intervalo $[a, b]$, e representando por ω_i , $\omega_i^{(1)}$ e $\omega_i^{(2)}$ as oscilações de $f(x)$, $f_1(x)$ e $f_2(x)$, respectivamente, no intervalo parcial $[a_i, a_{i+1}]$, obtemos, em consequência de (1):

$$\omega_i \leq \omega_i^{(1)} + \omega_i^{(2)}; \quad \text{para } i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Pondo, agora, $\eta_i = g(a_{i+1}) - g(a_i)$, resulta:

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \eta_i \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i |\eta_i| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i^{(1)} |\eta_i| + \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i^{(2)} |\eta_i| \quad (2)$$

Sendo $g(x)$ contínua no intervalo fechado $[a, b]$, é uniformemente contínua no mesmo intervalo; logo, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, podemos achar uma decomposição δ_0 , desse intervalo, tal que, para todo $\delta \in \delta_0$, se tenha $|\eta_i| < \varepsilon_0$, para $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Nessas condições, resulta:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i^{(1)} |\eta_i| < \varepsilon_0 \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i^{(1)} = \varepsilon_0 [f_1(b) - f_1(a)] = \varepsilon_0 k_1$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i^{(2)} |\eta_i| < \varepsilon_0 \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i^{(2)} = \varepsilon_0 [f_2(b) - f_2(a)] = \varepsilon_0 k_2$$

Então, tomando $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{k_1 + k_2}$, a (2) fornece:

$$\delta : \left| \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \eta_i \right| < \varepsilon, \text{ se } \delta \in \delta_0$$

cumprindo-se, assim, a condição (3.6), que garante a St-integrabilidade de $f(x)$, em relação à métrica $g(x)$.

3.4 Propriedades fundamentais da St-integral

a) Extensão do Teorema n.º 10

Teorema n.º 19 — Se existe a St-integral da função real $f(x)$, limitada no intervalo finito $[a, b]$, relativamente à métrica $g(x)$, sendo, esta última, monótona no referido intervalo —, então, vale a igualdade:

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \lim_{\delta} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i [g(a_{i+1}) - g(a_i)] \right\}$$

onde, para todo índice i , λ_i é qualquer número real satisfazendo a condição $m_i \leq \lambda_i \leq M_i$, sendo m_i e M_i os extremos de $f(x)$ no intervalo parcial $[a_i, a_{i+1}]$ da decomposição, δ , do intervalo $[a, b]$.

Demonstração — Dada a decomposição δ , do intervalo $[a, b]$

$$\delta : a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$$

consideremos, para cada índice i , o valor λ_i , nas condições do enunciado, isto é:

$$m_i \leq \lambda_i \leq M_i; \text{ para } i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (1)$$

Voltemos a considerar os incrementos $\eta_i = g(a_{i+1}) - g(a_i)$. Se $g(x)$ for monótona não decrescente, teremos $\eta_i \geq 0$, para todo índice i ; e se $g(x)$ for monótona não crescente, teremos $\eta_i \leq 0$, também para todo índice i .

Nessas condições, se formarmos as somas:

$$s_{\delta}^* = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \eta_i \quad \Sigma_{\delta} = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \eta_i \quad \text{e} \quad S_{\delta}^* = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \eta_i$$

resulta, para toda decomposição δ , em virtude de (1) e das considerações anteriores:

$$s_{\delta}^* \leq \Sigma_{\delta} \leq S_{\delta}^*, \quad \text{com } g(x) \text{ não decrescente,}$$

ou então:

$$s_{\delta}^* \geq \Sigma_{\delta} \geq S_{\delta}^*, \quad \text{com } g(x) \text{ não crescente.}$$

Ora, em qualquer das situações acima focalizadas e em face da arbitrariedade de δ , a hipótese de existência da St-integral de $f(x)$ implica:

$$\lim_{\delta} \{s_{\delta}^*\} = \lim_{\delta} \{\Sigma_{\delta}\} = \lim_{\delta} \{S_{\delta}^*\}$$

sendo o valor comum dos três limites a própria St-integral de $f(x)$, o que demonstra o teorema.

Nota: Como caso particular, podemos fazer $\lambda_i = f(\xi_i)$, sendo ξ_i um ponto arbitrário do intervalo parcial $[a_i, a_{i+1}]$, posto que $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$, para todo índice i . Então, podemos escrever, também:

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \lim_{\delta} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) [g(a_{i+1}) - g(a_i)] \right\}$$

b) Teorema do valor médio

Teorema n.º 20 — Se a função real $f(x)$, limitada no intervalo finito $[a, b]$, é St-integrável nesse intervalo, segundo a métrica $g(x)$; e esta última é uma função monótona em $[a, b]$, tem-se:

$$\boxed{\int_a^b f(x) dg(x) = \mu [g(b) - g(a)], \quad m \leq \mu \leq M} \quad (3.7)$$

onde m e M são os extremos de $f(x)$ em $[a, b]$.

Demonstração — Dada uma qualquer decomposição, δ , do intervalo $[a, b]$, temos:

$$s_{\delta}^* = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \eta_i \quad \text{e} \quad S_{\delta}^* = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \eta_i \quad (1)$$

onde, para todo índice i , $\eta_i = g(a_{i+1}) - g(a_i)$, e, ademais, m_i e M_i são os extremos de $f(x)$ no intervalo parcial $[a_i, a_{i+1}]$.

Indicando, então, por m e M os extremos da função $f(x)$, no intervalo $[a, b]$, é verdadeira, para todo valor do índice i , a relação:

$$m \leq m_i \leq M_i \leq M$$

Se admitirmos, agora, que $g(x)$ é monótona não decrescente, isto implicará $\eta_i \geq 0$, para todo i , resultando:

$$m \eta_i \leq m_i \eta_i \leq M_i \eta_i \leq M \eta_i$$

e, em seguida:

$$m \sum_i \eta_i \leq \sum_i m_i \eta_i \leq \sum_i M_i \eta_i \leq M \sum_i \eta_i \quad (2)$$

Do mesmo modo, supondo que $g(x)$ é monótona não crescente, isto implicará $\eta_i \leq 0$, para todo i , resultando:

$$m \eta_i \geq m_i \eta_i \geq M_i \eta_i \geq M \eta_i$$

e, em seguida:

$$m \sum_i \eta_i \geq \sum_i m_i \eta_i \geq \sum_i M_i \eta_i \geq M \sum_i \eta_i \quad (3)$$

Todavia, em qualquer das hipóteses, temos sempre $\sum_i \eta_i = g(b) - g(a)$, de sorte que, de (2) e (3) combinadas com (1), deduzimos:

$$m [g(b) - g(a)] \leq s_\delta^* \leq S_\delta^* \leq M [g(b) - g(a)] \quad (4)$$

ou então:

$$m [g(b) - g(a)] \geq s_\delta^* \geq S_\delta^* \geq M [g(b) - g(a)] \quad (5)$$

Posto que as desigualdades (4) ou (5) valem para qualquer decomposição, δ , do intervalo $[a, b]$, obtemos, no limite, em face da St-integrabilidade de $f(x)$:

$$m [g(b) - g(a)] \leq \int_a^b f(x) dg(x) \leq M [g(b) - g(a)] \quad (6)$$

ou então:

$$m [g(b) - g(a)] \geq \int_a^b f(x) dg(x) \geq M [g(b) - g(a)] \quad (7)$$

Se admitíssemos ser $g(x)$ constante, ou seja, $g(b) - g(a) = 0$, isto acarretaria a nulidade dos três membros de (6) ou de (7), ficando a tese do teorema automaticamente verificada. Descartando, pois, esta hipótese, podemos notar o seguinte:

Sendo válida a (6) quando $g(x)$ é não decrescente, isto é, quando $g(b) - g(a) > 0$, a divisão dos seus três membros por $g(b) - g(a)$ não muda os sentidos das desigualdades; entretanto, sendo válida a (7) quando $g(x)$ é não crescente, ou seja, quando $g(b) - g(a) < 0$, a divisão de seus três membros por $g(b) - g(a)$ muda os sentidos das desigualdades.

Em qualquer das últimas duas hipóteses, portanto, a (6) ou a (7) forneceriam:

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x) dg(x)}{g(b) - g(a)} \leq M$$

o que demonstra o teorema.

c) Aditividade

Teorema n.º 21 — Sejam uma função real, $f(x)$, limitada no intervalo finito $[a, b]$, e um ponto, c , interior a esse intervalo. Consideremos $g(x)$ monótona em $[a, b]$. Então, se existe a St-integral de $f(x)$, em $[a, b]$, segundo a métrica $g(x)$, também existem as St-integrais de $f(x)$, nos intervalos parciais $[a, c]$ e $[c, b]$, segundo a mesma métrica, e reciprocamente; além disso, vale a igualdade:

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^c f(x) dg(x) + \int_c^b f(x) dg(x) \quad (3.8)$$

Demonstração — Seja δ uma decomposição do intervalo $[a, b]$ que inclua o ponto c entre os seus pontos de divisão. Obviamente, essa decomposição dá origem a uma decomposição, δ' , do intervalo $[a, b]$ e a uma outra decomposição, δ'' , do intervalo $[c, b]$. Do mesmo modo, duas decomposições, δ' e δ'' , dos intervalos parciais $[a, c]$ e $[c, b]$, respectivamente, podem ser combinados para formar uma decomposição, δ , do intervalo total $[a, b]$.

Se formarmos, então, as somas superiores e inferiores da função $f(x)$, relativas à métrica $g(x)$, para as decomposições δ , δ' e δ'' nas condições acima referidas, poderemos escrever:

$$s_\delta^* = s_{\delta'}^* + s_{\delta''}^* \quad \text{e} \quad S_\delta^* = S_{\delta'}^* + S_{\delta''}^* \quad (1)$$

e, mediante subtração:

$$S_\delta^* - s_\delta^* = (S_{\delta'}^* - s_{\delta'}^*) + (S_{\delta''}^* - s_{\delta''}^*) \quad (2)$$

Isto posto, a existência da St-integral do primeiro membro de (3.8), acarreta:

$$\lim_{\delta} \{S_\delta^* - s_\delta^*\} = 0 \quad (3)$$

e como as duas parcelas do segundo membro da (2) são, sempre, ambas não negativas — se $g(x)$ é não decrescente — ou ambas não positivas — se $g(x)$ é não crescente —, a (3) exige que se tenha:

$$\lim_{\delta} \{S_{\delta'}^* - s_{\delta'}^*\} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\delta} \{S_{\delta''}^* - s_{\delta''}^*\} = 0, \quad (4)$$

o que, por sua vez, implica na existência das duas integrais do segundo membro de (3.8).

Reciprocamente, a existência dessas duas últimas St-integrais citadas acarreta as duas igualdades previstas em (4) e, em seguida, a igualdade (3); logo, acarreta a existência da St-integral que figura no primeiro membro de (3.8).

Uma vez demonstrada a existência das St-integrais, nas condições acima referidas, a igualdade (3.8) resulta, agora, de qualquer uma das relações (1), por simples passagem ao limite. Assim:

$$\lim_{\delta} \{S_{\delta}^*\} = \lim_{\delta'} \{S_{\delta'}^*\} + \lim_{\delta''} \{S_{\delta''}^*\} \quad (5)$$

posto que, em decorrência da parte já demonstrada, a existência do limite do primeiro membro de (1) acarreta a existência dos dois limites do segundo membro, e vice-versa; entretanto, tais limites são as próprias St-integrais referidas no enunciado do teorema, o que permite escrever a (5) sob a forma (3.8).

O teorema fica, assim, inteiramente demonstrado.

d) Linearidade

Teorema n.º 22 — Se existe a St-integral da função $f(x)$, limitada no intervalo finito $[a, b]$, relativamente à métrica $g(x)$, monótona em $[a, b]$ —, também existe, nesse intervalo, a St-integral da função $k f(x)$, relativamente à mesma métrica, qualquer que seja a constante k ; além disso, vale a igualdade:

$$\boxed{\int_a^b k f(x) dg(x) = k \int_a^b f(x) dg(x)} \quad (3.9)$$

Demonstração — Dada uma qualquer decomposição, δ , do intervalo $[a, b]$, representemos por ω_i e ω'_i as oscilações de $f(x)$ e de $k f(x)$, respectivamente, no intervalo parcial $[a_i, a_{i+1}]$, para $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Tomando, então, os pontos x' e x'' , arbitrariamente, no intervalo $[a_i, a_{i+1}]$, temos:

$$|k f(x') - k f(x'')| = |k| |f(x') - f(x'')|, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Conseqüentemente, resulta:

$$\omega'_i = |k| \omega_i; \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Isto posto, fazendo, como sempre, $\eta_i = g(a_{i+1}) - g(a_i)$, obtemos:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega'_i \eta_i = |k| \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \eta_i \quad (1)$$

Como estamos supondo $f(x)$ St-integrável, na forma do enunciado, a condição (3.6) nos diz que, dado $\varepsilon_0 > 0$, arbitrariamente, podemos achar uma decomposição δ_0 , do intervalo $[a, b]$, tal que:

$$\delta : \left| \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \eta_i \right| < \varepsilon_0, \text{ se } \delta \in \delta_0 \quad (2)$$

Portanto, supondo $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{|k|}$, onde ε continua sendo arbitrariamente pequeno, resulta, de (1) e de (2):

$$\delta : \left| \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \eta_i \right| < \varepsilon, \text{ se } \delta \in \delta_0 \quad (3)$$

Vemos, assim, em face da arbitrariedade de ε , que fica satisfeita, ainda, a condição (3.6), para a função $k f(x)$, o que garante a St-integrabilidade desta última função, nos termos do enunciado.

Para demonstrar a segunda parte do teorema, devemos notar que a igualdade

$$\delta : \sum_{i=0}^{n-1} k f(\xi_i) [g(a_{i+1}) - g(a_i)] = k \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) [g(a_{i+1}) - g(a_i)] \quad (3)$$

onde, para todo índice i , ξ_i é um ponto arbitrário do intervalo parcial $[a_i, a_{i+1}]$, é verdadeira qualquer que seja a decomposição, δ , do intervalo $[a, b]$. Ora, de acordo com o Teorema n.º 19, a existência da St-integral de $k f(x)$ implica na existência do limite do primeiro membro de (1); ao passo que a existência da St-integral de $f(x)$ implica na existência do limite do seu segundo membro. Todavia, sendo a (3) verdadeira para toda decomposição, δ , continua sendo verdadeira no limite, o que, ainda de acordo com o Teorema n.º 19, nos dá:

$$\int_a^b k f(x) dg(x) = k \int_a^b f(x) dg(x)$$

conforme desejávamos provar.

Teorema n.º 23 — Se existem — para $k = 1, 2, \dots, m$ — as St-integrais das funções $f_k(x)$, limitadas no intervalo finito $[a, b]$, relativamente à métrica $g(x)$, monótona em $[a, b]$ — então, também existe, nesse intervalo, a St-integral da função $f(x) = \sum f_k(x)$, relativamente à mesma métrica; além disso, é válida a igualdade:

$$\int_a^b \left[\sum_{k=1}^m f_k(x) \right] dg(x) = \sum_{k=1}^m \int_a^b f_k(x) dg(x) \quad (3.10)$$

Demonstração — Consideremos uma decomposição, δ , do intervalo $[a, b]$ e — para $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ e $k = 1, 2, \dots, m$ — representemos por $\omega_i \omega_i^{(k)}$ as oscilações de $f(x)$ e de $f_k(x)$, respectivamente, no intervalo parcial $[a_i, a_{i+1}]$. Então, tomando x' e x'' , arbitrariamente, nesse intervalo parcial, podemos escrever:

$$|f_k(x') - f_k(x'')| \leq \omega_i^{(k)} \quad k = 1, 2, \dots, m$$

e daí:

$$\begin{aligned} |f(x') - f(x'')| &= \left| \sum_k f_k(x') - \sum_k f_k(x'') \right| \leq \\ &\leq \sum_k |f_k(x') - f_k(x'')| \leq \sum_k \omega_i^{(k)} \end{aligned}$$

ou seja:

$$\omega_i \leq \sum_{k=1}^m \omega_i^{(k)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (1)$$

Façamos, ainda, $\eta_i = g(a_{i+1}) - g(a_i)$. Ora, em face da condição (3.6), sendo $f_k(x)$ St-integrável em $[a, b]$, dado $\varepsilon > 0$, arbitrariamente, podemos achar a decomposição $\delta_o^{(k)}$ tal que:

$$\delta : \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i^{(k)} |\eta_i| < \varepsilon ; \text{ se } \delta \prec \delta_o^{(k)} \text{ — para } k = 1, 2, \dots, m \quad (2)$$

Outrossim, em virtude de (1), podemos escrever:

$$\delta : \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i |\eta_i| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |\eta_i| \sum_{k=1}^m \omega_i^{(k)} = \sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i^{(k)} |\eta_i| \quad (3)$$

Entretanto, se tomarmos δ_o de sorte que $\delta_o \prec \delta_o^{(k)}$, para $k = 1, 2, \dots, m$, as relações (2) serão válidas todo δ , tal que $\delta \prec \delta_o$. Assim:

$$\sum_{k=1}^m \left[\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i^{(k)} |\eta_i| \right] < m \varepsilon$$

o que nos permite escrever a (3) sob a forma:

$$\delta : \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i |\eta_i| < m \varepsilon , \text{ se } \delta \prec \delta_o$$

Finalmente, a relação acima, em virtude da arbitrariedade de ε , nos mostra que a função $f(x) = \sum_k f_k(x)$ cumpre a condição (3.6), o que garante a sua St-integrabilidade, nos termos do enunciado.

Para demonstrar a segunda parte do teorema, devemos notar que a igualdade

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left[\sum_{k=1}^m f_k(\xi_i) \right] [g(a_{i+1}) - g(a_i)] = \sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^{n-1} f_k(\xi_i) [g(a_{i+1}) - g(a_i)], \quad (4)$$

onde, para todo índice i , ξ_i é um ponto arbitrário do intervalo parcial $[a_i, a_{i+1}]$, é verdadeira qualquer que seja a decomposição, δ , do intervalo $[a, b]$.

Como, por hipótese, $f_k(x)$ — para $k = 1, 2, \dots, m$ — é St-integrável, existe, pelo Teorema n.º 19, o limite de cada parcela (somatório em relação a k) do segundo membro de (4); e, portanto, existe o limite, λ , desse segundo membro, sendo, pelo mesmo teorema citado,

$$\lambda = \sum_{k=1}^m \int_a^b f_k(x) dg(x)$$

Analogamente, por ser $\sum f_k(x)$ St-integrável, conforme já ficou provado, existe o limite, λ' , do primeiro membro de (4), resultando, pelo citado Teorema 19:

$$\lambda = \int_a^b \left[\sum_{k=1}^m f_k(x) \right] dg(x)$$

Todavia, como a (4) é verdadeira para toda decomposição δ , continua sendo válida no limite, isto é: $\lambda = \lambda'$; ficando, pois, demonstrado o teorema.

Teorema n.º 24 — Se existe a St-integral da função $f(x)$, limitada no intervalo finito $[a, b]$, relativamente à métrica $g(x)$, monótona em $[a, b]$ —, também existe, nesse intervalo, a sua St-integral, relativamente à métrica $k g(x)$, qualquer que seja a constante k ; além disso, vale a igualdade:

$$\boxed{\int_a^b f(x) [k g(x)] = k \int_a^b f(x) dg(x)} \quad (3.11)$$

Demonstração — Dada uma qualquer decomposição, δ , do intervalo $[a, b]$, representemos por ω_i a oscilação de $f(x)$ no intervalo parcial $[a_i, a_{i+1}]$ e façamos $\eta_i = g'(a_{i+1}) - g(a_i)$; para $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Ora, de acordo com a condição (3.6), sendo $f(x)$ St-integrável segundo a métrica $g(x)$, dado $\varepsilon > 0$, arbitrariamente, podemos achar a decomposição δ_0 , do intervalo $[a, b]$, tal que:

$$\delta : \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i |\eta_i| < \varepsilon, \quad \text{se } \delta \leq \delta_0$$

de onde deduzimos:

$$\delta : \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i |k \eta_i| < |k| \varepsilon, \text{ se } \delta \leq \delta_0$$

Portanto, em face da arbitrariedade de ε , $f(x)$ satisfaz à condição (3.6), que garante sua St-integrabilidade, segundo a métrica $k g(x)$.

Para demonstrar a segunda parte do teorema, basta notar que a igualdade

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) [k g(a_{i+1}) - k g(a_i)] = k \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) [g(a_{i+1}) - g(a_i)] \quad (1)$$

onde ξ_i é um ponto arbitrário do intervalo $[a_i, a_{i+1}]$, é verdadeira para toda decomposição, δ , do intervalo $[a, b]$.

Ora, de acordo com o Teorema n.º 19, a existência da St-integral de $f(x)$, segundo a métrica $g(x)$, implica na existência do limite, λ , do segundo membro de (1), ou melhor:

$$\lambda = k \int_a^b f(x) dg(x)$$

Outrossim, a existência, já demonstrada, da St-integral de $f(x)$, segundo a métrica $k g(x)$, implica na existência do limite, λ' , do primeiro membro de (1), isto é:

$$\lambda' = \int_a^b f(x) d[k g(x)]$$

Todavia, sendo a (1) verdadeira para toda decomposição, δ , continua sendo verdadeira no limite. Assim, $\lambda = \lambda'$ e o teorema fica demonstrado.

Teorema n.º 25 — Se existem as St-integrais da função $f(x)$, limitada no intervalo finito $[a, b]$, relativamente a cada uma das métricas $g_k(x)$, monótonas em $[a, b]$, para $k = 1, 2, \dots, m$ — também existe, nesse intervalo, a St-integral de $f(x)$, relativamente à métrica

$g(x) = \sum_k g_k(x)$; além disso, é verdadeira a igualdade:

$$\int_a^b f(x) d \left[\sum_{k=1}^m g_k(x) \right] = \sum_{k=1}^m \int_a^b f(x) dg_k(x) \quad (3.12)$$

Demonstração — Dada uma qualquer decomposição, δ , do intervalo $[a, b]$, representamos por ω_i a oscilação de $f(x)$, no intervalo parcial $[a_i, a_{i+1}]$ e fazamos $\eta_i^{(k)} = g_k(a_{i+1}) - g_k(a_i)$; para $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ e $k = 1, 2, \dots, m$

Seendo $f(x)$ St-integrável, segundo a métrica $g_k(x)$, para todo k , a condição (3.6) diz que, dado $\varepsilon > 0$, arbitrariamente, podemos achar a decomposição $\delta_o^{(k)}$, do intervalo $[a, b]$, tal que

$$\delta : \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i |\eta_i^{(k)}| < \varepsilon_o \quad ; \quad \text{se } \delta \prec \delta_o^{(k)} \quad \text{---} \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (1)$$

Se definirmos, agora, $\eta_i = g(a_{i+1}) - g(a_i)$, onde $g(x) = \sum_k g_k(x)$, podemos escrever:

$$|\eta_i| = \left| \sum_k g_k(a_{i+1}) - \sum_k g_k(a_i) \right| \leq \sum_k \left| g_k(a_{i+1}) - g_k(a_i) \right|$$

ou seja:

$$|\eta_i| \leq \sum_{k=1}^m |\eta_i^{(k)}| \quad (2)$$

Multiplicando os dois membros de (2) por ω_i e somando em relação a i , vem:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i |\eta_i| \leq \sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i |\eta_i^{(k)}| \quad (3)$$

Tomando, pois, a decomposição δ_o de modo que $\delta_o \prec \delta_o^{(k)}$, para $k = 1, 2, \dots, m$, as relações (1) serão todas verdadeiras para qualquer decomposição δ seguindo δ_o ; isto é:

$$\delta : \sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i |\eta_i^{(k)}| < m \varepsilon_o \quad , \quad \text{se } \delta \prec \delta_o$$

Então, em face de (3), e fazendo $\varepsilon_o = \frac{\varepsilon}{m}$ — onde ε , positivo, continua arbitrariamente pequeno —, obtemos:

$$\delta : \left| \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \eta_i \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i |\eta_i| < \varepsilon \quad , \quad \text{se } \delta \prec \delta_o$$

Assim, a função $f(x)$ satisfaz à condição (3.6), com a métrica $g(x)$, o que garante sua St-integrabilidade, em relação a tal métrica.

A fim de demonstrar a segunda parte do teorema, multipliquemos ambos os membros da igualdade

$$\eta_i = \eta_i^{(1)} + \eta_i^{(2)} + \dots + \eta_i^{(m)}$$

— válida para toda decomposição, δ , do intervalo $[a, b]$ — pelo extremo superior, M_i , de $f(x)$, no intervalo parcial $[a_i, a_{i+1}]$; em seguida, somemos as novas igualdades, assim obtidas, em relação a i . Encontramos:

$$S^* = S_1^* + S_2^* + \dots + S_m^* \quad (4)$$

onde S^* e S_k^* — para $k = 1, 2, \dots, m$ — representam as somas superiores de $f(x)$, em relação a $g(x)$ e a $g_k(x)$, respectivamente.

A igualdade (4) sendo verdadeira para toda decomposição, δ , do intervalo $[a, b]$, será verdadeira no limite; e como todos os limites existem e representam as St-integrais referidas na tese do teorema, este fica completamente demonstrado.

e) Monotonia

Lema n.º 3 — Sejam as funções $f(x) \geq 0$ e $g(x)$ monótona não decrescente, limitadas no intervalo finito $[a, b]$. Então, se existe a St-integral de $f(x)$, nesse intervalo, relativamente à métrica $g(x)$, tem-se

$$\int_a^b f(x) dg(x) \geq 0$$

Demonstração — Dada uma qualquer decomposição, δ , do intervalo $[a, b]$ e tomando, como sempre, um ponto arbitrário, ξ_i , no intervalo parcial $[a_i, a_{i+1}]$, podemos escrever:

$$\delta : \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) [g(a_{i+1}) - g(a_i)] \geq 0 \quad (1)$$

posto que, em virtude das hipóteses, todas as parcelas do somatório são, seguramente, não negativas.

De acordo com o Teorema 19, a existência da St-integral de $f(x)$ implica na existência do limite do primeiro membro de (1), o qual, em virtude da mesma relação (1), deve ser um valor não negativo. Como esse limite é a própria St-integral, o lema fica demonstrado.

Teorema n.º 26 — Se as funções $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são limitadas e St-integráveis, no intervalo finito $[a, b]$, relativamente à métrica $g(x)$; e, além disso, $f_1(x) \leq f_2(x)$ e $g(x)$ é monótona não decrescente, no citado intervalo —, então, é verdadeira a desigualdade

$$\int_a^b f_1(x) dg(x) \leq \int_a^b f_2(x) dg(x)$$

Demonstração — Em virtude da hipótese e dos Teoremas n.ºs 22 e 23, a função $f_2(x) - f_1(x)$ é St-integrável em $[a, b]$, segundo a métrica $g(x)$; e, além disso:

$$\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dg(x) = \int_a^b f_2(x) dg(x) - \int_a^b f_1(x) dg(x) \quad (1)$$

Entretanto, ainda em face da hipótese, temos que, para todo $x \in [a, b]$, $f_2(x) - f_1(x) \geq 0$; e como $g(x)$ é monótono não decrescente, nesse mesmo intervalo, resulta, em decorrência do lema anterior:

$$\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dg(x) \geq 0 \quad (2)$$

De (1) e (2), deduzimos:

$$\int_a^b f_2(x) dg(x) \geq \int_a^b f_1(x) dg(x),$$

de onde, por transposição, resulta a tese do teorema.

Teorema n.º 27 — Se existe a St-integral da função $f(x)$, limitada no intervalo finito $[a, b]$, relativamente à métrica $g(x)$, monótona não decrescente em $[a, b]$ —, também existe, nesse intervalo, a St-integral da função $|f(x)|$, relativamente à mesma métrica; além disso, vale a desigualdade

$$\left| \int_a^b f(x) dg(x) \right| \leq \int_a^b |f(x)| dg(x) \quad (3.13)$$

Demonstração — Inicialmente, provemos que $|f(x)|$ é St-integrável em $[a, b]$, segundo a métrica $g(x)$, considerando, para isso, uma qualquer decomposição, δ , do intervalo $[a, b]$.

Se tomarmos, arbitrariamente, os pontos x' e x'' no intervalo parcial $[a_i, a_{i+1}]$, será sempre verdadeira a desigualdade

$$\left| |f(x')| - |f(x'')| \right| \leq \left| f(x') - f(x'') \right| \quad (1)$$

Por conseguinte, representando por ω_i e $\bar{\omega}_i$ as oscilações das funções $f(x)$ e $|f(x)|$, respectivamente, no intervalo parcial $[a_i, a_{i+1}]$, a (1) fornece:

$$\bar{\omega}_i \leq \omega_i \quad ; \quad \text{para } i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (2)$$

Fazendo, como sempre, $\eta_i = g(a_{i+1}) - g(a_i)$, e tomando, arbitrariamente, $\varepsilon > 0$, a condição de integrabilidade (3.6-a), aplicada à função $f(x)$, permite achar a decomposição δ_0 , do intervalo $[a, b]$, tal que:

$$\delta : \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i |\eta_i| < \varepsilon \quad ; \quad \text{se } \delta \prec \delta_0 \quad (3)$$

Então, combinando (2) e (3), podemos escrever:

$$\delta : \sum_{i=0}^{n-1} \bar{\omega}_i |\eta_i| < \varepsilon, \quad \text{se } \delta \leq \delta_0$$

ou seja, a função $|f(x)|$ satisfaz, também, a condição (3.6-a), o que garante sua St-integrabilidade, nos termos do enunciado.

Levando em conta, agora, a desigualdade

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

válida para todo $x \in [a, b]$, o teorema anterior fornece

$$-\int_a^b |f(x)| dg(x) \leq \int_a^b f(x) dg(x) \leq \int_a^b |f(x)| dg(x)$$

da qual resulta, imediatamente, a tese a demonstrar.

Observação — Suponhamos, ainda, no intervalo finito $[a, b]$, $g(x)$ monótona não decrescente e $f(x)$ St-integrável, relativamente a $g(x)$. Consideremos, agora, a relação

$$|f(x)| \leq \text{Max}_{a \leq x \leq b} |f(x)| \quad (1)$$

que é verdadeira para todo $x \in [a, b]$. Por se tratar de uma constante, o segundo membro de (1) também é St-integrável, em $[a, b]$ relativamente a $g(x)$. Então, integrando os seus dois membros e aplicando o Teorema n.º 26, achamos:

$$\int_a^b |f(x)| dg(x) \leq \left[\text{Max}_{a \leq x \leq b} |f(x)| \right] [g(b) - g(a)]$$

f) Outras propriedades

Teorema n.º 28 — Se as funções $f_1(x)$ e $f_2(x)$, limitadas no intervalo finito $[a, b]$, são St-integráveis nesse intervalo, relativamente à métrica $g(x)$, monótona em $[a, b]$ —, então, a função $f(x) = f_1(x) \times f_2(x)$ também é St-integrável em $[a, b]$, relativamente à mesma métrica.

Demonstração — Sendo $f_1(x)$ e $f_2(x)$ limitadas em $[a, b]$, existe um número positivo, K , tal que

$$|f_1(x)| < K \quad \text{e} \quad |f_2(x)| < K \quad (1)$$

para todo $x \in [a, b]$

Consideremos, então, uma decomposição qualquer, δ , do intervalo $[a, b]$, e tomemos dois pontos arbitrários, x' e x'' , no intervalo parcial $[a_i, a_{i+1}]$. Em face da identidade

$$\begin{aligned} f_1(x') \cdot f_2(x') - f_1(x'') \cdot f_2(x'') &= \\ &= f_1(x') [f_2(x') - f_2(x'')] + f_2(x'') [f_1(x') - f_1(x'')] \end{aligned}$$

e tendo em vista as relações (1), podemos escrever:

$$\begin{aligned} |f_1(x') f_2(x') - f_1(x'') f_2(x'')| &< \\ &< K [|f_1(x') - f_1(x'')| + |f_2(x') - f_2(x'')|] \end{aligned} \quad (2)$$

Se indicarmos, então, por $\omega_i, \omega_i^{(1)}$ e $\omega_i^{(2)}$ as oscilações de $f(x)$, $f_1(x)$ e $f_2(x)$, respectivamente, no intervalo parcial $[a_i, a_{i+1}]$ temos em virtude de (2):

$$\omega_i < K (\omega_i^{(1)} + \omega_i^{(2)}) \quad ; \quad \text{para } i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (3)$$

Ora posto que $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são St-integráveis relativamente a $g(x)$, dado $\varepsilon > 0$, arbitrariamente, podemos achar as decomposições $\delta_i^{(1)}$ e $\delta_i^{(2)}$ do intervalo $[a, b]$, tais que:

$$\delta \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i^{(1)} |\eta_i| < \frac{\varepsilon}{2k} \quad , \quad \text{se } \delta \prec \delta_o^{(1)} \quad (4)$$

$$\delta : \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i^{(2)} |\eta_i| < \frac{\varepsilon}{2k} \quad , \quad \text{se } \delta \prec \delta_o^{(2)} \quad (5)$$

Outrossim, em decorrência da (3), obtemos.

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i |\eta_i| < K \left[\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i^{(1)} |\eta_i| + \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i^{(2)} |\eta_i| \right] \quad (6)$$

Todavia, tomando δ_o de modo que $\delta_o \prec \delta_o^{(1)}$ e $\delta_o \prec \delta_o^{(2)}$, e supondo $\delta \prec \delta_o$, serão válidas a (4) e a (5), as quais, combinadas com a (6), fornecem:

$$\delta \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i |\eta_i| < \varepsilon \quad , \quad \text{se } \delta \prec \delta_o$$

Vemos, pois, que a função $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ cumpre a condição (3.6-a), ficando garantida, assim, a sua integrabilidade, nos termos do enunciado.

Teorema n.º 29 — Se a função $f(x)$, limitada no intervalo finito $[a, b]$, é St-integrável, nesse intervalo, relativamente à métrica $g(x)$, monótona em $[a, b]$, e, além disso, $|f(x)| > k > 0$ para todo $x \in [a, b]$, então, a função $h(x) = 1/f(x)$ também é St-integrável, no referido intervalo, relativamente à mesma métrica.

Demonstração — Consideremos uma decomposição qualquer, δ , do intervalo $[a, b]$, e tomemos x' e x'' , arbitrariamente, no intervalo parcial $[a_i, a_{i+1}]$. Notando que

$$h(x') - h(x'') = \frac{1}{f(x')} - \frac{1}{f(x'')} = \frac{f(x'') - f(x')}{f(x') \cdot f(x'')}$$

e lembrando que, por hipótese, $|f(x')| > k$ e $|f(x'')| > k$, resulta:

$$|h(x') - h(x'')| < \frac{1}{k^2} |f(x'') - f(x')| \quad (1)$$

Se representarmos, agora, por ω_i e $\bar{\omega}_i$ as oscilações de $f(x)$ e $h(x)$, respectivamente, no intervalo parcial $[a_i, a_{i+1}]$, a (1) fornece:

$$\bar{\omega}_i < \frac{1}{k^2} \omega_i \quad ; \quad \text{para } i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Conseqüentemente:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \bar{\omega}_i |\eta_i| < \frac{1}{k^2} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i |\eta_i| \quad (2)$$

Ora, dado $\varepsilon > 0$, arbitrariamente, a condição (3.6-a), aplicada à função St-integrável $f(x)$, permite achar a decomposição, δ_0 , do intervalo $[a, b]$, tal que:

$$\delta : \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i |\eta_i| < k^2 \varepsilon \quad , \quad \text{se } \delta \leq \delta_0$$

Todavia, em face da (2), resulta:

$$\delta : \sum_{i=0}^{n-1} \bar{\omega}_i |\eta_i| < \varepsilon \quad , \quad \text{se } \delta \leq \delta_0$$

mostrando que $h(x)$ cumpre a condição (3.6-a), ficando garantida, assim, a sua St-integrabilidade, nos termos do enunciado.

Teorema n.º 30 — Se as funções $f_1(x)$ e $f_2(x)$, limitadas no intervalo finito $[a, b]$, são St-integráveis nesse intervalo, relativamente à métrica $g(x)$, monótona em $[a, b]$, e, além disso, $|f_2(x)| > k > 0$, para

todo $x \in [a, b]$ —, então, a função $h(x) = f_1(x)/f_2(x)$ é St-integrável em $[a, b]$, relativamente à mesma métrica.

Demonstração — Pelo teorema anterior, a função $1/f_2(x)$ é St-integrável, nos termos do enunciado. Consequentemente, e em decorrência do Teorema 28, a função $h(x) = f_1(x) \cdot \frac{1}{f_2(x)}$ também o é.

g) Continuidade da função integral

Admitamos que, no intervalo finito $[a, b]$, a função limitada, $f(x)$, tenha os extremos m e M , e seja St-integrável segundo a métrica $g(x)$, monótona em $[a, b]$.

Considerando um ponto x , qualquer, do intervalo $[a, b]$, existe também, de acordo com o Teorema 21, a St-integral

$$F(x) = \int_a^x f(x) dg(x)$$

que, evidentemente representa uma função de seu limite superior de integração, x .

Ainda em decorrência do Teorema 21 (aditividade da St-integral), o incremento de $F(x)$ tem a expressão

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(x) dg(x)$$

que, em virtude do teorema do valor médio, pode tomar a forma.

$$F(x+h) - F(x) = \mu [g(x+h) - g(x)]$$

onde

$$m \leq \mu \leq M$$

Supondo, agora, que, além de monótona, $g(x)$ é contínua, o incremento acima pode tornar-se arbitrariamente pequeno, quando $h \rightarrow 0$. Nessas condições, resulta.

$$\lim_{h \rightarrow 0} F(x+h) = F(x)$$

Concluimos, pois.

A função integral, $F(x)$, suposta existente, será sempre contínua, quando $f(x)$ for limitada e $g(x)$, além de monótona, for contínua.

h) Derivabilidade da função integral

Se, no intervalo finito $[a, b]$, a função $f(x)$ for contínua e St-integrável relativamente à métrica $g(x)$, monótona no mesmo intervalo; e se, além disso, a função $g(x)$ admitir, em $[a, b]$, derivada finita —,

então, no referido intervalo, a função integral, $F(x)$, será também derivável.

De fato, seja $F(x)$ definida como anteriormente e consideremos o seu incremento

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(x) dg(x)$$

Pelo teorema do valor médio, resulta

$$F(x+h) - F(x) = \mu [g(x+h) - g(x)] ; m' \leq \mu \leq M' \quad (1)$$

onde, mais precisamente, μ é um valor situado entre os extremos m' e M' , da função $f(x)$, no intervalo $[x, x+h]$. Entretanto, como $f(x)$ é contínua nesse intervalo, assume, aí, todos os valores situados entre m' e M' , ou seja, existe $\xi \in [x, x+h]$, tal que $f(\xi) = \mu$. Nessas condições, a (1) toma a forma:

$$F(x+h) - F(x) = f(\xi) [g(x+h) - g(x)] \quad x \leq \xi \leq x+h$$

ou ainda:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(\xi) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \quad x \leq \xi \leq x+h$$

Agora, se fizermos $h \rightarrow 0$, teremos $\xi \rightarrow x$. Todavia, pela continuidade de $f(x)$, resulta que $\lim f(\xi) = f(x)$ e assim, em face da existência da derivada de $g(x)$, obtemos, no limite:

$$F'(x) = f(x) \cdot g'(x)$$

conforme havíamos declarado inicialmente.

i) Integração por partes

Com o fim de deduzir a fórmula de integração por partes, adaptada ao caso da St-integral, faremos uso de duas propriedades que representam uma extensão do Teorema 17 e que traduziremos, também, sob a forma de teoremas.

Teorema n.º 31 — Se $f(x)$ é uma função real contínua e $g(x)$ é uma função de variação limitada no intervalo finito $[a, b]$ —, então, é verdadeira a igualdade:

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \lim_{\delta} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \eta_i \right\}$$

onde, para qualquer decomposição do intervalo $[a, b] - \delta$:

$$a = a_0 < a_1 < a_2 \dots < a_{n-1} < a_n = b \text{ — e para todo índice } i, \text{ tem-se:}$$

$$\eta_i = g(a_{i+1}) - g(a_i) \quad \text{e} \quad a_i \leq \xi_i \leq a_{i+1}$$

Demonstração — Sendo $g(x)$ de variação limitada em $[a, b]$, podemos por:

$$g(x) = g_1(x) - g_2(x)$$

com $g_1(x)$ e $g_2(x)$ monótonas não decrescentes em $[a, b]$. Outrossim, em virtude dos Teoremas n.ºs 17 e 17-a, existem as St-integrais de $f(x)$, relativamente a $g(x)$, a $g_1(x)$ e a $g_2(x)$.

Fazendo, então, $\eta_i^{(1)} = g_1(a_{i+1}) - g_1(a_i)$ e $\eta_i^{(2)} = g_2(a_{i+1}) - g_2(a_i)$, obtemos, qualquer que seja a decomposição δ , do intervalo $[a, b]$:

$$\eta_i = \eta_i^{(1)} - \eta_i^{(2)} \quad (1)$$

Multiplicando ambos os membros da (1) pelo extremo superior, M_i , da função $f(x)$, no intervalo parcial $[a_i, a_{i+1}]$ e somando, achamos:

$$\sum_{i=0}^{n-1} M_i \eta_i = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \eta_i^{(1)} - \sum_{i=0}^{n-1} M_i \eta_i^{(2)}$$

igualdade que, no limite, fornece:

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^b f(x) dg_1(x) - \int_a^b f(x) dg_2(x) \quad (2)$$

uma vez que existem, seguramente, as três integrais acima.

Por outro lado, multiplicando ambos os membros da (1) por $f(\xi_i)$ — sendo $a_i \leq \xi_i \leq a_{i+1}$ — e somando, encontramos:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \eta_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \eta_i^{(1)} - \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \eta_i^{(2)} \quad (3)$$

Passando ao limite e aplicando o Teorema 19 aos somatórios do segundo membro, achamos:

$$\lim_{\delta} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \eta_i \right\} = \int_a^b f(x) dg_1(x) - \int_a^b f(x) dg_2(x) \quad (4)$$

Agora, combinando (2) e (4), resulta a tese do teorema.

Teorema n.º 32 — Se $f(x)$ é uma função real de variação limitada e $g(x)$ é uma função real contínua, no intervalo finito $[a, b]$ —, então, é verdadeira a igualdade

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \lim_{\delta} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \eta_i \right\}$$

onde, para qualquer decomposição do intervalo $[a, b]$ —

$\delta: a = a_0 < a_1 < a_2 \dots < a_{n-1} < a_n = b$ — e para todo índice i , tem-se:
 $\eta_i = g(a_{i+1}) - g(a_i)$ e $a_i \leq \xi_i \leq a_{i+1}$

Demonstração — Para demonstrar o teorema, procuremos provar, inicialmente, que:

$$\lim_{\delta} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} [M_i - f(\xi_i)] \eta_i \right\} = 0 \quad (1)$$

onde M_i , ξ_i e η_i conservam os significados já conhecidos.

Representando, pois, por ω_i a oscilação de $f(x)$, no intervalo parcial $[a_i, a_{i+1}]$, resulta:

$$0 \leq M_i - f(\xi_i) \leq \omega_i \quad ; \quad \text{para } i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Conseqüentemente:

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} [M_i - f(\xi_i)] \eta_i \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |M_i - f(\xi_i)| \cdot |\eta_i| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i |\eta_i| \quad (2)$$

Todavia, sendo $f(x)$ de variação limitada em $[a, b]$, admite a decomposição

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

onde $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são monótonas não decrescentes em $[a, b]$. Além disso, representando por $\omega_i^{(1)}$ e $\omega_i^{(2)}$ as oscilações de $f_1(x)$ e $f_2(x)$, respectivamente, no intervalo parcial $[a_i, a_{i+1}]$, sabemos que — vide demonstração do Teorema 18-a — é verdadeira a relação:

$$\omega_i \leq \omega_i^{(1)} + \omega_i^{(2)} \quad ; \quad \text{para } i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

da qual deduzimos:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i |\eta_i| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i^{(1)} |\eta_i| + \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i^{(2)} |\eta_i| \quad (3)$$

Desde que a estamos supondo contínua no intervalo fechado $[a, b]$, a função $g(x)$ é, aí, uniformemente contínua. Portanto, dado $\varepsilon_0 > 0$,

arbitrariamente pequeno, é possível achar a decomposição δ_0 , do intervalo $[a, b]$, tal que $|\eta_i| < \varepsilon_0$, para $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Então, para todo $\delta \leq \delta_0$, a (3) fornece:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i |\eta_i| < \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i^{(1)} \varepsilon_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i^{(2)} \varepsilon_0 = \varepsilon_0 \left[\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i^{(1)} + \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i^{(2)} \right] \quad (4)$$

Entretanto, por serem $f_1(x)$ e $f_2(x)$ monótonas não decrescentes, temos:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i^{(1)} = f_1(b) - f_1(a) = k_1 \quad \text{e} \quad \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i^{(2)} = f_2(b) - f_2(a) = k_2$$

de sorte que a (4) se reduz a

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i |\eta_i| < \varepsilon_0 (k_1 + k_2) \quad (5)$$

Combinando (2) com (5) e fazendo $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{(k_1 + k_2)}$ onde ε continua arbitrariamente pequeno, obtemos, finalmente.

$$\delta : \left| \sum_{i=0}^{n-1} [M_i - f(\xi_i)] \eta_i \right| < \varepsilon \quad ; \quad \text{se} \quad \delta \leq \delta_0$$

o que demonstra a relação (1).

Agora, lembrando que existe a St-integral de $f(x)$, relativamente a $g(x)$, da citada relação (1) deduzimos:

$$\lim_{\delta} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) M_i \right\} = \lim_{\delta} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} M_i \eta_i \right\} = \int_a^b f(x) dg(x)$$

ficando demonstrado o teorema.

* * *

Estamos em condições, agora, de deduzir a anunciada fórmula de integração por partes:

Sejam as funções reais $f(x)$ e $g(x)$, limitadas no intervalo finito $[a, b]$, e admitamos a existência, no dito intervalo, da St-integral de cada uma delas, quando tomamos, como métrica, a outra. Isto ocorre, seguramente, em qualquer um dos seguintes casos: $f(x)$ é contínua e $g(x)$ é de variação limitada, em $[a, b]$; ou, ao contrário, $f(x)$ é de variação limitada e $g(x)$ é contínua, no citado intervalo.

Supondo, então, que estamos diante de um desses casos, consideremos a decomposição do intervalo $[a, b]$, dada por:

$$\delta : a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$$

Em cada intervalo parcial $[a_i, a_{i+1}]$, tomemos os pontos ξ_i e ζ_i e formemos as somas:

$$F_\delta = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) [g(a_{i+1}) - g(a_i)]$$

$$G_\delta = \sum_{i=0}^{n-1} g(\zeta_i) [f(a_{i+1}) - f(a_i)]$$

Se fizermos, agora, para maior simplicidade, $f(a_i) = f_i$ e $g(a_i) = g_i$ e tomarmos, em particular, os pontos ξ_i e ζ_i de sorte que se tenha $\xi_i = a_{i+1}$ e $\zeta_i = a_i$ — para todo valor do índice i — as somas F_δ e G_δ assumem as formas:

$$F_\delta = f_1 [g_1 - g_0] + f_2 [g_2 - g_1] + \dots + f_n [g_n - g_{n-1}]$$

$$G_\delta = g_0 [f_1 - f_0] + g_1 [f_2 - f_1] + \dots + g_{n-1} [f_n - f_{n-1}]$$

Somando, membro a membro, essas duas igualdades, obtemos, após todas as simplificações:

$$F_\delta + G_\delta = f_n g_n - f_0 g_0 = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) \quad (1)$$

Sendo a (1) verdadeira para toda decomposição, δ , do intervalo $[a, b]$, continua válida no limite. Entretanto, em face das hipóteses iniciais e em virtude dos Teoremas ns. 31 e 32, temos.

$$\lim_{\delta} \{F_\delta\} = \int_a^b f(x) dg(x) \quad \text{e} \quad \lim_{\delta} \{G_\delta\} = \int_a^b g(x) df(x)$$

Por conseguinte, a (1) fornece:

$$\int_a^b f(x) dg(x) + \int_a^b g(x) df(x) = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a)$$

resultando, daí, a fórmula de integração por partes:

$$\boxed{\int_a^b f(x) dg(x) = \left[f(x) \cdot g(x) \right]_a^b - \int_a^b g(x) df(x)} \quad (3.15)$$

3.5 Relações entre a R-integral e a St-integral

Já vimos que a R-integral da função $f(x)$, limitada no intervalo finito $[a, b]$, é um caso particular da St-integral dessa função, no mesmo intervalo, quando se utiliza a métrica $g(x) = x$, monótona crescente em $[a, b]$.

Entretanto, há outros casos interessantes, relacionando as duas integrais, quando existentes, conforme veremos a seguir.

Teorema n.º 33 — Seja $f(x)$ uma função limitada no intervalo finito $[a, b]$, e St-integrável, nesse intervalo, relativamente à métrica $g(x)$, monótona em $[a, b]$. Então, se $g(x)$ possui derivada finita e, além disso, $f(x)$ e $g'(x)$ são R-integráveis em $[a, b]$, é verdadeira a igualdade

$$(St) \int_a^b f(x) dg(x) = (R) \int_a^b f(x) g'(x) dx$$

Demonstração — Consideremos uma decomposição qualquer, δ , do intervalo $[a, b]$, definida por:

$$\delta: a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$$

Posto que $g(x)$ possui derivada finita em $[a, b]$, o teorema dos acréscimos finitos nos dá, para $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$:

$$g(a_{i+1}) - g(a_i) = g'(\xi_i)(a_{i+1} - a_i) = g'(\xi_i)h_i$$

onde

$$a_i \leq \xi_i \leq a_{i+1}.$$

Nessas condições, resulta:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) [g(a_{i+1}) - g(a_i)] = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) g'(\xi_i) h_i \quad (1)$$

Como, por hipótese, $f(x)$ e $g'(x)$ são R-integráveis em $[a, b]$, a função $f(x) \cdot g'(x)$, de acordo com o Teorema n.º 11, também o é. Além disso, aplicando o Teorema 10, obtemos:

$$\lim_{\delta} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) g'(\xi_i) h_i \right\} = (R) \int_a^b f(x) g'(x) dx$$

Por outro lado, de acordo com o Teorema n.º 19, existe, também, o limite do primeiro membro de (1), ou melhor:

$$\lim_{\delta} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) [g(a_{i+1}) - g(a_i)] \right\} = (St) \int_a^b f(x) dg(x)$$

Entretanto, sendo a (1) verdadeira para toda decomposição δ , continua verdadeira no limite, isto é:

$$(St) \int_a^b f(x) dg(x) = (R) \int_a^b f(x) g'(x) dx$$

como queríamos provar.

* * *

Um caso mais geral que o anterior se obtém substituindo a condição de $g(x)$ possuir derivada finita, pela condição (mais fraca) de ser a R-integral de uma função $\alpha(x)$, não necessariamente contínua. Daí, o seguinte teorema:

Teorema n.º 34 — Seja $f(x)$ uma função limitada no intervalo finito $[a, b]$, e St-integrável, nesse intervalo, relativamente à métrica $g(x)$, monótona em $[a, b]$, e definida mediante a R-integral

$$g(x) = \int_a^x \alpha(s) ds \quad ; \quad x \in [a, b]$$

onde $\alpha(s)$ é uma função limitada — contínua ou descontínua — no mesmo intervalo $[a, b]$. Então, se $f(x)$ for R-integrável em $[a, b]$, a seguinte igualdade será verdadeira:

$$(St) \int_a^b f(x) dg(x) = (R) \int_a^b f(x) \alpha(x) dx$$

Demonstração — Consideremos uma qualquer decomposição, δ , do intervalo $[a, b]$, dada por:

$$\delta : a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$$

Em face da propriedade aditiva e do teorema do valor médio — válidos para a R-integral — podemos escrever, sucessivamente:

$$g(a_{i+1}) - g(a_i) = \int_{a_i}^{a_{i+1}} \alpha(x) dx \quad , \quad \text{para } i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

e, em seguida:

$$g(a_{i+1}) - g(a_i) = \mu_i (a_{i+1} - a_i) = \mu_i h_i \quad , \quad (1)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

onde, para cada índice i , μ_i é um número real situado entre os extremos da função $\alpha(x)$ no intervalo parcial $[a_i, a_{i+1}]$.

Multiplicando ambos os membros de cada igualdade (1) por $f(\xi_i)$ — sendo $a_i \leq \xi_i \leq a_{i+1}$ — e somando em relação a i , vem:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) [g(a_{i+1}) - g(a_i)] = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \mu_i h_i \quad (2)$$

Ora, sendo $f(x)$ St-integrável relativamente a $g(x)$, existe, de acordo com o Teorema 19, o limite do primeiro membro de (2), ou melhor:

$$\lim_{\delta} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) [g(a_{i+1}) - g(a_i)] \right\} = (St) \int_a^b f(x) dg(x)$$

Conseqüentemente, a (2) sendo verdadeira para toda decomposição δ , do intervalo $[a, b]$, existe também o limite do seu segundo membro, isto é:

$$(St) \int_a^b f(x) dg(x) = \lim_{\delta} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \mu_i h_i \right\} \quad (3)$$

Se provarmos, então, que o segundo membro de (3) é a R-integral de $f(x)\alpha(x)$, o teorema ficará demonstrado

Para isso, consideremos a seguinte relação, sempre verdadeira, qualquer que seja a decomposição, δ , do intervalo $[a, b]$

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} [\alpha(\xi_i) - \mu_i] \cdot f(\xi_i) h_i \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |\alpha(\xi_i) - \mu_i| \cdot |f(\xi_i)| h_i \quad (4)$$

Por hipótese, as funções $\alpha(x)$ e $f(x)$ são limitadas em $[a, b]$. Indicemos, pois, por M_f e m_f os extremos de $\alpha(x)$, no referido intervalo, e tomemos $K > 0$ tal que $|f(x)| < K$, para todo $x \in [a, b]$.

Ora, a condição de R-integrabilidade, aplicada à função $\alpha(x)$, exige que, dados $\varepsilon_0 > 0$ e $\omega_0 > 0$, arbitrariamente pequenos, seja possível achar uma decomposição, δ_0 , do intervalo $[a, b]$, tal que: a soma das amplitudes de todos os intervalos parciais, onde a oscilação de $\alpha(x)$ supera ω_0 , é inferior a ε_0 .

Assim, tomemos a decomposição δ_0 , do intervalo $[a, b]$, nas condições anteriores. Então, podemos desdobrar o segundo membro de (4) em dois somatórios, isto é:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=0}^{n-1} [\alpha(\xi_i) - \mu_i] \cdot f(\xi_i) h_i \right| &\leq \sum_j |\alpha(\xi_j) - \mu_j| \cdot |f(\xi_j)| h_j + \\ &+ \sum_k |\alpha(\xi_k) - \mu_k| \cdot |f(\xi_k)| h_k \end{aligned} \quad (5)$$

onde o somatório sobre j envolve todos os intervalos parciais em que a oscilação de $\alpha(x)$ é não superior a ω_0 e o somatório sobre k abrange todos os intervalos parciais em que a oscilação de $\alpha(x)$ supera ω_0 . Em outros termos:

$$|\alpha(\xi_j) - \mu_j| \leq \omega_0, \quad \text{para todo } j, \quad \text{e} \quad \sum_k h_k < \varepsilon_0$$

Lembrando, ainda, que $|f(\xi_j)| < K$ e $|f(\xi_k)| < K$, para todo j ou todo k ; e notando que $|\alpha(\xi_k) - \mu_k| \leq M_1 - m_1$, para todo k , a (5) nos permite escrever:

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} [\alpha(\xi_i) - \mu_i] f(\xi_i) h_i \right| < \omega_0 K (b-a) + (M_1 - m_1) K \varepsilon_0 \quad (6)$$

Desde que a (6) permanece verdadeira para toda decomposição, δ , tal que $\delta \leq \delta_0$; e definindo ω_0 e ε_0 de modo que

$$\omega_0 = \frac{\varepsilon}{2K(b-a)} \quad \text{e} \quad \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{2(M_1 - m_1)K},$$

onde $\varepsilon > 0$ ainda é arbitrariamente pequeno, a mesma (6) nos dá, finalmente:

$$\delta : \left| \sum_{i=0}^{n-1} [\alpha(\xi_i) - \mu_i] f(\xi_i) h_i \right| < \varepsilon; \quad \text{se} \quad \delta \leq \delta_0$$

de onde concluímos:

$$\lim_{\delta} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} [\alpha(\xi_i) - \mu_i] f(\xi_i) h_i \right\} = 0$$

ou, ainda:

$$\lim_{\delta} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \alpha(\xi_i) f(\xi_i) h_i \right\} = \lim_{\delta} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i f(\xi_i) h_i \right\} \quad (7)$$

Ora, sendo, por hipótese, $\alpha(x)$ e $f(x)$ R-integráveis em $[a, b]$, o mesmo acontece com a função $f(x) \cdot \alpha(x)$. Portanto, em face do Teorema 10, o limite do primeiro membro de (7) é a R-integral desta função, resultando

$$(R) \int_a^b f(x) \alpha(x) dx = \lim_{\delta} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i f(\xi_i) h_i \right\}$$

o que completa a demonstração do teorema.

4. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Sabemos que, na prática, o cálculo da R-integral se faz utilizando as chamadas funções primitivas, ao invés de se pesquisar o limite comum das somas superior e inferior, de Darboux.

Do mesmo modo, nas suas aplicações práticas, o cálculo da St-integral raramente é feito utilizando-se a sua definição, posto que esse

cálculo direto, mesmo em se tratando de funções bem simples, pode revelar-se assaz laborioso, quando não impossível

Na verdade, procura-se conduzir o cálculo da St-integral ao cálculo de uma ou mais R-integrais, levando em conta o seu relacionamento.

Outrossim, as propriedades da St-integral, traduzidas nos diversos teoremas que vimos de demonstrar, jogam um papel importante na simplificação dos cálculos e procedimentos que devam ser utilizados.

Daremos, a seguir, uns poucos exemplos práticos, mais a título de ilustração que com outros objetivos

* * *

Ex. n.º 1 — Dada uma decomposição, δ , do intervalo finito $[a, b]$, chama-se *norma*, ν , dessa decomposição, à amplitude máxima do conjunto de seus intervalos parciais.

Podemos comprovar, mediante exemplos, que, ainda quando $g(x)$ é monótona não decrescente, pode haver sucessões convergentes, de somas da forma

$$S_\nu = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) [g(a_{i+1}) - g(a_i)]$$

quando a norma, ν , tende a zero, sem que, todavia, exista a St-integral

$$\int_a^b f(x) dg(x)$$

Para demonstrá-lo, consideremos, no intervalo $[-1, 1]$, as funções assim definidas

$$\begin{cases} f(x) = \sin \frac{\pi}{(x)} \\ f(0) = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0 \\ 1, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Tomemos a decomposição de norma ν , do intervalo $[-1, 1]$, dada por:

$$-1 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n = 1$$

de modo que o ponto $x = 0$ não coincida com nenhum dos pontos de divisão. Assim, existe o índice k — sendo $0 < k < n$ — tal que

$$a_k < 0 \quad \text{e} \quad a_{k+1} > 0$$

Formemos, agora, a soma S_ν , relativa a tal decomposição:

$$S_\nu = \sum_{i=0}^{n-1} f(a_i) [g(a_{i+1}) - g(a_i)]$$

Em virtude das hipóteses, podemos escrever.

$$g(a_{i+1}) - g(a_i) = 0 \quad , \quad \text{se} \quad i = 0, 1, 2, \quad , k-1, k+1, \quad , n-1$$

$$g(a_{k+1}) - g(a_k) = 1$$

Portanto, S_ν ficará reduzida a

$$S_\nu = f(a_k) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{a_k} \quad (1)$$

Limitando-nos, apenas, às decomposições desse tipo, para que a norma, ν , tenda a zero, é suficiente que se faça a_k tender a zero (pela esquerda), a_{k+1} tender a zero (pela direita) e que se mantenha

$$\nu \leq a_{k+1} - a_k.$$

Isto posto, seja $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ uma sucessão de números reais *negativas*, tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

Se fizermos, então, $a_k = x_n$, teremos, também

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

Supondo, ainda, que fazemos a_{k+1} tender a zero (pela direita) de qualquer forma e mantemos sempre $\nu \leq a_{k+1} - a_k$, resulta:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu = 0$$

e ainda, em face de (1)

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} S_\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x_n}$$

Ora, sabemos que, para qualquer $x_n \neq 0$, vale a relação

$$-1 \leq \operatorname{sen} \frac{\pi}{x_n} \leq 1 \quad ,$$

de sorte que, pela escolha adequada da sucessão $x_1, x_2, x_3, \dots$, podemos obter

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{x_n} = L$$

sendo L um número arbitrário do intervalo $[-1, 1]$.

De fato, seja A um arco (medido em radianos) tal que

$$-\frac{\pi}{2} \leq A \leq \frac{\pi}{2} \text{ e que } -\operatorname{sen} A = L, \text{ com } -1 \leq L \leq 1$$

Consideremos a sucessão $\{X_n\}$, de números negativos, assim definida

$$x_n = -\frac{\pi}{A + 2n\pi}, \quad n = 1, 2, 3,$$

Então, vemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$,

e como

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{x_n} = \operatorname{sen} [-(A + 2n\pi)] = -\operatorname{sen} (A + 2n\pi) = -\operatorname{sen} A = L,$$

resulta, para tal sucessão:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x_n} = L$$

Concluimos, pois, que a St-integral $\int_a^b f(x) dg(x)$ não existe, posto que, se existisse, S_n não poderia tender para um limite arbitrário.

Ex. n.º 2 — Dada a função

$$F(x) = (St) \int_1^x e^t d(t + [t]), \quad 0 \leq x < 2$$

onde $[t]$ representa a parte inteira de t e e indica a base dos logaritmos neperianos, calcular $F(1 \pm 0)$.

Solução:

Observando que a função $f(t) = e^t$ é contínua e que as funções $g_1(t) = t$ e $g_2(t) = [t]$ são monótonas não decrescentes, os Teoremas n.ºs. 18 e 25 permitem-nos escrever:

$$F(x) = (St) \int_1^x f(t) dg_1(t) + (St) \int_1^x f(t) dg_2(t) \quad (1)$$

uma vez que existem, seguramente, as integrais do segundo membro de (1).

Por outro lado, notando que $g'_1(t) = 1$, o Teorema n.º 33 fornece.

$$(St) \int_1^x f(t) dg_1(t) = (R) \int_1^x f(t) g'_1(t) dt = (R) \int_1^x e^t dt = [e^t]_1^x, \quad ,$$

ou seja

$$(St) \int_1^x f(t) dg_1(t) = e^x - e \quad (2)$$

Para calcular a segunda integral, em (1), consideraremos dois casos.

1.º caso: $x < 1$. Então, em decorrência da aditividade da St-integral (Teorema n.º 21), temos:

$$(St) \int_1^x f(t) dg_2(t) = - (St) \int_x^1 e^t d[t]$$

Agora, tomemos a decomposição, δ , do intervalo $[x, 1]$, dada por:

$$x = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1, \quad ,$$

e formemos a soma superior, S_δ^* , da função $f(t)$, relativamente a $g_2(t)$; obtemos:

$$S_\delta^* = - \sum_{i=0}^{n-1} e^{t_{i+1}} [g_2(t_{i+1}) - g_2(t_i)], \quad ,$$

posto que o extremo superior de $f(t)$, no intervalo genérico $[t_i, t_{i+1}]$, é $M_i = f(t_{i+1}) = e^{t_{i+1}}$. Entretanto, é fácil constatar que.

$$g_2(t_{i+1}) - g_2(t_i) = [t_{i+1}] - [t_i] = \begin{cases} 0, & \text{para } i = 0, 1, 2, \dots, n-2 \\ 1, & \text{para } i = n-1 \end{cases}$$

Nessas condições, resulta, para qualquer δ .

$$S_\delta^* = -e^{t_n} = -e$$

e daí:

$$\lim_{\delta} \{S_\delta^*\} = - (St) \int_x^1 e^t d[t] = (St) \int_1^x f(t) dg_2(t) = -e \quad (3)$$

2.º caso: $x > 1$. Então :

$$(St) \int_1^x f(t) dg_{\delta}(t) = (St) \int_1^x e^t d[t]$$

Todavia, para qualquer decomposição, δ , do intervalo $[1, x]$ — sendo $1 < x < 2$ — temos:

$$g_{\delta}(t_{i+1}) - g_{\delta}(t_i) = [t_{i+1}] - [t_i] = 0, \text{ para } i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

o que acarreta, para todo δ : $S_{\delta}^* = 0$. Nessas condições:

$$\lim_{\delta} \{S_{\delta}^*\} = (St) \int_1^x e^t d[t]_1^x = (St) \int_1^x f(t) dg_{\delta}(t) = 0 \quad (4)$$

Combinando (2) e (3) — para $x < 1$ — ou combinando (2) e (4) — para $x > 1$ — obtemos, em face de (1):

$$F(x) = \begin{cases} e^x - 2e, & \text{se } x < 1 \\ e^x - e, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Portanto:

$$\lim_{x \rightarrow 1-} F(x) = F(1-0) = -e \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1+} F(x) = F(1+0) = 0$$

Esses resultados mostram que $F(x)$ é descontínua no ponto $x = 1$. Porém, como $F(1) = 0$, vemos, também, que $F(x)$ é contínua à direita, no referido ponto.

Ex. n.º 3 — Calcular a St-integral

$$\int_0^5 (x^2 + 1) d[x]$$

Solução:

Posto que $f(x) = x^2 + 1$ é uma função contínua e $g(x) = [x]$ é uma função monótona não decrescente, no intervalo $[0, 5]$, a St-integral em pauta existe. Portanto, de acordo com o Teorema 21, ela também existe em qualquer subintervalo do intervalo considerado.

Tomemos, então, um número $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno. É fácil constatar que nos intervalos parciais $[0, \varepsilon]$ e $[k + \varepsilon, (k + 1 - \varepsilon)]$ — sendo $k = 0, 1, 2, 3, 4$ — a função $g(x)$ é constante, de sorte que, em tais intervalos, a St-integral é nula. Nessas condições, aplicando a propriedade aditiva (Teorema 21), podemos escrever:

$$\int_0^5 (x^2 + 1) d[x] = \sum_{k=1}^4 \int_{k-\varepsilon}^{k+\varepsilon} (x^2 + 1) d[x] + \int_{5-\varepsilon}^5 (x^2 + 1) d[x] \quad (1)$$

Calculemos, pois, inicialmente, a St-integral no intervalo genérico $[k - \varepsilon, k + \varepsilon]$ — $k = 1, 2, 3, 4$ —. Para isso, consideremos a seguinte decomposição:

$$\delta: k - \varepsilon = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n = k + \varepsilon$$

Admitamos, agora, que o ponto $x = k$ pertença ao intervalo parcial $[a_j, a_{j+1}]$, da decomposição δ , podendo, eventualmente, coincidir com o extremo a_{j+1} desse intervalo. Então, formemos a soma

$$\sum_{\delta} = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) [g(a_{i+1}) - g(a_i)] = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \eta_i$$

onde, de um modo geral, ξ_i é um ponto arbitrário do intervalo $[a_i, a_{i+1}]$.

Se tomarmos, em particular, $\xi_j = k$, a referida soma ficará reduzida

$$\sum_{\delta} = f(\xi_j) \eta_j = f(k)$$

posto que, sendo $g(x)$ constante nos intervalos $[a_i, a_{i+1}]$ onde $i \neq j$, isto implica $\eta_i = 0$; ao passo que, quando $i = j$, obtemos:

$$\eta_j = g(a_{j+1}) - g(a_j) = k - (k - 1) = 1$$

Aplicando, agora, o Teorema n.º 19, achamos:

$$\lim_{\delta} \{\sum_{\delta}\} = \int_{k-\varepsilon}^{k+\varepsilon} (x^2 + 1) d[x] = f(k) = k^2 + 1 \quad (2)$$

Para calcular a última integral que figura em (1), façamos a decomposição

$$\delta: 5 - \varepsilon = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n = 5$$

Tomando, em particular, $\xi_{n-1} = a_n = 5$, vemos que, por ser $\eta_i = 0$, para $i \neq n-1$ e $\eta_{n-1} = 1$, a soma correspondente

$$\sum_{\delta} = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \eta_i$$

fica reduzida a $f(a_n) = f(5)$. Portanto, usando novamente o Teorema 19, achamos:

$$\lim_{\delta} \{\sum_{\delta}\} = \int_{5-\varepsilon}^5 (x^2 + 1) d[x] = 5^2 + 1 \quad (3)$$

Combinando (2) e (3), tendo em vista (1), podemos escrever:

$$\int_0^5 (x^2 + 1) d[x] = \sum_{k=1}^5 (k^2 + 1) = 60$$

Ex. n.º 4 — Calcular a St-integral

$$\int_{-1}^{+1} x d|x|$$

Solução:

De acordo com a propriedade aditiva da St-integral, podemos escrever:

$$(St) \int_{-1}^{+1} x d|x| = (St) \int_{-1}^0 x d|x| + (St) \int_0^{+1} x d|x|$$

Entretanto, se $x < 0$, temos $|x| = -x$; e se $x > 0$, temos $|x| = x$. Portanto, resulta:

$$(St) \int_{-1}^{+1} x d|x| = - (St) \int_{-1}^0 x dx + (St) \int_0^1 x dx \quad (1)$$

Para ambas as integrais do segundo membro de (1), podemos fazer $f(x) = x$ e $g(x) = g$, com $g'(x) = 1$. Nessas condições, o Teorema 33 fornece:

$$- (St) \int_{-1}^0 x dx = - (R) \int_{-1}^0 x dx = - \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 = \frac{1}{2}$$

$$(St) \int_0^1 x dx = (R) \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Finalmente, em virtude de (1):

$$(St) \int_{-1}^{+1} x d|x| = 1$$

Ex. n.º 5 — Se, sobre um segmento $[a, b]$, há uma distribuição contínua e uniforme de carga, além de um número finito de cargas isoladas, a distribuição total de carga, no segmento $[a, x]$, é uma função descontínua, $g(x)$.

Mostre que o momento de ordem k , dessa distribuição, relativamente à origem, é dado pela St-integral

$$\int_a^b f(x) dg(x),$$

onde $f(x) = x^k$.

Solução:

Sejam $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$ as abscissas dos pontos em que se situam as cargas isoladas $q_1, q_2, q_3, \dots, q_m$, respectivamente.

O momento, de ordem k , da carga isolada q_i , é dado por $x_i^k q_i$, portanto, o momento, de ordem k , de todas as cargas isoladas pode ser representada pelo somatório

$$\sum_{i=1}^m x_i^k q_i$$

Por outro lado, sendo λ a densidade linear de carga, da distribuição contínua, devemos ter:

$$\frac{dq}{dx} = \lambda \therefore dq = \lambda dx$$

Assim, o momento de ordem k , da carga elementar dq , suposta concentrada no ponto x , é dado por $x^k dq = \lambda x^k dx$; de sorte que o momento, de ordem k , da distribuição contínua de carga, pode ser expresso pela R-integral

$$\int_a^b \lambda x^k dx$$

Indicando, pois, por M_k o momento, de ordem k , da distribuição total de carga, podemos escrever:

$$M_k = (R) \int_a^b \lambda x^k dx + \sum_{i=1}^m x_i^k q_i \quad (1)$$

Se fizermos, então, $f(x) = x^k$ e $g(x) = \lambda x + \sum_{x_i \leq x} q_i$, é fácil constatar que:

$$M_k = (St) \int_a^b f(x) dg'(x) \quad (2)$$

De fato, usando o Teorema n.º 25, podemos escrever

$$(St) \int_a^b f(x) dg'(x) = (St) \int_a^b x^k d(\lambda x) + (St) \int_a^b x^k d\left[\sum_{x_i \leq x} q_i\right] \quad (3)$$

Tendo em vista que x^k e λ — derivada de λx — são *funções R-integráveis*, o Teorema 33 fornece:

$$(St) \int_a^b x^k d(\lambda x) = (R) \int_a^b \lambda x^k dx \quad (4)$$

Para calcular a segunda integral do segundo membro de (3), devemos notar que — vide ex. n.º 3 — dado $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno a referida integral é nula em todo intervalo da forma $[x_i + \varepsilon, x_{i+1} - \varepsilon]$, pois, nesses intervalos, $\sum_{x_i \leq x} q_i$ é constante. Portanto, basta calcular aquela integral nos intervalos da forma $[x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon]$.

Fazendo a decomposição dada por

$$x_i - \varepsilon = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n = x_i + \varepsilon$$

e supondo que o ponto x_i pertence ao intervalo parcial $[a_j, a_{j+1}]$, o mesmo raciocínio desenvolvido no citado ex. n.º 3 nos dá:

$$(St) \int_{x_i - \varepsilon}^{x_i + \varepsilon} x^k d \left[\sum_{x_i \leq x} q_i \right] = x_i^k q_i; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Conseqüentemente, a segunda integral do segundo membro da (3) se reduz ao somatório

$$\sum_{i=1}^m x_i^k q_i$$

Levando este último resultado na (3), juntamente com o obtido em (4) e tendo em vista (1), achamos, finalmente

$$(St) \int_a^b f(x) dg(x) = M_k$$

Ex. n.º 6 — Calcular a St-integral

$$\int_0^5 [x] d(x^2 + 1)$$

Solução.

Fazendo $f(x) = [x]$ e $g(x) = x^2 + 1$, vemos que $f(x)$ é monótona não decrescente (logo, de variação limitada) e $g(x)$ é contínua. Nessas condições — de acordo com os Teoremas 17-a e 18-a — existem as St-integrais de $f(x)$ em relação a $g(x)$ e de $g(x)$ em relação a $f(x)$.

Aplicando, então, a fórmula de integração por partes, obtemos:

$$(St) \int_0^5 [x] d(x^2 + 1) = \left[[x] (x^2 + 1) \right]_0^5 - \int_0^5 (x^2 + 1) d[x]$$

Vemos, de imediato, que

$$\left[[x] (x^2 + 1) \right]_0^5 = 130$$

Por outro lado, o ex. n.º 3 nos dá:

$$\int_0^5 (x^2 + 1) d[x] = 60$$

Conseqüentemente, temos:

$$(St) \int_0^5 [x] d(x^2 + 1) = 70$$

Ex. n.º 7 — Calcular a St-integral do ex. n.º 6, desdobrando-a em R-integrais.

Solução:

Notando que a função $f(x) = [x]$ só apresenta descontinuidades nos pontos isolados 1, 2, 3, 4 e 5; e que a função $g(x) = x^2 + 1$ tem para derivada $g'(x) = 2x$, concluimos que $f(x)$ e $g'(x)$ são R-integráveis. Então, aplicando o Teorema 33, vem:

$$(St) \int_0^5 [x] d(x^2 + 1) = (R) \int_0^5 2[x] x dx$$

Por outro lado, sendo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, podemos escrever:

$$(R) \int_0^5 2[x] x dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{i=0}^4 (R) \int_{i+\varepsilon}^{i+1-\varepsilon} 2[x] x dx$$

Todavia, no intervalo $[i + \varepsilon, i + 1 - \varepsilon]$ a função $f(x) = [x]$ se reduz ao inteiro i . Portanto:

$$(R) \int_{i+\varepsilon}^{i+1-\varepsilon} 2[x] x dx = (R) \int_{i+\varepsilon}^{i+1-\varepsilon} 2ix dx = 2i \left[\frac{x^2}{2} \right]_{i+\varepsilon}^{i+1-\varepsilon}$$

ou seja:

$$(R) \int_{i+\varepsilon}^{i+1-\varepsilon} 2[x] x dx = i(2i + 1)(1 - 2\varepsilon)$$

e daí:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (R) \int_{i+\varepsilon}^{i+1-\varepsilon} 2[x] x dx = 2i^2 + i$$

Conseqüentemente, podemos escrever:

$$(St) \int_0^5 [x] d(x^2 + 1) = (R) \int_0^5 2[x] x dx = \sum_{i=0}^4 (2i^2 + i) = 70$$

resultado que confirma o anterior.

BIBLIOGRAFIA

- 1 — BERRA, Alberto E. Sagastume. *Introduccion a la Matematica Superior*. La Plata, Universidad Nacional de La Plata, 1946
- 2 — PASTOR, J. Rey; CALLEJA, P. Pi; TREJO, C.A. *Analisis Matematico*. Buenos Aires, Ed. Kapelusz, v. 2, 1957
- 3 — VALIRON, Georges. *Cours d'Analyse Mathématique. Théorie des Fonctions* Paris, Masson et Cie., 1948

BRASIL: ESTIMATIVA DA MORTALIDADE NO PERÍODO INTERCENSITÁRIO 1960/70, ATRAVÉS DE METODOLOGIA PROPOSTA PELAS NAÇÕES UNIDAS

Marcia Martins
Vera Regina de Souza Dias
Yvone Barandier

SUMÁRIO

- 1 *Introdução*
- 2 *Metodologia*
- 3 *Resultados*
- 4 *Conclusões*
- Anexo: tabelas

1. INTRODUÇÃO

1.1 A utilização de informações sobre estatísticas vitais seria a base ideal para o conhecimento efetivo dos níveis e padrões da mortalidade

NOTA: As autoras fazem parte da equipe técnica do Centro Brasileiro de Estudos Demográficos do IBGE

e fecundidade. Como no Brasil o sistema de estatísticas vitais é bastante deficiente, estimativas de mortalidade e fecundidade são obtidas, indiretamente, pelo emprego de metodologias fundamentadas em dados censitários.

Em trabalho anterior, apresentado pelo CBED¹, os autores discutiram sobre a dificuldade de se conhecer os níveis efetivos dos indicadores demográficos, em virtude de diferentes resultados obtidos em consequência:

- a) da aplicação de diversas metodologias;
- b) da utilização de processos de correção na estrutura etária;
- c) dos erros de enumeração ou de ambos (b e c).

1.2 O objetivo do presente trabalho é apresentar a dificuldade de se conhecer os níveis efetivos da mortalidade no período 60/70, considerando-se os diferentes resultados encontrados, mediante a utilização da mesma metodologia. A que foi empregada neste estudo é proposta pelo Manual IV da ONU e foi aplicada às populações presente e residente e, dentro de cada uma, aos resultados preliminares e definitivos.

2. METODOLOGIA

A metodologia adotada utiliza, unicamente, como fonte de informação, os dados censitários, sendo que as informações básicas necessárias ao objetivo específico do presente trabalho se apresentam discriminadas segundo o sexo e grupos quinquenais de idade.

A estimativa é baseada nos dados dos censos de 1960 e 1970, e foi necessário realizar algumas correções para suprir as dificuldades encontradas. Como, em 1960, a partir dos 30 anos, a população residente se apresenta dividida em grupos decenais de idade, aplicaram-se as proporções de cada grupo quinquenal dentro do grupo decenal da população presente, para subdividi-la em grupos quinquenais. O mesmo ocorre com as populações residente e presente nos resultados preliminares do censo de 1970, e usaram-se as proporções de cada grupo quinquenal dentro do grupo decenal verificadas nos resultados definitivos das respectivas populações.

Em 1960, tem-se apenas os resultados preliminares (amostra de aproximadamente 1,27% da população e dos domicílios), que foram usados em ambos os casos.

A população de idade ignorada foi abandonada.

¹ IRWIN, Richard & SPIELMAN, Evelyn. *Introdução à análise das estimativas de indicadores demográficos obtidas através de diversas metodologias — Brasil 1940/1970*. Apresentado no Encontro Brasileiro de Estudos Populacionais, IBGE, 29 jul/3 ago 1974, Rio de Janeiro (GB)

A metodologia empregada é, a seguir, sumariamente descrita:

— Projeta-se para 1970 a população observada em 1960, por grupos quinquenais de idade, segundo diferentes níveis de mortalidade das tábuas modelo "Oeste". Tem-se portanto em 1970 a população sobrevivente, de 10 anos e mais (segundo os diferentes níveis de mortalidade), da população de 0 anos e mais em 1960.

— Acumula-se, de baixo para cima, a população observada em 1970 e as projetadas para 1970.

— Determina-se, por interpolação linear, o nível de mortalidade que produza uma população projetada para 1970 igual à população observada em 1970.

— Seleciona-se o nível mediano entre os nove primeiros níveis encontrados, e, por interpolação linear nas tábuas modelo "Oeste", obtém-se a esperança de vida ao nascimento correspondente àquele nível

No anexo é apresentada, como ilustração da metodologia, uma aplicação à população presente masculina (resultados preliminares).

3. RESULTADOS

Na Tabela seguinte são apresentadas as estimativas de $\bar{e}_0$ obtidas.

TABELA 1

ESTIMATIVA DE $\bar{e}_0$ PARA O PERÍODO 60/70

SEXO	$\bar{e}_0$			
	POPULAÇÃO RESIDENTE		POPULAÇÃO PRESENTE	
	RESULTADOS PRELIMINARES	RESULTADOS DEFINITIVOS	RESULTADOS PRELIMINARES	RESULTADOS DEFINITIVOS
Homens .	59,07	55,66	56,35	53,55
Mulheres	62,45	60,13	61,43	57,40

Como podemos observar, as estimativas obtidas apresentam uma variação, para o sexo masculino, de até 5,52 anos (ou seja 10%), quando utilizamos como informações básicas as populações residente (resultados preliminares) e presente (resultados definitivos). Para a população feminina, essa variação foi de 5,05 anos (ou seja 8,8%).

Comparando-se as estimativas obtidas a partir dos resultados preliminares, podemos observar que para o sexo masculino a variação é mais acentuada (2,72 anos ou 4,83%) do que para o feminino (1,02

anos ou 1,66%). Já para as estimativas obtidas a partir dos resultados definitivos observa-se uma maior diferença para o sexo feminino (2,73 anos ou 4,76%) do que no sexo masculino (2,11 anos ou 3,94%).

4. CONCLUSÕES

Os resultados obtidos através o emprego de uma mesma metodologia apresentada no Manual IV das Nações Unidas — às populações presente e residente, resultados definitivos e preliminares, mostram que uma pequena variação nos dados básicos conduz a estimativas da esperança de vida ao nascimento bastante distintas. Este fato fica patente ao se considerar as estimativas para as populações presente e residente pois, dado que para o Brasil como um todo, as populações presente e residente, a rigor, devem ser praticamente iguais, uma vez que a população presente é formada pelos moradores presentes e não moradores presentes, enquanto a população residente é formada pelos moradores presentes e moradores ausentes e que, portanto, deveriam conduzir a estimativas de $\bar{e}_0$ bastante próximas.

Nota-se, assim, que a técnica utilizada é suscetível a pequenas variações na população, como foi visto no caso das populações presente e residente, que embora sendo praticamente iguais, apresentaram, quando do cálculo de $\bar{e}_0$, resultados bem diferentes. Portanto, torna-se necessário um certo cuidado no uso da técnica empregada, uma vez que o resultado encontrado é utilizado em políticas de planejamento econômico e social e que trará implicações, dependendo do resultado daquela variável, na formulação dos objetivos das políticas do planejamento.

ANEXO

TABELA I

BRASIL: POPULAÇÃO PRESENTE (RESULTADOS PRELIMINARES)
HOMENS — 1960

GRUPOS DE IDADE	POPULAÇÃO EM 1960	RAZÕES DECENAIS DE SOBREVIVÊNCIA			
		Nível 15	Nível 17	Nível 19	Nível 13
0 — 5	5 712 395	0,9462	0,9617	0,9756	0,9281
5 — 10	5 158 864	0,9718	0,9785	0,9848	0,9642
10 — 15	4 287 220	0,9644	0,9723	0,9797	0,9556
15 — 20	3 445 715	0,9532	0,9635	0,9733	0,9418
20 — 25	2 963 688	0,9456	0,9580	0,9695	0,9320
25 — 30	2 521 689	0,9378	0,9520	0,9652	0,9223
30 — 35	2 254 181	0,9253	0,9415	0,9567	0,9077
35 — 40	1 955 652	0,9066	0,9246	0,9420	0,8873
40 — 45	1 652 516	0,8793	0,8989	0,9183	0,8587
45 — 50	1 399 968	0,8394	0,8607	0,8820	0,8178
50 — 55	1 123 775	0,7822	0,8052	0,8288	0,7592
55 — 60	827 679	0,7022	0,7273	0,7533	0,6776
60 — 65	728 135	0,5966	0,6228	0,6504	0,5713
65 — 70	396 121	0,4645	0,4899	0,5171	0,4402
70 e mais	529 773	0,2004	0,2149	0,2314	0,1874

ONTE: Anuário Demográfico da ONU — 1969

TABELA II

BRASIL: POPULAÇÃO PRESENTE (RESULTADOS PRELIMINARES)
HOMENS — 1970

GRUPOS DE IDADE	POPULAÇÃO EM 1970 (ACUMULADA)	POPULAÇÃO PROJETADA (ACUMULADA) SEGUNDO DIFERENTES NÍVEIS DE MORTALIDADE			NÍVEL DE MORTALIDADE
		Nível 15	Nível 17	Nível 19	
10 — 15	32 113 239	31 676 567	32 158 960	32 621 549	16,8104
15 — 20	26 299 482	26 271 499	26 665 350	27 048 536	15,1421
20 — 25	21 417 685	21 258 115	21 617 402	21 968 087	15,8883
25 — 30	17 419 250	17 123 520	17 448 938	17 767 898	16,8175
30 — 35	14 252 091	13 839 064	14 128 992	14 414 184	17,8633
35 — 40	11 486 225	11 036 601	11 289 779	11 540 888	18,5646
40 — 45	9 015 187	8 671 761	8 889 131	9 106 954	18,1574
45 — 50	6 761 932	6 585 967	6 766 820	6 950 379	16,9459
50 — 55	4 994 361	4 812 973	4 958 624	5 108 155	17,4780
55 — 60	3 498 449	3 359 916	3 473 177	3 590 650	—
60 — 65	2 330 843	2 184 783	2 268 225	2 355 878	—
65 — 70	1 406 994	1 305 766	1 363 361	1 424 493	—
70 — 75	788 454	724 570	761 390	801 002	—
75 — 80	399 570	290 165	307 908	327 423	—
80 e mais	203 978	106 167	113 848	122 589	—

ONTE: Censo Demográfico — Brasil — 1970

BEM-ESTAR E INDICADORES DE DESIGUALDADE

Ramonaival Augusto Costa

Economista

SUMÁRIO

- 1 *Introdução*
 - 2 *Bem-estar e desigualdade na distribuição de renda*
 - 3 *Em defesa de um indicador de desigualdade*
 - 4 *Conclusões*
- Bibliografia*

1. INTRODUÇÃO

O propósito deste ensaio é apresentar algumas idéias sobre o problema do bem-estar e a desigualdade na distribuição de renda com base nestas opiniões fazer uma pequena apologia aos índices de desigualdade em geral e, em particular, ao índice de Gini¹. A motivação para este procedimento fundamenta-se no fato de que se tem criticado muito os indicadores da desigualdade da distribuição de renda pela

¹ Deve-se entender como índice de desigualdade, a tentativa de resumir em um único indicador a situação da desigualdade de renda. Não se pretende dizer que estudos da situação da distribuição de renda só devam ser feitos através de índices de desigualdade. Existem vários métodos alternativos de se abordar os problemas de distribuição de renda, por exemplo, através da distribuição decilica ou de métodos gráficos, que podem iluminar com mais detalhes do que um índice sintético.

pouca informação que oferecem sobre o bem-estar. Grande parte da insatisfação com as medidas de desigualdade deve-se, em primeiro lugar, ao fato de se esperar de um índice muito mais informações do que ele realmente tem condição de dar; em segundo lugar, pela falta de um conhecimento mais aprofundado do significado e das propriedades de cada índice.

O problema da mensuração do grau de desigualdade deve ser encarado com mais seriedade pelos pesquisadores pois é anterior a qualquer outra manifestação a respeito das condições da distribuição de renda.

É preciso esclarecer que muitos indicadores de desigualdade, apesar de terem seus nomes ligados a grandes pesquisadores da situação da distribuição da renda, são medidas adequadas para qualquer atributo, tendo por isso uma validade que não pode ser ameaçada pela incapacidade destes índices em fornecer informações vinculadas a um atributo específico, como é o caso da Renda.

Não se deve esquecer que a conotação de bem-estar que advém de um indicador de desigualdade de renda surge em função do atributo renda. Deve-se estar alerta para este fato a fim de que não se rejeite um índice de desigualdade pelas dificuldades introduzidas pelo atributo ao qual se refere, pois, como medidas de desigualdade, todos os índices apresentam suas vantagens e desvantagens.

2. BEM-ESTAR E DESIGUALDADE NA DISTRIBUIÇÃO DE RENDA

O propósito desta parte é apresentar algumas opiniões sobre o problema do bem-estar e a desigualdade na distribuição de renda. Pretende-se lançar algumas idéias incipientes sobre que tipo de informação a respeito do bem-estar (da maneira como será qualificado) se pode obter através do cálculo dos índices de desigualdade da distribuição da renda.

Para os economistas o problema do bem-estar é relativamente complicado porque bem-estar é um conceito que envolve uma pesada carga de subjetivismo. Qualquer tentativa de se formular uma definição do conceito nos levaria a afirmações de caráter ético. Estas afirmações de caráter ético são comumente chamadas de juízos de valor. São avaliações cujo apoio lógico não se baseia no raciocínio positivo.

Apesar desta dificuldade, na prática, às vezes, os economistas sem muita preocupação teórica usam o termo bem-estar sem qualificá-lo antecipadamente. Em verdade, o termo usado sempre tem uma concepção subjetiva não explícita. Apesar desta falta de preocupação com o termo, pode-se entender bem-estar como o resultado obtido pelo atendimento de necessidades individuais, quaisquer que elas sejam. Pode-se dizer que um indivíduo possui bem-estar se ele tem condições de obter a satisfação de um certo conjunto de necessidades. As vezes, pode-se

referir às necessidades que são mais importantes para sua existência e para sua manutenção do dia a dia. Pode-se admitir que houve um aumento de bem-estar quando as condições de atendimento das necessidades forem melhoradas quantitativa ou qualitativamente ou de ambas as maneiras. Então pode-se dizer que houve um aumento quantitativo quando, apesar de as condições de atendimento não se modificarem, o número de necessidades satisfeitas aumentarem ou por inclusão de novas necessidades ou por satisfação de necessidades até então não atendidas. Pode-se, assim conceber como sendo um aumento qualitativo do bem-estar quando apesar da gama de necessidades atendidas ou satisfeitas permanecerem as mesmas, houver uma modificação da maneira como este atendimento é feito, tal que as pessoas se sintam mais satisfeitas. Enfim, em regra, o que deve acontecer na prática quando há mudanças do bem-estar é um misto de mudanças qualitativas e quantitativas, advindas ora pela oferta de outros bens ora pela mudança da qualidade dos bens anteriores ou ambas as situações.

Apesar da aparente coerência deste ponto de vista não se pode negar que também é um conceito arbitrário, devendo, no entanto, se aproximar daquilo que talvez muitos entendam como bem-estar ou mudanças de bem-estar. Se o conceito é bom ou ruim não é posto em discussão. O problema é que é preciso qualificar um conceito para poder usá-lo. E acredito que este conceito preenche os requisitos necessários para os objetivos colimados nesta monografia.

Não há dúvida que existem vários fatores fora a renda individual, como por exemplo, o nascer do dia, o ar que respiramos, a temperatura ambiente, a existência de outros indivíduos (e mesmo a renda dos outros indivíduos), o pagamento em espécie, a colheita de frutos *in natura*, etc... É plausível admitir-se que o bem-estar é condicionado por um número grande de fatores. Entre estes fatores destaca-se a renda como um dos principais, oferecendo condições de atendimento de necessidades outras, que não seja a necessidade pela própria renda.

Na sociedade moderna, entretanto, uma grande parte das necessidades é satisfeita através do uso da renda monetária. Isto em função do grau de dependência que existe nestas sociedades, onde os indivíduos procuram atender a maior parte de suas necessidades indiretamente, através da prestação de serviços em troca de uma retribuição em renda monetária. Renda essa que irá lhe fornecer as condições de atendimento de um grande número de necessidades.

No caso das sociedades menos desenvolvidas², onde a monetarização ainda não atingiu um grau de desenvolvimento maior, alguns setores da economia não recompensam a prestação de serviços totalmente com renda monetária. É o caso do setor primário dessas sociedades, em que grande parte das necessidades são condicionadas por fatores outros que não a renda monetária. Além disso esses fatores, atendem a

² É necessário lembrar que aqui estou considerando uma economia tipo capitalista baseada no trabalho assalariado onde o grau de monetarização funcionaria como um indicador da relevância da renda pessoal como elemento do bem-estar.

maior parte das necessidades que um indivíduo pode ter. Contudo, nos outros dois setores, secundário e terciário, a renda monetária ainda é um fator crucial como condicionador da satisfação das necessidades individuais. Basta perguntar quais as necessidades que poderão ser satisfeitas por um indivíduo que trabalha na indústria automobilística se ele não receber nenhuma remuneração? Quais as necessidades que um comerciante pode satisfazer quando não recebe o salário? O pagamento em espécie nem sempre funciona já que os indivíduos trabalham em setores cuja produção quase sempre é constituída de bens que não podem ser consumidos por eles.

Enfim, apesar da arbitrariedade do conceito de bem-estar aqui apresentado, é plausível introduzir-se a renda como um dos principais fatores que propiciam aos indivíduos a satisfação de suas necessidades. Não podemos afirmar que a renda representa o bem-estar do indivíduo pois ela é somente um dos fatores que possibilitam aos indivíduos satisfazerem certas necessidades. Mas uma parcela do bem-estar é satisfeita pela renda. E quanto mais desenvolvido economicamente o país, maior parcela do bem-estar individual está dependente da renda monetária individual.

Tendo em mente estas idéias não se pode desvincular a renda monetária do bem-estar, principalmente quando o país está se desenvolvendo, pois, cada vez mais, o bem-estar na população depende da renda monetária recebida³.

Portanto, quando se estuda o grau de concentração da renda através de um índice como o de Gini, em verdade, estamos estudando o grau de concentração do bem-estar que as rendas permitem obter através das necessidades que elas permitem satisfazer. Assim, fazendo-se a hipótese de que o bem-estar é diretamente proporcional à renda, quando medimos o grau de concentração da renda, estamos indiretamente medindo o grau de concentração do bem-estar. Os indicadores do grau de concentração não foram idealizados para medir o valor absoluto do bem-estar e nem mesmo da renda. Entretanto, o fato dos índices de desigualdade não terem grande significância como indicadores do aumento ou diminuição do bem-estar, em termos absolutos, não é motivo para rejeitá-los já que representam índices resumos para medir o grau de desigualdade de qualquer atributo, podendo servir como um indicador do grau de concentração do bem-estar que depende da renda individual.

³ Assim, o bem-estar é uma função da Renda Individual, ou seja:

$$B_I = F(R_I), \quad \frac{dB_I}{dR_I} > 0$$

Neste caso a renda representaria todos os bens que o indivíduo 1 pode comprar com a Renda R_I . Isto é, se há um acréscimo de renda necessariamente deve haver um aumento do bem-estar. Trata-se de uma hipótese simplificada, pois está se referindo a uma parte do bem-estar, condicionada pelo fator renda. E a hipótese torna-se mais atraente à medida que os indivíduos dependem apenas de sua renda para obter bem-estar. O bem-estar do indivíduo pode depender da renda dos outros indivíduos indicando inveja ou satisfação o que faz, respectivamente, diminuir ou aumentar o bem-estar com o aumento da renda dos outros indivíduos (R_i). Ou seja:

$$B_I = F(R_I, R_i), \quad \frac{\partial B_I}{\partial R_I} > 0, \quad \frac{\partial B_I}{\partial R_i} > 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial B_I}{\partial R_i} < 0$$

Com base nesta qualificação do conceito de bem-estar e apesar de se concordar que os índices de desigualdade de renda não podem indicar aumento ou diminuição do bem-estar parece estar claro que estes índices podem dar uma indicação do que está acontecendo com o grau de concentração do bem-estar quando se faz a hipótese simplificadora de que o bem-estar é diretamente proporcional à renda. Ou seja, quando um índice de desigualdade de renda aumenta poder-se-ia interpretar como uma piora na distribuição de bem-estar apesar de não se poder afirmar se o bem-estar aumentou, diminuiu ou permaneceu constante. Além do mais isto só é possível para uma parcela do bem-estar que é condicionada pela renda. Mas não deixa de ser uma informação importante a respeito do bem-estar individual.

3. EM DEFESA DE UM INDICADOR DE DESIGUALDADE

Nesta parte pretende-se fazer uma rápida defesa do uso do índice de Gini em particular, e, em geral, de todos os indicadores de desigualdade de renda já que todos eles apresentam suas vantagens e desvantagens, devendo ser escolhido em função dos propósitos da pesquisa e das facilidades de computação disponíveis.

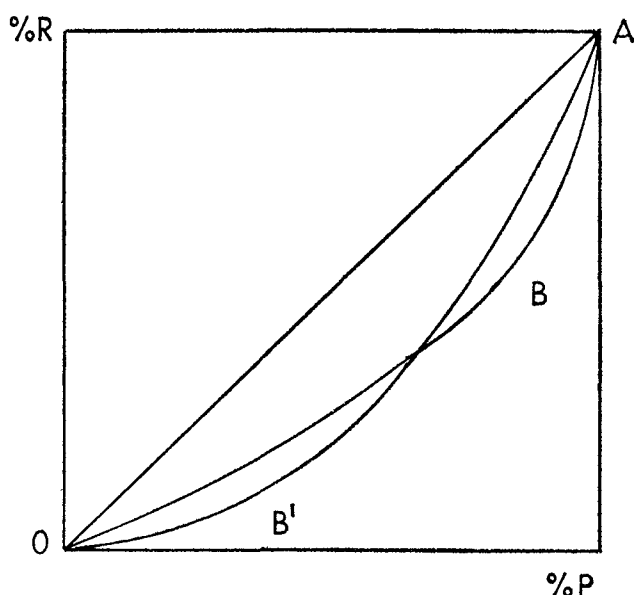
A incapacidade dos índices de desigualdade darem informações sobre o aumento ou diminuição do nível de bem-estar é geral. Está relacionada com qualquer tipo de índice usado, seja ele índice de Gini, Pareto, Theil, Variância dos Logaritmos, etc.⁴. No entanto, a carga de crítica tem recaído mais fortemente sobre o índice de Gini. E as críticas chegaram a tal ponto de se transformar em refrão dizer que medir a desigualdade usando o índice de Gini é ineficiente. Portanto, parece oportuno fazer algumas considerações sobre este instrumento de medida que, dada a sua popularidade e a falta de compreensão do seu verdadeiro significado e de sua verdadeira utilidade, tem sido motivo de chacota entre economistas. Grande parte das críticas baseia-se na falta de compreensão por parte dos usuários do significado e utilidade do índice em questão. É como se criticassem o Barômetro pela sua incapacidade de medir a temperatura ambiente e tentassem se desfazer dele sem refletir sobre a sua verdadeira utilidade. O mesmo parece se passar com o índice de Gini.

Alguns economistas mais esclarecidos apresentam objeções ao índice de Gini pela sua ambigüidade tão decantada entre os que o conhecem mais de perto. A ambigüidade⁵ surge quando se tem duas curvas

⁴ Para uma discussão rápida das medidas de desigualdade, com as vantagens e desvantagens de cada uma recomenda-se o trabalho COSTA, Ramonaval A. *Medidas de Desigualdade de Renda* que possui uma bibliografia relativamente ampla sobre os vários índices

⁵ Sobre a ambigüidade que surge no caso do cruzamento de duas curvas de Lorenz vide BOWMAN, Mary J. A Graphical analysis of Personal Income Distribution in the United States In: IRWIN, Richard D. *Readings in the Theory of Income Distribution*. Inc. reprinted october 1963

de Lorenz que se cortam e apresentam a mesma área de desigualdade, como ilustra o gráfico que segue:



Acredito que esta ambigüidade só tem sentido quando se pretende obter dele uma informação diferente do grau de desigualdade. Se nos restringirmos às informações que o índice tem capacidade para fornecer, a idéia de ambigüidade perde sua força e a qualidade do índice, como medida de desigualdade, não fica tão afetada, no caso em que as áreas OAB e OAB' são iguais.

A idéia da ambigüidade surge pelo fato de não se conseguir estabelecer uma relação biunívoca entre o valor do índice de Gini e a curva de Lorenz⁶. Nestas circunstâncias caracteriza-se uma situação na qual um mesmo valor do índice de Gini representaria ambigüamente diferentes situações do bem-estar (quando se tenta dar uma conotação de bem-estar a uma medida de desigualdade) pois, apesar da igualdade das áreas, não se pode esquecer que a cada curva correspondem condições econômicas diferentes. Mas quanto ao mesmo grau de desigualdade em condições econômicas diferentes não parece haver muito problema, pois se trata de um evento perfeitamente possível. Pode-se afirmar que nesta situação o índice não melhora a informação sugerida pela curva de Lorenz. Portanto, a idéia de ambigüidade só seria levantada se fosse feita a vinculação de índice de desigualdade com o nível de bem-estar fato negado acima.

Mesmo quando se tenta ampliar a gama de informações que estão contidas num índice de desigualdade, fazendo-se a hipótese simplifi-

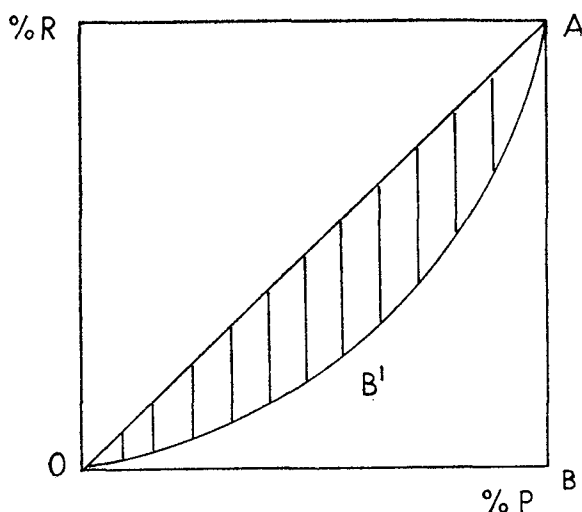
⁶ Apesar de existirem outros métodos gráficos tentando descrever uma distribuição de renda a curva de Lorenz, mesmo escondendo mais informações do que fornece, é a mais utilizada podendo ser assimilada, sem muitas dificuldades analíticas. A mensagem é muito clara apesar da existência de algumas ambigüidades nos casos discutidos no texto. Para um melhor conhecimento da curva de Lorenz e sua origem veja-se o artigo de LORENZ, M. O. *Methods of measuring the concentration of wealth*. Washington, D.C., American Statistical Association June 1905 (New Series, n° 70). Veja-se também BOWMAN, Mary J. A graphical analysis of personal income distribution in the United States. In: IRWIN, Richard D. *Readings in the Theory of Income Distribution* Inc reprinted october 1963

cadora de que a renda seria considerada como um indicador do bem-estar, situação esta em que o índice de Gini poderia ser entendido também como um indicador do grau de desigualdade de distribuição do bem-estar. Também neste caso a idéia de ambigüidade perderia um pouco a sua força já que é possível admitir duas situações onde o bem-estar é nitidamente diferente, porém o bem-estar individual (representado neste caso pela renda) seria distribuído com o mesmo grau de desigualdade.

Uma vez diminuído o impacto da crítica feita ao índice em termos da ambigüidade que surge por ocasião das curvas de Lorenz se cruzarem, gerando áreas iguais, e considerando-se que grande parte das imperfeições da medida de Gini como um indicador do grau de desigualdade de renda, são comuns aos demais índices conhecidos, pois não se tem nenhum índice perfeito (todos eles nos dão aproximações), seria interessante ressaltar algumas das características que fazem do índice de Gini um indicador do grau de desigualdade de renda, operacional e eficiente como medida de desigualdade.

Pode-se enunciar, pelo menos, três vantagens relevantes do índice de Gini como medida de desigualdade. A primeira é a independência da forma da distribuição. Não é preciso ter uma distribuição de renda de uma determinada forma para se poder utilizar esta medida. Isto é, a medida dispensa qualquer ajustamento de funções. O que não acontece com os indicadores derivados de uma função de Pareto e Log-Normal.

A segunda é o seu significado vinculado à curva de Lorenz, considerada como o melhor resumo sobre a situação da desigualdade de renda que se pode obter até o momento. O significado do índice de Gini pode ser apresentado como uma razão entre áreas de desigualdade, a desigualdade existente sobre o máximo de desigualdade teoricamente possível. E este fato poderá ser rapidamente visualizado através do gráfico que segue:



onde OAB = máximo de desigualdade que se pode admitir (quando um único indivíduo possui toda a renda), OAB' = a desigualdade existente, OA = perfeita igualdade ou desigualdade zero. Podendo-se representar o índice de Gini pela seguinte fórmula:

$$G = \frac{OAB'}{OAB} = \frac{\text{Desigualdade existente}}{\text{Máxima desigualdade}}$$

Trata-se, portanto, de índice de fácil compreensão e está fadado a se popularizar pela sua simplicidade. Percebe-se que se trata de uma razão, o que justifica chamá-lo de RAZÃO DE CONCENTRAÇÃO (concentration ratio), deixando o nome de índice de Gini (Gini index) para um outro coeficiente formulado por Conrado Gini com características diferentes deste que ora discutimos ⁷.

A terceira vantagem da razão é a relativa facilidade de cálculo quando comparada com os demais índices como Pareto, Theil, Variância de Logaritmos. Deve-se lembrar que o índice de Pareto envolve ajustamento de uma função aos dados, ao passo que os dois últimos (Theil e Variância dos Logaritmos) necessitam cálculo de logaritmo, que apesar de ser fácil envolve uma certa especialização ... Mesmo as noções que norteiam a execução do índice são mais simples e acessíveis, não necessitando conhecimento da teoria da informação, como é o caso do índice de Theil, nem o entendimento do significado de uma variância para melhor entender a informação contida na variância dos logaritmos. Não se pode negar que também é possível dar uma certa sofisticação ao significado da razão de concentração de Gini, mas que é dispensável já que sua versão mais simples é suficiente para demonstrar o seu significado.

Recentemente, o professor Joseph L. Gastwirth procurou contornar algumas críticas comumente dirigidas à razão de concentração, superando o problema tão conhecido de subestimação deste coeficiente através da introdução de dois limites, um inferior e outro superior. Ou seja, construindo um intervalo dentro do qual o valor do coeficiente deverá estar ⁸. O trabalho também apresenta soluções que permitem utilizar a razão de concentração, mesmo quando se deparam com valores negativos de renda. Este trabalho vem como um reforço às demais propriedades do índice. Com esta contribuição o professor Gastwirth deu

⁷ Trata-se de um índice que apresenta certas características semelhantes ao índice de Pareto no que se refere às variáveis e método de obtenção. Pode ser apresentado na seguinte forma: $\log N = \log p + \delta \log Ax$, onde N é a população com renda x ou mais, p é uma constante, Ax é a renda acumulada dos que ganham mais que x . Sendo que δ é o coeficiente de Gini. Este coeficiente é mais sensível que o índice de Pareto, denunciado com mais propriedade as diferenças de desigualdade de renda. Apesar de ser fácil o seu cálculo não foi amplamente divulgado como é o caso do índice de Pareto. É encontrado em poucos trabalhos. Veja-se o artigo de Mary J. Bowman já referido anteriormente.

⁸ Para uma explicação rápida do intervalo para a Razão de Concentração de Gini, veja-se COSTA, Ramonaval A. *Medidas de Desigualdade de renda*, página 18. O trabalho original é de GASTWIRTH, Joseph L. *The Estimation of the Lorenz Curve and Gini index* *Review of Economics and Statistics*, Cambridge, Mass., 54(3) aug. 1972.

um grande apoio às opiniões de um conhecido entusiasta da razão de concentração de Gini, o professor J. Morgan, que em 1968 fez a seguinte declaração "The Gini index is the best single measure of inequality"⁹.

4. CONCLUSÕES

Houve neste trabalho uma tentativa de ressaltar que as medidas de desigualdade de renda, apesar de não poderem apresentar evidências sobre o aumento ou diminuição do bem-estar, podem, pelo menos, sob hipóteses simplificadoras especiais, serem interpretadas como indicadores do grau de desigualdade da distribuição do bem-estar, ou melhor, de uma parcela do bem-estar.

Em seguida foi dada uma atenção especial à razão de concentração de Gini em função das críticas que se tem presenciado em seminários, leituras de jornais e revistas, aulas e em conversas informais com técnicos de várias especialidades, sobre a ineficiência de tal medida. O primeiro objetivo foi defender um instrumento que por suas qualidades, suas vantagens e mormente sua simplicidade não deve deixar de ser usado. O segundo objetivo foi chamar atenção para o fato de que as medidas de desigualdade (Razão de Concentração, Theil, Variância dos Logaritmos, Pareto, etc) devem ser usadas com um mínimo de conhecimento a respeito do seu verdadeiro significado e de suas propriedades.

Espero, com o que foi dito neste ensaio, poder contribuir marginalmente para que as discussões, sobre os problemas do grau de concentração de renda se façam sem ser preciso apelar para as deficiências desta ou daquela medida com o fim de desmerecer evidências de aumento da desigualdade de renda que porventura possa ocorrer em qualquer país.

⁹ Vide MORGAN, J. *The Anatomy of Income Distribution* *Review of Economics and Statistics*, Cambridge, Mass., 1962

BIBLIOGRAFIA

- 1 — BOWMAN, Mary J. A Graphical Analysis of Personal Income Distribution in the United States. In: IRWIN, Richard D. *Readings in the Theory of Income Distribution*. Inc. reprinted october 1963
- 2 — COSTA, Ramonaval A. *Medidas de desigualdade de renda*. Rio de Janeiro, IBGE, 1974 (não publicado)
- 3 — GASTWIRTH, Joseph L. The Estimation of the Lorenz Curve and Gini Index. *Review of Economic and Statistic*, Cambridge, Mass., 54 (3) Aug. 1972
- 4 — LORENZ, M.O. *Methods of Measuring the Concentration of Wealth*. Washington, D. C., American Statistical Association, june 1905 (new series, 70)

RESENHA BIBLIOGRÁFICA

SINGER, Paul. *Curso de Introdução à Economia Política*. Rio de Janeiro, Forense Universitária, 1975

A originalidade no método de abordagem da matéria é, sem dúvida, o principal mérito desse livro de Paul Singer. Seu *Curso de Introdução à Economia Política* parte da comparação de dois corpos teóricos existentes — o marginalista — keynesiano e o marxista — procurando destacar contrastes, acertos e erros nas contribuições dessas correntes, para o entendimento da organização econômica capitalista. A abordagem resultante é antidogmática por definição, o que destaca esse livro dentre os livros didáticos de economia que, em sua maior parte, apresentam teorias e conceitos de uma determinada corrente como verdades absolutas.

A escolha dos temas considerados como fundamentais para a descrição e o entendimento da economia capitalista, assim como das teorias e autores, não é, entretan-

to, como salienta o próprio autor, no primeiro capítulo, uma escolha isenta de posição ideológica. Segundo Singer, todo o debate teórico apresentado está ligado às divergências e lutas de nosso tempo e ele salienta essa ligação constantemente no decorrer do livro, encaminhando o leitor a debates atuais como a intervenção do Estado nas economias capitalistas, a internacionalização do capital, os problemas da sociedade de consumo e outros mais.

O livro resultou de uma série de aulas dadas em 1968 no Teatro de Arena em São Paulo. Por isso seu tom é de exposição oral o que, por um lado, torna sua leitura bastante interessante e viva, mas que por outro, tende a dificultar a sua adoção como livro-texto, sem o acompanhamento por outros livros em que os conceitos econômicos estejam definidos de modo mais preciso. Além disso a apresentação de bibliografia se restringe ao corpo do texto, não havendo um índice bibliográfico onde o alu-

no possa facilmente se orientar para consultas posteriores.

Singer não analisa como se deu o surgimento de cada uma das duas teorias em estudo e não salienta que a junção marginalista — keynesiana — é uma opção sua, ora expõe argumentos de uma, ora de outra, o que pode dar ao leitor a impressão de que existe um corpo teórico homogêneo marginalista keynesiano. Um capítulo introdutório sobre as condições históricas que motivaram o surgimento de cada uma das teorias assim como a exposição sucinta de suas diferenças poderia permitir ao leitor uma melhor apreciação das teorias, principalmente no que diz respeito à keynesiana.

Inicialmente, Singer conceitua valor-utilidade e valor-trabalho e através dessas definições básicas a cada uma das teorias, antecipa a dicotomia existente entre elas na explicação da atividade econômica.

Ele salienta que a definição de valor marginalista parte do relacionamento entre os homens e a natureza visando atender necessidades que são fundamentalmente subjetivas. Como consequência, toda a teoria marginalista partirá sempre da análise do comportamento de um agente econômico (família, empresa, etc.) para o qual se supõe uma racionalidade de ação de forma que a teoria possa ser construída.

A teoria marxista parte da relação que se estabelece entre os homens visando a produção e o conceito de valor depende do tempo de trabalho produtivo que os indivíduos gastam na atividade econômica. Esta definição antecipa o

interesse marxista na geração e apropriação do excedente.

Singer enfatiza também o fato de que a teoria do valor-trabalho é “essencialmente macroeconômica e só se preocupa com a economia como um todo e a um prazo relativamente longo” (pág. 21), devendo incorporar conhecimentos que tenham surgido da teoria marginalista que se preocupa mais com o curto prazo e com a operacionalidade.

O autor aborda em seguida, a repartição da renda, tema sobre o qual as duas correntes tem divergências profundas. A escola marginalista explica a distribuição de renda através da posse e da remuneração devida a cada um dos fatores de produção (terra, trabalho, capital e capital monetário). A posse ela não se propõe a explicar, enquanto que a remuneração é determinada tecnicamente através da contribuição que cada fator dá ao produto. Tal afirmação da teoria marginalista, segundo Singer, “induz a quem a estuda a supor que sempre há justiça na repartição” (pág. 39).

Na exposição da teoria marxista da repartição da renda, o autor salienta que a divisão do excedente entre remuneração do trabalho e mais valia oscila entre um limite mínimo para os trabalhadores, qual seja o seu custo de reprodução e um máximo que é tal que mantenha o excedente necessário para os elementos improdutivos e o processo de acumulação de capital. E que esta divisão se estabelece não a nível técnico ou econômico mas sim através da luta de classes.

Quanto ao excedente econômico, Singer contrasta sua definição pela teoria keynesiana e pela teoria marxista, isto é, a poupança e a mais valia. A poupança é encarada como o rendimento não consumido que será tanto maior quanto maior for o nível de renda. O autor salienta que a partir dessa última hipótese uma maior concentração de renda pode ser uma política eficaz de aumento de poupança. Ao colocar este raciocínio como uma consequência da teoria keynesiana Singer ignora a advertência de Keynes de que “a distribuição de rendimentos num sentido favorável à propensão a consumir podem acelerar grandemente o crescimento do capital”

Na teoria marxista, o excedente também tende a crescer através da produção de mais valia absoluta (acréscimo do produto social em horas trabalhadas sem aumento da remuneração do trabalho) ou da produção de mais valia relativa (aumento mais que proporcional do produto social do que da remuneração do trabalho possibilitado pela evolução da tecnologia). No entanto, qualquer das formas de produção de mais valia, pressupõe um aumento do capital constante empregado (matérias-primas e desgaste de equipamentos e instalações). Esse fato levou Marx a supor que, embora o excedente crescesse com o tempo, a taxa de lucro (relação mais valia produto social) decresceria. Essa hipótese é importante em sua teoria dos ciclos econômicos e não se verificou na prática. Singer apresenta duas explicações prováveis para a manutenção da taxa de lucro, uma baseada no fato do ca-

pital constante ser medido em horas de trabalho que também foram afetadas por modificação de produtividade e outra baseada na mudança do capitalismo concorrencial para o monopolista (Sweezy e Baran)

Para os teóricos marxistas a acumulação na economia capitalista se dá sempre ciclicamente. Na visão de Marx, esses ciclos eram causados pelo esgotamento do exército industrial de reserva que forçava para cima a remuneração do trabalho e para baixo a taxa de lucros e a acumulação, gerando com isso uma crise. Esta seria superada através de inovações tecnológicas poupadoras de mão-de-obra, as quais tornariam parte dos equipamentos obsoletos e restituiriam o exército industrial de reserva invertindo desse modo o processo. Para Rosa de Luxemburgo, é a falta de demanda que se constitui num entrave à acumulação provocando a crise

Na análise keynesiana o volume de excedente ou poupança, é determinado como resíduo (renda ou receita não consumida) enquanto que o volume do investimento é decidido pela comparação entre a eficiência marginal de cada investimento e a taxa de juros. Assim nada garante a sua igualdade *a priori*. Singer afirma que “o que a análise de Keynes tenta mostrar é que o sistema capitalista possui um mecanismo bastante complexo, porém bem flexível, funcionando sobretudo através do mercado de capitais e das instituições financeiras que faz com que nunca a acumulação seja por muito tempo diferente do excedente” (pág. 61).

Expõe então as principais maneiras de se atingir o equilíbrio e a conclusão de que nada obriga que esse equilíbrio seja a um nível de renda tal que haja pleno emprego. A intervenção do governo é então sugerida, para levar o nível de renda o mais próximo possível do de pleno emprego, seja através de redução da taxa de juros, de inversões públicas ou de expansão monetária (capítulo 7).

A preocupação de Singer em analisar as crises do capitalismo, o papel estabilizador do Estado e os novos problemas que daí advêm prossegue nos capítulos sobre crédito e nível de emprego. O autor expõe os conceitos de equilíbrio monetário keynesiano. Conclui que o governo pode estimular a atividade econômica através da expansão monetária mas adverte que Keynes já afirmava que “numa economia capitalista, não planificada, este esquema não é tão simples nem tão lógico como foi descrito. Porque quando caminhamos de uma situação de desemprego e de capacidade ociosa para um aumento da capacidade produtiva, podem surgir pontos de estrangulamento” (pág. 109). Esta parece ser uma advertência que a maioria dos livros-textos se furta a fazer mas que para Singer tem uma importância particular pois reforça sua tese de que: “embora o governo tenha poder para condicionar o fluxo econômico, há forças que ele não pode controlar, que fazem com que de fato os ciclos de inflação e deflação, de pleno emprego e desemprego, de crise, depressão e ascensão se verifiquem, embora agora muito dependentes da política econômica do governo”.

No capítulo sobre “Nível de Emprego” Singer reforça sua tese sobre o poder limitado do governo em evitar as crises e depressões através da análise dos estrangulamentos, usando para tal a divisão da economia em departamentos definida por Marx. Estuda também o processo de destruição criadora descrito por Schumpeter e de introdução de novos produtos no mercado como ativadores da demanda no sistema capitalista atual. Salienta que tais fenômenos reforçam o caráter cíclico do crescimento capitalista pois só a expansão da procura justifica os altos investimentos necessários à maioria dos projetos atuais.

O problema da concentração industrial e seu relacionamento com os ciclos da economia capitalista é estudado através da análise de Marx. A fase de expansão do ciclo se caracterizaria, segundo ele, por uma acumulação intensa por parte das firmas enquanto que a de depressão, pela concentração — “expropriação de um capitalista por outro capitalista”.

A expansão da concentração a nível mundial também é abordada via discussão da contradição entre associações de monopólios a nível internacional e Estados nacionais. O autor, abordando esse tema via uma polêmica do início do século, se omite em estudá-lo como um problema atual do capitalismo.

Neste capítulo, o autor expõe também as teorias recentes de Galbraith e de Baran e Sweezy sobre as mudanças ocorridas no capitalismo. São levantadas discussões

sobre a necessidade de planejamento, a nova iteração estado-indústria, a criação de procuras artificiais (publicidade, obsolescência, gastos bélicos) e outros temas bastante atuais.

No capítulo 9, Singer descreve a evolução do capitalismo e defende a tese de que este é um modo de produção que esgotou seu papel histórico na medida em que estaria impedindo que a automação “libertasse o homem do encargo de prover pelo seu próprio esforço direto os meios para o seu sustento”.

A argumentação quanto a este ponto não é bem conduzida já que o autor coloca a falta de justificativa do capitalista para auferir lucros numa economia automatizada, como o principal empecilho à automação. Não aborda o problema do desemprego e das mudanças radicais que seriam exigidas para que a sociedade pudesse prover seu sustento indiretamente.

Quanto ao Comércio Internacional, Singer apresenta uma evolução histórica das teorias clássicas (Adam Smith e Ricardo) e marxista (Teoria da Troca Desigual). Fixa-se sobretudo na nova divisão mundial de trabalho que está resultando da transferência de capitais a nível mundial. Singer não acredita que a penetração das multinacionais possa eliminar o “gap” entre os países desenvolvidos e subdesenvolvidos: “Não há dúvida de que o influxo de inversões das multinacionais em países como o Brasil, por exemplo, acelera o processo de industrialização, mas também o freia na medida em que tais inversões reforçam o mo-

nopólio tecnológico das nações já industrializadas. As multinacionais transferem às subsidiárias apenas o “know-how” pronto, continuando o desenvolvimento de inovações tecnológicas a ser atribuição exclusiva das matrizes. Embora fosse possível aos países em desenvolvimento romper esta relação de dependência do grande capital internacional, pois o “know-how” também pode ser comprado sem se entregar o mercado interno às subsidiárias das multinacionais, o fato é que esta possibilidade nunca se concretiza. A razão básica é política: um processo de desenvolvimento autônomo teria que ser realizado com participação predominante de empresas estatais, já que só o Estado seria capaz de mobilizar e concentrar os recursos de capital necessários. Face às alternativas de se ver subordinada a um Estado empresário ou ao grande capital internacional, as classes dominantes dos países em desenvolvimento têm consistentemente preferido a segunda, ainda que esta implique na manutenção do atraso relativo destes países”. Assim ele define sua posição no debate sobre estatização e multinacionais.

Sobre as contribuições pós-keynesianas à análise do subdesenvolvimento, Singer salienta que “a mais valiosa contribuição, de um certo caráter científico é aquela que nasce da própria prática, ou seja, a estratégia de desenvolvimento” (pág. 164). Não analisa, entretanto, essas contribuições via exposição de planos e políticas econômicas adotadas no Brasil ou em outros países.

Finalmente, são analisados os problemas da Economia Planificada em que decisões políticas tem que ser tomadas quanto a opção entre consumo futuro e atual às formas de consumo (carro $\times$ metrô), à repartição de renda (incentivos materiais $\times$ morais) aos preços (administrados ou não) e à gestão de empresas (autônomas $\times$ centralizada). O autor compara as opções feitas a nível de alguns países de economia planificada e suas prováveis conseqüências.

Através dessa exposição de algum dos tópicos abordados pelo autor, fica claro o fato que o livro

é antidogmático na apresentação das teorias econômicas existentes. Isto vai permitir ao leitor uma visão mais abrangente da teoria econômica do que usualmente teria através de outros textos. Nas conclusões e observações que deriva a partir das exposições da teoria, entretanto, Singer é fundamentalmente ideológico o que pode se constituir num interessante apelo ao debate para uns e numa posição anticientífica para outros.

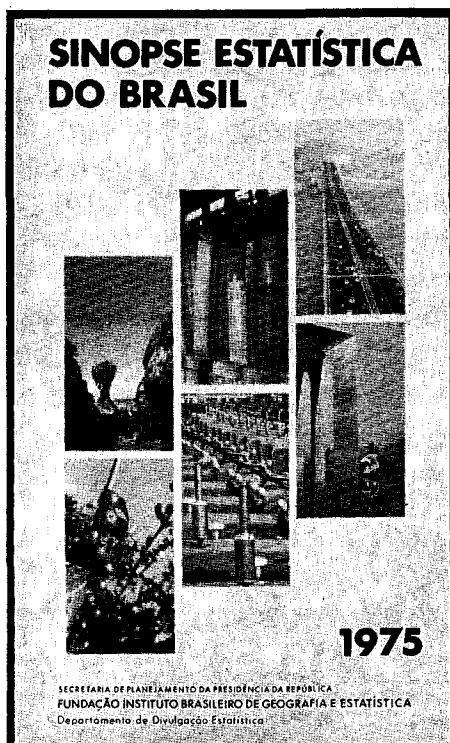
Sonia Izhaki

Economista

SINOPSE ESTATÍSTICA DO BRASIL

O IBGE, através de sua Diretoria Técnica, vem de colocar à disposição de homens de indústria, investidores, órgãos de planejamento público e particular, e aos estudiosos em geral, o quarto volume de SINOPSE ESTATÍSTICA DO BRASIL, que corresponde ao ano de 1975.

Referida publicação, que a partir deste número será editada bialmente, nos anos ímpares, contém um elenco de dados selecionados e antecipa a divulgação da matéria que, com maior amplitude, será apresentada no próximo nú-



mero do ANUÁRIO ESTATÍSTICO DO BRASIL.

Em SINOPSE, são apresentadas as seguintes Situações do País:

Física — Caracterização do território e recursos naturais; *Demográfica* — Estado e movimento da população; *Econômica* — Silvicultura, pesca, agropecuária, indústria, comércio, transportes, comunicações, mercado monetário e financeiro, consumo, e contas nacionais; *Social* — Habitação, trabalho, saúde, associativismo e cooperativismo; *Cultural* — Ensino e cultura; *Administrativa e Política* — Divisão territorial, finanças públicas e representação política, através de gráficos, tabelas, mapas, fotos — a maioria a cores, e textos elucidativos, todos elaborados de forma a oferecer o maior número possível de informações estatísticas que permitem retratar, conscienciosamente, o que representamos como nação que se desenvolve aceleradamente.

A apresentação de cada “Situação” é precedida de texto analítico, que envolve um estudo completo do item abordado, com análises percentuais da situação presente, dados retrospectivos e comparativos, previsão de evolução fu-

tura, de forma a capacitar seu amplo conhecimento. Assim é, que em Demografia, entre outros textos há um — *Projeção da população brasileira por idade e sexo* — 1970-2000 — que nos permite saber que no ano 2000 a população do Brasil estará entre 200 a 220 milhões de habitantes, e que a vida média será de 71,68 anos para os homens e de 75,44 para as mulheres.

Os textos analíticos em número de dezessete, são: Caracterização do território, Brasil — Decis e Centros de gravidade da população e da área; Aglomerações urbanas; Aspectos demográficos das áreas metropolitanas brasileiras; Projeção da população brasileira por idade e sexo, Economia brasileira; Agropecuária; Indústria extrativa de produtos minerais; Indústria siderúrgica, Petróleo e derivados; Energia elétrica; Comércio exterior; Preços, salários e serviços na agricultura; Moeda e crédito; Mercado de capitais; Balanço de pagamentos e câmbio e Finanças da União.

SINOPSE ESTATÍSTICA, com suas 430 páginas, se constitui, pois, num interessante e valioso compêndio, indispensável ao conhecimento dos variados setores das atividades brasileiras.

REGISTRO CIVIL DO BRASIL

O IBGE, por sua Diretoria Técnica, acaba de divulgar o volume REGISTRO CIVIL DO BRASIL — 1974, relativo aos resultados preliminares do registro civil das pessoas naturais, ocorrido em todo o País, no ano de 1974.

Referida publicação discrimina, em suas inúmeras tabelas, o número de registros de nascimentos — nascidos vivos e nascidos mortos, casamentos e óbitos, inclusive por trimestre, os quais são apresentados por: Unidades da Federação, Municípios das Capitais,

Municípios de 100.000 habitantes e mais — exceto os das Capitais, Áreas Metropolitanas, e da totalidade dos Municípios brasileiros.

O trabalho do Centro Brasileiro de Estudos Demográficos — CBED, que integra a Superintendência de Pesquisas e Desenvolvimento, foi baseado nas informações prestadas pelos respectivos cartórios, e traduz parte do empenho em que está empregado o IBGE, objetivando a produção de estatísticas confiáveis no respectivo setor.

MOVIMENTO BANCÁRIO DO BRASIL

Obedecendo já a nova Padronização da Contabilidade Bancária, instituída pelo Conselho Monetário Nacional, o Centro de Informações Econômico-Fiscais da Secretaria da Receita Federal, do Ministério da Fazenda, distribuiu o Boletim do MOVIMENTO BANCÁRIO DO BRASIL — 1973/74.

A publicação em apreço dá nova forma de apresentação às apurações do movimento bancário do País, discriminando os bancos ofi-

ciais federais (Banco do Brasil, da Amazônia, e do Nordeste do Brasil), oficiais estaduais e privados, incluídos nestes últimos os saldos dos bancos estrangeiros. O Boletim contém, ainda, quadro demonstrativo do número de estabelecimentos bancários existentes, segundo sua categoria e Unidades Federadas.

Trata-se de publicação oportuna, que atende aos usuários de estatísticas do movimento bancário.

OS RECURSOS NATURAIS E O PLANEJAMENTO

Com o volume “Os Recursos Naturais e o Planejamento”, recentemente lançado, de autoria de Paulo de Assis Ribeiro, o IBGE, através de sua Diretoria Técnica, inicia a série de estudos sobre recursos naturais e meio-ambiente, que visa dotar os setores de planejamento econômico brasileiro, com vistas à integração econômica regional, de dados adequados, que melhor os orientem na respectiva programação.

Assim é que publicará estudos consisos e breves, claros e concretos, cobrindo eventuais deficiências editoriais, com trabalhos originais, reedições oportunas e traduções adequadas, promovendo a difusão de conhecimentos sobre recursos naturais e meio-ambiente e, por conseqüência, abordar problemas decorrentes do mau uso daqueles e da condição administrativa destes, oferecendo, também, contribuições que atendam à demanda de uma classe da sociedade situada nos limites de formação pré-acadêmica, servindo contudo e também a faixa universitária

A série ora iniciada, recebe a denominação de Paulo de Assis Ribeiro como homenagem do IBGE a um dos mais preocupados estudiosos dos diferentes aspectos —



investigação, ensino, metodologia, legislação, divulgação, sistematização — inerentes aos recursos naturais e próprios do meio-ambiente. Engenheiro, economista, educador, planejador, consultor, executor e diretor, Paulo de Assis Ribeiro, há pouco falecido, foi o primeiro titular da Superintendência de Recursos Naturais (Supren), do IBGE, tendo tido pleno interesse na organização de um sistema de levantamento de dados e elaboração de informações quanto à ocorrência, distribuição e freqüência dos bens essenciais, reconhecidos como renováveis uns, esgotáveis outros, e auto-renováveis tantos mais.

ANUÁRIO ESTATÍSTICO DA INDÚSTRIA SIDERÚRGICA BRASILEIRA — 1975

O Instituto Brasileiro de Siderurgia acaba de distribuir o seu ANUÁRIO DA INDÚSTRIA SIDERÚRGICA BRASILEIRA — 1975, que enfoca com riqueza de detalhes, através de tabelas e gráficos representativos, a matéria que envolve.

O Anuário, que é apresentado em inglês e português, discrimina as séries de produção, vendas, importações, exportações e consumo aparente de produtos siderúrgicos, abrangendo o período de 1964 a 1974.

Contém o mesmo, além dos dados provenientes de órgãos governamentais e outras entidades — notadamente os de comércio exterior e índices conjunturais — a relação dos nomes e endereços das principais indústrias siderúrgicas,

seus principais produtos e o mapa siderúrgico devidamente atualizado.

Destaca-se, ainda, o fato de pela primeira vez serem apresentados os resultados do Estudo do Mercado Brasileiro de Aço, que apesar de sua forma sucinta, permite delinear o perfil esperado do mercado, nos próximos anos.

O Instituto procura, assim, com a referida publicação que contém informações econômicas e estatísticas que permitem avaliar a posição da siderurgia brasileira dentro do panorama econômico nacional e internacional, oferecer subsídios ao parque siderúrgico, órgãos governamentais e privados, bem como aos demais setores engajados no processo de desenvolvimento econômico do País.

ESTATÍSTICA PORTUÁRIA — 1974

Compreendendo o levantamento de dados no período de 1955 a 1974, o Departamento Nacional de Portos e Vias Navegáveis do Ministério dos Transportes, publicou a sua oitava “Estatística Portuária — 1974”

Neste volume são apresentados: regime de exploração dos portos, movimento comercial, movimento de mercadorias (importação

e exportação), renda das taxas e despesas de exploração comercial e respectivos gráficos dos principais portos brasileiros.

É apresentado, ainda, o movimento geral em toneladas de cada um dos portos, gráficos relativos à importação e exportação, quadros específicos de importação e de exportação segundo as navegações de longo curso e de cabotagem (nesta incluindo-se as navegações fluvial,

lacustre e de alto mar), inclusive o movimento de embarcações.

Neste número está incluído mais um “quadro demonstrativo do movimento de embarcações segundo a TLR (tonelagem líquida de registro), a TPB (tonelagem de

porte bruto) e o maior calado no porto”.

A Estatística Portuária — 1974 apresenta, pois, um repositório de dados acerca dos portos, do movimento portuário e das embarcações, aos interessados neste assunto.

ANUÁRIO ESTATÍSTICO DA BORRACHA

A Superintendência da Borracha, órgão da esfera do Ministério da Indústria e do Comércio, distribuiu o seu Anuário Estatístico — mercado nacional, ano 8, número 15, correspondente ao período de janeiro-dezembro de 1974.

Referida publicação não só analisa o mercado nacional da borracha, como, através de gráficos, tabelas e textos elucidativos apresenta toda a movimentação da borracha — produção, exportação, estoque e consumo —, com os respectivos valores, inclusive dados retrospectivos.

Trata da produção da borracha vegetal por Unidade da Fede-

ração, Microrregiões Homogêneas e Municípios, e envolve, ainda, a produção, vendas, exportação, consumo e estoques de borrachas sintéticas brasileiras.

Relaciona também a produção de pneumáticos e câmaras-de-ar, índices comparativos de preços de borracha vegetal, borracha sintética e oferta global no período de 1964-1974.

O “Anuário” em foco é uma publicação interessante e útil, pois que estuda o movimento da borracha nos setores de produção, indústria e comércio, com riqueza de detalhes.

Todas as publicações do IBGE, inclusive as referentes as notas insertas nesta Revista, poderão ser adquiridas na sede da Instituição, à Avenida Franklin Roosevelt, 146 — loja, Rio de Janeiro — RJ, ou nas respectivas Delegacias de Estatística, nas demais Unidades da Federação

ESTRUTURA ORGANIZACIONAL DO IBGE

A Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística — IBGE, em face de seu novo Estatuto, aprovado pelo Decreto n.º 76.664, de 24 de novembro de 1975, passa a ter a seguinte estrutura organizacional (Art. 13):

I — Órgãos Colegiados

- a) Conselho Curador
- b) Conselho Técnico

II — Administração Superior

- a) Presidente
- b) Diretor-Geral

III — Assessoramento Superior

- a) Gabinete da Presidência
- b) Assessoria de Planejamento e Projetos Especiais
- c) Procuradoria-Geral
- d) Assessoria de Segurança e Informações
- e) Inspeção

IV — Diretorias

- a) Diretoria Técnica
 - a.1) Superintendência de Estatísticas Primárias
 - a.2) Superintendência de Estudos Geográficos e Sócio-Econômicos
 - a.3) Superintendência de Recursos Naturais e Meio-Ambiente
- b) Diretoria de Geodésia e Cartografia.
 - b.1) Superintendência de Geodésia
 - b.2) Superintendência de Cartografia
- c) Diretoria de Administração
 - c.1) Superintendência de Recursos Humanos
 - c.2) Superintendência de Patrimônio e Serviços Gerais
 - c.3) Superintendência de Orçamento e Finanças
- d) Diretoria de Formação e Aperfeiçoamento de Pessoal
 - d.1) Superintendência de Ensino

- d.2) Superintendência de Aperfeiçoamento
- d 3) Biblioteca Central
- e) Diretoria de Informática
- e.1) Superintendência de Sistemas
- e 2) Superintendência de Produção
- f) Diretoria de Divulgação
- f.1) Centro Editorial
- f.2) Centro de Serviços Gráficos

V — Unidades Regionais

- a) Escritório do IBGE no Distrito Federal
- b) Delegacias
- b.1) Agências
- c) Divisões de Levantamentos Geodésicos

O Conselho Curador (Art. 17) compõe-se de cinco (5) membros:

I — 1 (um) representante do Gabinete Civil da Presidência da República;

II — 1 (um) representante da Secretaria de Planejamento da Presidência da República;

III — 1 (um) representante do Ministério da Fazenda,

IV — 1 (um) representante do Banco Central do Brasil,

V — 1 (um) representante do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico — CNPq.

O Conselho Técnico (Art. 22) compõe-se de vinte e cinco (25)

membros, sendo um (1) de cada uma das entidades a seguir:

I — Gabinete Civil da Presidência da República;

II — Gabinete Militar da Presidência da República;

III — Secretaria Geral do Conselho de Segurança Nacional (CSN);

IV — Serviço Nacional de Informações (SNI),

V — Secretaria de Planejamento da Presidência da República (SEPLAN);

VI — Estado Maior das Forças Armadas (EMFA);

VII — Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq);

VIII — Ministério das Relações Exteriores (MRE);

IX — Ministério do Exército (MEEx),

X — Ministério da Marinha (MM),

XI — Ministério da Aeronáutica (MAer);

XII — Instituto de Planejamento Econômico e Social (IPEA);

XIII — Financiadora de Estudos e Projetos (FINEP);

XIV — Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico (BNDE);

XV — Confederação Nacional da Indústria (CNI);

XVI — Confederação Nacional do Comércio (CNC);

XVII — Confederação Nacional da Agricultura (CNA);

O Presidente, o Diretor-Geral e todos os Diretores do IBGE são membros natos do Conselho (§ 1.º).

REUNIÃO PREPARATÓRIA DOS CENSOS ECONÔMICOS DE 1975

Realizou-se, na Escola Nacional de Ciências Estatísticas — ENCE, no período de 14 a 16 de outubro, a Reunião Preparatória dos Censos Econômicos de 1975, com a presença de cerca de duzentos Representantes de Entidades Governamentais, Confederações da Indústria e do Comércio e altos executivos da iniciativa privada.

A Reunião teve por finalidade a conciliação de interesses entre os produtores e os usuários das estatísticas econômicas, com vistas à elaboração do plano definitivo das pesquisas dos Censos de 1975.

A primeira sessão técnica, realizada no dia 14, teve a presidência do Secretário de Planejamento do Estado do Maranhão, Dr. Edmilson Francisco dos Reis Duarte, tendo sido apresentadas contribuições dos Institutos de Planejamento Econômico e Social (IPEA/INEPES), Departamento de Estudos Econômicos do Nordeste (ETENE), Secretaria de Planejamento do Estado de São Paulo, Ministério da Indústria e do Comércio, Secretaria-Geral do Ministério das Minas e Energia (ELETROBRÁS e CESP), Conselho de Desenvolvimento Comercial e Banco Central do Brasil.

A segunda sessão Técnica teve a presidência do Chefe do Departamento Econômico do Banco do Brasil, Dr. Edésio Fernandes Ferreira, enquanto que a terceira foi presidida pelo Dr. Luiz Zottmann, representante do IPLAN/IPEA. Ambas foram realizadas no dia 15 e nelas apresentadas contribuições das seguintes entidades: Ministério do Interior, Empresa Brasileira de Planejamento de Transporte — GEIPOT, Secretaria-Geral do Ministério das Minas e Energia (ELETROBRÁS e CESP), Sindicato da Indústria da Construção Civil, Instituto de Planejamento Econômico e Social (IPEA/INPES), Banco Central do Brasil, Instituto de Resseguros do Brasil, Assessoria Especial (CDE) da Secretaria de Planejamento da Presidência da República, Secretaria de Planejamento, Ciências e Tecnologia do Estado da Bahia, Estado-Maior da Armada, Superintendência de Desenvolvimento do Nordeste e Ministério da Saúde.

No último dia, a exemplo do ocorrido no anterior, os trabalhos foram desenvolvidos em duas sessões. A primeira teve a presidência do Dr. Ruy Miller Paiva, represen-

tante do INPES/IPEA e a segunda a presidência do Prof. Isaac Kerstenetzky, Presidente do IBGE.

No decorrer dessas sessões foram apresentadas contribuições das seguintes entidades. Serviço Federal de Processamento de Dados (SERPRO), Superintendência de Desenvolvimento do Nordeste (SUDENE), Telecomunicações Brasileiras S.A. (TELEBRÁS), Instituto de Pesquisas Econômico-Sociais e Informática (IPEI), Sub-

secretaria de Planejamento e Orçamento (SUPLAN/CFP — Ministério da Agricultura) e FAO-SUPLAN, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), Secretaria de Planejamento da Presidência da República (SEPLAN), Secretaria de Economia e Planejamento do Estado de São Paulo, Fundação Serviços de Saúde Pública do Ministério da Saúde e Banco do Nordeste do Brasil.

COMISSÕES REGIONAIS E MUNICIPAIS DE ESTATÍSTICAS AGROPECUÁRIAS

O Centro Brasileiro de Estatísticas Agropecuárias — CBEA do IBGE incumbiu o Grupo de Coordenação de Estatísticas Agropecuárias (GCEA) de constituir Comissões Regionais e Municipais, formadas, na medida do possível, de representantes locais dos órgãos que compõem o Grupo Estadual, visando estabelecer uma estrutura básica permanente de informação.

A Comissão Municipal de Estatísticas Agropecuárias (COMEA), é coordenada pelo representante local de órgão que participe do GCEA ou, na sua falta, por pessoa escolhida pelo presidente desse órgão.

As reuniões da COMEA se darão nos meses de março, junho, setembro e dezembro, quando prepararão os formulários a serem envi-

ados ao Coordenador da Comissão Regional, até o dia 20 de cada um dos citados meses.

A Comissão Regional de Estatísticas Agropecuárias, instalada em cada município-sede de Agência de coleta do IBGE, com jurisdição nos municípios que a compõem, será coordenada pelo Chefe da Agência de Coleta. Referida Comissão reunirá-se mensalmente, para avaliar as informações das Comissões Municipais (COMEA), e prestar ao GCEA informações sobre as condições climáticas ocorridas, bem como incidência de pragas e moléstias que afetarem as estimativas de dados, comercialização dos insumos e produtos, e suas disponibilidades, preços correntes e intenção de plantio para a safra seguinte.

IBGE

Presidente: ISAAC KERSTENETZKY

Diretor-Geral: EURICO DE ANDRADE NEVES BORBA

Diretor-Técnico: AMARO DA COSTA MONTEIRO

DEPARTAMENTO DE DIVULGAÇÃO ESTATÍSTICA

Chefe em exercício: Mário Fernandes Paulo

SECRETARIA DA REVISTA BRASILEIRA DE ESTATÍSTICA

Chefe: Fernando Pereira Cardim