REVISTA BRASILEIRA DE ESTATÍSTICA

Órgão oficial do IBGE
e Sociedade Brasileira de Estatística

Redação:

Av. Franklin Roosevelt, 166 — ZC-39
Rio de Janeiro, GB — Brasil — Tel: 252-3605

Diretor responsável:

Amaro da Costa Monteiro

Secretário:

Ovídio de Andrade Júnior

A Revista não se responsabiliza
pelos conceitos emitidos
em artigos assinados

Preço:

assinatura anual:	Cr$ 10,00
número avulso:	Cr$ 3,00

Vendas:

Av. Franklin Roosevelt, 146-A — loja B
Tel: 242-7142

SUMÁRIO

Hervey Guimarães Cova

Introdução ao Estudo da Teoria da Medida e da Integral de Lebesgue 551

Celso Cardoso da Silva Simões

Estudo Sobre a Fecundidade no Estado de São Paulo — 1940-1950 673

DOCUMENTÁRIO

II Conferência Nacional de Estatística e II Conferência Nacional de Geografia e Cartografia 681

— Dedução de uma Tábua de Vida através de Análise Demográfica-Brasil, 1960/70 — de Richard Irwin e João Lyra Madeira .. 697

— Estatísticas de Nascimentos-Sugestões sobre um novo método de coleta — da Subcomissão da Comissão A da CONPLANE 715

— Classificação da População em Urbana e Rural — da Subcomissão da Comissão A da CONPLANE 723

— Estatísticas Sociais — Situação atual em face do PNEB — da Subcomissão da Comissão A da CONPLANE 726

— Estatísticas Educacionais — Quadro atual e perspectivas futuras — da Subcomissão A da CONPLANE 746

— O Censo e os Indicadores Sociais — de José Arthur Rios 759

— Considerações sobre as Estatísticas Demográficas — do Centro Latino Americano de Pesquisas em Ciências Sociais 766

NOTICIÁRIO

Saudação de Natal — Aos Companheiros da Rede-de-Coleta 772

BIBLIOGRAFIA

Anuário Estatístico do Brasil — 1972 — Sinopse Estatística do Brasil — 1972 — Estatísticas da Educação Nacional — 1960-71 — Anuário Estatístico dos Transportes — Publicações Editadas pelo Instituto Brasileiro de Estatística no trimestre outubro-dezembro de 1972. Atualidades Estatísticas do Rio Grande do Sul — 1972 774

LEGISLAÇÃO

Leis Federais 781

Resoluções do Conselho Diretor 783

Resoluções da CONPLANE 821

Indice 825

Revista Brasileira de Estatística. — v. 1 — n.º 1 — jan./mar. 1940
Rio de Janeiro, Instituto Brasileiro de Estatística, Departamento de Divulgação Estatística, 1940 —

v. 27 cm. Trimestral

1. Estatística — Periódicos. I. Instituto Brasileiro de Estatística, Rio de Janeiro. Departamento de Divulgação Estatística, ed.

CDD 310.5 CDU 05:31(81)

INTRODUÇÃO AO ESTUDO DA TEORIA DA MEDIDA E DA INTEGRAL DE LEBESGUE

HERVEY GUIMARÃES COVA

Prof. da Escola Nacional de Ciências Estatísticas

SUMÁRIO

EXPLICAÇÕES PRELIMINARES

1.ª PARTE — INTRODUÇÃO

A — Rudimentos da Teoria dos Conjuntos

B — Operações sobre Intervalos

2.ª PARTE — TEORIA DA MEDIDA

Cap. 1.º — Medida de Conjuntos Planos

Cap. 2.º — Sistemas de Conjuntos

Cap. 3.º — Noção de função (transformação). Imagens direta e inversa

Cap. 4.º — Medidas em Semi-Anéis. Continuação de uma Medida de um Semi-Anel para o Anel Mínimo sobre ele

Cap. 5.º — Completa aditividade. O Problema Geral da Continuação de Medidas

Cap. 6.º — Continuação — segundo Lebesgue — de uma Medida Definida sobre um Semi-Anel com uma Unidade

3.ª PARTE — FUNÇÕES MENSURÁVEIS

Cap. 7.º — Definição e Propriedades Básicas das Funções Mensuráveis

Cap. 8.º — Seqüências de Funções Mensuráveis. Diferentes Tipos de Convergência

4.ª PARTE — A INTEGRAL DE LEBESGUE

Cap. 9.º — Introdução. A Integral de Lebesgue para Funções Simples

Cap. 10.º — Definição Geral e Propriedades Básicas da Integral de Lebesgue

Cap. 11.º — Passagens ao Limite sob o Sinal de L-integral

Apêndice — Comparação entre a L-integral e a R-integral

BIBLIOGRAFIA

EXPLICAÇÕES PRELIMINARES

Estudos mais avançados, no domínio do Cálculo de Probabilidades, exigem que o leitor esteja familiarizado com os conceitos básicos e as propriedades fundamentais da teoria da medida — introduzida, por volta de 1890, por Cantor, Jordan e Borel, e aperfeiçoada, em seguida, por M. Lebesgue — e do conceito generalizado de integral devido a este último.

A presente monografia surgiu, em 1966, da idéia de colocar, ao alcance de alunos da Escola Nacional de Ciências Estatísticas, os fundamentos dessas importantes e fecundas teorias. Razões diversas impediram-nos de publicá-la, àquela época. Eis que, agora, surge a oportunidade de sua divulgação, através da Revista Brasileira de Estatística.

Basicamente, o texto nela desenvolvido abrange os três primeiros capítulos da obra de A. N. Kolmogorov e S. V. Fomin, intitulada — tradução em língua inglesa — "Measure, Lebesgue Integrals and Hilbert Space" (1961). Todavia, forçoso é dizer, essa obra não se recomenda a principiantes, em virtude do tratamento muito pouco didático que os autores lhe imprimiram e das diversas lacunas que apresenta.

Assim, procuramos, de um lado, complementar a exposição daqueles três primeiros capítulos, introduzindo diversos acréscimos, extraídos de outras obras, destacando-se, entre estas, "Introduccion a la Matematica Superior", de A. Sagastume Berra (1946), e "Funções Contínuas", de A. Monteiro e P. Gomes (1944); além de incluirmos algumas noções preliminares, sobre conjuntos e intervalos, subordinadas ao título INTRODUÇÃO.

De outro lado, tivemos sempre presente o cuidado de tornar mais didática a exposição do assunto, ou melhor, de torná-lo mais accessível aos leitores principiantes, aos quais, principalmente, vai endereçada a monografia. Essa preocupação levou-nos a:

1.º) alterar várias demonstrações, tornando-as mais completas e descendo a maiores detalhes (tais demonstrações estão assinaladas, no texto, mediante um asterisco —*—, colocado logo ao início da mesma);

2.º) elaborar diversas demonstrações de teoremas ou propriedades que, nos textos consultados, figuravam sem demonstração (as demonstrações assim elaboradas poderão ser reconhecidas mediante dois asteriscos —**—, colocados de modo idêntico ao anterior);

3.º) introduzir alguns teoremas e demonstrações que não figuravam nos textos consultados, mas que dariam maior coerência aos aspectos abordados (essas demonstrações estão, do mesmo modo, assinaladas mediante três asteriscos—***—).

Acreditamos, assim, ter dado maior consistência à teoria exposta, pelo não fracionamento da sua seqüência lógica.

Resta-nos desejar, finalmente, que o trabalho ora apresentado possa revelar-se útil aos interessados nessas fascinantes matérias, pois assim estariam compensados o esforço e o tempo a ele dedicados.

Em 20 de junho de 1972
O Autor

1.ª PARTE

INTRODUÇÃO

A — RUDIMENTOS DA TEORIA DOS CONJUNTOS

A.1 — Noções preliminares

A.1.1 — A noção de *conjunto* é admitida, em toda sua generalidade, sem definição.

Para indicar que um objeto, a, é *elemento* do conjunto A, escreve-se:

$$a \in A$$

que se lê: "a é elemento do conjunto A" ou, abreviadamente: "a pertence a A".

De modo análogo, a negativa "b não pertence a A" indica-se por:

$$b \notin A$$

O conjunto A diz-se *vazio* ou *nulo* se não existe nenhum objeto que verifique sua norma de definição. Exemplo: o conjunto dos números inteiros, x, que satisfazem à condição $0 < x < 1$, é vazio. Representaremos o conjunto vazio pelo símbolo ϕ (zero cortado).

Quando todos os elementos do conjunto A também são elementos do conjunto B, diz-se que A está *contido* em B (ou que B *contém* A), escrevendo-se:

$$A \subseteq B \qquad (\text{ou, } B \supseteq A)$$

Quando A está contido em B, diz-se, também, que A é um subconjunto (ou uma parte) de B.

Se $A \subseteq B$, porém, existe algum elemento, b, de B, tal que $b \notin A$, diz-se que A é uma parte própria (ou subconjunto próprio) de B. Para exprimir esse fato, modificamos, ligeiramente, a notação anterior, escrevendo:

$$A \subset B \qquad (\text{ou } B \supset A)$$

Admite-se que o conjunto vazio, ϕ, está contido em qualquer conjunto.

Dois conjuntos A e B dizem-se *iguais*, quando verificam, simultaneamente, as inclusões: $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$. Indicaremos a igualdade de dois conjuntos pelo símbolo usual de igualdade: $A = B$.

A.2 — **Operações com conjuntos.**

A.2.1 — Definição 1 — Dá-se o nome de *união* (ou *reunião*, ou *soma*), de dois conjuntos A e B, ao conjunto, S, dos elementos que pertencem a um, pelo menos, dos conjuntos A e B.

Para indicar que S é a união dos conjuntos A e B, escrevemos:

$$S = A \cup B$$

A operação de união goza das seguintes propriedades principais:

S.1 — uniforme: se $A = A'$ e $B = B'$, então: $A \cup B = A' \cup B'$

S.2 — associativa: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

S.3 — comutativa: $A \cup B = B \cup A$

S.4 — existência de um zero: $A \cup \phi = A$

As demonstrações dessas propriedades são imediatas. Além disso, a operação de união estende-se, naturalmente, a vários conjuntos, ou a uma infinidade de conjuntos:

Seja $\mathcal{A} = \{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ um conjunto cujos elementos são, por sua vez, conjuntos abstratos (diz-se, nesse caso, que $\mathcal{A}$ é uma família de conconjuntos). Admitamos, ainda, que o conjunto Γ, dos índices γ, seja qualquer. Dá-se o nome de união dos conjuntos A_γ da família $\mathcal{A}$, ao conjunto S, cujos elementos pertencem a um, pelo menos, dos conjuntos da família $\mathcal{A}$; escrevendo-se:

$$S = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$$

A.2.2 — Definição 2 — Dá-se o nome de *interseção* (ou *produto*) de dois conjuntos A e B, ao conjunto, P, cujos elementos pertencem, simultaneamente, aos conjuntos A e B.

Para indicar que P é a interseção dos conjuntos A e B, escrevemos:

$$P = A \cap B$$

A operação de interseção goza das seguintes propriedades principais:

P.1 — uniforme: se $A = A'$ e $B = B'$, então: $A \cap B = A' \cap B'$

P.2 — associativa: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

P.3 — comutativa: $A \cap B = B \cap A$

P.4 — distributiva (em relação à união):

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

P.5 — existência de um elemento absorvente: $A \cap \phi = \phi$

As demonstrações dessas propriedades também são imediatas. Além disso, tal como no caso da união, a interseção de conjuntos se estende a vários conjuntos ou a uma infinidade deles. Consideremos ainda, a família $\mathcal{A}$ de conjuntos A_γ, anteriormente definida. Dá-se o nome de interseção dos conjuntos A_γ da família $\mathcal{A}$, ao conjunto P, cujos elementos pertencem, simultaneamente, a todos os conjuntos da família $\mathcal{A}$; escrevendo-se:

$$P = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$$

A.2.3 — Verificam-se, ainda, outras propriedades. Para a união:

S.5 — distributiva (em relação à interseção):

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

S.6 — $A \cup A = A$

S.7 — $A \subseteq (A \cup B)$; $B \subseteq (A \cup B)$

Para a interseção:

P.6 — $A \cap A = A$

P.7 — $A \supseteq (A \cap B)$; $B \supseteq (A \cap B)$

Quando todos os conjuntos A, B, C, etc., com os quais estamos operando, estão contidos em um conjunto mais amplo, E, diz-se que este último é o conjunto *fundamental*. Resultam, então, as propriedades:

S.8 — existência de um elemento absorvente para a união:

$$A \cup E = E$$

P.8 — existência de uma unidade para a interseção:

$$A \cap E = A$$

A.2.4 — Definição 3 — Clama-se *diferença* dos conjuntos A e B, ao conjunto, R, cujos elementos pertencem ao conjunto A mas não pertencem ao conjunto B.

Para indicar que o conjunto R é a diferença dos conjuntos A e B, escrevemos:

$$R = A - B$$

A operação de diferença (também chamada *subtração*, sendo A o *minuendo*, B, o *subtraendo* e R o *resto*) goza das propriedades:

R.1 — $A - A = \phi$

R.2 — $A - \phi = A$

R.3 — $(A - B) \cap C) = (A \cap C) - (B \cap C)$

R.4 — $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$

R.5 — $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$

R.6 — $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$

Essas propriedades são facilmente demonstráveis.

A.2.5 — Definição 4 — Chama-se *diferença simétrica* entre os conjuntos A e B, e indica-se com o símbolo $\triangle$ colocado entre ambos, ao conjunto $(A - B) \cup (B - A)$. Portanto:

$$A \triangle B = (A - B) \cup - (B - A)$$

É evidente que se tem: $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$

A.2.6 — Definição 5 — Dada uma sucessão (finita ou infinita) de conjuntos A_1, A_2, A_3, ..., chama-se *produto cartesiano* desses conjuntos — na ordem considerada — ao conjunto de todos os sistemas ordenados $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ em que $a_i \in A_i$, para todo valor de i.

Representaremos esse produto por $II^{*}A_n$, ou, mais sugestivamente, por:

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots$$

É evidente que se um dos conjuntos A_i for vazio, o produto cartesiano deles será, também, um conjunto vazio.

Consideremos um sistema de eixos ortogonais, definindo um plano cartesiano. Se I_x representa um conjunto qualquer do eixo dos x; e I_y um conjunto qualquer do eixo dos y; o produto cartesiano $I_x \times I_y$ representará, de acordo com a definição anterior, o conjunto de todos os pontos (x, y), do plano, cuja abcissa, x, pertence ao conjunto I_x, e cuja ordenada, y, pertence ao conjunto I_y.

Entre as propriedades do produto cartesiano de conjuntos, vamos destacar as seguintes, que usaremos adiante:

Sejam $I_x, I_{x_1}, I_{x_2}, \ldots, I_{x_n}$ conjuntos sobre o eixo dos x, e $I_y, I_{y_1}, I_{y_2}, \ldots, I_{y_n}$ conjuntos do eixo dos y. Tem-se:

$\Pi.1$ — distributividade à direita:

$$I_x \times (\bigcup_j I_{y_j}) = \bigcup_j I_x \times I_{y_j}$$

$\Pi.2$ — distributividade à esquerda:

$$(\bigcup_i I_{x_i}) \times I_y = \bigcup_i I_{x_i} \times I_y$$

$\Pi.3$ — produto por uma diferença:

$$(I_{x_i} - I_{x_j}) \times I_y = I_{x_i} \times I_y - I_{x_j} \times I_y$$

$$I_x \times (I_{y_i} - I_{y_j}) = I_x \times I_{y_i} - I_x \times I_{y_j}$$

A.2.7 — As seguintes relações entre conjuntos, em algumas das quais E representa um conjunto fundamental, serão utilizadas posteriormente. É aconselhável a demonstração de cada uma delas, a título de exercício. Para provar que $A = B$, devemos provar que $A \subseteq B$ e que $B \subseteq A$; ou seja, basta provar que a relação $x \in A$ implica a relação $x \in B$, e vice-versa.

$$A \cup B = E - [(E - A) \cap (E - B)] \tag{1}$$

$$A - B = A \cap (E - B). \tag{2}$$

$$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B) \tag{3}$$

$$A \subseteq B \cup (A \triangle B) \tag{4}$$

$$(E - A) \triangle (E - B) = A \triangle B \tag{5}$$

$$(A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2) \tag{6}$$

$$B_1 \cap B_2 \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2), \text{ se } A_1 \cap A_2 = \phi \tag{7}$$

A.3 — Equivalência entre conjuntos; conjuntos numeráveis.

A.3.1 — Supomos conhecidas as noções de *correspondência unívoca* e de *correspondência biunívoca* entre elementos de dois conjuntos.

Diz-se que um conjunto, A, é *finito* quando ele é vazio, ou quando pode ser posto em correspondência biunívoca com o conjunto $1, 2, 3, \ldots, N\}$, dos N primeiros números naturais. Diz-se, ainda, que

N é o número de elementos do conjunto A. Se um conjunto não é finito, diz-se que ele é *infinito*.

Se um conjunto infinito pode ser posto em correspondência biunívoca com o conjunto $\{1, 2, 3, \ldots\}$, cujos elementos são todos os números naturais, diz-se que esse conjunto é *numerável*. Nessas condições, os elementos de um conjunto numerável, A, poderão ser representados por $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ Põe-se:

$$A = \{a_n\}; \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Dois conjuntos são *equivalentes* quando é possível estabelecer, entre os seus elementos, uma correspondência biunívoca.

Dois conjuntos finitos, com N elementos, são equivalentes; dois conjuntos numeráveis também o são.

A.3.2 — Demonstram-se os seguintes teoremas:

1 — Todo subconjunto infinito de um conjunto numerável é numerável.

2 — A união de um sistema, finito ou numerável, de conjuntos numeráveis é um conjunto numerável.

3 — O conjunto dos números racionais é numerável.

4 — O conjunto dos números reais é não numerável.

A.4 — **Espaços métricos.**

A.4.1 — Definição 6 — Diz-se que um conjunto não vazio, E, é um conjunto *distanciado* ou um *espaço métrico*, quando existe uma função real, $D\ (a, b)$, definida para cada par de elementos, a e b, de E — denominada *distância* entre a e b — satisfazendo às seguintes condições (postulados da distância):

D.1 — $D\ (a, a) = 0;\ D\ (a, b) \neq 0$, se $a \neq b$

D.2 — $D\ (a, b) = D\ (b, a)$

D.3 — quaisquer que sejam os elementos a, b e c de E:

$$D\ (a, c) \leqslant D\ (a, b) + D\ (b, c)$$

Os elementos de E passam a denominar-se *pontos*.

O conjunto dos números reais é um espaço métrico, se definirmos a distância entre dois números a e b como sendo: $D\ (a, b) = |a - b|$. O conjunto das n — uplas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de números reais forma um espaço cartesiano n-dimensional, que é um espaço métrico, no qual

a distância entre dois pontos quaisquer, $A = (a_i)$ e $B = (b_i)$, é dada por:

$$D(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2}$$

A.4.2 — Consideremos um espaço métrico, E, e um número real $\delta < 0$. Seja um ponto $a \in E$. Chama-se *entorno fechado* de raio δ, do ponto a, ao subconjunto $E_\delta\ a)$ dos pontos x, de E, que satisfazem à condição:

$$D\ (a, x) \leqslant \delta$$

Quando substituimos a condição acima pela condição

$$D\ (a, x) < \delta$$

o subconjunto $E_\delta\ (a)$ recebe o nome de *entorno aberto* de raio δ, do ponto a.

Se, de qualquer um desses entornos, subtrairmos o ponto a, obteremos uma *vizinhança*, $V_\delta\ (a)$, de raio δ, do ponto a, que poderá ser fechada ou aberta.

A.4.3 — Seja C um subconjunto de um espaço métrico E. Chama-se *ponto de acumulação* de C a todo ponto a, de E, pertencente ou não a C, tal que: se $V\ (a)$ é uma vizinhança arbitrária do ponto a, então

$$V(a) \cap C \neq \phi$$

Em outras palavras: um ponto a é ponto de acumulação de C quando qualquer entorno de a contém pelo menos um ponto de C, distinto de a.

É fácil provar que toda vizinhança (ou todo entorno) de um ponto de acumulação de C contém uma infinidade de pontos de C.

Chama-se *conjunto derivado* ou, simplesmente, *derivado* de um conjunto C (contido no espaço métrico E) ao conjunto dos pontos de acumulação de C — no espaço E. Representa-se o derivado de C por C'.

Um conjunto C — no espaço E — diz-se *fechado*, quando ele contém o seu derivado em E: $C \supseteq C'$. Ou, de outro modo: C é um conjunto fechado quando todo ponto de acumulação de C pertence a C.

Seja A um conjunto contido em um espaço métrico E. Diz-se que um ponto $a \in E$ é *ponto interior* do conjunto A quando existe um entorno $E\ (a)$ inteiramente contido em A.

Um conjunto A, contido em E, diz-se *aberto*, quando todos os seus pontos são pontos interiores. Em outras palavras: A é aberto se, dado qualquer um de seus pontos, a, existe um entorno $E\ (a)$ inteiramente contido em A.

Sobre um eixo real, que, conforme já vimos, é um espaço métrico, todo intervalo fechado, $a \leqslant x \leqslant b$, é um conjunto *fechado;* e todo intervalo aberto, $a < x < b$, é um conjunto *aberto.* Isto pode ser verificado facilmente. Do mesmo modo, quando consideramos intervalos generalizados, em um espaço cartesiano n-dimensional (retângulos, em R_2; paralelepípedos, em R_3; etc. — ver o capítulo seguinte), todo intervalo fechado é um conjunto *fechado,* e todo intervalo aberto e um conjunto *aberto.*

A.4.4 — Observações finais: Os conceitos de *entorno, vizinhança, ponto de acumulação,* conjunto *fechado,* conjunto *aberto,* etc. — conforme apresentamos acima — resultaram da noção de *distância* (em espaços métricos); todavia, esses mesmos conceitos poderiam ser introduzidos, independentemente da noção de distância, em espaços mais gerais que os espaços métricos, denominados *espaços accessíveis.* Não caberiam, neste breve intróito, maiores considerações sobre o assunto.

B — OPERAÇÕES COM INTERVALOS

B.1 — Intervalos unidimensionais.

B.1.1 — Uma reta orientada, à qual associamos uma origem e uma unidade de medida, chama-se *eixo.*

É possível demonstrar-se que, entre o conjunto dos pontos de um eixo e o conjunto dos números reais, existe uma correspondência biunívoca, isto é, a cada ponto do eixo corresponde um número real (sua abcissa) e vice-versa. Esses dois conjuntos são, pois, equivalentes. Nessas condições, os conceitos de *ponto* e de *número* se identificam; e podemos usar, indiferentemente, a palavra *ponto,* para indicar um *número,* ou a palavra *número* para indicar um *ponto.*

B.1.2 — Definição 1 — Denominamos *intervalo linear,* sobre um eixo, ou simplesmente *intervalo,* ao conjunto, {x}, dos pontos do eixo, que satisfazem a qualquer uma das seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned} &a \leqslant x \leqslant b \\ &a < x \leqslant b \\ &a \leqslant x < b \\ &a < x < b \end{aligned} \qquad (1)$$

nas quais a e b, sendo $a \leqslant b$, são dois pontos (números) reais, quaisquer, sobre o eixo.

Observações:

1.ª — A primeira desigualdade, acima, representa um *intervalo fechado;* as duas seguintes, representam *intervalos semi-abertos* (à

esquerda e à direita, respectivamente); a última, representa um *intervalo aberto*.

2.ª — Se $a < b$, o intervalo $a \leqslant x \leqslant b$ confunde-se com o segmento de reta de origem a e extremidade b; os dois intervalos seguintes representam esse segmento, excluído um dos extremos; finalmente, o intervalo aberto $a < x < b$ representa o dito segmento, excluídos os dois extremos.

3.ª — Se $a = b$, o primeiro intervalo citado se reduz a um único ponto (a, ou b); os demais ficam reduzidos ao conjunto vazio. Em qualquer hipótese, diz-se que tais intervalos são *degenerados*.

4.ª — Em se tratando de pontos, o conjunto vazio pode, portanto, ser considerado um intervalo degenerado.

5.ª — Se a e b são números finitos, os intervalos anteriormente citados são, todos, finitos. Em caso contrário, teremos intervalos infinitos, tais como:

$$a \leqslant x < \infty, \quad -\infty < x < b, \quad \text{ou} \quad -\infty < x < +\infty,$$

este último representando o próprio eixo real.

6.ª — Para exprimir os intervalos definidos pelas desigualdades (1), adotaremos, também, as notações $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$ e (a, b), respectivamente.

Usaremos, em geral, a notação $\{x : C\}$ para indicar o conjunto dos pontos x que satisfazem à condição C. Com essa notação, o intervalo $[a, b]$, por exemplo, poderá ser representado por $\{x : a \leqslant x \leqslant b\}$.

B.1.3 — Na teoria da medida, muitos conjuntos são construídos a partir dos intervalos, por meio de operações de reunião, interseção, diferença, etc., aplicadas um número finito ou infinito de vezes.

Em muitos casos, o conjunto resultante é um novo intervalo; noutros, não. Exemplos:

1.º — Fazendo: $I_1 = \{x : a < x < b\}$ e $I_2 = \{x : b \leqslant x < c\}$, onde $a < b < c$ resulta:

$$I_1 \cup I_2 = \{x : a < x < c\}$$

que é, evidentemente, um intervalo.

2.º — Fazendo, porém, no exemplo anterior, $I_2 = \{x : b < x < c\}$, veremos que $I_1 \cup I_2$ não é mais um intervalo, pois que, agora, x pode tomar todos os valores intermediários entre a e c, com exclusão do próprio b:

$$I_1 \cup I_2 \ \{x : a < x < c \ e \ x \neq b\}$$

Necessitamos, pois, de um critério simples, que nos permita decidir se um dado conjunto é, ou não, um intervalo; e esse critério nos é fornecido pelo...

*** B.1.4 — Teorema n.º 1 (Hermava) — A condição necessária e suficiente para que um conjunto linear, C, seja um intervalo, é que: para qualquer par de pontos, x' e x'', pertencentes a C, sendo $x' \leqslant x''$, a relação $x' \leqslant x \leqslant x''$ implique a relação $x \in C$.

Demonstração: 1.º — A condição é necessária.

Seja C um intervalo, que, para fixar idéias, admitiremos fechado:

$$C = \{x : a \leqslant x \leqslant b\}$$

Tomemos, agora, dois pontos quaisquer de C, x' e x'', sendo $x' \leqslant x''$, e um terceiro ponto arbitrário, x, tal que $x' \leqslant x \leqslant x''$. Esta última relação, combinada com as relações a $\leqslant x' \leqslant b$ e $a \leqslant x'' \leqslant b$ — decorrentes da definição de intervalo fechado — permitem escrever:

$$a \leqslant x \leqslant b.$$

Portanto, $x \in E$.

2.º — A condição é suficiente.

Seja C um conjunto linear (se C tiver um único ponto ou for vazio, a demonstração será óbvia) tal que: dados dois quaisquer de seus pontos, x' e x'', a relação $x' \leqslant x \leqslant x''$ implique a relação $x \in C$. Vamos provar que C é um intervalo.

Consideremos o ínfimo e o supremo do conjunto C:

$$a = inf\, C \text{ e } b = sup\, C$$

Então, para qualquer $x' \in C$, devemos ter:

$$a < x' \quad \text{ou} \quad a \leqslant x',$$

conforme seja $a \notin C$ ou $a \in C$. Analogamente, se $x'' \in C$, resulta:

$$x'' < b \quad \text{ou} \quad x'' \leqslant b,$$

conforme se tenha $b \notin C$ ou $b \in C$.

Para fixar idéias, admitamos que $a \in C$ e que $b \notin C$. Facilmente se vê, agora, que o conjunto C é igual ao intervalo semi-aberto à direita, de extremos a e b. De fato, seja $I = \{x : a \leqslant x < b\}$.

1) $C \subseteq I$ — porque, se $x \in C$, devemos ter, simultaneamente as relações

$$a \leqslant x \quad \text{e} \quad x < b,$$

que implicam: $x \in I$.

2) $I \subseteq C$ — porque, se $x \in I$, isto é, se $a \leqslant x < b$, podemos fazer duas hipóteses: ou $a = x$ e, nesse caso, nada há que demonstrar; ou $a < x < b$. Neste último caso, pelas definições de ínfimo e de supremo existem x' e x'', pertencentes a C, tais que:

$$a < x' < x \quad \text{e} \quad \text{e} \quad x < x'' < b,$$

ou seja: $$x' < x < x''$$

Entretanto, como x' e x'' pertencem ao conjunto C, a hipótese feita sobre este conjunto implica: $x \in C$.

Assim, as duas inclusões que acabamos de provar mostram que $C = I$; e o teorema está completamente demonstrado.

*** B.1.5 — Teorema n.º 2 — A interseção de dois intervalos é um intervalo.

Demonstração: Sejam os intervalos I_1 e I_2 e façamos $C = I_1 \cap I_2$.

Excluídos os casos em que C é vazio, ou possui um único ponto — para os quais o teorema não precisa ser demonstrado — admitamos que C tenha pelo menos dois pontos. Sejam, portanto, x' e x'' ($x' \leqslant x''$) dois pontos quaisquer de C. Então, x' e x'' pertencem a I_1 e a I_2. Consideremos, agora, um terceiro ponto qualquer x, tal que $x' \leqslant x \leqslant x''$. Ora, pelo Teorema n.º 1, x deve pertencer, simultaneamente, a I_1 e a I_2 isto é, $x \in C$. Em outras palavras: dados dois pontos quaisquer, x' e x'' ($x' \leqslant x''$), de C, a condição $x' \leqslant x \leqslant x''$ implica a condição $x \in C$. Logo, ainda pelo Teorema n.º 1, C é um intervalo.

Observação: O teorema anterior pode ser generalizado para um número qualquer de intervalos, inclusive um número infinito, numerável ou não. Damos, a seguir, o enunciado do novo teorema, cuja demonstração é idêntica à anterior:

*** Teorema n.º 2' — A interseção de um número finito ou infinito (numerável ou não) de intervalos, é, ainda, um intervalo.

Demonstração: Seja uma família de intervalos $\{I_\alpha\}$, na qual cada intervalo é caracterizado por um índice; supondo-se, ainda, que o conjunto A, dos índices α, é qualquer. Indiquemos por C a interseção de todos os intervalos da família:

$$C = \bigcap_{\alpha \in A} I_\alpha$$

Se x' e $x'' \in C$, resulta que x' e $x'' \in I_\alpha$, qualquer que seja o índice pertence a A. Se considerarmos, agora, um terceiro ponto x tal que $x' \leqslant x \leqslant x''$, o Teorema n.º 1 exige que $x \in I_\alpha$ (para todo $\alpha \in A$), ou seja, $x \in C$. Logo, ainda pelo citado teorema, C é um intervalo.

*** B.1.6 — Teorema n.º 3 — A diferença de dois intervalos é um intervalo; ou é a união de dois intervalos disjuntos.

Demonstração: Sejam os intervalos I_1 e I_2 e ponhamos

$$C = I_1 - I_2$$

Vamos excluir os casos em que C é vazio ou se reduz a um ponto. Além disso, convém lembrar que a condição $y \in C$ implica as condições $y \in I_1$, e $y \notin I_2$, e vice-versa.

Isto posto, se para qualquer par x', $x'' \in C$ — sendo $x' \leqslant x''$ — e para qualquer outro ponto x tal que $x' \leqslant x \leqslant x''$, resultar, também, a relação $x \notin I_2$, então, como $x \in I_1$ pois x' e x'' também pertencem a I_1) teremos, sempre, a condição $x \in C$. Assim, pelo Teorema n.º 1, C será um intervalo.

Admitamos, agora, que, para algum par de pontos x' e x'' nas condições anteriores, seja possível encontrar algum outro ponto x — sendo $x' < x < x''$ — tal que $x \in I_2$. Então, é fácil provar que $I_2 \subset I_1$. De fato, se x_1 for um outro ponto qualquer de I_2, o Teorema n.º 1 impede que se tenha $x_1 \leqslant x'$ ou $x'' \leqslant x_1$. Nessas condições, os pontos de I_2, pertencem, todos, ao intervalo aberto (x', x'').

Sejam, pois a e b $(a < b)$ os extremos de I_1 e c e d $(c \leqslant d)$ os extremos de I_2. Podemos ver, facilmente, que C será a união dos dois intervalos disjuntos (fechados, abertos ou semi-fechados) seguintes:

$$I_3 : \text{de extremos } a \text{ e } c \quad (a \leqslant c);$$

$$I_4 : \text{de extremos } d \text{ e } b \quad (d < b).$$

Realmente, tais intervalos são não vazios, posto que pelo menos x' pertence a I_3 e pelo menos x'' pertence a I_4. Além disso, qualquer ponto de I_3, devendo pertencer a I_1, e não pertencendo a I_2, pertencerá a C; o mesmo podemos dizer de qualquer ponto de I_4; assim, a união desses dois intervalos está contida em C. Analogamente, qualquer ponto de C, devendo pertencer a I_1 e não pertencer a I_2, pertencerá, necessariamente, a I_3 ou a I_4; logo, à sua união.

Observações: 1) Na demonstração anterior, estamos supondo que os intervalos I_3 e I_4 são tais que, se $c \in I_2$, então $C \notin I_3$; e se $d \in I_2$, então $d \notin I_4$.

2) Podemos, sempre, dizer que a diferença $I_2 - I_1$ é igual à união $I_3 \cup I_4$ de dois intervalos disjuntos; pois, o caso em que a diferença é um único intervalo obtém-se dessa união, supondo que I_3 (ou I_4) é o conjunto vazio.

B.2 — **Intervalos bidimensionais.**

B.2.1 — Dado um plano cartesiano, se I_x representa um intervalo do eixo dos x e I_y um intervalo do eixo dos y — chama-se *retângulo* de lados I_x e I_y ao conjunto dos pontos (x, y), do plano, tais que: $x \in I_x$ e $y \in I_y$.

De acordo com essa definição, o retângulo, R, será o produto cartesiano dos intervalos I_x e I_y. Podemos escrever:

$$R = I_x \times I_y$$

Convém lembrar, sempre, que a relação $(x, y) \in R$ implica ambas as relações $x \in I_x$ e $y \in I_y$; e, reciprocamente, estas duas últimas, em conjunto, implicam a primeira.

Se os dois intervalos que definem o retângulo forem fechados, a sua imagem geométrica será, efetivamente, um retângulo (incluídos os quatro lados). Entretanto, um retângulo definido por intervalos abertos ou semi-abertos pode ter, para imagem geométrica, um retângulo ao qual *falte* um ou mais lados, ou, até, todos os lados.

Se um, pelo menos, dos intervalos que o definem, for degenerado, o mesmo se dirá do retângulo, que poderá ficar reduzido, geometricamente, a um segmento, a um ponto, ou ao conjunto vazio.

*** B.2.2 — Teorema n.º 4 — A interseção de dois retângulos é um retângulo.

Demonstração: Sejam os retângulos:

$$R_1 = I_{x_1} \times I_{y_1} \quad \text{e} \quad R_2 = I_{x_2} \times I_{y_2},$$

e consideremos os intervalos

$$I_x = I_{x_1} \cap I_{x_2} \quad \text{e} \quad I_y = I_{y_1} \cap I_{y_2}$$

que definem o retângulo: $R = I_x \times I_y$. Vamos provar que $R = R_1 \cap R_2$.

De fato, se $(x, y) \in R$, isto implica $x \in I_x$ e $y \in I_y$. Conseqüentemente, devemos ter: $x \in I_{x_1}$ e $x \in I_{y_2}$; e, do mesmo modo: $y \in I_{y_1}$ e $y \in I_{y_2}$. Combinando essas duas relações duas a duas, concluímos:

$$(x\,,\, y) \in R_1 \quad \text{e} \quad (x\,,\, y) \in R_2$$

ou seja: $(x\,,\, y) \in R_1 \cap R_2$. Portanto, $R \subseteq R_1 \cap R_2$.

Reciprocamente, se $(x\,,\, y) \in R_1 \cap R_2$, resultam as relações

$$(x\,,\, y) \in R_1 \quad \text{e} \quad (x\,,\, y) \in R_2,$$

das quais deduzimos: $x \in I_{x_1}$, $y \in I_{y_1}$, $x \in I_{x_2}$ e $y \in I_{y_2}$,

ou seja: $x \in I_{x_1} \cap I_{x_2}$ e $y \in I_{y_1} \cap I_{y_2}$,

de onde concluímos: $(x\,,\, y) \in R$. Portanto, $R_1 \cap R_2 \subseteq R$.

Os dois resultados obtidos permitem-nos concluir: $R = R_1 \cap R_2$.

Observação: Tal como ocorre no caso unidimensional, o teorema anterior pode ser generalizado. Segue o enunciado do novo teorema e sua demonstração:

*** Teorema n.º 4′ — A interseção de um número finito ou infinito (numerável, ou não) de retângulos é, ainda, um retângulo.

Demonstração: Seja uma família $\mathcal{Q}$ de retângulos $\{R_{xy}\}$, onde cada retângulo é dado por:

$$R_{xy} = I_x \times I_y$$

Ficam definidas, assim, duas famílias de intervalos:

$$\mathcal{Q}_x = \{I_x\} \quad \text{e} \quad \mathcal{Q}_y = \{I_y\}$$

Consideremos o conjunto $C = \bigcap_{\mathcal{Q}} R_{xy}$ e ponhamos:

$$I_x^* = \bigcap_{\mathcal{Q}_x} I_x \quad , \quad I_y^* = \bigcap_{\mathcal{Q}_y} I_y \quad \text{e} \quad R^* = I_x^* \times I_y^*$$

Vamos provar que $C = R^*$.

De fato, se $(x, y) \in C$, resulta $(x, y) \in R_{xy}$, qualquer que seja R_{xy}, pertencente a $\mathcal{Q}$. Então, $x \in I_x$ para todo I_x pertencente a $\mathcal{Q}_x$ e $y \in I_y$ para todo I_y pertencente a $\mathcal{Q}_y$. Conseqüentemente, $x \in I_x{}^*$ e $y \in I_y{}^*$, isto é, $(x, y) \in R^*$. Assim: $C \subseteq R^*$.

Do mesmo modo, se $(x, y) \in R^*$ tem-se: $x \in I_x{}^*$ e $y \in I_y{}^*$. Mas, isto implica $x \in I_x$ para todo I_x pertencente a $\mathcal{Q}_x$ e $y \in I_y$ para todo I_y pertencente a $\mathcal{Q}_y$. Em outras palavras, $(x, y) \in R_{xy}$ para todo R_{xy} pertencente a $\mathcal{Q}$, isto é, $(x, y) \in C$. Logo: $R^* \subseteq C$.

As duas inclusões que acabamos de demonstrar acarretam: $C = R^*$.

*** B.2.3 — Teorema n.º 5 — A diferença de dois retângulos é um retângulo ou é igual à união de um número finito de retângulos disjuntos.

Demonstração: Sejam os retângulos

$$R_1 = I_{x_1} \times I_{y_1} \qquad \text{e} \qquad R_2 = I_{x_2} \times I_{y_2} ,$$

e façamos $C = R_1 - R_2$. Consideremos, ainda, os conjuntos:

$$C' = (I_{x_1} - I_{x_2}) \times I_{y_1}$$

$$C'' = (I_{x_1} \cap I_{x_2}) \times (I_{y_1} - I_{y_2})$$

Vamos provar que $C = C' \cup C''$. De fato, se $(x, y) \in C$ resultam as relações: $(x, y) \in R_1$ e $(x, y) \notin R_2$. Da segunda decorre uma, e somente uma, das seguintes relações, mutuamente exclusivas:

a) $x\, I \in_{x_2}$ e $y \notin I_{y_2}$

b) $x \notin I_{x_2}$ e $y \in I_{y_2}$

c) $x \notin I_{x_2}$ e $y \notin I_{y_2}$

Da primeira relação anteriormente citada, decorre a situação única:

d) $x \in I_{x_1}$ e $y \in I_{y_1}$

Combinando a) e d), podemos escrever:

$$x \in I_{x_1} \cap I_{x_2} \quad \text{e} \quad y \in I_{y_1} - I_{y_2},$$

o que implica: $(x, y) \in C''$.

Combinando b) ou c) com d), teremos sempre:

$$x \in I_{x_1} - I_{x_2} \quad \text{e} \quad x \in I_{y_1},$$

de onde tiramos: $(x, y) \in C'$.

Portanto, em qualquer situação, tem-se que $(x, y) \in C' \cup C''$, de onde resulta: $C \subseteq C' \cup C''$.

Para demonstrar a inclusão em sentido contrário, basta observar que, se $(x, y) \in C' \cup C''$, podemos fazer duas hipóteses:

1.ª) Ax, y) C'

Isto significa que $x \in I_{x_1} - I_{x_2}$ e $y \in I_{y_1}$; ou ainda, desdobrando a primeira:

$$x \in I_{x_1};\ x \notin I_{x_2} \quad \text{e} \quad y \in I_{y_1}$$

Destas três últimas relações, a primeira e a terceira dão: $(x, y) \in R_1$; ao passo que a segunda implica: $(x, y) \notin R_2$. Por conseguinte, $(x, y) \in C$.

2.ª) $(x, y) \notin C$

Tendo em vista que o ponto (x, y) pertence à união de C' e C'', essa segunda hipótese acarreta: $(x, y) \in C''$, o que significa:

$$x \in I_{x_1} \cap I_{x_2} \quad \text{e} \quad y \in I_{y_1} - I_{y_2}$$

ou ainda, desdobrando as duas relações:

$$x \in I_{x_1};\ x \in I_{x_2};\ y \in I_{y_1} \quad \text{e} \quad y \notin I_{y_2}$$

Facilmente se vê, então, que $(x, y) \in R_1$ e $(x, y) \in R_2$ ou seja:
$(x, y) \in C$.

Assim, em qualquer das duas hipóteses, vemos que $C' \cup C'' \subseteq C$.

As duas inclusões, que acabamos de demonstrar, acarretam:

$$R_1 - R_2 = C = C' \cup C''$$

Resta mostrar, agora, que C é igual à união de um número finito de retângulos disjuntos. Ora, sabemos que a diferença de dois intervalos é igual à união de dois intervalos disjuntos (um deles, ou ambos, podendo reduzir-se ao conjunto vazio). Por sua vez, a interseção de dois intervalos é, ainda, um intervalo. Podemos, então, escrever:

$$I_{x_1} - I_{x_2} = I'_x \cup I''_x$$

$$I_{x_1} \cap I_{x_2} = I'''_x$$

$$I_{y_1} - I_{y_2} = I'_y \cup I''_y$$

sendo fácil observar, além disso, que os intervalos disjuntos I'_x e I''_x não possuem ponto em comum com I'''_x. Nessas condições, tendo em vista a propriedade distributiva do produto cartesiano:

$$C' = (I'_x \cup I''_x) \times I_{y_1} = (I'_x \times I_{y_1}) \cup (I''_x \times I_{y_1}) = R' \cup R''$$

$$C'' = I'''_x \times (I'_y \cup I''_y) = (I'''_x \times I'_y) \cup (I'''_x \times I''_y) = R''' \cup R'^{v}$$

Portanto, $R_1 - R_2 = R' \cup R'' \cup R''' \cup R'^{v}$, onde os retângulos do segundo membro são, dois a dois, disjuntos. O teorema fica, pois, inteiramente demonstrado.

B.2.4 — Observação final: O conceito de intervalo (fechado, aberto ou semi-aberto) estende-se, naturalmente, aos espaços com um número finito, qualquer, de dimensões; e os teoremas anteriores se generalizam, sem maiores complicações, para intervalos tridimensionais (denominados paralelepípedos) ou intervalos multidimensionais (denominados, genericamente, intervalos).

2.ª PARTE

TEORIA DA MEDIDA

CAPÍTULO 1.º — MEDIDA DE CONJUNTOS PLANOS

1.1 — Seguindo a mesma orientação do livro de A. KOLMOGOROV e S. FOMIN (ver bibliografia), vamos desenvolver, inicialmente, a teoria da medida para conjuntos planos — partindo dos conceitos de medida (comprimento) de um intervalo linear e de medida (área) de um retângulo.

Definição 1 — A medida ordinária de um conjunto vazio — pensado como um intervalo ou como um retângulo — é igual a zero.

Definição 2 — A medida ordinária de um intervalo linear (não vazio), I — fechado, aberto ou semi-aberto —, de extremos a e b $(a \leqslant b)$, é o número real não negativo: $m'(I) = b - a$

Definição 3 — A medida ordinária de um retângulo (não vazio) é o produto das medidas ordinárias dos intervalos que o definem.

Assim, se $R = I_x \times I_y$, sendo $m'(I_x) = b - a$ e $m'(I_y) = c - d$, vem:

$$m'(R) = (b - a)\ (c - d)$$

É evidente que um retângulo degenerado tem medida nula.

** 1.2 — Admitamos, agora, que um intervalo, I, possa ser decomposto na soma (união) de um número finito, n, de intervalos, I_j, dois a dois disjuntos. Para fixar idéias, consideremos a seqüência $a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots a_{n-1} \leqslant a_n$. Fazendo, por exemplo:

$$I = \{x : a_o < x \leqslant a_n\}$$

$$I_j = \{x : a_{j-1} < x \leqslant a_j\} \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

é evidente que se tem:

$$I = \bigcup_{j=1}^{n} I_j \qquad \text{e} \qquad I_j \cap I_k = \phi\ , \text{se}\ j \neq k$$

Tendo em vista a identidade:

$$(a_n - a_o) = (a_1 - a_o) + (a_2 - a_1) + \ldots + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_n - a_{n-1})$$

podemos escrever:

$$m'(I) = \sum_{j=1}^{n} m'(I_j)$$

Analogamente, seja R um retângulo definido por: $R = I_x \times I_y$. Admitamos, também, a possibilidade de sua decomposição na soma (união) de um número finito de retângulos, dois a dois disjuntos. Façamos, por exemplo:

$$R = \bigcup_{i,j} R_{ij} \qquad i = 1, 2, \ldots, n\ ;\ j = 1, 2, \ldots, m$$

onde $$R_{ij} = I_{x_i} \times I_{y_j}$$

Se os retângulos R_{ij} forem, dois a dois, disjuntos, o mesmo ocorrerá com os intervalos I_{xi}, sobre o eixo dos x; e com os intervalos I_{yj}, sobre o eixo dos y. Além disso, teremos:

$$I_x = \bigcup_{i} I_{x_i} \qquad \text{e} \qquad I_y = \bigcup_{j} I_{yj}$$

Ora, por definição:

$$m'(R) = m'(I_x) \cdot m'(I_y)$$

e, tendo em vista o resultado anterior:

$$m'(R) = \left[\sum_i m'(I_{x_i})\right] \cdot \left[\sum_j m'(I_{yj})\right]$$

$$= \sum_{i,j} m'(I_{x_i}) \cdot m'(I_{yj})$$

Entretanto: $$m'(I_{x_i}) \cdot m'(I_{yj}) = m'(R_{ij})$$

e, assim: $$m'(R) = \sum_{i,j} m'(R_{ij})$$

Poderíamos, ainda, supor que alguns dos retângulos R_{ij} se juntassem, dando origem a outros retângulos; o que daria, para R, uma decomposição de tipo mais geral. Entretanto, uma igualdade como a anterior ainda seria válida.

Chegamos, assim, às seguintes conclusões:

1) a todo retângulo, R, corresponde a uma medida ordinária, $m'(R)$, que é um número real, não negativo;

2) a medida ordinária é *aditiva,* isto é, se $R = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$, sendo $R_i \cap R_j = \phi$, para $i \neq j$, então:

$$m'(R) = \sum_{i=1}^{n} m'(R_i)$$

1.3 — O nosso próximo objetivo é estender o conceito de medida ordinária para outras classes de conjuntos. Um primeiro passo, nesse sentido, nos leva ao conceito de medida de um conjunto elementar. Entretanto, ao definirmos a medida de tais conjuntos, deveremos fazê-lo de modo a manter as propriedades básicas 1) e 2), vistas anteriormente.

Definição 4 — Chama-se *conjunto elementar* a todo conjunto que pode ser decomposto, ao menos de um modo, na união de um número finito de retângulos, dois a dois disjuntos.

1.4 — Teorema n.º 1 — A interseção, a união, a diferença e a diferença simétrica, de dois conjuntos elementares, são ainda, conjuntos elementares.

Demonstração: a) Sejam A e B dois conjuntos elementares. De acordo com a definição anterior podemos escrever:

$$A = \bigcup_i P_i \qquad \text{e} \qquad B_j = \bigcup_j Q_j$$

onde cada segundo membro representa a união de um número finito de retângulos, dois a dois disjuntos. A seguinte igualdade é evidente:

$$A \cap B = \bigcup_{i,j} (P_i \cap Q_j)$$

Entretanto, $P_i \cap Q_j$ é um retângulo (*B.2.2*); e, assim, $A \cap B$ fica decomposto na união de um número finito de retângulos, que são, além disso, dois a dois disjuntos; pois, $(P_i \cap Q_j) \cap (P_s \cap Q_r) = \phi$, se $(i, j) \neq (s, r)$. Nessas condições, a interseção $A \cap B$ é um conjunto elementar.

b) Sabemos que a diferença de dois retângulos é um conjunto elementar (*B.2.3*). Então, seja P um retângulo, contendo todos os retângulos R_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, dois a dois disjuntos. Como $C = \bigcup_i R_i$ é um conjunto elementar, resulta que a diferença

$$P - C = P - \bigcup_i R_i ,$$

a qual também pode ser escrita sob a forma $P - C = \bigcap_i (P - R_i)$, é, em conseqüência da parte já demonstrada, um conjunto elementar: por ser igual à interseção de um número finito de conjuntos elementares.

Isto posto, consideremos os conjuntos elementares A e B. Podemos achar um retângulo P contendo A e B. Nessas condições, resulta a igualdade conforme A.2.7.1:

$$A \cup B = P - [(P - A) \cap (P - B)]$$

Pelo que foi demonstrado acima, $P - A$ e $P - B$ são conjuntos elementares; sua interseção, também; e, ainda assim, o segundo membro, ou seja: $A \cup B$ é um conjunto elementar.

c) Tendo em vista o que já foi demonstrado e — conforme (A.2.7.2) e (A.2.7.3) — as igualdades

$$A - B = A \cap (P - B)$$

e $$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B) ,$$

segue-se que a diferença e, em conseqüência, a diferença simétrica de conjuntos elementares são, também, conjuntos elementares.

O teorema está, pois, completamente demonstrado.

1.5 — Para facilidade de exposição, diremos que um conjunto de retângulos, dois a dois disjuntos, forma uma *decomposição* do conjunto elementar A, quando a união desses retângulos for igual ao conjunto A.

* Definição 5 — A medida, $m(A)$, de um conjunto elementar, A, é a soma das medidas ordinárias dos retângulos de qualquer uma das possíveis decomposições desse conjunto.

Antes de prosseguir, devemos mostrar que a definição acima tem sentido: isto é, que a medida de um conjunto elementar não depende da decomposição que se considere.

Seja A, então um conjunto elementar admitindo as duas decomposições:

$$A = \bigcup_j P_i \qquad \text{e} \qquad A = \bigcup_j Q_j$$

Podemos escrever: $$P_i = \bigcup_j (P_i \cap Q_j) \tag{I}$$

De fato, se $x \in P_i$, como $x \in A$, deverá pertencer a Q_j, para algum valor de j; logo, $x \in P_i \cap Q_j$, e o primeiro membro de (I) está contido no segundo. A inclusão, deste, no primeiro membro, é óbvia. Além disso, os retângulos $P_i \cap Q_j$ — obtidos fazendo variar o índice j — são, dois a dois, disjuntos (do contrário, os Q_j não o seriam). Assim, o segundo membro de (*I*) é uma decomposição de retângulo P_i. Como, para retângulos, a medida ordinária é aditiva (Propriedade 2), vem:

$$m'(P_i) = \sum_j m'(P_i \cap Q_j)$$

e

$$\sum_i m'(P_i) = \sum_{i,j} m'(P_i \cap Q_j)$$

Do mesmo modo, partindo da igualdade $Q_j = \bigcup_i (P_i \cap Q_j)$,

chegamos a $$m'(Q_j) = \sum_i m'(P_i \cap Q_j)$$

e, em seguida, a $$\sum_j m'(Q_j) = \sum_{i,j} m'(P_i \cap Q_j)$$

Conseqüentemente:

$$m(A) = \sum_j m'(P_i) = \sum_j (m' Q_j)$$

Observação: É fácil verificar que as propriedades 1) e 2), da medida ordinária, são mantidas para a medida de conjuntos elementares, conforme se pretendia.

*** 1.6 — Lema — Se A e B são dois conjuntos elementares, tais que $A \subset B$, então:

$$m(A) \leqslant m(B)$$

Demonstração: Seja uma decomposição de A:

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} P_i$$

Consideremos o conjunto $C = B—A$, que também é elementar, e sua decomposição

$$C = \bigcup_{j=1}^{m} Q_j$$

Façamos, agora:

$$R_k = P_k\,;\, k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

$$R_k = Q_j\,;\, k = n + j \text{ e } j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$$

Nessas condições, $\bigcup_k R_k$ é uma decomposição de B. De fato, os retângulos R_k são, dois a dois, disjuntos. Além disso, se $x \in B$, então, ou $x \in A$, ou $x \in C$. Na primeira hipótese, $x \in P_i = R_i$ (para algum valor de i); e, na segunda hipótese, $x \in Q_j = R_{n+j}$ (para algum valor de j). Assim, $x \in \bigcup_k R_k$. Analogamente, se $x \in \bigcup_k R_k$, então, ou $x \in P_i$, ou $x \in Q_j$; isto é, ou $x \in A$, ou $x \in C$. Em qualquer caso, $x \in B$. Podemos escrever assim:

$$B = \bigcup_{k=1}^{n+m} R_k$$

resultando:

$$m(B) = \sum_{k=1}^{n+m} m'(R_k) = \sum_{i=1}^{n} m'(P_i) + \sum_{j=1}^{m} m'(Q_j)$$

ou seja: $$m(B) = m(A) + m(C)$$

de onde se conclui: $$m(A) \leqslant m(B)$$

* 1.7 — Teorema n.º 2 — Se A é um conjunto elementar e $\{A_n\}$ é um sistema, finito ou numerável, de conjuntos elementares, tais que

$$A \subseteq \bigcup_n A_n,$$

então: $$m(A) \leqslant \sum_n m(A_n)$$

Demonstração: Se o sistema for finito, o teorema é uma aplicação imediata do lema anterior; assim, vamos admitir que $\{A_n\}$ é um sistema numerável de conjuntos elementares.

Inicialmente, vamos mostrar que é possível achar um conjunto elementar, $\overline{A}$, *fechado*, contido em A, e tendo uma medida tão próxima da medida de A, quanto se queira.

De fato, seja um valor $\varepsilon < 0$, arbitrário, e consideremos a decomposição

$$A = \bigcup_{i=1}^{k} R_i$$

Podemos substituir, agora, cada um dos k' ($k' \leqslant k$) retângulos não degenerados, R_i, por um outro retângulo $\overline{R}_i$, fechado, tal que $\overline{R}_i \subseteq R_i$ e

$$m'(\overline{R}_i) \geqslant m'(R_i) - \frac{\varepsilon}{2\,k'}$$

Supondo esses novos retângulos numerados de 1 até k', é evidente que o conjunto elementar

$$\overline{A} = \bigcup_{j=1}^{K'} \overline{R}_j$$

é fechado, e satisfaz as condições requeridas:

$$\overline{A} \subseteq A \qquad \text{e} \qquad m(\overline{A}) \geqslant m(A) - \frac{\varepsilon}{2}$$

Por um procedimento inteiramente análogo, para cada conjunto elementar A_n podemos determinar um conjunto elementar $\tilde{A}_n$, *aberto*, tal que

$$A_n \subseteq \tilde{A}_n \qquad \text{e} \qquad m(\tilde{A}_n) \leqslant m(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

Nessas condições, a família numerável de conjuntos abertos, $\{\tilde{A}_n\}$, constitui uma cobertura do conjunto $\overline{A}$, posto que $\overline{A} \subseteq A \subseteq \cup A_n \subseteq \cup \tilde{A}_n$; e, pelo lema de Borel-Lebesgue, podemos extrair, dessa família, um número finito de elementos, $\tilde{A}_{n_1}, \tilde{A}_{n_2}, \ldots, \tilde{A}_{n_s}$, que ainda cobrem $\overline{A}$; isto é:

$$\overline{A} \subseteq \bigcup_{j=1}^{s} \tilde{A}_{n_j}$$

Como ambos os membros são conjuntos elementares, pelo lema anterior, temos:

$$m(\overline{A}) \leqslant \sum_{j=1}^{s} m(\tilde{A}_{n_j})$$

Então:

$$m(A) \leqslant m(\overline{A}) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{j=1}^{s} m(\tilde{A}_{nj}) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(\tilde{A}_n) + \frac{\varepsilon}{2}$$

ou ainda:

$$m(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} + \frac{\varepsilon}{2}$$

isto é:

$$m(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) + \varepsilon\,, \qquad \text{donde} \qquad m(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)\,,$$

posto que $\varepsilon > 0$ é arbitrário. Assim, o teorema vale em ambos os casos.

1.8 — Os conjuntos elementares não esgotam a classe dos conjuntos estudados na geometria elementar e na análise clássica. Surge, assim, o problema de generalizar o conceito de medida para uma classe mais ampla de conjuntos, preservando suas propriedades básicas.

Coube, a H. Lebesgue, resolver esse problema, no início de nosso século.

Para apresentar a teoria da medida, segundo Lebesgue, consideraremos não somente finitas, mas, também, infinitas combinações de retângulos.

1.9 — Em tudo que virá a seguir, trataremos, apenas, de conjuntos inteiramente contidos no retângulo E (conjunto fundamental), de área igual a 1, assim definido:

$$E = I_x \times I_y$$

onde:

$$I_x = \{x: 0 \leqslant x \leqslant 1\} \quad \text{e} \quad I_y = \{y: 0 \leqslant y \leqslant 1\}$$

Essa restrição será, posteriormente, eliminada.

Além disso, indicaremos por $m(A)$ a medida ordinária do conjunto A, quer se trate de um conjunto elementar, quer se trate de um simples retângulo.

Para todo conjunto A, contido em E, definiremos duas funções, $\mu^*(A)$ e $\mu_*(A)$, do seguinte modo:

Dado um conjunto A, contido em E, podemos, sempre, achar um conjunto, não vazio, de retângulos $\{P_k\}$, também contidos em E, tais que:

$$A \subseteq \bigcup_k P_K$$

Esse conjunto de retângulos (disjuntos ou não) constitui uma *cobertura* para o conjunto A. Devemos notar, além disso, que o conjunto A admite uma infinidade de coberturas, cada uma delas constituída por um número finito ou numerável de retângulos. O próprio conjunto fundamental, E, representa uma cobertura para qualquer conjunto A (contido em E), constituída de um só retângulo.

Se, nas condições anteriores, $\{P_k\}$ é uma cobertura de conjunto A, existe, sempre, o valor numérico $\sum_K m(P_K)$, que poderá ser finito ou infinito. Imaginemos, agora, o conjunto de todas as coberturas possíveis, do conjunto A:

Definição 6 — Chama-se *medida exterior* do conjunto A, e representa-se pelo símbolo $\mu^*(A)$, ao ínfimo do conjunto (numérico) $\{\sum_K m(P_K)\}$, no qual cada elemento se obtém somando as medidas

ordinárias de todos os retângulos que fazem parte de uma mesma cobertura do conjunto A.

$$\mu^*(A) = \inf_{A \subseteq \cup P_K} \left\{ \sum_K m(P_K) \right\}$$

Observações:

1 — A medida exterior de um conjunto A existe sempre: pois, qualquer conjunto numérico admite um ínfimo.

2 — Essa medida é, sempre, um número real finito (no caso, $\mu^*(A) \leqslant 1$), posto que o próprio conjunto numérico E constitui uma cobertura de A.

3 — De acordo com a definição de ínfimo de um conjunto, dado $\varepsilon > 0$, arbitrário, existe pelo menos uma cobertura $\{P_k\}$ de A, tal que:

$$\mu^*(A) + \varepsilon > \sum_K m(P_K)$$

Definição 7 — Chama-se *medida interior* do conjunto A, e representa-se pelo símbolo $\mu^*(A)$, ao número real:

$$1\text{-}\mu^*(E - A)$$

Observação: É fácil ver que, qualquer que seja A, tem-se a relação:

$$\mu^*(A) \leqslant \mu^*(A)$$

De fato, se, para $A \subseteq E$, *pudéssemos ter* $\mu^*(A) < \mu_*(A)$, *resultaria*:

$$\mu^*(A) + \mu^*(E - A) < 1$$

Então, de acordo com a definição de ínfimo de um conjunto, poderíamos achar dois sistemas de retângulos $\{P_i\}$ e $\{Q_j\}$, cobrindo A e $(E - A)$, respectivamente, e tais que:

$$\sum_i m(P_i) < \mu^*(A) + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{e} \qquad \sum_j m(Q_j) < \mu^*(E - A) + \frac{\varepsilon}{2}$$

ou ainda, se ε fosse escolhido convenientemente:

$$\sum_i m(P_i) + \sum m(Q_j) < \mu^*(A) + \mu^*(E - A) + \varepsilon < 1 \qquad \text{(II)}$$

Designando por $\{R_K\}$ a reunião dos sistemas $\{P_i\}$ e $\{Q_j\}$, teríamos: $E \subseteq \bigcup_k R_K$; e, de acordo com o Teorema n.º 2:

$$m(E) \leqslant \sum_K m(R_K) = \sum_i m(P_i) + \sum_j m(Q_j) \qquad \text{(III)}$$

Ora, tendo em vista que $m(E) = 1$, as desigualdades (II) e (III) seriam contraditórias; portanto, a (I) é verdadeira.

Definição 8 — Diz-se que um conjunto A é *mensurável* (segundo Lebesgue) se:

$$\mu^* (A) = \mu_* (A)$$

Ao valor comum dessas medidas, que representaremos por $\mu (A)$, dá-se o nome de *medida de Lebesgue* do conjunto A.

1.10 — Teorema n.º 3 — Se $A \subseteq \bigcup_n A_n$, onde $\{A_n\}$ é um sistema finito ou numerável de conjuntos, então:

$$\mu^* (A) \leqslant \sum_n \mu^* (A_n)$$

Demonstração: Para cada índice n, podemos achar um sistema, finito ou numerável, de retângulo $\{P_{nK}\}$ — onde n é fixo — tal que:

$$A_n \subseteq \bigcup_k P_{nk}$$

e satisfazendo, ainda (conforme 1.8 — observação 3), à desigualdade:

$$\sum_k m (P_{nk}) \leqslant \mu^* (A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

onde $\varepsilon > 0$ é escolhido arbitrariamente. Então, a união de todos esses retângulos forma uma cobertura para o conjunto A, isto é:

$$A \subseteq \bigcup_n \bigcup_k P_{nk}$$

Resulta, assim:

$$\mu^* (A) \leqslant \sum_n \sum_k m (P_{nk}) \leqslant \sum_n \mu^* (A_n) + \sum_n \frac{\varepsilon}{2^n}$$

ou seja:

$$\mu^* (A) \leqslant \sum_n \mu^* (A_n) + \varepsilon$$

Desde que $\varepsilon > 0$ é arbitrário, o teorema está demonstrado.

Observação: Para um conjunto elementar, A, introduzimos, anteriormente, a definição de medida ordinária — $m (A)$ — que corresponde ao conceito elementar de área. O teorema a seguir nos mostra que, para conjuntos elementares, as duas definições conduzem ao mesmo resultado.

1.11 — Teorema n.º 4 — Os conjuntos elementares são mensuráveis; e, para eles, a medida de Lebesgue coincide com a medida ordinária, $m (A)$, anteriormente definida.

Demonstração: Consideraremos um conjunto elementar, A, e sua decomposição:

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} P_k$$

onde, convém lembrar, os retângulos P_k são, dois a dois, disjuntos. Por definição:

$$m(A) = \sum_{k=1}^{n} m(P_k)$$

Desde que esse sistema de retângulos forma uma cobertura do conjunto A, temos:

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{k=1}^{n} m(P_k) = m(A) \qquad (I)$$

Entretanto, para qualquer sistema de retângulos, $\{Q_i\}$, finito ou numerável, formando uma cobertura do conjunto A, devemos, ter, pelo Teorema 2:

$$m(A) \leqslant \sum_{i} m(Q_i)$$

e, portanto:
$$m(A) \leqslant \inf_{A \subseteq \bigcup_i Q_i} \left\{\sum_i m(Q_i)\right\}$$

ou seja:
$$m(A) \leqslant \mu^*(A) \qquad (II)$$

De (I) e (II), resulta: $m(A) = \mu^*(A)$.

Por outro lado, desde que $E - A$ é, também, um conjunto elementar, devemos ter, igualmente:

$$m(E - A) = \mu^*(E - A)$$

e, daí:
$$1 - m(E - A) = 1 - \mu^*(E - A)$$

Como $1 - m(E - A) = m(A)$ e $1 - \mu_*(E - A) = \mu_*(A)$,

resulta:
$$m(A) = \mu_*(A)$$

Resumindo: $m(A) = \mu^*(A) = \mu_*(A) = \mu(A)$, como devíamos provar.

1.12 — Lema — Para dois conjuntos arbitrários A e B, tem-se:

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leqslant \mu^*(A \triangle B)$$

Demonstração: Desde que (A.2.7.4)

$$A \subseteq B \cup (A \triangle B)$$

nós temos, pelo Teorema n.º 3:

$$\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B) + \mu^*(A \triangle B)$$

Supondo, agora, $\mu^*(A) \geqslant \mu^*(B)$, resulta:

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| = \mu^*(A) - \mu^*(B) \leqslant \mu^*(A \triangle B)$$

o que demonstra o lema, para esse caso.

Se, ao contrário, fosse $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$, partindo da relação

$$B \subseteq A \cup (A \triangle B)$$

chegaríamos a conclusão idêntica. O lema é verdadeiro, pois, em qualquer caso.

* 1.13 — Teorema n.º 5 — Para que um conjunto A seja mensurável, é necessário e suficiente que a seguinte condição seja satisfeita: para qualquer $\varepsilon > 0$, exista um conjunto elementar, B, tal que:

$$\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon$$

Demonstração: 1) A condição é suficiente — Dado o conjunto A, admitamos que, para qualquer $\epsilon > 0$, exista um conjunto elementar, B, tal que:

$$\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon$$

Então, em vista do lema anterior, resulta:

$$|\mu^*(A) - m(B)| = |\mu^*(A) - \mu^*(B)| < \varepsilon \qquad (1)$$

e também: $|\mu^*(E - A) - m(E - B)| < \mu^*[(E - A) \triangle (E - B)]$

Por outro lado (A.2.7.5), sabemos que:

$$(E - A) \triangle (E - B) = A \triangle B$$

e, assim: $|\mu^*(E - A) - m(E - B)| < \varepsilon \qquad (2)$

Combinado (1) e (2), vem:

$$|\mu^*(A) - m(B) + \mu^*(E - A) - m(E - B)| < 2\,\varepsilon$$

Entretanto, tendo em conta a aditividade da medida ordinária (para conjuntos elementares), podemos escrever:

$$m(B) + m(E - B) = m(E) = 1$$

O que nos permite concluir:

$$|\mu^*(A) + \mu^*(E - A) - 1| < 2\,\varepsilon$$

e, sendo $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeno:

$$\mu^*(A) + \mu^*(E - A) - 1 = 0$$

isto é, o conjunto A é mensurável.

2) A condição é necessária — Seja A mensurável, isto é, tal que:

$$\mu^*(A) + \mu^*(E - A) = 1$$

Tomando $\varepsilon > 0$, arbitrariamente, podemos encontrar dois sistemas de retângulos, $\{B_n\}$, cobrindo A e $E - A$, respectivamente —

$$A \subseteq \bigcup_n B_n \qquad \text{e} \qquad (E - A) \subseteq \bigcup_n C_n$$

— e satisfazendo, ainda, às condições:

$$\sum_n m(B_n) \leqslant \mu^*(A) + \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{e} \qquad \sum_n m(C_n) \leqslant \mu^*(E - A) + \frac{\varepsilon}{3}$$

Desde que $\sum_n m(B_n)$ é um valor finito, podemos achar N tal que

$$\sum_{n>N} m(B_n) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Ponhamos, agora,

$$B = \bigcup_{n=1}^{N} B_n$$

e façamos, ainda:

$$P = \bigcup_{n>N} B_n \qquad \text{e} \qquad Q = \bigcup_n (B \cap C_n)$$

É claro, então, que:

$$(A - B) \subseteq P \qquad \text{e} \qquad (B - A) \subseteq Q$$

resultando, daí: $$(A \triangle B) \subseteq P \cup Q \tag{3}$$

Entretanto, podemos escrever:

$$\mu^*(P) \leqslant \sum_{n>N} m(B_n) < \frac{\varepsilon}{3} \tag{4}$$

Vejamos, agora, o valor de $\mu^*(Q)$. Primeiramente, notemos que

$$(\bigcup_n B_n) \cup [\bigcup_n (C_n - B)] = E$$

De fato, como o primeiro membro está contido, obviamente, no segundo membro, basta mostrar que este último está contido no pri-

meiro. Ora, se $x \in E$, ou $x \in A$ — e, nesse caso, $x \in \cup B_n$ — ou $x \in (E - A)$ e $x \notin B$, de onde resulta: $x \in \cup(C_n - B)$. Em qualquer caso, pois x pertence ao primeiro membro.

Nessas condições, vale a desigualdade:

$$\sum_n m(B_n) + \sum_n m(C_n - B) \leqslant 1$$

e daí:

$$-\sum_n m(B_n) - \sum_n m(C_n - B) \leqslant -1 \tag{5}$$

Porém, em virtude das condições iniciais, temos:

$$\sum_n m(B_n) + \sum_n m(C_n) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(E - A) + \frac{2\varepsilon}{3} = 1 + \frac{2\varepsilon}{3} \tag{6}$$

Somando (5) e (6), resulta:

$$\sum_n m(C_n) - \sum_n m(C_n - B) \leqslant \frac{2\varepsilon}{3}$$

ou ainda:

$$\sum_n [m(C_n) - m(C_n - B)] \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} \tag{7}$$

Ora, é evidente que

$$(C_n \cap B) \cup (C_n - B) = C_n$$

onde os conjuntos, entre parênteses, são conjuntos elementares, disjuntos. Assim, pela aditividade da medida ordinária, temos:

$$m(C_n \cap B) + m(C_n - B) = m(C_n)$$

e daí:

$$m(C_n) - m(C_n - B) = m(C_n \cap B)$$

Então, a (7) pode ser escrita assim:

$$\sum_n m(C_n \cap B) < \frac{2\varepsilon}{3}$$

e como

$$\mu^*(Q) \leqslant \sum_n m(C_n \cap B)$$

resulta:

$$\mu^*(Q) < \frac{2\varepsilon}{3} \tag{8}$$

Finalmente, tendo em vista (3), (4) e (8):

$$\mu^*(A \triangle B) \leqslant \mu^*(P) + \mu^*(Q) < \varepsilon$$

Lembrando que B é um conjunto elementar, esta última desigualdade mostra que a condição é necessária. O teorema está, pois completamente demonstrado.

1.14 — Teorema n.º 6 — A união e a interseção de um número finito de conjuntos mensuráveis são conjuntos mensuráveis.

Demonstração: Basta considerarmos o caso de dois conjuntos.

a) Sejam, assim, A_1 e A_2 dois conjuntos mensuráveis. Então, para qualquer $\varepsilon > 0$, podemos, achar conjuntos elementares B_1 e B_2, tais que

$$\mu^*(A_1 \triangle B_1) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{e} \qquad \mu^*(A_2 \triangle B_2) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Desde que, (A.2.7.6), é verdadeira a inclusão

$$(A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$$

resulta:

$$\mu^*[(A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2)] \leqslant \mu^*(A_1 \triangle B_1) + \mu^*(A_2 \triangle B_2) < \varepsilon$$

Entretanto, $B_1 \cup B_2$ é um conjunto elementar; portanto, pelo Teorema n.º 4, $A_1 \cup A_2$ é mensurável.

b) Pela própria definição de conjunto mensurável, se A é mensurável, também $E - A$ é mensurável. Da relação

$$A_1 \cap A_2 = E - [(E - A_1) \cup (E - A_2)]$$

segue-se, pois, que $A_1 \cap A_2$ é, ainda, um conjunto mensurável.

Corolário — A diferença e a diferença simétrica, de dois conjuntos mensuráveis, são, também, conjuntos mensuráveis.

Demonstração: Tendo em vista as igualdades:

$$A_1 - A_2 = A_1 \cap (E - A_2)$$

e

$$A_1 \triangle A_2 = (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_1)$$

a demonstração decorre, imediatamente, do Teorema n.º 6.

* 1.15 — Teorema n.º 7 — Se $A_1, A_2, \ldots A_n$, são conjuntos mensuráveis, dois a dois disjuntos, então

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A)_k$$

Demonstração: Como no teorema anterior, basta considerar o caso de dois conjuntos ($n = 2$). Tomemos, arbitrariamente, $\varepsilon > 0$, e selecionemos os conjuntos elementares B_1 e B_2, tais que

$$\mu^*(A_1 \triangle B_1) < \varepsilon \text{ e } \mu^*(A_2 \triangle B_2) < \varepsilon \qquad (1)$$

Ponhamos $A = A_1 \cup A_2$ e $B = B_1 \cup B_2$.

Pelo Teorema n.º 6, o conjunto A é mensurável. Desde que A_1 e A_2 são disjuntos, tem-se (A.2.7.7):

$$B_1 \cap B_2 \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$$

resultando, de acordo com o Teorema n.º 3:

$$\mu^*(B_1 \cap B_2) \leqslant \mu^*(A_1 \triangle B_1) + \mu^*(A_2 \triangle B_2)$$

que, em face de (1) e por ser $B_1 \cap B_2$ um conjunto elementar, também pode ser escrita assim:

$$m(B_1 \cap B_2) < 2\,\varepsilon \tag{2}$$

Por outro lado, de acordo com o lema do Teorema n.º 5, e ainda lembrando (1), podemos escrever:

$$| m(B_1) - \mu^*(A_1) | < \varepsilon \quad \text{e} \quad | m(B_2) - \mu^*(A_2) | < \varepsilon \tag{3}$$

Ora, é fácil constatar as igualdades

$$B = (B_1 - B_2) \cup (B_2 - B_1) \cup (B_1 \cap B_2)$$

$$B_1 = (B_1 - B_2) \cup (B_1 \cap B_2)$$

$$B_2 = (B_2 - B_1) \cup (B_1 \cap B_2)$$

onde $(B_1 - B_2)$, $(B_2 - B_1)$ e $(B_1 \cap B_2)$ são conjuntos elementares disjuntos, e como, para tais conjuntos, a medida é aditiva, valem estas outras:

$$m(B) = m(B_1 - B_2) + m(B_2 - B_1) + m(B_1 \cap B_2)$$

$$m(B_1) = m(B_1 - B_2) + m(B_1 \cap B_2)$$

$$m(B_2) = m(B_2 - B_1) + m(B_1 \cap B_2)$$

das quais deduzimos:

$$m(B) = m(B_1) + m(B_2) - m(B_1 \cap B_2)$$

Usando este último resultado juntamente com (2) e (3), obtemos:

$$m(B_1) - \mu^*(A_1) + m(B_2) - \mu^*(A_2) - m(B_1 \cap B_2) \geqslant -4\,\varepsilon$$

ou seja:

$$m(B) = m(B_1) + m(B_2) - m(B_1 \cap B_2) \geqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 4\,\varepsilon \tag{4}$$

Entretanto, $| \mu^* (A) - m (B) | \leqslant \mu^* (A \triangle B)$, e tendo em conta a inclusão

$$A \triangle B \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2),$$

que se pode provar facilmente, resulta:

$$| \mu^* (A) - m (B) | \leqslant \mu^* (A_1 \triangle B_1) + \mu^* (A_2 \triangle B_2) < 2 \varepsilon$$

de onde tiramos: $\mu^* (A) - m (B) \geqslant - 2 \varepsilon$,

ou seja

$$\mu^* (A) \geqslant m (B) - 2 \varepsilon$$

Usando, agora, a (4), temos:

$$\mu^* (A) \geqslant \mu^* (A_1) + \mu^* (A_2) - 6 \varepsilon$$

e lembrando que ε é arbitário, vem, finalmente:

$$\mu^* (A) \geqslant \mu^* (A_1) + \mu^* (A_2)$$

Por sua vez, a desigualdade

$$\mu^* (A) \leqslant \mu^* (A_1) + \mu^* (A_2)$$

é conseqüência imediata de $A = A_1 \cup A_2$.

As duas últimas desigualdades permitem-nos escrever:

$$\mu^* (A) = \mu^* (A_1) + \mu^* (A_2)$$

Entretanto, como os conjuntos A, A_1 e A_2 são mensuráveis, podemos substituir μ^* por μ. O teorema está, pois, demonstrado.

* 1.16 — Teorema n.º 8 — A união e a interseção de um sistema numerável de conjuntos mensuráveis são, ainda, conjuntos mensuráveis.

Demonstração: a) Seja o sistema numerável

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \ldots$$

de conjuntos mensuráveis. Consideremos a união desses conjuntos

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Para cada índice, n, podemos definir um novo conjunto, A'_n, do seguinte modo:

$$A'_1 = A_1 \qquad \text{e} \qquad A'_n = A_n - \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \qquad \text{se } n \geqslant 2$$

Vemos, imediatamente, que

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n$$

De fato, se $x \in A$, então, $x \in A_n$, para algum valor de n; e, se n_o for o menor índice para o qual esse fato ocorre, resulta que $x \in A'_{n_o}$, donde se conclui: $x \in \bigcup A'_n$. Do mesmo modo, esta última relação implica $x \in A'_n$ para algum valor de n, resultando, em seguida: $x \in A_n$ e $x \in A$.

Além disso, os conjuntos A'_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ são, dois a dois, disjuntos; pois, se $x \in A'_n$, como $x \in A_n$, resulta, para qualquer $m > n$: $x \notin A'_m$.

Ora, pelo Teorema n.º 6 e seu corolário, os conjuntos A'_n são mensuráveis; e, combinando os teoremas números 7 e 3, temos, para qualquer valor de n:

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(A'_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A'_k\right) = \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{n} A'_k\right) \leqslant \mu^*(A)$$

Portanto, a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A'_n)$, sendo monótona não decrescente e limitada, é convergente; e, assim, para qualquer $\varepsilon > 0$, podemos achar um índice N tal que

$$\sum_{n>N}^{\infty} \mu(A'_n) = \sum_{n>N}^{\infty} \mu^*(A'_n) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

Desde que o conjunto $C = \bigcup_{n=1}^{N} A'_n$ é mensurável, por ser a união de um número finito de conjuntos mensuráveis, podemos achar um conjunto elementar, B, tal que

$$\mu^*(C \triangle B) \frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

Entretanto, é válida a inclusão

$$(A \triangle B) \subseteq (C \triangle B) \cup \left(\bigcup_{n>N} A'_n\right)$$

De fato, se x pertence ao primeiro membro, ou x pertence a A, sem pertencer a B; ou x pertence a B, sem pertencer a A. Na primeira hipótese, ou $x \in C$, donde resulta $x \in (C \triangle B)$; ou $x \in \bigcup_{n>N} A'_n$. Na segunda hipótese, como $x \notin C$, conclui-se que $x \in (C \triangle B)$. Em qualquer caso, pois, x pertence ao segundo membro.

Da inclusão anterior — aplicando novamente o Teorema n.º 3 — deduzimos:

$$\mu^*(A \triangle B) \leqslant \mu^*(C \triangle B) + \sum_{n>N} \mu^*(A'_n),$$

e, em face de (1) e (2):

$$\mu^* (A \triangle B) < \varepsilon$$

Nessas condições, pelo Teorema n.º 5, concluimos que o conjunto A é mensurável.

b) Consideremos, agora, o conjunto

$$D = \bigcap_n A_n = E - \bigcup_n (E - A_n)$$

Posto que o complementar de um conjunto mensurável é, também, mensurável, deduzimos, imediatamente, da parte já demonstrada e da relação anterior, que o conjunto D é mensurável.

Observação: O Teorema n.º 8 generaliza o Teorema n.º 6.

1.17 — Teorema n.º 9 — Se $\{A_n\}$ é um sistema numerável de conjuntos mensuráveis, dois a dois disjuntos, e se $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

então:
$$\mu (A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu (A_n)$$

Demonstração: Pelo Teorema n.º 7, qualquer que seja o inteiro N, tem-se:

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n \right) = \sum_{n=1}^{N} \mu (A_n) \tag{1}$$

Além disso, como $\bigcup_{n=1}^{N} A_n \subseteq A$, resulta, evidentemente:

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n \right) \leqslant \mu (A) \tag{2}$$

Combinando (1) e (2), tiramos:

$$\sum_{n=1}^{N} \mu (A_n) \leqslant \mu (A)$$

e; passando ao limite, quando $N \to \infty$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu (A_n) \leqslant \mu (A) \tag{3}$$

Por outro lado, o Teorema n.º 3 nos permite escrever (substituindo μ^* por μ):

$$\mu (A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu (A_n) \tag{4}$$

As desigualdades (3) e (4), então, confirmam a tese do teorema.

Observação: A propriedade estabelecida no Teorema n.º 9 estende a aditividade da medida μ para sistemas numeráveis de conjuntos mensuráveis (dois a dois disjuntos). Dizemos, então, que μ é uma medida "completamente aditiva" ou, também, "σ — aditiva". O teorema, a seguir, é uma conseqüência da σ — aditividade da medida μ.

1.18 — Teorema n.º 10 — Se $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$ é uma sucessão de conjuntos mensuráveis, tais que cada um contém o seguinte: e se $A = \bigcap_n A_n$ então:

$$\mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$$

Demonstração: 1) Admitamos, inicialmente, que $A = \phi$ (conjunto vazio). Então:

$$A_1 = (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_3) \cup (A_3 - A_4) \cup \ldots \tag{1}$$

De fato, se $x \in A_1$, x não pode pertencer a A_n, para todo valor de n; pois, se assim fosse, deveríamos ter $x \in \bigcap_n A_n = \phi$, o que é absurdo. Seja, então, n_o o primeiro valor de n, para o qual $x \notin A_{n_o}$. Desse modo, resulta que $x \in (A_{n_o-1} - A_{n_o})$, isto é, x pertence ao segundo membro de (1). A inclusão deste, no primeiro membro, é óbvia, em face das hipóteses do teorema.

De modo análogo, vemos que

$$A_n = (A_n - A_{n+1}) \cup (A_{n+1} - A_{n+2}) \cup \ldots \tag{2}$$

Entretanto, os segundos membros de (1) e (2) representam a união de conjuntos disjuntos, dois a dois. Assim, o teorema anterior nos dá:

$$\mu(A_1) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k - A_{k+1}) \tag{3}$$

e

$$\mu(A_n) = \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k - A_{k+1}) \tag{4}$$

Ora, o segundo membro de (3) é uma série de termos positivos (ou nulos) que converge para o valor finito $\mu(A_1)$. Nessas condições, o seu resto de ordem n, isto é, o segundo membro de (4), deve convergir para zero. Portanto:

$$\lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = 0 = \mu(\phi) = \mu(A)$$

** 2) Consideremos, agora, o caso geral, em que $A \neq \phi$. Podemos definir um novo sistema de conjuntos mensuráveis, satisfazendo às demais hipóteses do teorema, pondo, para todo valor de n: $A'_n = A_n - A$

Então: $$\phi = \bigcap_n A'_n = \bigcap_n (A_n - A)$$

Realmente, se existisse algum elemento x tal que $x \in \bigcap A'_n$, deveríamos ter $x \notin A$ e $x \in A_n$ para todo n. Assim, $x \in \bigcap A_n$ e, portanto, $x \in A$, o que seria absurdo. Assim, $\bigcap_n A'_n$ é o conjunto vazio.

Aplicando, agora, o resultado anterior, temos:

$$\lim_{n \to \infty} \mu(A_n - A) = \mu(\phi) = 0$$

ou

$$\lim_{n \to \infty} \mu(A_n) - \mu(A) = 0$$

e, finalmente:

$$\lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$$

** 1.19 — Corolário — Se $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$ é uma sucessão de conjuntos mensuráveis, tais que cada um está contido no seguinte; e se $A = \bigcup_n A_n$, então:

$$\mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$$

Demonstração: Substituindo os conjuntos A e A_n pelos respectivos complementos $A' = E - A$ e $A'_n = E - A_n$, resulta:

$$A'_1 = \supseteq A'_2 \supseteq A'_3 \supseteq \ldots \qquad \text{e} \qquad A' = \bigcap_n A'_n$$

Aplicando, então, o Teorema n.º 10, obtém-se:

$$\mu(A') = \lim_{n \to \infty} \mu(A'_n)$$

ou

$$1 - \mu(A) = \lim_{n \to \infty} [1 - \mu(A_n)]$$

e daí:

$$\mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$$

1.20 — Antes de encerrar este capítulo, desejamos acrescentar algumas observações finais:

1.ª — Partindo de um conceito de medida, definida sobre o sistema de conjuntos denominados retângulos, chegamos ao conceito de medida — segundo Lebesgue — definida sobre uma classe bem mais ampla de conjuntos — a classe dos conjuntos mensuráveis — que é fechada em relação às operações de união e interseção de um número qualquer (finito ou numerável) de conjuntos mensuráveis; bem como em relação às operações de diferença e diferença simétrica, de tais conjuntos. Sobre a classe dos conjuntos mensuráveis, a medida assim construída é σ-aditiva.

2.ª — Os teoremas demonstrados permitem-nos ter uma idéia mais completa sobre a classe dos conjuntos mensuráveis:

De acordo com o teorema de cobertura de Lindelöf — Hausdorf, todo conjunto aberto, pertencente a E, pode ser representado como a união de um sistema numerável de retângulos *abertos*. Como tais retângulos são conjuntos mensuráveis, o Teorema n.º 8 implica que todo conjunto aberto é mensurável. Por outro lado, todo conjunto fechado, pertencente a E, sendo o complementar de um conjunto aberto, também será mensurável. Conseqüentemente, ainda de acordo com o Teorema n.º 8, todos os conjuntos que podem ser obtidos dos conjuntos abertos ou fechados, mediante as operações de interseção e união (realizadas um número finito ou numerável de vezes); ou mediante as operações de diferença e diferença simétrica, também serão mensuráveis. Pode-se demonstrar, todavia, que os conjuntos assim obtidos não exaurem a classe dos conjuntos mensuráveis (segundo Lebesgue).

3.ª — Ao desenvolver a teoria da medida, segundo Lebesgue, para conjuntos planos, temos considerado, apenas, subconjuntos do conjunto $E = \{(x;\ y) : 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ e } 0 \leqslant y \leqslant 1\}$. Vamos, aqui, remover essa restrição, estendendo o conceito de medida para todo plano:

Podemos representar o plano como a união de quadrados da forma

$$E_{nm} = \{(x;y) : n \leqslant x \leqslant n+1 \quad \text{e} \quad m \leqslant y \leqslant m+1\}$$

onde m e n são inteiros quaisquer.

Diremos, então, que um conjunto plano A é mensurável se:

1) a sua interseção $A_{nm} = A \cap E_{nm}$, com cada um desses quadrados — tomado como conjunto fundamental — for um conjunto mensurável;

2) a série numérica de termos não negativos $\sum_{n,m} \mu(A_{nm})$ for convergente.

Satisfeitas as duas condições anteriores, faremos, por definição

$$\mu(A) = \sum_{n,m} \mu(A_{nm})$$

Todas as propriedades das medidas, vistas anteriormente, podem ser aplicadas, como é óbvio, a essa nova definição de medida.

4.ª — Podemos considerar a noção de medida de conjuntos — segundo Lebesgue — sobre um eixo real, sobre um plano, sobre o espaço tridimensional, ou, ainda, sobre um espaço euclideano n-dimensional, R_n. Em cada caso, a medida $\mu(A)$ é construída pelo mesmo método; inicialmente, definimos a medida ordinária, $m(I)$, para os intervalos de R_n (intervalos lineares, no caso de R_1; retângulos, no caso de R_2; paralelepípedos, no caso de R_3; etc); em seguida, estendemos essa medida para aqueles conjuntos de R_n que podem ser decompostos na união de um número finito de intervalos disjuntos (classe dos conjuntos elementares,

em R_n); finalmente, generalizamos a medida para uma classe bem mais ampla de conjuntos — a classe dos conjuntos L-mensuráveis.

Devemos notar que os raciocínios, desenvolvidos nesse capítulo, foram independentes da hipótese de se estar tratando de conjuntos planos. Assim, as definições, propriedades e conclusões se aplicam, palavra por palavra, a um espaço n-dimensional qualquer.

5.ª — Ao introduzir o conceito de medida, segundo Lebesgue, para os conjuntos planos, partimos da medida ordinária de um retângulo, definida como sendo a sua área. No caso de conjuntos lineares, partiríamos da medida ordinária de um intervalo linear, definida como sendo seu comprimento.

Poderíamos, entretanto, introduzir a noção de medida por um método mais geral, associando a cada intervalo limitado (em R_n) um número real não negativo e finito (função de conjunto), satisfazendo a determinadas condições. No capítulo 6.º teremos a oportunidade de reconstruir a teoria da medida (segundo Lebesgue) sob um ponto de vista abstrato, sem especificar a natureza da função de conjunto que define a medida inicial.

CAPÍTULO 2.º — SISTEMAS DE CONJUNTOS

2.1 — Quando os elementos de um conjunto são, por sua vez, outros conjuntos, dizemos que o primeiro conjunto referido é um "sistema de conjuntos" ou uma "família de conjuntos". Representaremos os sistemas de conjuntos pelas letras maiúsculas $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, etc.

Assim, partindo dos conjuntos numéricos

$$A = \{0, 1, 2, 3\};\ B = \{4, 5\};\ C = \{6, 7, 8, 9\};\ D = \{2, 3\} \text{ e } E = \{1\}$$

podemos, por exemplo, construir o sistema de conjunto $\mathcal{A} = \{A, B, C\}$, cujos elementos são, apenas, os conjuntos A, B e C. Desse modo, os conjuntos $D = \{2, 3\}$ e $E = \{1\}$ não constituem elementos de $\mathcal{A}$; nem estão contidos em $\mathcal{A}$. Seria errado, pois, escrever-se:

$$D \in \mathcal{A}, \quad \text{ou } D \subseteq \mathcal{A}, \text{ ou, ainda, } \quad E \in \mathcal{A}$$

Poderíamos, entretanto, definir novos sistemas de conjuntos, a partir dos conjuntos inicialmente dados, tais como:

$$\mathcal{B} = \{A, B\};\quad \mathcal{C} = \{A, C\};\quad \mathcal{D} = \{B, C\} \quad \text{e} \quad \mathcal{E} = \{A\}$$

Seriam corretas, então, as relações

$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A};\quad \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A};\quad \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \{A\} = \mathcal{E}$$

Convém notar que a relação $A \in \mathcal{C}$ só poderá ser escrita sob a forma $A \subseteq \mathcal{C}$, se entendermos, nesta última, que A representa um sistema de conjuntos constituído pelo único elemento (conjunto) A. A fim de evitar confusão será preferível escrever-se:

$$\{A\} \subseteq \mathcal{C} \qquad \text{ou} \qquad \mathcal{E} \subseteq \mathcal{C}$$

2.2 — Daqui por diante consideraremos sistemas de conjuntos cujos elementos serão, todos, subconjuntos de um conjunto fixo, X.

Definição 1 — Um sistema não-vazio de conjuntos, $\mathcal{R}$, é chamado um *anel de conjuntos* se, dados dois quaisquer conjuntos A e B, pertencentes a $\mathcal{R}$, forem satisfeitas as seguintes condições:

$R.1 -$ $\quad (A \cap B) \in \mathcal{R}$

$R.2 -$ $\quad (A \triangle B) \in \mathcal{R}$

Conseqüências: 1 — Quaisquer que sejam os conjuntos A e B, tem-se as igualdades:

$$A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B)$$
$$A - B = A \triangle (A \cap B)$$

Assim, se A e B pertencem a $\mathcal{R}$, resulta que os conjuntos $A \cup B$ e $A - B$ também pertencem a $\mathcal{R}$.

2 — Um anel é, pois, um sistema de conjuntos fechados em relação às operações de interseção, união, subtração e de formação de uma diferença simétrica. Obviamente, um anel é, também, fechado em relação às operações de interseção e união, realizadas um número finito, qualquer, de vezes.

3 — Qualquer anel possui, como seu elemento, o conjunto vazio; pois, se $A \in \mathcal{R}$, então $(A - A) = \phi \in \mathcal{R}$.

4 — O conjunto vazio, ϕ, não possui elementos; porém, o sistema de conjuntos, constituído, unicamente, pelo conjunto vazio, é não-vazio; pois possui o elemento ϕ. Aliás, esse sistema é um anel; é o mais simples anel possível.

Definição 2 — O conjunto E é chamado *unidade* de um sistema de conjuntos, $\mathcal{C}$, se E pertence a $\mathcal{C}$; e se, para qualquer $A \in \mathcal{C}$, vale a igualdade: $A \cap E = A$.

Observação: A unidade de um sistema de conjuntos, $\mathcal{C}$, é, simplesmente, o máximo conjunto do sistema $\mathcal{C}$, isto é, aquele conjunto de $\mathcal{C}$ que contém todos os outros.

Definição 3 — Um anel de conjuntos dotado de uma unidade é chamado uma *álgebra* de conjuntos.

Exemplos: 1 — Para qualquer conjunto A, o sistema $\mathcal{M}(A)$, *de* todos os seus subconjuntos, é uma álgebra de conjuntos, com a unidade $E = A$.

2 — Para qualquer conjunto não-vazio, A, o sistema $\{\phi, A\}$, consistindo do conjunto A e do conjunto vazio ϕ, é uma álgebra de conjuntos, com a unidade $E = A$.

3 — O sistema de todos os subconjuntos finitos, de um arbitrário conjunto A, é um anel. Esse anel será uma álgebra quando, e somente quando, o próprio conjunto A for finito.

4 — O conjunto de todos os subconjuntos limitados, sobre o eixo real, é um anel, sem elemento unidade.

** 2.3 — Teorema n.º 1 — A interseção, $\mathcal{R} = \bigcap_{\alpha} \mathcal{R}_\alpha$, de qualquer conjunto de anéis, $\{\mathcal{R}_\alpha\}$, é um outro anel.

Demonstração: Basta mostrar que, quaisquer que sejam os conjuntos A e B, pertencentes a $\mathcal{R}$, tem-se:

$$(A \cap B) \in \mathcal{R} \qquad \text{e} \qquad (A \triangle B) \in \mathcal{R} \tag{1}$$

Mas, isto é evidente, posto que devemos ter $A \in \mathcal{R}_\alpha$ e $B \in \mathcal{R}_\alpha$; e, conseqüentemente.

$$(A \cap B) \in \mathcal{R}_\alpha \qquad \text{e} \qquad (A \triangle B) \in \mathcal{R}_\alpha,$$

qualquer que seja o anel $\mathcal{R}_\alpha$ do sistema, donde se concluem as relações (1).

Observação: A interseção de dois anéis nunca é um conjunto vazio, posto que possui, pelo menos, um elemento: o conjunto vazio, ϕ.

2.4 — Teorema n.º 2 — Para qualquer sistema não-vazio de conjuntos, $\mathcal{C}$, existe um — e somente um — anel $\mathcal{R}(\mathcal{C})$, contendo $\mathcal{C}$ e contido em qualquer outro anel, $\mathcal{R}$, que contenha $\mathcal{C}$.

Demonstração: É fácil verificar que $\mathcal{R}(\mathcal{C})$, existindo, será único. Realmente, se houvesse outro anel, $\mathcal{R}$, satisfazendo às condições do teorema, em virtude dessas mesmas condições deveríamos ter: $\mathcal{R}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{R}$ e também $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{C})$; e daí: $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathcal{C})$.

Para provar a existência desse anel, consideremos a união, X, de todos os elementos (conjuntos) do sistema $\mathcal{C}$:

$$X = \bigcup_{A \in \mathcal{C}} A$$

Designemos, agora, por $\mathcal{M}(X)$ o conjunto dos subconjuntos de X — conjunto das partes — que, como já observamos anteriormente, é um anel (por ser uma álgebra), e contém o sistema $\mathcal{C}$.

Representemos, agora, por Σ, o conjunto de todos os anéis de conjuntos, contidos em $\mathcal{M}(X)$ e contendo $\mathcal{C}$. Σ é um sistema —

de sistemas de conjuntos — não-vazio; desde que possui, pelo menos, o elemento $\mathcal{M}(X)$. Nessas condições, a interseção

$$\mathcal{B} = \bigcap_{R \in \Sigma} R$$

de todos os anéis do sistema Σ é, precisamente, o anel que estamos procurando.

De fato, $\mathcal{B}$ é um anel que contém $\mathcal{C}$, por ser a interseção de anéis que contêm $\mathcal{C}$. Além disso, se R^* for um outro anel contendo $\mathcal{C}$, a interseção

$$R = R^* \cap \mathcal{M}(x),$$

satisfazendo às condições

$$\mathcal{C} \subseteq R \qquad \text{e} \qquad R \subseteq \mathcal{M}(x),$$

será um anel de Σ. Portanto

$$\mathcal{B} \subseteq R \subseteq R^*$$

Assim, $\mathcal{B}$ satisfaz, realmente, à condição de ser mínimo. Por isso mesmo, $R(\mathcal{C}) = \mathcal{B}$ é chamado "o anel mínimo sobre $\mathcal{C}$.

2.5 — Um sistema de conjuntos, $\mathcal{S}$, é chamado um *semi-anel*, se ele satisfaz às condições:

S.1 — o conjunto vazio pertence a $\mathcal{S}$;

S.2 — se $A \in \mathcal{S}$ e $B \in \mathcal{S}$, então: $(A \cap B) \in \mathcal{S}$;

S.3 — se $A \in \mathcal{S}$, $A_1 \in \mathcal{S}$ e $A_1 \subseteq A$, então, o conjunto A pode ser representado sob a forma

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

onde os conjuntos A_k, todos pertencentes a $\mathcal{S}$, são, dois a dois, disjuntos; e o primeiro deles é o próprio conjunto, A_1, dado.

Observações: 1 — Em tudo o que segue, chamaremos a um sistema de conjuntos, $A_1, A_2, \ldots, A_n$, dois a dois disjuntos, — cuja união é igual ao conjunto A — de uma "decomposição finita de A".

2 — Todo anel de conjuntos, R, é um semi-anel. De fato, R satisfaz a S.1 e S.2; além disso, se $A \in R$, $A_1 \in R$ e $A_1 \subseteq A$, resulta que

$$A = A_1 \cup A_2,$$

onde $A_2 = (A - A_1) \in R$, é uma decomposição finita de A em conjuntos de R; logo, R satisfaz a S.3.

3 — Nem todo semi-anel é um anel. Um exemplo de semi-anel que não é anel é constituído pelo sistema, $\mathcal{J}$, de todos os intervalos sobre o eixo real (fechados, abertos, semi-amertos, degenerados e mais o intervalo vazio — da forma (a, a).

Que esse conjunto é um semi-anel, decorre dos teoremas (B.1.5-2) e (B.1.5-2'). E como, de acordo com o teorema (B.1.6-3), a diferença de dois intervalos nem sempre é outro intervalo (podendo ser a união de dois intervalos disjuntos), resulta que essa diferença nem sempre pertence ao sistema $\mathcal{J}$, e que este, portanto, não é um anel.

Um outro exemplo de semi-anel que não é anel, é o sistema $\{R\}$, de todos os retângulos (fechados, abertos, semi-abertos, degenerados e mais o retângulo vazio) sobre o plano; fato que se justifica através dos teoremas, análogos aos já citados, válidos no caso de intervalos bidimensionais.

* 2.6 — Lema 1 — Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e A conjuntos pertencentes ao semi-anel $\mathcal{S}$ e sejam, ainda, os conjuntos A_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ subconjuntos de A, dois a dois disjuntos. Então, os conjuntos A_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ podem ser incluídos com os n primeiros membros da decomposição finita

$$A = \bigcup_{k=1}^{s} A_k \qquad , \qquad s \geqslant n$$

do conjunto A, onde $A_k \in \mathcal{S}$, para todo valor de k.

Demonstração: Para $n = 1$, o lema é uma conseqüência imediata da condição S.3 da definição de semi-anel.

Admitamos, então, que ele seja verdadeiro para $n = m$, e consideremos, agora, $m + 1$ conjuntos, $A_1, A_2, \ldots, A_m, A_{m+1}$, satisfazendo às condições do lema. Desde que estamos supondo este último verdadeiro para m conjuntos, podemos achar uma decomposição finita de A, da forma:

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m \cup B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_p \qquad (1)$$

onde os conjuntos B_q $(q = 1, 2, \ldots, p)$ pertencem a $\mathcal{S}$. Ponhamos:

$$B_{1q} = A_{m+1} \cap B_q \qquad (2)$$

$$\text{Desde que } B_{q1} \in \mathcal{S} \qquad \text{e} \qquad B_{q1} \subseteq B_q ,$$

pela definição de semi-anel, podemos obter a decomposição finita

$$B_q = B_{q1} \cup B_{q2} \cup \ldots \cup B_{qr_q} \qquad (3)$$

na qual todos os B_{qj} pertencem a $\mathcal{S}$.

Substituindo, em (1), os conjuntos B_q por suas expressões dadas em (3), achamos:

$$A = \left(\bigcup_{k=1}^{m} A_k \right) \cup \left[\bigcup_{q=1}^{p} (B_{q1} \cup B_{q2} \cup \ldots \cup B_{qr_q}) \right],$$

que também podemos escrever sob a forma:

$$A = \left(\bigcup_{k=1}^{m} A_k \right) \cup \left[\bigcup_{q=1}^{p} B_{q1} \right] \cup \left[\bigcup_{q=1}^{p} (B_{q2} \cup B_{q3} \cup \ldots \cup B_{qr_q}) \right]$$

Entretanto, tendo em vista que

$$\bigcup_{q=1}^{p} B_{q1} = A_{m+1} \qquad \text{(por que?)}$$

resulta:

$$A = \left(\bigcup_{k=1}^{m+1} A_k \right) \cup \left[\bigcup_{q=1}^{p} \bigcup_{j=2}^{r_q} B_{qj} \right] \tag{4}$$

Como $B_{qj} \cap B_{q'j'} = \phi$, se $(q, j) \neq (q', j')$, e também $B_{qj} B_{qj} \cap A_k = \phi$, quaisquer que sejam os índices q, j e k $(j \geqslant 2)$, decorre que (4) é uma decomposição finita de A, satisfazendo a todas as condições do lema. assim, se este é válido para $n = m$, também o é para $n = m + 1$; e como vale para $n = 1$, é válido para todo n.

Observação: Nessa demonstração, o valor máximo, r_q, do índice variável j, no conjunto B_{qj} — expressão (3) —, é uma função do primeiro índice, q; assim, para dois conjuntos B_q e $B_{q'}$, diferentes, r_q e $r_{q'}$ serão, em geral, diferentes.

2.7 — Lema 2 — Qualquer que seja o sistema finito de conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, pertencentes ao semi-anel $\mathcal{S}$, podemos achar em $\mathcal{S}$, um outro sistema finito de conjuntos, $B_1, B_2, \ldots, B_t$, dois a dois disjuntos, tais que, qualquer um dos conjuntos A_k, inicialmente dados, possa ser representado pela união

$$A_k = \bigcup_{s \in M_k} B_s$$

de alguns dos conjuntos B_s.

Demonstração: Para $n = 1$, o lema é trivial, bastando supor $t = 1$ e $B_1 = A_1$.

Admitamos, então, que ele seja verdadeiro para $n = m$ e consideremos, agora, $m + 1$ conjuntos, $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{m+1}$, pertencentes a $\mathcal{S}$. Sejam $B_1, B_2 \ldots, B_t$ os conjuntos de $\mathcal{S}$ que satisfazem às condições do lema, em relação aos m primeiros conjuntos, $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Ponhamos:

$$B_{s1} = A_{m+1} \cap B_s$$

Os conjuntos B_{s1} $(s = 1, 2, \ldots, t)$, pertencentes a $\mathcal{S}$, são, dois a dois, disjuntos — em virtude de o serem os conjuntos B_s — e, estão, todos eles, contidos em A_{m+1}. Portanto, em vista do lema n.º 1, podemos encontrar uma decomposição finita de A_{m+1}, da forma:

$$A_{m+1} = \left(\bigcup_{s=1}^{t} B_{s1}\right) \cup \left(\bigcup_{p=1}^{q} B'_p\right) \tag{1}$$

onde $B'_p \in \mathcal{S}$; $p = 1, 2, \ldots, q$.

Entretanto, como $B_{s1} \subseteq B_s$, em virtude da definição de semi-anel, podemos obter, para cada B_s, a decomposição finita:

$$B_s = B_{s1} \cup B_{s2} \cup \ldots \cup B_{sr_s} \tag{2}$$

onde $B_{sj} \in \mathcal{S}$; $(s = 1, 2, \ldots, t;\ j = 1,2,\ldots,r_s)$.

De acordo com a hipótese inicialmente introduzida, qualquer que seja A_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$, tem-se uma decomposição finita da forma:

$$A_k = \bigcup_{s \in M_k} B_s;$$

e, assim, usando (2), resulta

$$A_k = \bigcup_{s \in M_k} \bigcup_{j=1}^{r_s} B_{sj} \quad ; \quad k = 1, 2, 3, \ldots, m. \tag{3}$$

Vemos, facilmente, que os conjuntos B_{sj} $(s = 1, 2, \ldots, t;\ j = 1, 2, \ldots, r_s)$ e B'_p $(p = 1, 2, \ldots, q)$, pertencentes a $\mathcal{S}$, são, dois a dois disjuntos; e, em virtude de (1) e (3), satisfazem às condições do lema para os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_m, A_{m+1}$. Nessas condições, se o lema é verdadeiro para $n = m$, também o é para $n = m + 1$; e como é válido para $n = 1$, é válido para todo n.

Observações: Nessa demonstração, o símbolo M_k representa um subconjunto (que depende do índice, k, do conjunto A_k considerado) dos índices 1, 2, 3, ..., t. Nas expressões (2), o maior valor, r_s, assumido pelo índice j, é uma função do índice s, do conjunto B_s; de modo que, dado s, j varia de 1 a r_s.

* 2.8 — Teorema n.º 3 — Se $\mathcal{S}$ é um semi-anel, então $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ coincide com o sistema, $\mathcal{B} = \{A\}$, dos conjuntos A que admitem decomposições finitas da forma

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

onde $A_k \in \mathcal{S}$, para todo valor de k.

Demonstração: Vejamos, inicialmente, que o $\mathcal{B}$ é um anel. Se A e B são dois conjuntos de $\mathcal{B}$, ocorrem, por hipótese, as decomposições finitas

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad ; \quad A_i \in \mathcal{S} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

$$B = \bigcup_{j=1}^{m} B_j \quad ; \quad B_j \in \mathcal{S} \quad (j = 1, 2, 3, \ldots, m)$$

Desde que $\mathcal{S}$ é um semi-anel, os conjuntos da forma

$$C_{ij} = A_i \cap B_j \quad ; \quad (i = 1, 2, \ldots, n \; ; \; j = 1, 2, \ldots, m)$$

também pertencem a $\mathcal{S}$; além disso, como $A_r \cap A_s = \phi$ (se $r \neq s$) e $B_p \cap B_q = \phi$ (se $p \neq q$), resulta que $C_{ij} \cap C_{i'j'} = \phi$, se $(i, j) \neq (i', j')$.

Consideremos, então, o conjunto $A \cap B$. Temos:

$$A \cap B = \bigcup_{j} A \cap B_j = \bigcup_{i,j} A_i \cap B_j$$

ou seja, $A \cap B$ admite a decomposição finita, em conjuntos de $\mathcal{S}$:

$$A \cap B = \bigcup_{i,j} C_{ij} \tag{1}$$

e, portanto, $(A \cap B) \in \mathcal{B}$.

Consideremos, agora, o conjunto $A \triangle B$. Tendo em vista que $C_{ij} \subseteq A_i$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ e que os conjuntos C_{ij}, de $\mathcal{S}$, são, dois a dois, disjuntos; pelo lema n.º 1, podemos encontrar a decomposição finita:

$$A_i = \left(\bigcup_{j=1}^{m} C_{ij} \right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{n_i} D_{ik} \right) \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{2}$$

onde $D_{ik} \in \mathcal{S}$, quaisquer que sejam os valores dos índices i e k.

Analogamente, posto que $C_{ij} \subseteq B_j$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, podemos achar a decomposição finita:

$$B_j = \left(\bigcup_{i=1}^{n} C_{ij} \right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{s_j} E_{jk} \right) \quad ; \quad j = 1, 2, \ldots, m \tag{3}$$

onde $E_{jk} \in \mathcal{S}$, quaisquer que sejam os valores dos índices j e k.

Ora, $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$; e tendo em vista (1), (2) e (3):

$$A \triangle B = \bigcup_{i,j} (A_i \cup B_j) - \bigcup_{i,j} C_{ij} = \left(\bigcup_{i,k} D_{ik} \right) \cup \left(\bigcup_{j,k} E_{ik} \right)$$

e, assim, $(A \triangle B) \; \mathcal{B}$. Nessas condições, $\mathcal{B}$ é um anel. Que é o anel mínimo, é óbvio (por que?).

2.9 — Em vários problemas, em particular na teoria da medida, temos de considerar uniões e interseções de um número, não somente finito, mas, também, infinito, de conjuntos. É útil, portanto, introduzir os seguintes conceitos:

Definição 5 — Um anel de conjuntos, $\mathcal{R}$, é chamado um σ-anel se, qualquer que seja o sistema numerável $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, de conjuntos pertencentes a $\mathcal{R}$, a união

$$S = \bigcup_n A_n$$

pertence também a $\mathcal{R}$.

Definição 6 — Um anel de conjuntos, $\mathcal{R}$, é chamado um δ-anel se, qualquer que seja o sistema numerável $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, de conjuntos pertencentes a $\mathcal{R}$, a interseção

$$D = \bigcap_n A_n$$

também pertence a $\mathcal{R}$.

Definição 7 — Um σ-anel com uma unidade é chamado uma σ-álgebra; um δ-anel com uma unidade é chamado uma δ-álgebra.

Observação: É fácil ver que esses dois conceitos coincidem. De fato, se E indica a unidade da σ-álgebra (ou da δ-álgebra), são válidas as relações:

$$\bigcup_n A_n = E - \bigcap_n (E - A_n)$$

$$\bigcap_n A_n = E - \bigcup_n (E - A_n)$$

Assim, qualquer σ-álgebra é uma δ-álgebra, e vice-versa.

As σ-álgebras (ou δ-álgebras) são, usualmente, chamadas álgebras de Borel, ou, simplesmente, *B - álgebras*.

O mais simples exemplo de uma B - álgebra é o conjunto dos subconjuntos de algum conjunto A.

Um teorema análogo ao Teorema n.º 2, para anéis, vale para B - álgebras.

2.10 — Teorema n.º 4 — Para qualquer sistema não-vazio de conjuntos, $\mathcal{C}$, existe uma — e uma só — B-álgebra, $\mathcal{B}(\mathcal{C})$, contendo $\mathcal{C}$ e contida em qualquer outra B-álgebra, $\mathcal{B}$, que contenha $\mathcal{C}$.

Demonstração: A demonstração é inteiramente análoga à do Teorema n.º 2, levando-se em conta, agora, que $\mathcal{M}(X)$ é uma B-álgebra, cuja unidade é o conjunto

$$X = \bigcup_{A \in C} A$$

Observação: O conjunto $\mathcal{B}(\mathcal{C})$ é chamado a *B*-álgebra mínima sobre $\mathcal{C}$, ou o *fecho de Borel do sistema* $\mathcal{C}$.

2.11 — Vamos encerrar este parágrafo fazendo uma referência aos chamados "conjuntos de Borel" ou "B-conjuntos", que desempenham um importante papel em Análise.

Os conjuntos de Borel podem ser definidos como sendo os conjuntos de pontos, sobre um eixo real (no caso n-dimensional, a definição é a mesma), que pertencem à *B*-álgebra mínima, construída a partir do conjunto de todos os intervalos fechados, $[a, b]$, sobre esse eixo.

De acordo com essa definição, o sistema, $\mathcal{B}_1$, de todos os conjuntos de Borel, sobre um eixo real, inclui todos os intervalos possíveis (fechados, abertos, semi-abertos, degenerados e mais o intervalo vazio) sobre esse eixo. Inclui a diferença e a diferença simétrica de dois quaisquer desses intervalos; e a união e a interseção de um número finito ou infinito numerável, deles. Inclui, ainda, o próprio eixo real, considerado com o intervalo $R_1 = \{x; -\infty < x < \infty\}$. Além disso, como R_1 contém qualquer conjunto de pontos, A, sobre ele, resulta:

$$A \cap R_1 = A$$

logo, R_1 é a unidade da *B*-álgebra mínima, $\mathcal{B}_1$.

CAPÍTULO 3.º — NOÇÃO DE FUNÇÃO (TRANSFORMAÇÃO). IMAGENS DIRETAS E INVERSAS

3.1 Sejam X e Y dois conjuntos arbitrários, em cada um dos quais está definida uma relação de igualdade, que será indicada, em ambos (por simplicidade), pelo mesmo símbolo (=), já conhecido.

Definição 1 — Admitamos que a cada elemento $x \in X$ fazemos corresponder — mediante uma certa regra ou lei — um e um só elemento $y \in Y$, que representaremos por $f(x)$. Diz-se que esta correspondência determina uma função unívora — $y = f(x)$ — definida no conjunto X e que toma seus "valores" no conjunto Y.

Definição 1 — Diz-se, também, que esta correspondência define uma transformação — que simbolizaremos por f — do conjunto X no conjunto Y.

Definição 1 — O elemento $y = f(x)$ recebe o nome de imagem ou transformado de x, por meio de f; e o elemento x recebe o nome de imagem inversa de y, em relação a f.

Observação: Pode acontecer que os transformados dos elementos x_1 e x_2 $(x_1 \neq x_2)$ de X, mediante f, sejam o mesmo elemento y, de Y; isto é, $y = f(x_1) = f(x_2)$.

Definição 1' — Quando existem elementos y, de Y, que não sejam os transformados de nenhum elemento $x \in X$; isto é, tais que a igualdade $y = f(x)$ não tenha lugar para nenhum elemento $x \in X$ —, diz-se que f é uma transformação de X *em* Y.

Definição 1" — Quando qualquer elemento $y \in Y$ é o transformado de, pelo menos, um elemento $x \in X$ —, diz-se que f é uma transformação de X *sobre* Y.

Observação: Em face das duas últimas definições, salientamos que as preposições *em* e *sobre* exprimem fatos diversos; e essa diferença de sentido deverá, a todo instante, estar presente ao espírito do leitor.

Definição 2 — Seja f uma transformação de X *em* Y, e seja A um subconjunto de X. Chama-se imagem ou transformado de A, mediante f — e representa-se por $f(A)$ — ao conjunto dos elementos $f(x)$, de Y, tais que: $x \in A$. Em outras palavras: o transformado de um conjunto, A, é o conjunto, $f(A)$, dos transformados dos elementos desse conjunto.

Conseqüências: É evidente que $f(\phi) = \phi$. Por outro lado, a relação $x \in A$ implica a relação $f(x) \in f(A)$; e, se $y \in f(A)$, então, existe pelo menos um elemento $x \in A$, tal que: $y = f(x)$. E aqui cabe uma observação da maior importância:

— A relação $f(x) \in f(A)$ não implica a relação $x \in A$.

Exemplos: Para tornar bem claras estas noções preliminares, observemos a fig. 1, na qual estamos representando, graficamente, uma função $f(x)$, que transforma o intervalo fechado $X = [a, b]$, do eixo dos x, no intervalo fechado $Y = [c, d]$, do eixo dos y.

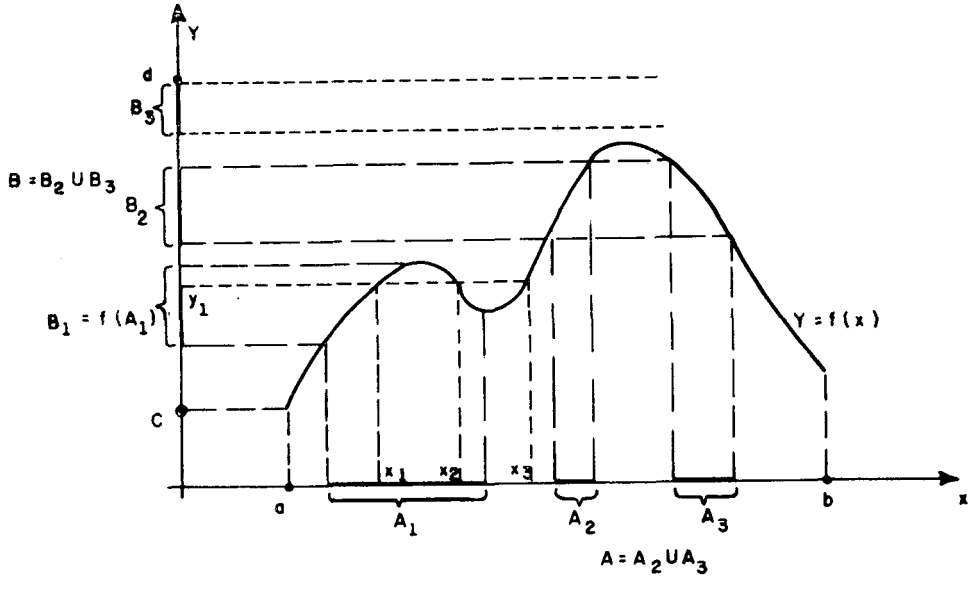


fig. 1

Podemos notar, pelo gráfico, que o intervalo fechado, A_1, contido em X, é transformado no intervalo fechado $f(A_1)$, contido em Y. Qualquer ponto, x_1, de A_1, tem sua imagem, $y_1 = f(x_1)$, em $f(A_1)$; dado $y_1 \in f(A_1)$, existem dois elementos, x_1, e x_2, de A_1, tais que $y_1 = f(x_1) = f(x_2)$. Entretanto, vemos que $f(x_3) = y_1 \in f(A_1)$, porém, $x_3 \notin A_1$, conforme observação anterior.

3.2 Definição 3 — Seja, ainda, f uma transformação de X *em* Y, e seja B um subconjunto de Y. Chama-se imagem completa inversa de B, relativamente a f — e representa-se por $f^{-1}(B)$ — ao conjunto de todos os elementos de X que têm as suas imagens, por meio de f, no conjunto B; em outras palavras, $f^{-1}(B)$ é o subconjunto de X tal que: $x \in f^{-1}(B)$ se e somente se $f(x) \in B$.

Para deixar bem clara a definição acima, observemos que:

$$a)\ x \in f^{-1}(B) \text{ implica } f(x) \in B\ ;$$

$$b)\ f(x) \in B \text{ implica } x \in f^{-1}(B)\ ;$$

$$c)\ x \notin f^{-1}(B) \text{ implica } f(x) \notin B\ ;$$

$$d)\ f(x) \notin B \text{ implica } x \notin f^{-1}(B)\ .$$

Conforme ficou subentendido anteriormente, a imagem completa inversa, $f^{-1}(y)$, de um elemento qualquer $y \in Y$, pode ser constituída por um só elemento $x \in X$, por vários, por uma infinidade, ou por nenhum. Nessas condições, o símbolo f^{-1} não indica uma *transformação*, no sentido da correspondência unívoca, inicialmente definida.

É evidente que $f^{-1}(\phi) = \phi$; entretanto, podemos ter $f^{-1}(B) = \phi$, sem que B seja o conjunto vazio. Nessas condições, se f define uma transformação de X *em* Y e $A = f^{-1}(B)$, não podemos concluir que $f(A) = B$, mas, apenas, que $f(A) \subseteq B$; posto que pode haver algum elemento $y \in B$ para o qual a relação $y = f(x)$ não tenha lugar para nenhum elemento $x \in X$.

Todavia, se f define uma transformação de X *sobre* Y, a igualdade $A = f^{-1}(B)$ implica a igualdade $f(A) = B$, como se poderá confirmar facilmente.

Cabe, então, a pergunta: e a recíproca, será verdadeira? Em outras palavras: se f define uma transformação de X *sobre* Y, e se $f(A) = B$, podemos concluir que $f^{-1}(B) = A$? A resposta é: não.

De fato, se $x \in A$, então, $f(x) \in f(A)$, e, em virtude da hipótese, $f(x) \in B$. Assim, $x \in f^{-1}(B)$, o que significa que $A \subseteq f^{-1}(B)$. Por outro

lado, se $x \in f^{-1}(B)$, resulta que $f(x) \in B$ e, como $B = f(A)$, por hipótese, vem: $f(x) \in f(A)$; mas — e aqui está o esclarecimento — desta última relação não podemos concluir que $x \in A$, ou seja, que $f^{-1}(B) \subseteq A$.

Para finalizar o parágrafo, vamos resumir em destaque esses importantes resultados: Seja f uma transformação de X *em* Y, $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$. Então:

$$a) \quad \text{Se } f^{-1}(B) = A, \text{ resulta : } f(A) = f[f^{-1}(B)] \subseteq B \tag{1}$$

$$b) \quad \text{Se } f(A) = B, \text{ resulta : } f^{-1}(B) = f^{-1}[f(A)] \supseteq A \tag{2}$$

Note-se, ainda, que a inclusão, na parte final de (1), se torna em igualdade, quando f for uma transformação de X *sobre* Y.

Exemplos: Tudo o que foi dito antes poderá ficar bem claro se examinarmos, novamente, a figura 1. As relações a), b), c) e d) podem ser vistas, confrontando-se os conjuntos B_2 e $f^{-1}(B_2) = A_2 \cup A_3$, alí assinalados. Para o conjunto não-vazio, B_3, temos $f^{-1}(B_3) = \phi$, porquanto nenhum ponto de X tem o seu transformado em B_3. Além disso, tomando $B = B_2 \cup B_3$, vemos que $f^{-1}(B) = A = A_2 \cup A_3$; e como $f(A) = B_2$, vem: $f(A) \subset B$. Finalmente, para o conjunto A_2, tem-se: $f(A_2) = B_2$; entretanto $f^{-1}(B_2) \neq A_2$, posto que $f^{-1}(B_2) = A_2 \cup A_3$. É válida, apenas, a inclusão $A_2 \subseteq f^{-1}(B_2)$.

3.3 Definição 4 — Diz-se que $y = f(x)$ é uma transformação *biunívoca* de X *em* Y, se todo emelento $y \in Y$ é o transformado, quando muito, de um único elemento $x \in X$.

De acordo com essa definição, o conjunto $f^{-1}(y)$, para cada $y \in Y$, ou é vazio, ou é constituído de um só elemento $x \in X$. Além disso, se tivermos $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$, a igualdade $x_1 = x_2$ implicará a igualdade $y_1 = y_2$, e vice-versa. Conseqüentemente, a desigualdade $x_1 \neq x_2$ implicará $y_1 \neq y_2$, e vice-versa.

Definição 4' — Quando cada elemento $y \in = Y$ é o transformado, por meio de f, de um só elemento $x \in X$, diz-se que f transforma X *sobre* Y, de uma maneira biunívoca; ou que f é uma transformação biunívoca de X *sobre* Y.

Nessas condições, dado qualquer $y \in Y$ existe um único elemento $x \in X$ tal que $y = f(x)$. Fica definida, pois, uma transformação (no sentido exato da palavra) $x = f^{-1}(y)$ — denominada transformação inversa da transformação $y = f(x)$ —, e que transforma Y *sobre* X de modo biunívoco.

Convém observar, ainda, que, sendo $y = f(x)$ uma transformação biunívoca de X *sobre* Y, e $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$, as igualdades $B = f(A)$ e $A = f^{-1}(B)$ implicam-se mutuamente. Assim, as relações (1) e (2) do parágrafo anterior se transformam em:

$$f[f^{-1}(B)] = B \tag{1'}$$

$$f^{-1}[f(A)] = A \tag{2'}$$

Nota: Na demonstração dos teoremas seguintes, convém ter presentes as observações a), b), c) e d) do citado parágrafo.

** 3.4 — Teorema n.º 1 — Seja f uma transformação de X *em* Y; e sejam os conjuntos $B_1 \subset B_2 \subset Y$. Então:

$$f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2) \tag{1}$$

Demonstração: Se $x \in f^{-1}(B_1)$, resulta que $f(x) \in B_1$ e, conseqüentemente, $f(x) \in B_2$. Logo, $x \in f^{-1}(B_2)$, o que prova a inclusão (tese).

** 3.5 — Teorema n.º 2 — Seja f uma transformação de X em Y, e $\mathcal{B} = \{B_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ uma família (finita ou infinita — numerável ou não) de subconjuntos de Y. Então:

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma\right) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} f^{-1}(B_\gamma) \tag{2}$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma\right) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f^{-1}(B_\gamma) \tag{3}$$

Demonstração: Representemos, para maior simplicidade, o primeiro e o segundo membros de (2) — ou de (3) — por A_1 e A_2, respectivamente.

1) Consideremos a relação (2). Se $x \in A_1$, resulta que $f(x) \in \bigcup_\gamma B_\gamma$, ou seja, $f(x) \in B_\gamma$ para algum valor de γ, pelo menos. Então, $x \in f^{-1}(B_\gamma)$, ou seja, $x \in \bigcup_\gamma f^{-1}(B_\gamma)$, de onde se conclui: $A_1 \subseteq A_2$.

Analogamente, se $x \in A_2$, então, $x \in f^{-1}(B_\gamma)$, para algum valor de γ. Nessas condições, $f(x) \in B\gamma$ e também $f(x) \in \bigcup_\gamma B_\gamma$. Segue-se, daí, que $x \in f^{-1}\left(\bigcup_\gamma B_\gamma\right)$, isto é: $A_2 \subseteq A_1$.

Conseqüentemente: $A_1 = A_2$.

2) Consideremos, agora a relação (3). Se $x \in A_1$, $f(x) \in \bigcap_\gamma B\gamma$ e, portanto, $f(x) \in B_\gamma$, para todos os valores de γ. Mas, isto significa que $x \in f^{-1}(B_\gamma)$, para todo γ; vale dizer: $x \in \bigcap_\gamma f^{-1}(B_\gamma)$. Assim: $A_1 \subseteq A_2$.

Analogamente, se $x \in A_2$, concluimos, sucessivamente: $x \in f^{-1}(B_\gamma)$, para todo γ; $f(x) \in B_\gamma$, para todo γ; $f(x) \in \bigcap_\gamma B_\gamma$ e $x \in f^{-1}\left(\bigcap_\gamma B_\gamma\right)$; isto é: $A_2 \subseteq A_1$.

Conseqüentemente: $A_1 = A_2$.

O teorema fica, pois, inteiramente demonstrado.

** 3.6 — Teorema n.º 3 — Seja f uma transformação de X *em* Y, e sejam B_1 e B_2 dois subconjuntos de Y. Então:

$$f^{-1}(B_1 - B_2) = f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2) \tag{4}$$

Demonstração: Representemos, ainda, os dois membros de (4) por A_1 e A_2, respectivamente.

Supondo $x \in A_1$, temos, sucessivamente: $f(x) \in (B_1 - B_2)$; $f(x) \in B_1$ e $f(x) \notin B_2$; $x \in f^{-1}(B_1)$ e $x \notin f^{-1}(B_2)$ $x \in [f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2)]$. Assim: $A_1 \subseteq A_2$.

Do mesmo modo, suponto $x \in A_2$, resultam as relações: $x \in f^{-1}(B_1)$ e $x \notin f^{-1}(B_2)$; $f(x) \in B_1$ e $f(x) \notin B_2$; $f(x) \in (B_1 - B_2)$; $x \in f^{-1}(B_1 - B_2)$. Portanto: $A_2 \subseteq A_1$.

Conseqüentemente. $A_1 = A_2$, como se queria demonstrar.

Observações: 1 — De (3), concluímos que, se $B_1 \cap B_2 = \phi$, então:

$$f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) = \phi$$

posto que o primeiro membro se reduz a $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(\phi) = \phi$.

2) Se E é o conjunto fundamental (que contém todos os outros) e f é uma transformação de E em si mesmo, então, de (4), resulta:

$$f^{-1}(E - B) = f^{-1}(E) - f^{-1}(B)$$

e como $f^{-1}(E) = E$, vem:

$$f^{-1}(E - B) = E - f^{-1}(B),$$

ou seja: a imagem completa inversa do complementar de um conjunto é o complementar da imagem completa inversa desse conjunto.

3) A imagem completa inversa, $f^{-1}(B)$, de um subconjunto $B \subseteq Y$, também recebe o nome de "sub-imagem" do conjunto B, em relação a f. Daqui por diante, usaremos essa nova denominação para comodidade de linguagem.

3.7 — Consideremos, novamente, uma função unívoca, $y = f(x)$, definida no conjunto X e tomando "valores" no conjunto Y. Indiquemos por:

a) $\mathcal{N}$, um sistema qualquer de subconjuntos de Y.

b) $f^{-1}(\mathcal{N})$, o sistema de todas as sub-imagens dos conjuntos de $\mathcal{N}$; isto é, o sistema de todos os conjuntos $f^{-1}(B)$, tais que $B \in \mathcal{N}$.

Dessas definições, decorre que a relação $B \in \mathcal{N}$ implica a relação $f^{-1}(B) \in f^{-1}(\mathcal{N})$, e vice-versa. Além disso, se $A \in f^{-1}(\mathcal{N})$, existe $B \in \mathcal{N}$ tal que $A = f^{-1}(B)$.

Os cinco teoremas que seguem, referem-se aos conjuntos anteriormente definidos:

** 3.8 — Teorema n.º 4 — Se $\mathcal{N}$ é um anel então, $f^{-1}(\mathcal{N})$ é um anel.

Demonstração: Sejam A_1 e A_2 dois conjuntos quaisquer de $f^{-1}(\mathcal{N})$. Então, por definição, existem os conjuntos B_1 e B_2, pertencentes a $\mathcal{N}$, tais que:

$$A_1 = f^{-1}(B_1) \quad \text{e} \quad A_2 = f^{-1}(B_2)$$

Desejamos provar que:

$$a) \qquad (A_1 \cap A_2) \in f^{-1}(\mathcal{N})$$

$$b) \qquad (A_1 \triangle A_2) \in f^{-1}(\mathcal{N})$$

Ora, tendo em vista (3.5), podemos escrever:

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$

ou seja:
$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = A_1 \cap A_2$$

Como $\mathcal{N}$ é um anel, resulta que $B = B_1 \cap B_2$ pertence a $\mathcal{N}$. Conseqüentemente, em virtude da definição:

$$f^{-1}(B) \in f^{-1}(\mathcal{N})$$

isto é:
$$(A_1 \cap A_2) \in f^{-1}(\mathcal{N}) \tag{1}$$

Do mesmo modo, tendo em conta (3.6), resulta:

$$f^{-1}(B_1 - B_2) = f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2)$$

ou, pondo $B = B_1 - B_2$:
$$f^{-1}(B) = A_1 - A_2$$

Como $\mathcal{N}$ é um anel, temos que $B \in \mathcal{N}$, e, daí:

$$f^{-1}(B) \in f^{-1}(\mathcal{N})$$

ou seja:
$$(A_1 - A_2) \in f^{-1}(\mathcal{N}) \tag{2}$$

Ainda em virtude de (3.5), podemos escrever:

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2),$$

ou, fazendo $B = B_1 \cup B_2$:

$$f^{-1}(B) = A_1 \cup A_2$$

Sendo $\mathcal{N}$ um anel, $B \in \mathcal{N}$, donde se conclui que $f^{-1}(B) \in f^{-1}(\mathcal{N})$, isto é:

$$(A_1 \cup A_2) \in f^{-1}(\mathcal{N})$$

Finalmente, lembrando que $A_1 \triangle A_2 = (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_1)$ e notando que, de acordo com (2) e (3), a diferença e a união, de dois conjuntos de $f^{-1}(\mathcal{N})$, também pertencem a este conjunto, resulta:

$$(A_1 \triangle A_2) \in f^{-1}(\mathcal{N})$$

Esta última relação, juntamente com a (1), demonstram a tese.

** 3.9 — Teorema n.º 5 — Se $\mathcal{N}$ é uma álgebra, então, $f^{-1}(\mathcal{N})$ é uma álgebra.

Demonstração: Sendo $\mathcal{N}$ uma álgebra, é um anel com uma unidade. Portanto $f^{-1}(\mathcal{N})$ é um anel, de acordo com o teorema anterior. Basta provar, então, que esse anel possui uma unidade.

Seja, pois, E, a unidade de $\mathcal{N}$. Posto que $E \in \mathcal{N}$, vem:

$$E' = f^{-1}(E) \in f^{-1}(\mathcal{N})$$

Vamos provar que E' é a unidade de $f^{-1}(\mathcal{N})$, isto é, vamos provar que, dado um elemento qualquer: A, de $f^{-1}(\mathcal{N})$, tem-se:

$$E' \cap A = A$$

Ora, dado A, existe $B \in \mathcal{N}$ tal que $A = f^{-1}(B)$. Desde que $E \cap B = B$ resulta, em virtude de (3.5):

$$f^{-1}(E) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(B)$$

ou seja:

$$E' \cap A = A$$

Assim, E' é a unidade do anel $f^{-1}(\mathcal{N})$, que resulta ser, pois, uma álgebra.

** 3.10 — Teorema n.º 6 — Se $\mathcal{N}$ é uma B-álgebra, então, $f^{-1}(\mathcal{N})$ é uma B-álgebra.

Demonstração: Sendo $\mathcal{N}$ uma B-álgebra, é uma álgebra gozando da seguinte propriedade: "se o sistema numerável de conjuntos $\{B_n\}$ é tal que $B_n \in \mathcal{N}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, então, o conjunto $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ pertence a $\mathcal{N}$".

Posto que, em face do teorema anterior, $f^{-1}(\mathcal{N})$ é uma álgebra, basta provar que essa álgebra também goza da propriedade que acabamos de citar.

Seja $\{A_n\}$ um sistema numerável de conjuntos de $f^{-1}(\mathcal{N})$. Então, existe um sistema numerável, $\{B_n\}$, de conjuntos de $\mathcal{N}$, tais que:

$$f^{-1}(B_n) = A; \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Tendo em vista (3.5), podemos escrever:

$$f^{-1}\left(\bigcup_n B_n\right) = \bigcup_n f^{-1}(B_n)$$

Fazendo $B = \bigcup_n B_n$ e $A = \bigcup_n A_n$, vem:

$$f^{-1}(B) = \bigcup_n A_n = A \tag{1}$$

Entretanto, como $\mathcal{N}$ é uma B-álgebra, resulta que $B \in \mathcal{N}$. Conseqüentemente, de (1), obtemos:

$$A \in f^{-1}(\mathcal{N})$$

Assim, $f^{-1}(\mathcal{N})$ é uma B-álgebra, como queríamos demonstrar.

Observação: Se $\mathcal{N}$ fosse o conjunto de *todos* os subconjuntos de Y, então, as hipóteses dos três teoremas, que acabamos de demonstrar, estariam, seguramente, satisfeitas, isto é, $\mathcal{N}$ seria, ao mesmo tempo, um anel e uma álgebra pelo fato de ser uma B-álgebra. Nessas condições, $f^{-1}(\mathcal{N})$ também seria um anel, uma álgebra e uma B-algebra.

** 3.11 — Teorema n.º 7 — O anel mínimo, construído sobre o sistema de todas as sub-imagens dos conjuntos do sistema $\mathcal{N}$, é igual ao sistema de todas as sub-imagens, dos conjuntos pertencentes ao anel mínimo construido sobre o sistema $\mathcal{N}$; isto é:

$$\mathcal{R}[f^{-1}(\mathcal{N})] = f^{-1}[\mathcal{R}(\mathcal{N})]$$

Demonstração: Por definição de anel mínimo, devemos ter

$$\mathcal{N} \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{N}) \tag{1}$$

Por outro lado, se $A \in f^{-1}(\mathcal{N})$, existe $B \in \mathcal{N}$ tal que

$$A = f^{-1}(B)$$

Porém, tendo em vista (1), $B \in \mathcal{R}(\mathcal{N})$ e $f^{-1}(B) \in f^{-1}[\mathcal{R}(\mathcal{N})]$

ou seja: $A \in f^{-1}[\mathcal{R}(\mathcal{N})]$

Logo: $f^{-1}(\mathcal{N}) \subseteq f^{-1}[\mathcal{R}(\mathcal{N})]$

Entretanto, de acordo com Teorema n.º 4, $f^{-1}[\mathcal{R}(\mathcal{N})]$ é um anel; e como este anel contém $f^{-1}(\mathcal{N})$, deve conter o anel mínimo sobre $f^{-1}(\mathcal{N})$; assim:

$$\mathcal{R}[f^{-1}(\mathcal{N})] \subseteq f^{-1}[\mathcal{R}(\mathcal{N})] \tag{2}$$

2) Vamos provar, agora, a inclusão no outro sentido. Inicialmente, consideremos $\mathcal{R}(\mathcal{N})$ dividido em dois subconjuntos assim definidos:

1.º — $\mathcal{R}'$, formado por todos os subconjuntos B, tais que

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{R}[f^{-1}(\mathcal{N})]$$

2.º — $\mathcal{R}'' = \mathcal{R}(\mathcal{N}) - \mathcal{R}'$

É fácil mostrar que $\mathcal{R}'$ é um anel. De fato, sejam os conjuntos

$$B_1 \in \mathcal{R}' \qquad \text{e} \qquad B_2 \in \mathcal{R}'$$

Então, pela definição de $\mathcal{R}'$, devemos ter:

$$f^{-1}(B_1) \in \mathcal{R}[f^{-1}(\mathcal{N})] \quad \text{e} \quad f^{-1}(B_2) \in \mathcal{R}[f^{-1}(\mathcal{N})]$$

e como $\mathcal{R}[f^{-1}(\mathcal{N})]$ é um anel, vem:

$$[f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)] \in \mathcal{R}[f^{-1}(\mathcal{N})]$$

$$[f^{-1}(B_1) \triangle f^{-1}(B_2)] \in \mathcal{R}[f^{-1}(\mathcal{N})]$$

Porém, em face de 3.5 e 3.6, as relações acima podem ser escritas, respectivamente:

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) \in \mathcal{R}[f^{-1}(\mathcal{N})]$$

$$f^{-1}(B_1 \triangle B_2) \in \mathcal{R}[f^{-1}(\mathcal{N})]$$

e estas duas últimas, por sua vez, implicam:

$$B_1 \cap B_2 \in \mathcal{R}' \quad \text{e} \quad B_1 \triangle B_2 \in \mathcal{R}'$$

Nessas condições, $\mathcal{R}'$ é um anel que contém $\mathcal{N}$, e, conseqüentemente, contém $\mathcal{R}(\mathcal{N})$. Portanto, $\mathcal{R}' = \mathcal{R}(\mathcal{N})$ e $\mathcal{R}'' = \phi$.

Seja, agora, $A \in \mathcal{f}^{-1}[\mathcal{R}(\mathcal{N})]$. Então, existe $B \in \mathcal{R}(\mathcal{N})$ tal que $A = \mathcal{f}^{-1}(B)$. Porém, pelo fato que foi anteriormente demonstrado, resulta:

$$A \in \mathcal{R}[\mathcal{f}^{-1}(\mathcal{N})]$$

vale dizer:

$$\mathcal{f}^{-1}[\mathcal{R}(\mathcal{N})] \subseteq \mathcal{R}[\mathcal{f}^{-1}(\mathcal{N})] \tag{3}$$

Combinando (2) e (3), concluímos, finalmente:

$$\mathcal{R}[\mathcal{f}^{-1}(\mathcal{N})] = \mathcal{f}^{-1}[\mathcal{R}(\mathcal{N})]$$

como se queria demonstrar.

**3.12 — Teorema n.º 8 — A B-álgebra mínima, construída sobre o sistema de todas as sub-imagens dos conjuntos do sistema $\mathcal{N}$ é igual ao sistema de todas as sub-imagens, dos conjuntos pertencentes à B—álgebra mínima construída sobre o sistema $\mathcal{N}$; isto é:

$$\mathcal{B}[\mathcal{f}^{-1}(\mathcal{N})] = \mathcal{f}^{-1}[\mathcal{B}(\mathcal{N})]$$

Demonstração: A demonstração deste teorema é inteiramente análoga à demonstração do teorema anterior, com base, agora, no Teorema n.º 6; bastando substituir $\mathcal{R}$ por $\mathcal{B}$ e mudar as expressões "anel" e "anel-mínimo" por "B-álgebra" e "B-álgebra mínima", respectivamente.

CAPÍTULO 4.º — MEDIDAS EM SEMI-ANÉIS. CONTINUAÇÃO DE UMA MEDIDA DE UM SEMI-ANEL PARA O ANEL MÍNIMO CONSTRUÍDO SOBRE ELE

4.1 — No capítulo primeiro, ao introduzirmos a noção de medida, no plano, partimos da noção de medida ordinária (área) de um retângulo, e, mediante sucessivas generalizações, estendemos essa noção para uma classe bem mais ampla de conjuntos do plano.

Os resultados obtidos, bem como os métodos usados, tem um caráter inteiramente geral, e podem ser aplicados para medidas definidas sobre conjuntos arbitrários, sem mudanças essenciais.

O primeiro passo, ao construir a medida sobre um plano, consistiu em generalizar o conceito de medida, de um retângulo, para conjuntos elementares. No presente capítulo, consideraremos, em termos abstratos, o análogo desse problema.

4.2 — Definição 1 — A função de conjunto, $m(A)$, é chamada uma medida, se ela satisfaz às seguintes condições:

M.1 — o domínio de definição, $\mathcal{S}_m$, da função $m(A)$, é um semi-anel;

M.2 — os valores de $m(A)$ são números reais não negativos; e

M.3 — a função $m(A)$ é *aditiva*, isto é, para qualquer decomposição finita

$$A = \bigcup_k A_k$$

do conjunto $A \in \mathcal{S}_m$, em conjuntos $A_k \in \mathcal{S}_m$, vale a igualdade:

$$m(A) = \sum_k m(A_k)$$

Observação: Da decomposição $\phi = \phi \cup \phi$ segue-se que $m(\phi) = 2\, m(\phi)$ ou seja, $m(\phi) = 0$.

4.3 — Teorema n.º 1 — Seja m uma medida definida sobre algum semi-anel $\mathcal{S}_m$. Se os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e A pertencem a $\mathcal{S}_m$; $A_k \subseteq A \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$ e $A_i \cap A_j = \phi$, se $i \neq j$,

então:
$$\sum_{k=1}^{n} m(A_k) \leqslant m(A)$$

Demonstração: Desde que $\mathcal{S}_m$ é um semi-anel, existe, de acordo com o lema do parágrafo (2.6), a decomposição

$$A = \bigcup_{k=1}^{s} A_k\,; \quad s \geqslant n \quad \text{e} \quad A_k \in \mathcal{S}_m\,; \quad k = 1, 2, \ldots, s$$

onde os n primeiros conjuntos coincidem com os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Como a medida é aditiva e não negativa, resulta:

$$m(A) = \sum_{k=1}^{s} m(A_k) \geqslant \sum_{k=1}^{n} m(A_k)\,,$$

como se queria demonstrar.

4.4 — Teorema n.º 2 — Se $A_1, A_2, \ldots, T_n$ e A pertencem a $\mathcal{S}_m$ e

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} A_k \quad ,$$

então:
$$m(A) \leqslant \sum_{k=1}^{n} m(A_k)$$

Demonstração: Pelo lema do parágrafo (2.7), podemos achar um sistema de conjuntos, B_t, de S_m, dois a dois disjuntos, tais que cada um sistema de conjuntos, $B_1, B_2, \ldots, B_t$, de $\mathcal{S}_m$, dois a dois disjuntos, tais

que cada um dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e A pode ser representado como a união de alguns dos conjuntos B_s:

$$A = \bigcup_{s \in M_o} B_s \qquad \text{e} \qquad A_K = \bigcup_{s \in Mk} B_s \,;\; k = 1, \ldots, n$$

onde M_o e M_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ representam subconjuntos do conjunto dos índices $1, 2, \ldots, t$. Além disso, cada índice $s \in M_o$, também pertence a um, pelo menos, dos conjuntos M_k.

Nessas condições, cada termo da soma

$$\sum_{s \in M_o} m(B_s) = m(A)$$

aparece uma vez, pelo menos (e no máximo n vezes), na dupla soma

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{s \in Mk} m(B_s) = \sum_{k=1}^{n} m(A_k)$$

Portanto: $$m(A) \leqslant \sum_{k=1}^{n} m(A_k)$$

Corolário: Se $n = 1$, tem-se:

$$A \subseteq A_1 \quad \text{e} \quad m(A) \leqslant m(A_1)$$

4.5 — Definição 2 — Diz-se que a medida $\mu(A)$, definida sobre o semi-anel $\mathcal{S}_\mu$, é uma *continuação* da medida $m(A)$, definida sobre o semi-anel $\mathcal{S}_m$, se $\mathcal{S}_m \subseteq \mathcal{S}_\mu$ e, para todo $A \in \mathcal{S}_m$, vale a igualdade:

$$\mu(A) = m(A)$$

Teorema n.º 3 — Toda medida $m(A)$, definida sobre o semi-anel $\mathcal{S}_m$, tem uma e somente uma continuação, $\mu(A)$, tendo para domínio de definição o anel mínimo $\mathcal{R}(\mathcal{S}_m)$

Demonstração: De acordo com o Teorema n.º 3 — § 2.8 — cada conjunto $A \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_m)$ admite uma decomposição finita

$$A = \bigcup_{k=1}^{s} B_k \;\; ; \;\; B_K \in \mathcal{S}_m \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

Ponhamos, por definição

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{n} m(B_k) \tag{2}$$

É fácil de ver que a quantidade $\mu(A)$, assim definida, não depende da decomposição (1). De fato, considerando as duas decomposições

$$A = \bigcup_{i=1}^{m} B_i = \bigcup_{j=1}^{n} C_j$$

onde $B_i \in \mathcal{S}_m$ e $B_j \in \mathcal{S}_m$, façamos $D_{ij} = B_i \cap C_j$. Tendo em vista que os conjuntos D_{ij} são, dois a dois, disjuntos; e levando em conta que

$$A = \bigcup_i B_i = \bigcup_j C_j = \bigcup_{i,j} D_{ij}$$

a aditividade das medidas nos dá:

$$\sum_i m(B_i) = \sum_{i,j} m(D_{ij}) = \sum_j m(C_j)$$

o que prova que as duas decomposições conduzem ao mesmo resultado, $\mu(A)$.

O fato de que a função $\mu(A)$, dada pela equação (2), é não negativa e aditiva, é óbvio. Além disso, se $A \in \mathcal{S}_m$, tem-se: $\mu(A) = m(A)$. Assim, fica provada a existência de uma continuação, $\mu(A)$, da medida $m(A)$.

Para demonstrar a sua unicidade, consideremos uma outra continuação, μ^* sobre $\mathcal{R}(\mathcal{S}_m)$. Seja $A \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_m)$. Então, existe a decomposição

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} B_k \quad ; \quad B_k \in \mathcal{S}_m \, , \qquad\qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

e como μ^* deve ser aditiva, vem:

$$\mu^*(A) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(B_k) = \sum_{k=1}^{n} m(B_k) = \mu(A) \, ,$$

ou seja, a medida μ^* coincide com a medida μ. O teorema, assim, está inteiramente demonstrado.

Observação: A conexão entre este teorema e a construção realizada no capítulo 2.º, aparece com evidência, se notarmos o seguinte: a medida ordinária, $m(R)$, estava definida no conjunto dos retângulos, que é um semi-anel; e, mediante uma definição análoga à qual foi dada pela equação (2), essa medida foi continuada sobre o sistema dos conjuntos elementares, o qual representa o anel mínimo sobre o semi-anel dos retângulos.

CAPÍTULO 5.º — COMPLETA ADITIVIDADE. O PROBLEMA GERAL DA CONTINUAÇÃO DE MEDIDAS

5.1 — Como já houve ocasião de observar, em muitos casos teremos de considerar a união de um número infinito numerável de conjuntos, e a condição de atividade, imposta às medidas, pela Definição 1 do capítulo anterior, torna-se insuficiente. É natural, portanto, substitui-la pela condição mais forte da σ-aditividade.

Definição 1 — A medida μ é chamada completamente aditiva (ou σ-aditiva) se, quaisquer que sejam os conjuntos A, A_1, A_2, ..., A_n, ..., pertencentes ao seu domínio de definição $\mathcal{S}_\mu$, e satisfazendo às condições

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \qquad \text{e} \qquad A_i \cap A_j = \phi \quad \text{se} \quad i \neq j,$$

for válida a igualdade:

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

A medida de Lebesgue, construída para conjuntos planos, no capítulo 1.º, é σ-aditiva.

Um exemplo de medida σ-aditiva, de uma espécie inteiramente diferente, pode ser construído do seguinte modo:

Seja $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ um arbitrário conjunto numerável de pontos, sobre um eixo. Associemos a cada elemento $x_n \in X$ um número $p_n > 0$, de modo que $\sum_{1}^{\infty} p_n = 1$.

Tomemos como domínio $\mathcal{S}_\mu$ o sistema de todos os subconjuntos de X, que é semi-anel (por ser uma B-álgebra). Para cada $A \subseteq X$ (ou $A \in \mathcal{S}_\mu$) ponhamos

$$\mu(A) = \sum_{x_n \in A} p_n$$

É fácil constatar que $\mu(A)$ é uma medida σ-aditiva, sendo, ainda, $\mu(X) = 1$.

Vejamos, agora, um exemplo de medida que é aditiva, mas não σ-aditiva. Seja X o conjunto de todos os pontos racionais do intervalo fechado $[0, 1]$. Tomemos, como domínio $\mathcal{S}_\mu$, o sistema de todos os conjuntos, que são a interseção de X com algum outro intervalo, arbitrário, contido no intervalo $[0, 1]$; em outras palavras, se a e b são dois pontos quaisquer do intervalo $[0, 1]$, o conjunto A, dos pontos racionais do intervalo de extremos a e b, $a \leqslant b$, pertencentes a $\mathcal{S}_\mu$; e se o conjunto $A \in \mathcal{S}_\mu$, ele pode ser obtido dessa maneira. É fácil ver que $\mathcal{S}_\mu$ é um semi-anel.

Para cada conjunto A, assim definido, ponhamos:

$$\mu(A) = b - a$$

Nessas condições, $\mu(A)$ é uma medida (logo, aditiva). Entretanto, essa medida não é σ-aditiva. Realmente, $X \in \mathcal{S}_\mu$ e, por definição.

$$\mu(X) = 1 - 0 = 1$$

Entretanto, o conjunto dos pontos, x_i, de X, é numerável; e como o ponto racional x_j é um intervalo degenerado contido no intervalo $[0, 1]$, resulta que o conjunto A_i, constituído pelo único elemento x_i, pertence a $\mathcal{S}_\mu$. Assim, $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Porém, $\mu(A_i) = 0$, para todo valor de i, resultando:

$$1 = \mu(X) \neq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = 0$$

*5.2 — Teorema n.º 1 — Se a medida m, definida sobre o semianel $\mathcal{S}_m$, é σ-aditiva, então, a medida $\mu = r\,(m)$, obtida dela por continuação sobre o anel mínimo $\mathcal{R}(\mathcal{S}_m)$, é, também, σ-aditiva.

Demonstração: Sejam os conjuntos

$$A \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_m) \quad \text{e} \quad B_n \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_m); \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

tais que

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \tag{1}$$

e $B_s \cap B_r = \phi$, se $r \neq s$. Então, existem as decomposições finitas

$$A = \bigcup_{j=1}^{p} A_j \qquad \text{e} \qquad B_n = \bigcup_{i=1}^{q_n} B_{ni}\,; \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

onde o segundo membro, de cada igualdade, é uma união de conjuntos pertencentes a $\mathcal{S}_m$, dois a dois disjuntos. Façamos $C_{nij} = B_{ni} \cap A_j$. É fácil verificar que os conjuntos C_{nij} são, dois a dois, disjuntos, e pertencem, todos, a $\mathcal{S}_m$. Além disso, são válidas as igualdades

$$A_j = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{q_n} C_{nij}; \qquad j = 1, 2, \ldots, p$$

e

$$B_{ni} = \bigcup_{j=1}^{p} C_{nij}; \qquad n = 1, 2, 3, \ldots\,; \qquad i = 1, 2, \ldots, q_n$$

De fato, a inclusão do segundo membro, de cada uma delas, no respectivo primeiro membro, é óbvia. Além disso, se $x \in A_j$, $x \in A$ e, em virtude de (1), $x \in B_n$, para algum valor de n; donde $x \in C_{nij}$, ou seja: $A_j \subseteq \bigcup_n \bigcup_i C_{nij}$. De modo análogo, podemos ver que $B_{ni} \subseteq \bigcup C_{nij}$.

Portanto, tendo em vista que a medida m, sobre $\mathcal{S}_m$, é σ-aditiva, resulta:

$$m(A_j) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{q_n} m(C_{nij}) \tag{2}$$

e

$$m(B_{ni}) = \sum_{j=1}^{p} m(C_{nij}) \tag{3}$$

Por outro lado, em virtude da definição da medida μ, sobre $\mathcal{R}(\mathcal{S}_m)$, temos:

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^{p} m(A_j) \tag{4}$$

$$\text{e} \quad \mu(B_n) = \sum_{i=1}^{q_n} m(B_{ni}) \tag{5}$$

Ora, de (2) e de (4), resulta:

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{q_n} m(C_{nij}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{q_n} \sum_{j=1}^{p} m(C_{nij}),$$

que, em virtude de (3), nos dá:

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{q_n} m(B_{ni})$$

Porém, em face de (5), concluímos

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$$

como se desejava demonstrar.

*5.3 — Teorema n.º 2 — Se a medida μ é σ-aditiva, e os conjuntos $A, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ pertencem a $\mathcal{S}_\mu$; e se, além disso,

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

então:

$$\mu(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Demonstração: 1) Admitamos, inicialmente, que $\mathcal{S}_\mu$ seja um anel. Então, os conjuntos

$$B_n = (A \cap A_n) - \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k; \qquad n=1,2,3,\ldots$$

pertencem a $\mathcal{S}_\mu$. Além disso, tais conjuntos são, dois a dois, disjuntos; posto que $x \in B_n$ implica $x \notin B_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n-1)$.

Por outro lado, verificam-se as relações:

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \qquad \text{e} \qquad B_n \subseteq A_n$$

Da primeira, pela σ-aditividade da medida μ, tiramos:

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$$

Da segunda, em face do corolário do Teorema n.º 2 — § 4.4 — obtemos:

$$\mu(B_n) \leqslant \mu(A_n)$$

Portanto, concluímos:

$$\mu(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

2) Seja, agora, a medida m, σ-aditiva, definida sobre o semi-anel $\mathcal{S}_m$. Prolongando essa medida sobre o anel mínimo $\mathcal{R}(\mathcal{S}_m)$, obtemos uma medida μ, também σ-aditiva. Se os conjuntos A e A_n $(n = 1, 2, \ldots)$, pertencentes a $\mathcal{S}_m$, satisfazem à condição da hipótese, como eles também pertencentes $\mathcal{R}(\mathcal{S}_m)$, resulta, pela parte já demonstrada:

$$\mu(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Porém, tratando-se de conjuntos de $\mathcal{S}_m$, podemos substituir μ por m; assim:

$$m(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$$

O teorema está, pois, completamente demonstrado.

CAPÍTULO 6.º — CONTINUAÇÃO — SEGUNDO LEBESGUE — DE UMA MEDIDA DEFINIDA SOBRE UM SEMI-ANEL COM UMA UNIDADE

6.1 — A construção, dada a seguir, representa, em termos abstratos, uma repetição da construção da medida de Lebesgue, feita para conjuntos planos, no capítulo primeiro.

6.2 — Seja uma medida σ-aditiva, m, definida sobre um semi-anel, $\mathcal{S}_m$, dotado de uma unidade, E; e seja $\mathcal{C}$ o sistema de todos os subconjuntos do conjunto E.

Vamos definir, para todos os conjuntos, A, de $\mathcal{C}$, duas funções, $\mu^*(A)$ e $\mu^*(A)$, do seguinte modo:

Definição 1 — Chama-se medida exterior do conjunto A, pertencente a $\mathcal{C}$, ao número real não negativo

$$\mu^*(A) = \inf_{A \subseteq \bigcup B_n} \left\{ \sum_n m(B_n) \right\}$$

onde $\bigcup_n B_n$ representa uma cobertura qualquer, do conjunto A, por meio de um sistema, finito ou numerável, de conjuntos $B_n \in \mathcal{S}_m$; e o conjunto numérico, entre chaves, se estende a todas as coberturas possíveis, do conjunto A, nos termos anteriores.

Definição 2 — Chama-se medida interior do conjunto A, pertencente ao conjunto $\mathcal{C}$, ao número real não negativo

$$\mu_* (A) = m (E) - \mu^* (E - A)$$

Definição 3 — O conjunto A, pertencente a $\mathcal{C}$, diz-se "mensurável segundo Lebesgue" (ou "L-mensurável"), se

$$\mu_* (A) = \mu^* (A),$$

e o valor comum, $\mu (A)$, dessas duas medidas, recebe o nome de "medida Lebesgue" do conjunto A.

Conseqüências: 1 — É óbvio que, se A é L-mensurável, seu complemento, $E - A$, também é L-mensurável.

** 2 — Teorema n.º 2 — § 5.3 — resulta que, para qualquer continuação σ-aditiva, μ_1, da medida m, vale a desigualdade:

$$\mu_* (A) \leqslant \mu_1 (A) \leqslant \mu^* (A); \qquad A \in \mathcal{C}$$

Realmente, se $A \subseteq \bigcup_n B_n$, onde $B_n \in \mathcal{S}_m$, o citado teorema permite escrever:

$$\mu_1 (A) \leqslant \sum_n \mu_1 (B_n) = \sum_n m (B_n)$$

donde:
$$\mu_1 (A) \leqslant inf \left\{ \sum_n m (B_n) \right\}$$

ou seja:
$$\mu_1 (A) \leqslant \mu^* (A)$$

Partindo, agora, de $\mu_1 (E - A) \leqslant \mu^* (E - A)$,

vem:
$$- \mu^* (E - A) \leqslant - \mu_1 (E - A)$$

ou seja:
$$\mu_1 (E) - \mu^* (E - A) \leqslant \mu_1 (E) - \mu_1 (E - A)$$

Porém, pela aditividade da medida μ_1, resulta:

$$\mu_1 (E) - \mu_1 (E - A) = \mu_1 (A),$$

e por ser, μ_1, uma continuação de m, vem:

$$\mu_1 (E) - \mu^* (E - A) = m (E) - \mu_* (E - A) = \mu^* (A)$$

Então:
$$\mu_* (A) \leqslant \mu_1 (A) \leqslant \mu^* (A),$$

conforme havíamos declarado.

3 — Das definições dadas, não podemos concluir, ainda, que a medida de Lebesgue, $\mu (A)$, é uma continuação σ-aditiva, da medida m.

Porém, da conseqüência anterior, resulta que, se uma tal medida for obtida, ela deverá ser igual — para os conjuntos L-mensuráveis (nos termos da definição 3) — à medida de Lebesgue, $\mu(A)$.

6.3 — A definição de mensurabilidade, segundo Lebesgue, pode ser também formulada, obviamente, do seguinte modo:

Definição 3 — O conjunto A, pertencente a $\mathcal{C}$, diz-se mensurável (segundo Lebesque) se

$$\mu^*(A) + \mu^*(E - A) = m(E)$$

6.4 — É de interesse usar, ao lado da medida inicial m, sua continuação, $m' = r(m)$, sobre o anel mínimo $\mathcal{R}(\mathcal{S}_m)$; continuação que, já sabemos, existe sempre e é única (Teorema n.º 3 — § 4.5). Decorre, daí, que a seguinte definição é equivalente à definição 1:

*Definição 1' — Chama-se medida exterior do conjunto A, pertencente a $\mathcal{C}$, ao número real não negativo

$$\mu^*(A) = \inf_{A \subseteq \cup B_n} \left\{ \sum_n m'(B_n) \right\}$$

onde, agora, $\bigcup_n B_n$ representa uma cobertura qualquer, do conjunto A, por meio de um sistema, finito ou numerável, de conjuntos $B_n \in \mathcal{R}(\mathcal{S})$.

Realmente, desde que a medida m' é σ-aditiva, qualquer soma da forma $\sum_n m'(B_n)$, onde $B_n \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_m)$, pode ser substituída por uma outra soma, igual a ela, da forma $\sum_{n,k} m(B_{nk})$, onde os conjuntos B_{nk} pertencem a $\mathcal{S}_m$; basta, para isso, considerar-se uma decomposição finita, de cada conjunto B_n, em conjuntos de $\mathcal{S}_m$:

$$B_n = \bigcup_{k=1}^{q_n} B_{nk}$$

$$\text{Posto que} \quad m'(B_n) = \bigcup_{k=1}^{q_n} m(B_{nk})$$

vem:

$$\sum_n m'(B_n) = \sum_n \sum_{k=1}^{q_n} m(B_{nk})$$

Por conseguinte, o ínfimo considerado na definição 1 é igual ao ínfimo considerado na Definição 1', e as duas definições se equivalem.

6.5 — Os seguintes teoremas, com ligeiras modificações na linguagem, já foram demonstrados, quando construímos a medida de Lebesgue, sobre o plano, no capítulo primeiro. As demonstrações, que lá foram dadas, podem ser adaptadas, palavra por palavra, ao caso geral aqui considerado. Portanto, não serão repetidas.

Teorema n.º 1 — Se $A \subseteq \bigcup_n A_n$, onde $\{A_n\}$ é um sistema, finito ou numerável, de conjuntos de $\mathcal{C}$, então:

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_n \mu^*(A_n)$$

Teorema n.º 2 — Se $A \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_m)$, então $\mu^*(A) = m'(A) = \mu_*(A)$, isto é, todos os conjuntos de $\mathcal{R}(\mathcal{S}_m)$ são L-mensuráveis; e, para eles, a medida de Lebesgue coincide com a medida $m' = r(m)$.

Teorema n.º 3 — Para a mensurabilidade — segundo Lebesgue — do conjunto $A \in \mathcal{C}$, a seguinte condição é necessária e suficiente: para qualquer $\varepsilon > 0$ existe um conjunto $B \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_m)$, tal que:

$$\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon$$

6.6 — Daqui por diante, indicaremos por $\mathcal{M}$ o sistema de todos os conjuntos de $\mathcal{C}$, que são L-mensuráveis. Vale, então, o seguinte:

* Teorema n.º 4 — O sistema $\mathcal{M}$, dos conjuntos L-mensuráveis, é um anel.

Demonstração: Desde que são sempre verdadeiras as igualdades

$$A_1 \cap A_2 = A_1 - (A_1 - A_2)$$

e

$$A_1 \cup A_2 = E - [(E - A_1) \cap (E - A_2)],$$

como facilmente se pode constatar, a demonstração do teorema se reduz à demonstração da seguinte propriedade: — Se $A_1 \in \mathcal{M}$ e $A_2 \in \mathcal{M}$, então:

$$A_1 - A_2 = A \in \mathcal{M}$$

Sejam, pois, os conjuntos L-mensuráveis A_1 e A_2. Então, qualquer que seja ϵ, existem os conjuntos B_1 e B_2, de $\mathcal{R}(\mathcal{S}_m)$, tais que

$$\mu_*(A_1 \triangle B_1) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{e} \qquad \mu^*(A_2 \triangle B_2) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Façamos $B = B_1 - B_2$; donde $B \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_m)$. A seguinte inclusão é verdadeira:

$$(A_1 - A_2) \triangle (B_1 - B_2) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$$

De fato, se x pertence ao primeiro membro, ou pertence a $(A_1 - A_2)$, sem pertencer a $(B_1 - B_2)$; ou pertence a $(B_1 - B_2)$, sem pertencer a $(A_1 - A_2)$. Admitamos verificada a primeira hipótese: então, $x \in A_1$ e $x \notin A_2$; além disso, como $x \notin (B_1 - B_2)$, ou $x \notin B_1$ — resultando que $x \in (A_1 \triangle B_1)$ — ou $x \in B_1$ e $x \in B_2$ — resultando que $x \in (A_2 \triangle B_2)$. Em qualquer caso, vemos que x pertence ao segundo membro.

Se admitirmos a segundo hipótese, um raciocínio inteiramente análogo nos levará à mesma conclusão final. Assim, o primeiro membro está, de fato, contido no segundo.

Usando, agora, o Teorema n.º 1 do parágrafo anterior, vem:

$$\mu^*(A \triangle B) \leqslant \mu^*(A_1 \triangle B_1) + \mu^*(A_2 \triangle B_2)$$

ou seja:

$$\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, em face do Teorema n.º 3, do citado parágrafo, concluimos que o conjunto $A = A_1 - A_2$ é L-mensurável. O teorema é, portanto, verdadeiro.

Observação: É óbvio que o conjunto E é a unidade do anel $\mathcal{M}$, que, por conseguinte, é uma álgebra de conjuntos.

Teorema n.º 5 — Sobre o sistema $\mathcal{M}$, a função $\mu(A)$ é aditiva.

Demonstração: A demonstração deste teorema é, palavra por palavra, uma repetição da demonstração do Teorema n.º 7, do capítulo primeiro.

Teorema n.º 6 — Sobre o sistema $\mathcal{M}$, dos conjuntos L-mensuráveis, a função $\mu(A)$ é σ-aditiva.

Demonstração: Sejam $A, A_1, A_2, \ldots, A_n \ldots$ conjuntos de $\mathcal{M}$ tais que:

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \qquad \text{e} \qquad A_i \cap A_j = \phi, \quad \text{se} \quad i \neq j.$$

Pelo Teorema n.º 1, podemos escrever:

$$\mu^* A \leqslant \sum_n \mu^*(A_n),$$

e como, para conjuntos de $\mathcal{M}$, $\mu^* = \mu$, resulta:

$$\mu(A) \leqslant \sum_n \mu(A_n) \tag{1}$$

Ainda pelo Teorema n.º 1, combinado com o Teorema n.º 5, para qualquer valor de N, temos:

$$\mu^*(A) \geqslant \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n)$$

ou seja:

$$\mu(A) \geqslant \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n)$$

Portanto, fazendo $N \to \infty$, vem:

$$\mu(A) \geqslant \sum_n \mu(A_n) \tag{2}$$

Combinando (1) e (2), resulta a tese.

Observação: Acabamos de demonstrar que a medida $\mu(A)$, definida sobre o sistema $\mathcal{M}$ — que contém o sistema $\mathcal{S}_m$ — é σ-aditiva e coincide, sobre $\mathcal{S}_m$, com a medida $m(A)$. Daí a seguinte definição:

Definição 4 — À função $\mu(A)$, definida sobre o sistema, $\mathcal{S}_\mu = \mathcal{M}$, dos conjuntos mensuráveis, e coincidindo, sobre este sistema, com a medida externa $\mu^*(A)$ —, dá-se o nome de "continuação, segundo Lebesgue, da medida $m(A)$", indicando-se: $\mu = L(m)$.

Teorema n.º 7 — O sistema $\mathcal{M}$, dos conjuntos L-mensuráveis, é uma álgebra de Borel, com a unidade E.

Demonstração: Desde que é sempre válida a relação

$$\bigcap_n A_n = E - \bigcup_n (E - A_n)$$

e lembrando que o complemento de um conjunto L-mensurável é, também, um conjunto L-mensurável, é suficiente mostrar o seguinte: "Se $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ pertencem a $\mathcal{M}$, então, $A = \bigcup_n A_n$ também pertence a $\mathcal{M}$"

A demonstração dessa propriedade já foi feita, no § 1.16 — Teorema n.º 8 — e pode ser preservada, literalmente, no caso geral que estamos estudando.

6.7 — Para finalizar este capítulo, acrescentaremos que, tal como ocorre no caso da medida de Lebesgue para conjuntos planos — construída no capítulo primeiro — a σ-aditividade da medida $\mu(A)$ implica sua continuidade. De modo mais preciso:

— Seja μ uma medida σ-aditiva, definida sobre uma B-álgebra.

a) Se os conjuntos A_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, pertencentes a essa B-álgebra, são tais que $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \supseteq A_n \supseteq \ldots$

e $$A = \bigcap_n A_n$$

então: $$\mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$$

b) Se os conjuntos A_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, pertencentes a essa B-álgebra, são tais que $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots$

$$\text{e} \qquad A = \bigcup_n A_n,$$

então: $$\mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$$

As demonstrações são idênticas às do Teorema n.º 10 — § 1.18 — e de seu corolário — § 1.19 —; por isso, não será necessário repetí-las.

3.ª PARTE

FUNÇÕES MENSURÁVEIS

CAPÍTULO 7.º — DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES BÁSICAS DAS FUNÇÕES MENSURÁVEIS

7.1 — Seja $y = f(x)$ uma função abstrata, definida no conjunto arbitrário, X, e tomando valores no conjunto, também arbitrário, Y. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ dois sistemas de subconjuntos de X e de Y, respectivamente. Diremos — em termos bastante gerais — que $f(x)$ é "$(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-mensurável", se a relação "$B \in \mathcal{B}$" implicar, sempre, a relação

$$"f^{-1}(B) \in \mathcal{A}".$$

Por exemplo, tomando para X e Y o conjunto dos números reais e para $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ o sistema de todos os conjuntos de Borel, sobre o eixo real, chegamos às funções B-mensuráveis (mensuráveis segundo Borel).

Entretanto, do ponto de vista da teoria da integração, é de importância básica o conceito de função real μ-mensurável (sendo X um conjunto, qualquer, de números reais, e Y o próprio eixo real), que se obtém quando $\mathcal{A}$ é o sistema de todos os conjuntos μ-mensuráveis, de X; e $\mathcal{B}$ é o sistema, $\mathcal{B}_1$, de todos os conjuntos de Borel, sobre o eixo real.

Devemos supor, ainda, que μ é uma medida σ-aditiva; e, para não introduzir complicações inúteis, convém admitir que seu domínio de definição, $S\mu$, é um semi-anel dotado de unidade, e que esta unidade é o próprio conjunto X.

Desde que, pela teoria exposta no capítulo 6, toda medida σ-aditiva, definida sobre um semi-anel dotado de unidade, pode ser continuada para alguma B-álgebra, não perderemos em generalidade, admitindo, de saída, que S_μ é uma B-álgebra. Nessas condições:

7.2 — Seja S_μ uma B-álgebra, tende para unidade o conjunto real X; e seja μ uma medida σ-aditiva, tendo como domínio de definição S_μ.

Definição 1 — Diz-se que a função real $f(x)$, definida no conjunto X, é μ-mensurável se, qualquer que seja o conjunto de Borel, B (sobre o eixo real), for válida a relação:

$$f^{-1}(B) \in S_\mu$$

Observação: A definição acima implica: $f^{-1}(\mathcal{B}_1) \subseteq S_\mu$; sendo $\mathcal{B}_1$ o sistema de todos os conjuntos de Borel sobre o eixo real. Em outras palavras: o sistema das sub-imagens de todos os conjuntos de Borel (sobre o eixo real), está contido em S_μ.

*** 7.3 — Lema n.º 1 — A B-álgebra mínima, $\mathcal{B}(S)$, construída sobre o sistema, S, de todas as semi-retas da forma $(-\infty, c)$, coincide com o sistema, $\mathcal{B}_1$, de todos os conjuntos de Borel, sobre o eixo real.

Demonstração: Designemos por S_1 o sistema de todos os intervalos fechados $[a, b]$, $a \leqslant b$, sobre o eixo real. Por definição, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}(S_1)$. Desejamos provar que $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}(S)$.

1) Dada a semi-reta $(-\infty, c) \in S$, podemos escrever:

$$(-\infty, c) = \left\{ \bigcup_{n=k}^{\infty} [-n, c] \right\} - [c, c]$$

onde $-k$ é o maior inteiro negativo menor que c. Como $S_1 \subseteq \mathcal{B}_1$, resulta:

$[c, c] \in \mathcal{B}_1$ e $[-n, c] \in \mathcal{B}_1$ $n = k, k+1, \ldots$

Porém, $\mathcal{B}_1$ é um B-álgebra, de onde resulta que $(-\infty, c) \in \mathcal{B}_1$. Assim, $S \subseteq \mathcal{B}_1$; e, por ser $\mathcal{B}(S)$ a B-álgebra mínima que contém S, concluímos:

$$\mathcal{B}(S) \subseteq \mathcal{B}_1 \tag{1}$$

2) Seja, agora, o intervalo fechado $[a, b] \in S_1$, $a \leqslant b$. Podemos escrever:

$$[a, b] = (-\infty, b) - (-\infty, a);$$

e como $S \subseteq \mathcal{B}(S)$, resulta que

$$[a, b] \in \mathcal{B}(S) \tag{2}$$

Além disso, seja $\{b_n\}$ uma sucessão monótona, não crescente, de pontos reais — onde $b_n > a$, para todo n — tal que $\lim_{n \to \infty} b_n = a$.

Então:

$$[a, a] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a, b_n]$$

Entretanto, em virtude de (2), qualquer que seja n, o intervalo $[a, b_n]$ pertence à B-álgebra $\mathcal{B}(S)$, de onde se deduz que

$$[a, a] \in \mathcal{B}(S) \tag{3}$$

De (2) e (3), tendo em vista a igualdade $[a, b] = [a, b] \cup [b, b]$ deduzimos:

$$[a, b] \in \mathcal{B}(S), \quad \text{ou seja:} \quad S_1 \subseteq \mathcal{B}(S).$$

Posto que $\mathcal{B}$ é a B-álgebra mínima que contém S_1, concluímos:

$$\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}(S) \tag{4}$$

De (1) e (4), vem, finalmente:

$$\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}(S) \qquad \text{c. q. d.}$$

Observação: O sistema dos conjuntos de Borel, $\mathcal{B}_1$, sobre o eixo real, é obtido, por definição, construindo-se a B-álgebra mínima sobre o sistema de todos os intervalos fechados $[a, b]$, $a \leqslant b$. Acabamos de ver, agora, que $\mathcal{B}_1$ pode ser obtido partindo-se do sistema de todas as semi-retas da forma $(-\infty, c)$. Podemos ver, facilmente, que, construíndo-se a B-álgebra mínima sobre o sistema das semi-retas da forma $(c, +\infty)$; ou sobre o sistema dos intervalos abertos (a, b), $a \leqslant b$; ou, ainda, sobre o sistema dos intervalos semi-abertos (à direita ou à esquerda) — obtem-se, em qualquer caso, o sistema $\mathcal{B}_1$.

** 7.4 — Teorema n.º 1 — A fim que a função $f(x)$ seja μ-mensurável, é necessário e suficiente que, para qualquer número real α, o conjunto $A_o = \{x: f \cdot (x) < \alpha\}$ seja μ-mensurável (isto é, pertença a S_μ).

Demonstração: a) A condição é necessária. De fato, seja a semi-reta

$$B = (-\infty, \alpha)$$

Se $x \in A_o$, devemos ter $f(x) < \alpha$, ou seja: $f(x) \in B$. Assim, por definição.

$$f^{-1}(B) = A_o$$

Entretanto, como B é um conjunto de Borel, e $f(x)$ é, por hipótese, mensurável, devemos ter: $A_o \in S_\mu$, ou seja o conjunto A_o é mensurável.

b) A condição é suficiente. Seja S o sistema de todas as semi-retas da forma $(-\infty; \alpha)$ e consideremos a B-álgebra mínima, $\mathcal{B}(S)$; construída sobre S. De acordo com o lema n.º 1, sendo $\mathcal{B}_1$ o sistema de todos os conjuntos de Borel, devemos ter:

$$\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}(S) \tag{1}$$

Por hipótese,

$$f^{-1}(S) \subseteq S_\mu \tag{2}$$

Ora, de acordo com o Teorema n.º 8 (§ 3.12), podemos escrever:

$$f^{-1}[\mathcal{B}(S)] = \mathcal{B}[f^{-1}(S)]$$

Porém, da inclusão (2), resulta:

$$\mathcal{B}[f^{-1}(S)] \subseteq \mathcal{B}(S_\mu)$$

ou seja:

$$f^{-1}[\mathcal{B}(S)] \subseteq \mathcal{B}(S_\mu) \tag{3}$$

Entretanto, sendo S_μ uma B-álgebra, devemos ter $\mathcal{B}(S_\mu) = S_\mu$. Assim, levando em conta (1) e (3), vem:

$$f^{-1}(\mathcal{B}_1) \subseteq S_\mu$$

Isto mostra, por definição, que $f(x)$ é mensurável.

**Corolário — A fim de que a função $f(x)$ — definida no conjunto (μ-mensurável) X — seja μ-mensurável, é necessário e suficiente que, para qualquer número real α, um dos conjuntos

$$A'_o = A'_o(\alpha) = \{x : f(x) \geqslant \alpha\}$$

$$A_1 = A_1(\alpha) = \{x : f(x) > \alpha\}$$

$$A'_1 = A'_1(\alpha) = \{x : f(x) \leqslant \alpha\}$$

seja μ-mensurável.

Demonstração: Que a condição é necessária, é óbvio, pois cada um dos conjuntos acima — qualquer que seja α — é a sub-imagem de um conjunto de Borel.

Vejamos que a condição — para cada conjunto — também é suficiente.

1) Sendo X mensurável, se A'_o for mensurável para todo α, resulta que seu complemento,

$$A_o = X - A'_o = \{x : f(x) < \alpha\},$$

será mensurável para todo α. Logo, de acordo com o teorema anterior, $f(x)$ será mensurável.

2) Se A_1 for mensurável para todo α, seu complemento $A'_1 = X - A_1$, também o será, e vice-versa. Admitamos, pois, para fixar idéias, que A_1 seja mensurável, para todo α. Façamos (sendo k inteiro positivo):

$$A_1\left(\alpha - \frac{1}{k}\right) = \left\{x : f(x) > \alpha - \frac{1}{k}\right\}$$

e consideremos, ainda, o conjunto $A'_1(\alpha)$. Desde que esses conjuntos são mensuráveis, o conjunto

$$P(\alpha, k) = A_1\left(\alpha - \frac{1}{k}\right) \cap A'_1(\alpha) = \left\{x : \alpha - \frac{1}{k} < f(x) \leqslant \alpha\right\}$$

também será mensurável (quaisquer que sejam α e k). Nessas condições, o conjunto

$$Q(\alpha) = \bigcap_{k=1}^{\infty} P(\alpha, k) = \{x : f(x) = \alpha\}$$

— por ser S_μ uma B-álgebra — será mensurável para todo α.

Finalmente, tendo em vista a igualdade

$$A_o = \{x : f(x) < \alpha\} = X - [A_1(\alpha) \cup Q(\alpha)],$$

resulta que A_o é mensurável para todo α; e que, pelo teorema anterior, $f(x)$ é mensurável. Em qualquer caso, a condição é, pois, suficiente.

* 7.5 — Lema n.º 2 — Se $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são funções μ-mensuráveis definidas em X, e conjunto

$$A = \{x : f_1(x) > f_2(x)\}$$

é μ-mensurável.

Demonstração: Para facilitar, admitamos que $f_1 < +\infty$ e $f_2 > -\infty$, em todo o conjunto X. Seja $\{a_k\}$ o conjunto dos números racionais, numerados arbitrariamente. Ponhamos:

$$A_k = \{x : f_1(x) \geqslant a_k\} \cap \{x : f_2 x < a_k\}$$

Vamos provar que: $$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

De fato, se $x \in \cup A_k$, $x \in A_k$ para algum valor de k, isto é:

$$f_1(x) \geqslant a_k \qquad \text{e} \qquad f_2(x) < a_k$$

e daí, $f_1(x) > f_2(x)$, ou seja: $x \in A$.

Reciprocamente, se $x \in A$, devemos ter

$$f_1(x) > f_2(x).$$

Logo, existe um número racional a_k, tal que

$$f_1(x) > a_k > f_2(x),$$

e isto significa que

$$x \in \{x : f_1(x) \geqslant a_k\} \qquad \text{e} \qquad x \in \{x : f_2(x) < a_k\}$$

ou seja: $x \in A_k$ e, conseqüentemente, $x \in \cap A_k$. Assim:

$$A = \cup A_k$$

Sendo A_k a interseção de dois conjuntos mensuráveis, é, também, mensurável. Daí resulta que o conjunto A, por ser a união de um sistema numerável de conjuntos mensuráveis, é mensurável (S_μ é uma B-álgebra), como queríamos provar.

7.6 — Teorema n.º 2 — Se $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são funções μ-mensuráveis, definidas no conjunto X, e c é uma constante, as funções abaixo são, todas, μ-mensuráveis:

1) $f_1 + c$ 2) $c \cdot f_1$ 3) $f_2 + f_1$

4) $|f_1|$ 5) $f_1 \cdot f_2$ 6) $\dfrac{f_1}{f_2}$ se $f_2 \neq o$

Demonstração: 1) Desde que

$$A_\alpha = \{x : f_1 + c > \alpha\} = \{x : f_1 > c - \alpha\}$$

e f_1 é mensurável, resulta que A_α é mensurável para todo α. Logo, $f_1 + c$ é mensurável.

2) Se $c > 0$, temos:

$$A_\alpha = \{x : c \cdot f_1 > \alpha\} = \left\{x : f_1 > \frac{\alpha}{c}\right\}$$

e, se $c < 0$, vem:

$$A_\alpha = \{x : c \cdot f_1 > \alpha\} = \left\{x : f_1 < \frac{\alpha}{c}\right\}$$

Posto que f_1 é mensurável, resulta, em qualquer caso, que A_α é mensurável para todo α. Logo, $c \cdot f_1$ é mensurável.

Para $c = 0$, a propriedade é óbvia.

3) Podemos escrever:

$$A_\alpha = \{x : f_1 + f_2 > \alpha\} = \{x : f_2 > \alpha - f_1\}$$

De acordo com 1) e 2), a função $\alpha - f_1$ é mensurável; e pelo lema n.º 2, o conjunto $\{x : f_2 > \alpha - f_1\}$ é mensurável. Assim, A_α é mensurável para todo α, ou seja: $f_1 + f_2$ é mensurável.

4) É evidente que

$$A_\alpha = \{x : |f_1| \geqslant \alpha\} = \begin{cases} X, \text{ se } \alpha < 0 \\ \{x : f_1 \geqslant \alpha\} \cup \{x : f_1 \leqslant -\alpha\}, \text{ se } \alpha \geqslant 0 \end{cases}$$

Assim, para qualquer valor de α, o conjunto A_α é mensurável, isto é, a função $|f_1|$ é mensurável.

5) Inicialmente, vejamos que f_1^2 é mensurável (com f_1). De fato, temos:

$$A_\alpha = \{x : f_1^2 \geqslant \alpha\} = \begin{cases} X & \text{se} \quad \alpha < 0 \\ \{x : f_1 \geqslant \sqrt{\alpha}\} \cup \{x : f_1 \leqslant -\sqrt{\alpha}\}, & \text{se } \alpha \geqslant 0 \end{cases}$$

Portanto, A_α é sempre mensurável, e também f_1^2

Agora, podemos escrever:

$$f_1 \cdot f_2 = \frac{1}{4}[(f_1 + f_2)^2 - (f_1 - f)^2]$$

o que prova, em virtude do que já foi demonstrado, que $f_1 \cdot f_2$ é mensurável.

6) Se $f_2 \neq 0$, temos:

$$A_\alpha = \left\{x : \frac{f_1}{f_2} > \alpha\right\} = [\{x : f_2 > 0\} \cap \{x : f_1 > \alpha \cdot f_2\}] \cup$$
$$\cup [\{x : f_2 < 0\} \cap \{x : f_1 < \alpha \cdot f_2\}]$$

Portanto, em virtude do que já foi demonstrado e do lema n.º 2, $A\alpha$ é sempre mensurável, ou seja: $\frac{f_1}{f_2}$ é mensurável.

** 7.7 — Teorema n.º 3 — Toda função contínua, definida no conjunto X, é μ-mensurável.

Demonstração: Seja $f(x)$ uma função contínua, definida no conjunto (mensurável) X. Consideremos, para α arbitrário, o conjunto

$$A_\alpha = \{x : f(x) \geqslant \alpha\}$$

e seja x_o um ponto (pertencente a X) de acumulação para o conjunto $A\alpha$. Então, em qualquer vizinhança de x_o, existem pontos do conjunto $A\alpha$, isto é, existem pontos x (de X) tais que $f(x) \geqslant \alpha$.

Ora, se tivéssemos $f(x_o) < \alpha$, por ser $f(x)$ contínua em X, haveria uma vizinhança, $v(x_o)$, do ponto x_o, tal que: $f(x) < \alpha$ se $x \in V(x_o)$. Em outras palavras: x_o não poderia (o que é contrário à hipótese) ser ponto de acumulação de $A\alpha$. Assim, só podemos admitir que $f(x_o) \geqslant \alpha$. Então, $x_o \in A\alpha$ e este conjunto, por conter todos os seus pontos de acumulação, é *fechado*. Entretanto, sabemos que todo conjunto fechado é mensurável. Logo $f(x)$ é mensurável.

* 7.8 — Teorema n.º 4 — Se a seqüência de funções μ-mensuráveis, $\{ f_m(x) \}$, converge para todo valor de x (pertencente a X), então:

$$f(x) = \lim_{m \to \infty} f_m(x)$$

é uma função μ-mensurável.

Demonstração: Para provar que o limite, $f(x)$, da sucessão, é uma função mensurável, basta mostrar que, para todo valor real α, o conjunto

$$A_o = \{x : f(x) < \alpha\}$$

é mensurável.

Consideremos, para isso, os conjuntos

$$C_{n,k} = \bigcap_{m>n}^{\infty} \left\{ x : f_m(x) < \alpha - \frac{1}{k} \right\} \qquad \text{e} \qquad A'_o = \bigcup_{K=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{n,k}$$

Vamos provar, inicialmente, que $A_o = A'_o$:

Se $x \in A_o$, então $f(x) < \alpha$. Portanto, existe um inteiro positivo k tal que:

$$f(x) < \alpha - \frac{2}{k}$$

Tendo em vista que $f(x) = \lim f_m(x)$, para o valor de que k acima referido, podemos encontrar um valor de n tal que

$$|f_m(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \qquad , \quad \text{se} \quad m > n ,$$

e daí:

$$f_m(x) < f(x) + \frac{1}{k} < \alpha - \frac{2}{k} + \frac{1}{k} = \alpha - \frac{1}{k} ; \quad \text{se} \quad m > n$$

Então, x pertence ao conjunto

$$C_{n,k} = \bigcap_{m>n}^{\infty} \left\{ x : f_m(x) < \alpha - \frac{1}{k} \right\},$$

e, conseqüentemente, $x \in A'_o$, o que implica: $A_o \subseteq A'_o$

Reciprocamente, se $x \in A'_o$, deverá pertencer ao conjunto $C_{n,k}$, para algum valor de k e algum valor de n; em outras palavras, devemos ter:

$$f_m(x) < \alpha - \frac{1}{k} , \quad \text{se} \quad m > n$$

Então: $\lim_{m \to \infty} f_m(x) \leqslant \alpha - \frac{1}{k}$

isto é: $f(x) \leqslant \alpha - \frac{1}{k}$ e $f(x) < \alpha$

Assim, $x \in A_o$, *o que* significa $A'_o \subset A_o$. As duas inclusões implicam:

$$A_o = A'_o$$

Resta mostrar, agora, que A'_o é mensurável. Ora, como as funções $f_m(x)$ são mensuráveis, os conjuntos

$$\left\{ x : f_m(x) < \alpha - \frac{1}{k} \right\}$$

são mensuráveis, isto é, pertencem a S_μ. Todavia, S_μ é uma B-álgebra e, nessas condições, cada conjunto $C_{n,k}$ pertence a S_μ, por ser a interseção de um sistema numerável de conjuntos mensuráveis. Conseqüentemente, o conjunto

$$A'_o = \bigcup_k \bigcup_n C_{n,k}$$

também pertence a S_μ, por ser a união de um sistema numerável de conjuntos mensuráveis. Sendo $A_o = A'_o$ mensurável para todo α, $f(x)$ é mensurável, como queríamos provar.

7.9 — Definição 2 — Diz-se que uma função é "simples" quando ela é μ-mensurável e seu campo de valores é, no máximo, um conjunto numerável.

É claro que o conceito de função simples depende da escolha da medida μ.

A estrutura de uma função simples é caracterizada pelo seguinte:

Teorema n.º 5 — A função $f(x)$ que toma, no máximo, um conjunto numerável de valores

$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$$

será μ-mensurável se, e somente se, todos os conjuntos

$$A_n = \{x: f(x) = y_n\}$$

forem μ-mensuráveis.

Demonstração: A condição é necessária. De fato, cada conjunto B_n, constituído pelo único ponto y_n, é um conjunto de Borel; ou seja:

$$A_n = \{x: f(x) = y_n\} = f^{-1}(B_n)$$

é a subimagem de um conjunto de Borel. Portanto, se $f(x)$ for mensurável, todos os conjuntos A_n serão mensuráveis.

A condição também é suficiente, posto que, de acordo com o enunciado do teorema, a imagem inversa, $f^{-1}(B)$, de qualquer conjunto de Borel, $B \subseteq Y$, deve ser a união

$$f^{-1}(B) = \bigcup_{y_n \in B} A_n$$

de, no máximo, um sistema numerável de conjuntos (por hipótese) mensuráveis, A_n. Assim, $f^{-1}(B)$ é mensurável, ou seja: $f(x)$ é mensurável.

Teorema n.º 6 — A fim de que a função $f(x)$ seja μ-mensurável é necessário e suficiente que ela possa ser representada como o limite de uma sucessão, $\{f_n(x)\}$, uniformemente convergente, de funções simples.

Demonstração: Que a condição suficiente decorre do Teorema n.º 4. Para mostrar que é necessária, consideremos uma função mensurável $f(x)$, arbitrária, e façamos

$$f_n(x) = \frac{m}{n}, \text{ se } \frac{m}{n} \leqslant f(x) < \frac{m+1}{n},$$

onde m é um inteiro qualquer, e n é um inteiro positivo.

Para cada índice n (fixo), os valores de $f_n(x)$ vão depender de m, e formarão, no máximo, um conjunto numerável. Além disso, temos

$$A_m^{(n)} = \left\{ x : f_n(x) = \frac{m}{n} \right\} = \left\{ x : \frac{m}{n} \leqslant f(x) < \frac{m+1}{n} \right\}$$

Sendo $f(x)$ mensurável, o conjunto $A_m^{(n)}$ é mensurável para todo m; e, pelo teorema anterior, $f_n(x)$ é mensurável.

Assim, as funções $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, ... formam uma seqüência de funções simples, que converge uniformemente para $f(x)$, quando $n \to \infty$; posto que, para qualquer valor de x, tem-se:

$$0 \leqslant f(x) - f_n(x) < \frac{1}{n}$$

O teorema está, pois, demonstrado.

7.10 — Definição 3 — Duas funções $f(x)$ e $g(x)$, definidas sobre o mesmo conjunto μ-mensurável E, são chamadas "equivalentes" (indicando-se tal fato por $f \sim g$), se

$$\mu\{x: f(x) \neq g(x)\} = 0$$

Observação: Dizemos que uma propriedade qualquer é satisfeita "quase por toda a parte", sobre um conjunto E, se ela é satisfeita em todos os pontos de E, com exceção de certos pontos que formam um conjunto de medida nula.

Assim, podemos dizer que "duas funções são equivalentes, se elas coincidem quase por toda a parte".

Teorema n.º 7 — Se duas funções $f(x)$ e $g(x)$ são contínuas e, ao mesmo tempo, equivalentes — sobre o conjunto E — elas coincidem.

Demonstração — Admitamos, contrariando a tese, que para algum $x_o \in E$, tivéssemos $f(x_o) \neq g(x_o)$, ou seja, $f(x_o) - g(x_o) \neq 0$. Desde que a função $f(x) - g(x)$ é contínua em E, poderíamos achar uma vizinhança, $V(x)$, do ponto x_o, tal que: $f(x) - g(x) \neq 0$, se $x \in V(x_o)$. Todavia, qualquer vizinhança de um ponto tem medida positiva; conseqüentemente:

$$\mu\{x: f(x) \neq g(x)\} \geqslant \mu[V(x_o)] > 0$$

e as funções $f(x)$ e $g(x)$ não seriam equivalentes. Devemos, pois, aceitar a tese: $f(x)$ e $g(x)$ coincidem.

* Teorema n.º 8 — Se a função $f(x)$ é definida sobre o conjunto μ-mensurável E, e equivalente, sobre E, a alguma função μ-mensurável, $g(x)$, então, $f(x)$ é, também, μ-mensurável.

Demonstração: Desde que $f(x) = g(x)$ quase por toda a parte, dado α arbitrário, os conjuntos

$$A_\alpha = \{x: f(x) > \alpha\} \quad \text{e} \quad B_\alpha = {}_\alpha\{x: g(x) > \alpha\}$$

diferem, no máximo, por um conjunto de medida nula. Podemos escrever:

$$A_\alpha = (B_\alpha - E_\alpha) \cup E'_\alpha$$

onde E_α é o conjunto (de medida nula) dos pontos que pertencem a B_α mas não pertencem a A_α; e E'_α é o conjunto (de medida nula) dos pontos que pertencem a A_α e não pertencem a B_α.

Sendo $g(x)$ mensurável, B_α será mensurável, o mesmo acontecendo com $B_\alpha - E_\alpha$. Portanto, A_α é mensurável para todo α, ou seja: $f(x)$ é mensurável.

CAPÍTULO 8.º — SEQÜÊNCIAS DE FUNÇÕES MENSURÁVEIS. OUTROS TIPOS DE CONVERGÊNCIA

8.1 — O Teorema n.º 2, do capítulo anterior, mostra-nos que as operações aritméticas, realizadas sobre funções mensuráveis, conduzem, ainda, a funções mensuráveis. Além disso, a classe das funções mensuráveis, ao contrário da classe das funções contínuas, é, também, fechada sob a operação de passagem ao limite (Teorema n.º 4 — § 7.8).

Outrossim, para as funções mensuráveis, é interessante introduzir, ao lado da noção usual de convergência, outros tipos de convergência:

8.2 — Definição 1 — Diz-se que a seqüência de funções $f_n(x)$ — definidas sobre algum espaço, X, dotado de medida — "converge quase por toda a parte" para a função $F(x)$, se

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = F(x) \tag{1}$$

para quase todos os valores de $x \in X$ — isto é: o conjunto dos pontos, em que a igualdade (1) não é satisfeita, tem medida nula.

Exemplo: A seqüência de funções $f_n(x) = (-x)^n$, definida sobre o intervalo fechado $[0, 1]$, converge, quando $n \to \infty$, para a função $F(x) = 0$, quase toda a parte (de modo mais exato: por toda a parte, salvo para o ponto $x = 1$.

O Teorema n.º 4, do capítulo anterior, admite a seguinte generalização:

Teorema n.º 1 — Se a seqüência de funções $f_n(x)$, μ-mensuráveis sobre E, converge, quase por toda a parte, para a função $F(x)$, então, $F(x)$ é μ-mensurável sobre E.

Demonstração: Seja A o conjunto sobre o qual

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = F(x)$$

De acordo com a definição anterior, tem-se: $\mu(E - A) = 0$. Ora, sobre um conjunto de medida nula, qualquer função é, obviamente, mensurável. Assim, $F(x)$ é mensurável sobre $E - A$. Porém, em virtude do Teorema n.º 4, acima citado, $F(x)$ é mensurável sobre o conjunto A. Nessas condições, $F(x)$ é mensurável sobre E, como queríamos demonstrar.

Observação: O teorema seguinte estabelece a conexão entre os conceitos de "convergência quase por toda a parte" e "convergência uniforme".

* Teorema n.º 2 — Seja uma seqüência $\{ f_n(x) \}$ de funções μ-mensuráveis, sobre E, convergente, quase por toda a parte, para a função $f(x)$. Então, existe, para qualquer $\delta > 0$, um conjunto mensurável $E_\delta \subseteq E$, tal que:

1) sobre o conjunto E_δ, a seqüência $\{ f_n(x) \}$ converge, uniformemente, para $f(x)$;

2) $\mu(E_\delta) > \mu(E) - \delta$

Demonstração: De acordo como o Teorema n.º 1, $\psi(x)$ é mensurável, o mesmo acontecendo com a função $\psi_i(x) - \psi(x)$ qualquer que seja i (§ 7.6). Nessas condições, dado m inteiro e positivo, o conjunto

$$\left\{ x : |\psi_i(x) - \psi(x)| < \frac{1}{m} \right\}$$

é mensurável.

Façamos:

$$E_n^{(m)} = \bigcap_{i \geqslant n}^{\infty} \left\{ x : |\psi_i(x) - \psi(x)| < \frac{1}{m} \right\}$$

e

$$E^{(m)} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^{(m)} \tag{1}$$

Pela definição dos conjuntos $E_n^{(m)}$, obtem-se, fixando m, a sucessão monótona:

$$E_1^{(m)} \subseteq E_2^{(m)} \subseteq E_3^{(m)} \subseteq \ldots . \tag{2}$$

De fato, se $x \in E_n^{(m)}$, resulta que

$$|\psi_i(x) - \psi(x)| < \frac{1}{m}$$

para todo $i \geqslant n$; logo, para todo $i \geqslant n+1$. Assim:

$$x \in E_{n+1}^{(m)} = \bigcap_{i \geqslant n+1} \left\{ x : |\psi_i(x) - \psi(x)| < \frac{1}{m} \right\}$$

isto é: $E_n^{(m)} \subseteq E_{n+1}^{(m)}$; $n = 1, 2, 3, \ldots$

Desde que toda medida σ-aditiva é contínua (§ 6.7), de (1) e (2) concluímos:

$$\mu[E^{(m)}] = \lim_{n \to \infty} \mu[E_n^{(m)}]$$

Nessas condições, para cada m fixo e para cada $\delta > 0$ arbitrário, podemos achar $n_o = n_o(m, \delta)$ tal que:

$$\mu[E^{(m)}] - \mu[E_{n_o}^{(m)}] < \frac{\delta}{2^m} \tag{3}$$

Entretanto, podemos escrever:

$$E^{(m)} = [E^{(m)} - E_{n_o}^{(m)}] \cup E_{n_o}^{(m)}$$

e daí

$$\mu[E^{(m)}] = \mu[E^{(m)} - E_{n_o}^{(m)}] + \mu[E_{n_o}^{(m)}]$$

e também:

$$\mu[E^{(m)}] - \mu[E_{n_o}^{(m)}] = \mu[E^{(m)} - E_{n_o}^{(m)}]$$

Assim, pela (3), resulta:

$$\mu\,[E^{(m)} - E^{(m)}_{n_o}] < \frac{\delta}{2^m} \tag{4}$$

Consideremos, agora, o subconjunto (mensurável) do conjunto E, assim definido:

$$E_\delta = \bigcap_{m=1}^{\infty} E^{(m)}_{n_o}$$

Este conjunto, conforme veremos a seguir, satisfaz às condições impostas no enunciado do teorema:

1) Inicialmente, vamos provar que, sobre E_δ, a seqüência $\{f_n(x)\}$ converge, uniformemente, para $f(x)$. Mas, isto é imediato, posto que, se $x \in E_\delta$, devemos ter, para qualquer valor de m:

$$x \in E^{(m)}_{n_o}; \qquad n_o = m_o\ (m,\ \delta),$$

isto é: $$|f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m} \quad , \text{se} \quad i \geqslant n_o$$

2) Vejamos, agora, a medida de E_δ. Para isso mostraremos, primeiro, que para todo m, tem-se:

$$\mu\,(E - E^{(m)}) = 0$$

Na verdade — fixando m —, se $x_o \in (E - E^{(m)})$, é porque existem valores arbitrariamente grandes, de i, tais que:

$$|f_i(x_o) - f(x_o)| \geqslant \frac{1}{m}$$

Mas, isto significa que a seqüência $\{f_n(x)\}$ não converge para $f(x)$, no ponto x_o. Se designarmos por A o subconjunto de E sobre o qual $\{f_n(x)\}$ não converge para $f(x)$, devemos ter:

$$[E - E^{(m)}] \subseteq A$$

e

$$\mu\,[E - E^{(m)}] \leqslant \mu\,(A) = 0 \tag{5}$$

Por outro lado, tem-se:

$$E - E^{(m)}_{n_o} = [E - E^{(m)}_{n_o}] \cup [E^{(m)} - E^{(m)}_{n_o}]$$

donde: $$\mu\,[E - E^{(m)}_{n_o}] = \mu\,[E - E^{(m)}_{n_o}] + \mu\,[E^{(m)} - E^{(m)}_{n_o}]$$

e, em virtude de (4) e (5) : $\mu[E - E^{(m)}_{n_o}] = \mu[E^{(m)} - E^{(m)}_{n_o}] < \frac{\delta}{2^m}$

Conseqüentemente, tem-se:

$$\mu[E - E_\delta] = \mu\Big[E - \bigcap_m E_{n_o}^{(m)}\Big] = \mu\Big[\bigcup_m (E - E_{n_o}^{(m)})\Big] \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \mu[E - E_{n_o}^{(m)}] < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^m} = \delta$$

Porém, como $\mu[E - E_\delta] = \mu(E) - \mu(E_\delta)$, vem:

$$\mu(E) - \mu(E_\delta) < \delta \quad \text{e} \quad \mu(E_\delta) > \mu(E) - \delta \qquad \text{c.q.d.}$$

8.3 — Definição 2 — Diz-se que uma seqüência de funções μ-mensuráveis, $\{f_n(x)\}$, "converge em medida" para a função $F(x)$, se, para qualquer $\sigma > 0$, for válida a igualdade:

$$\lim_{n \to \infty} \mu\{x: |f_n(x) - F(x)| \geqslant \sigma\} = 0$$

Os teoremas a seguir estabelecem a conexão entre a convergência quase por toda a parte e a convergência em medida:

* Teorema n.º 3 — Se uma seqüência de funções μ-mensuráveis, $\{f_n(x)\}$, converge quase por toda a parte para alguma função $F(x)$, então, ela converge em medida para essa mesma função limite, $F(x)$.

Demonstração: O Teorema n.º 1 implica que $F(x)$ é mensurável.

Seja A o conjunto (de medida nula) sobre o qual $\{f_n(x)\}$ não converge para $F(x)$. Consideremos, ainda os conjuntos:

$$E_k(\sigma) = \{x: |f_k(x) - F(x)| \geqslant \sigma\}; \quad R_n(\sigma) = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k(\sigma)$$

$$M = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n(\sigma) \tag{1}$$

É claro que todos esses conjuntos são mensuráveis. Além disso, tem-se:

$$R_n(\sigma) = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k(\sigma) = E_n(\sigma) \cup \bigcup_{k=n+1}^{\infty} E_k(\sigma) = E_n(\sigma) \cup R_{n+1}(\sigma)$$

Portanto: $$R_1(\sigma) \supseteq R_2(\sigma) \supseteq R_3(\sigma) \supseteq \ldots. \tag{2}$$

Desde que toda medida σ-aditiva é contínua, resulta, de (1) e (2):

$$\mu(M) = \lim_{n \to \infty} \mu[R_n(\sigma)]$$

Vejamos, agora, que $M \subseteq A$. De fato, se $x_o \in M$, admitamos, por um momento, que $x_o \notin A$; isto é, admitamos que

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x_o) = F(x_o)$$

Então, para um dado valor $\sigma > 0$, podemos achar n tal que

$$| f_k(x_o) - F(x_o) | < \sigma \quad \text{se} \quad k \geqslant n$$

Ora, isto significa que $x_o \notin E_k(\delta)$, para $k \geqslant n$; ou seja, que $x_o \notin R_n(\delta)$ e, contra a hipótese inicial, $x_o \notin M$. Devemos admitir, portanto, que $M \subseteq A$. Entretanto, como $\mu(A) = 0$, devemos ter, também, $\mu(M) = 0$, e, assim:

$$\lim_{n \to \infty} \mu [R_n(\sigma)] = 0$$

Como $E_n(\sigma) \subseteq R_n(\sigma)$, vem:

$$\lim_{n \to \infty} \mu[E_n(\sigma)] = 0 \qquad \text{c.q.d.}$$

Observação: É fácil mostrar, com um exemplo, que a convergência, em medida, de uma seqüência de funções μ-mensuráveis, não implica a sua convergência quase por toda a parte. Realmente, vamos definir, para cada natural k, sobre o intervalo $[0, 1]$, k funções,

$$f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, \ldots . f_k^{(k)},$$

do seguinte modo:

$$f_i^{(k)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } \dfrac{i-1}{k} < x \leqslant \dfrac{i}{k} \\ 0 & \text{para todos os outros valores de } x. \end{cases}$$

O sistema de todas as funções assim definidas, que se obtém fazendo i e k variarem, é um conjunto numerável. Renumerando essas funções, em ordem, obtemos uma seqüência de funções que, como se vê facilmente, converge "em medida" para a função $F(x) \equiv 0$; mas que, ao mesmo tempo, não converge em um simples ponto (prove isto!).

Como vemos, a recíproca do teorema anterior não é verdadeira. Entretanto, vale o seguinte:

* Teorema n.º 4 — Seja uma seqüência de funções μ-mensuráveis, $\{f_n(x)\}$, convergindo, em medida, para a função $f(x)$. Então, é possível extrair, da seqüência dada, uma subseqüência, $\{f_{n_k}(x)\}$, que converge para $f(x)$ quase por toda a parte.

Demonstração: Seja $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ uma seqüência de números positivos tal que $\lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$

e $$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \ldots\ldots \tag{1}$$

uma série, convergente, de números positivos. Vamos construir uma seqüência de índices

$$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$$

do seguinte modo: n_1 é um número inteiro positivo (cuja existência fica assegurada pela hipótese do teorema) tal que:

$$\mu\{x: |\phi_{n_1}(x) - \phi(x)| \geqslant \varepsilon_1\} < \eta_1$$

Analogamente, n_2 é um segundo número inteiro positivo, tal que

$$\mu\{x : |\phi_{n_2}(x) - \phi(x)| \geqslant \varepsilon_2\} < \eta_2 \; ; \; n_2 > n_1$$

De um modo geral, o índice n_k é um inteiro positivo (existente, sempre pela razão acima apontada) tal que:

$$\mu\{x : |\phi_{n_k}(x) - \phi(x)| \geqslant \varepsilon_k\} < \eta_k \; ; \quad n_k \geqslant n_{k-1}$$

Fica definida, assim, uma subseqüência de funções,

$$\phi_{n_1}(x), \phi_{n_2}(x), \ldots, \phi_{n_k}(x), \ldots,$$

que converge, para $\phi(x)$, quase por toda a parte.

Realmente, sejam os conjuntos

$$R_i = \bigcup_{k=i}^{\infty} \{x: |\phi_{n_k}(x) - \phi(x)| \geqslant \varepsilon_k\}$$

e $$Q = \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \tag{2}$$

Como podemos ver, facilmente,

$$R_i = \{x: |\phi_{n_i}(x) - \phi(x)| \geqslant \varepsilon_i\} R_{i+1}$$

Assim: $R_1 \supseteq R_2 \supseteq R_3 \supseteq \ldots\ldots$, (3)

e, tendo em vista a continuidade das medidas σ-aditivas, de (2) e (3) concluímos:

$$\mu(Q) = \lim_{i \to \infty} \mu(R_i)$$

Por outro lado, é claro que

$$\mu(R_i) < \sum_{k=i}^{\infty} \eta_k$$

e posto que a série (1) é convergente, a desigualdade anterior significa que

$$\lim_{i \to \infty} \mu(R_i) = 0$$

Portanto: $\mu(Q) = 0$

Resta provar que, para todos os pontos do conjunto $E - Q$, vale a relação:

$$f_{n_k}(x) \to f(x)$$

Seja, pois, $x_o \in (E - Q)$. Então $x_o \notin Q$; isto é, podemos achar i_o tal que $x_o \notin R_{i_o}$. Em outras palavras: para todo $k \geqslant i_o$, tem-se:

$$x_o \notin \{x : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_k\}$$

isto é: $|f_{n_k}(x_o) - f(x_o)| < \varepsilon_k$; se $k \geqslant i_o$

Entretanto, $\varepsilon_k \to 0$, por hipótese; de modo que, finalmente:

$$\lim_{n \to \infty} f_{n_k}(x_o) = f(x_o)$$

O teorema está demonstrado.

4.ª PARTE

A INTEGRAL DE LEBESGUE

CAPÍTULO 9.º — A INTEGRAL DE LEBESGUE PARA FUNÇÕES SIMPLES

9.1 — Considerações preliminares: Supomos conhecido o conceito de integral de Riemann — ou R-integral — que se aplica, em Análise, às funções contínuas quase por toda a parte.

Entretanto, quando lidamos com funções mensuráveis, esse conceito não é de grande utilidade; pois há um grande número de funções mensuráveis que não podem ser integradas, segundo Riemann. Um exemplo clássico é o da função de Dirichlet (igual a *1* para x racional e igual a *0* para x irracional), que é mensurável, mas não é R-integrável.

A idéia básica da integral de Lebesgue (e isto veremos melhor no próximo capítulo) consiste em grupar os valores de x (pertencentes ao campo de definição da função $y = f(x)$), não através dos intervalos, sobre o eixo dos x, que os contêm, conforme se procede para definir a R-integral; mas, ao contrário, consiste em grupá-los, repetimos, segundo os intervalos, sobre o eixo dos y, que contém os valores de $f(x)$.

Esse novo modo de proceder permite estender o conceito de integral a uma classe bem mais ampla de funções. Além disso, ao passo que a integral de Riemann é introduzida, primeiramente, para funções de uma variável e só mais tarde generalizada, com adaptações, para funções de duas ou mais variáveis; a integral de Lebesgue pode ser definida, de uma só vez, para funções dadas em qualquer espaço dotado de medida.

Daqui por diante (e também nos capítulos seguintes), se o contrário não for explicitamente declarado, nós consideraremos uma medida σ-aditiva, $\mu(A)$, definida sobre os conjuntos pertencentes a uma álgebra de Borel, tendo como unidade o conjunto X.

9.2 — Seja $f(x)$ uma função simples, definida sobre o conjunto mensurável $C \subseteq X$, que toma os valores

$$y_1, y_2, y_3 \ldots; \quad \text{sendo } y_i \neq y_j, \quad \text{se } i \neq j$$

Façamos $A_i = \{x: x \in C \text{ e } f(x) = y_i\}$, para $i = 1, 2, 3, \ldots$ e consideremos a soma

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \mu(A_i) \tag{1}$$

ou a série

$$\sum_{i=1}^{\infty} y_i \cdot \mu(A_i) \tag{1'}$$

conforme o conjunto dos valores de $f(x)$ seja finito ou numerável.

Definição D_1 — Dizemos que a função simples $y = f(x)$ é L-integrável (em relação à medida μ acima referida) sobre o conjunto C, se ela assume um número finito de valores em C; ou, em caso contrário, se a série (1') *converge absolutamente.*

Se $f(x)$ é L-integrável sobre C, a soma (1) — ou a soma da série (1') — é chamada a L-integral de $f(x)$ sobre C, escrevendo-se:

$$(L)\int_C f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} y_i \,.\, \mu(A_i) \quad \text{ou} \quad (L)\int_C f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{\infty} y_i \,.\, \mu(A_i)$$

Observações: I — Devemos notar, por essa definição, que, se uma função simples só assume um número finito de valores, ela é sempre L-integrável. Entretanto, se uma tal função admite uma infinidade (numerável) de valores, ela poderá, ou não, ser L-integrável, tudo dependendo do comportamento da série (1'); e esta série, mesmo para funções simples não limitadas, poderá ser absolutamente convergente. Por exemplo, a função simples, $f(x)$ definida, para todos os pontos do intervalo fechado $[0, 1]$, do seguinte modo:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ é irracional} \\ p+q & \text{se } x \text{ é o racional } p/q \text{ (sendo } p \text{ e } q \text{ inteiros não negativos, primos entre si, com } p \leqslant q \text{ e } q \neq 0) \end{cases}$$

é não limitada no intervalo [0, 1], porém, é L-integravel nesse intervalo, como facilmente se pode ver.

II — Na definição acima, admitimos, claramente, que os valores de y eram, todos, diferentes; em outras palavras, imaginamos uma decomposição de C em conjuntos A_i (dois a dois disjuntos)

$$C = \bigcup_i A_i$$

tal que:

a) se x', $x'' \in A_i$ então: $f(x') = f(x'') = y_i$

b) se $x' \in A_i$ e $x'' \in A_j$, sendo $i \neq j$, então: $f(x') \neq f(x'')$

Entretanto, podemos representar o valor da integral de uma função simples por uma soma de produtos da forma $V_k\ \mu(C_k)$, onde os V_k não são, necessariamente, diferentes. É o que nos garante o ...

** Lema n.º 1 — Seja $C = \bigcup_k C_k$ uma nova decomposição do conjunto C onde $C_i \cap C_j = \phi$, se $i \neq j$ — e admitamos que, em cada conjunto C_k, a função simples $f(x)$ — anteriormente considerada — tome um e somente um valor v_k. Então:

$$\sum_n y_n \cdot \mu(A_n) = \sum_k v_k \cdot \mu(C_k)\ ; \qquad (2)$$

e, além disso, a função $f(x)$ é L-integrável em C se, e somente se, a série do segundo membro de (2) é absolutamente convergente.

Demonstração: É claro, pelas condições do enunciado, que, para dois C_k diferentes, os valores de $f(x)$ poderão ser iguais, isto é: $v_k = v_{k'}$. Entretanto, sendo

$$A_n = \{x: x \in C \quad \text{e} \quad f(x) = y_n\}$$

tem-se:

$$A_n = \bigcup_{v_k = y_n} C_k$$

e como o número de conjuntos do segundo membro é finito ou numerável, vem, pela σ-aditividade da medida μ:

$$\mu(A_n) = \sum_{v_k = y_n} \mu(C_k)$$

Multiplicando os dois membros da igualdade acima por $y_k = v_k$ e somando, em relação a n, resulta:

$$\sum_n y_n \cdot \mu(A_n) = \sum_n y_n \sum_{v_k = y_n} \mu(C_k) = \sum_k v_k \cdot \mu(C_k)$$

Desde que a medida μ é não negativa, vem:

$$\sum_n |y_n| \cdot \mu(A_n) = \sum_n |y_n| \cdot \sum_{v_k = y_n} \mu(C_k) = \sum_k |v_k| \cdot \mu(C_k)$$

Nessas condições, as séries $\sum_n y_n \mu(A_n)$ e $\sum_k v_k \mu(C_k)$ são, ambas, absolutamente convergentes, ou são, ambas, divergentes. O lema está, portanto, demonstrado.

9.3 — Vejamos, agora, as propriedades da L-integral, para funções simples:

* I) Se as funções simples $\varphi(x)$ e $g(x)$ forem integráveis sobre o conjunto mensurável C, a função simples $\varphi(x) + g(x)$ também o será, valendo a igualdade:

$$\int_C \varphi(x)\,dx + \int_C g(x)\,dx = \int_C \{\varphi(x) + g(x)\}\,dx$$

Nota: daqui por diante, sempre que não houver margem para dúvidas, omitiremos a letra "L" diante do sinal de integral e das palavras "integral" e "integrável".

Demonstração: Admitamos que $\varphi(x)$ tome os valores φ_i sobre os conjuntos $F_i \supseteq C$; e que $g(x)$ tome os valores g_i sobre os conjuntos $G_j \subseteq C$. Consideremos os conjuntos $C_{ij} = F_i \cap G_j$. É claro que se tem:

$$C = \bigcup_{i,j} C_{ij} \quad \text{e} \quad C_{ij} \bigcap C_{i'j'} = \phi \quad \text{se} \quad (i, j) \neq (i', j');$$

e, além disso, $\varphi(x) + g(x) = \varphi_i + g_i \quad$ se $\quad x \in C_{ji}$.

Admitamos, ainda, — na hipótese mais desfavorável — que o conjunto dos valores da forma $\varphi_i + g_i$ seja numerável, e formemos a série:

$$\sum_{i,j} (\varphi_i + g_j) \cdot \mu(C_{ij})$$

Ora, tendo em vista que $F_i = \bigcup_j C_{ij}$ e $G_j = \bigcup_i C_{ij}$, a σ-aditividade da medida μ nos dá:

$$\mu(F_i) = \sum_j \mu(C_{ij}) \quad \text{e} \quad \mu(G_j) = \sum_i \mu(C_{ij})$$

Portanto:

$$\sum_{i,j} (\varphi_i + g_j) \cdot \mu(C_{ij}) = \sum_{i,j} \varphi_i\, \mu(C_{ij}) + \sum_{i,j} g_j \cdot \mu(C_{ij}) =$$

$$= \sum_i \varphi_i \sum_j \mu(C_{ij}) + \sum_j g_j \sum_i \mu(C_{ij})$$

ou seja:

$$\sum_{i,j} (\varphi_i + g_j) \cdot \mu(C_{ij}) = \sum_i \varphi_i\, \mu(F_i) + \sum_j g_i\, \mu(G_j) \qquad (1)$$

Por outro lado, partindo da desigualdade

$$\sum_{i,j} |\varphi_i + g_j| \cdot \mu(C_{ij}) \leqslant \sum_{i,j} |\varphi_i| \, \mu(C_{ij}) + \sum_{i,j} |g_j| \, \mu(C_{ij})$$

chegamos a essa outra:

$$\sum_{i,j} |\varphi_i + g_i| \cdot \mu(C_{ij}) \leqslant \sum_{i} |\varphi_i| \cdot \mu(F_i) + \sum_{j} |g_j| \cdot \mu(G_j) \qquad (2)$$

Ora, se $\varphi(x)$ e $g(x)$ forem integráveis sobre C, as duas séries do segundo membro de (1) serão absolutamente convergentes. Assim, o segundo membro de (2) é um valor finito, mostrando que a série do primeiro membro de (1) também converge absolutamente. Nessas condições, a função $\varphi(x) + g(x)$ é integrável sobre C, e a própria igualdade (1) nos diz que:

$$\int_C \{\varphi(x) + g(x)\} \, dx = \int_C \varphi(x) \, dx + \int_C g(x) \, dx$$

** II) Se a função simples $\varphi(x)$ é integrável sobre o conjunto mensurável C, e k é uma constante, a função simples $k \cdot \varphi(x)$ também o será, sendo válida a igualdade:

$$k \int_C \varphi(x) \, dx = \int_C k \, . \, \varphi(x) \, dx$$

Demonstração: Se os valores de $\varphi(x)$ forem

$$y_1, y_2, \ldots, y_s, \ldots$$

os valores correspondentes de $k\varphi(x)$ serão:

$$k y_1, k y_2, \ldots, k y_s, \ldots$$

Além disso: $B_s = \{x: \varphi(x) = y_s\} = \{x: k. \varphi(x) = k y_s\}$

Portanto: $$\sum_s k y_s \, . \, \mu(B_s) = k \sum_s y_s \, . \, \mu(B_s)$$

Se a série do segundo membro converge absolutamente, o mesmo acontece com a do primeiro membro. Então, $k \cdot \varphi(x)$ é integrável sobre C, e a mesma igualdade anterior nos dá:

$$\int_C k \cdot \varphi(x) \, dx = k \int_C \varphi(x) \, dx$$

** III) Toda função simples, $\varphi(x)$, limitada em um conjunto mensurável, C, é integrável sobre C; além disso, se $|\varphi(x)| \leqslant M$, para $x \in C$, então:

$$\left| \int_C \varphi(x)\, dx \right| \leqslant M \cdot \mu(C)$$

Demonstração: Admitamos que $\varphi(x)$ tome os valores

$$y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots$$

e façamos: $C_k = \{x: \varphi(x) = y_k\}$. Então, a integrabilidade de $\varphi(x)$ sobre C decorre de:

$$\sum_k |y_k| \cdot \mu(C_k) \leqslant \sum_k M \cdot \mu(C_k) = M \sum_k \mu(C_k) = M \cdot \mu(C)$$

Além disso, a parte final do teorema resulta de:

$$\left| \sum_k y_k \cdot \mu(C_k) \right| \leqslant \sum_k |y_k| \cdot \mu(C_k) \leqslant M \cdot \mu(C)$$

CAPÍTULO 10.º — DEFINIÇÃO GERAL E PROPRIEDADES BÁSICAS DA INTEGRAL DE LEBESGUE

* 10.1 Definição D_2 — Seja $\varphi(x)$ uma função limitada e mensurável, definida no conjunto mensurável C. Sejam L e l os extremos superior e inferior, respectivamente, de $\varphi(x)$, em C.

Designemos por D uma decomposição arbitrária do intervalo $[l, L]$ em intervalos parciais:

$$D: \quad l = l_0 < l_1 < l_2 < \ldots < l_{m-1} < l_m = L$$

Consideremos os conjuntos mensuráveis:

$$A_i = \{x: \ l_{i-1} \leqslant \varphi(x) < l_i\}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m-1$$

$$A_m = \{x: \ l_{m-1} \leqslant \varphi(x) \leqslant l_m\}$$

e formemos as duas somas:

$$s_D = \sum_{i=1}^{m} l_{i-1}\, \mu(A_i) \qquad \text{e} \qquad S_D = \sum_{i=1}^{m} l_i\, \mu(A_i)$$

Se chamarmos de "malha", λ, da decomposição D, à amplitude máxima dos intervalos dessa decomposição; quando essa malha, λ, tender a zero — de qualquer modo — as somas s_D e S_D tenderão a um limite

comum, finito e único, que, por definição, é chamado a "integral de Lebesque" ou a "L-integral" da função $f(x)$ sobre o conjunto C, indicando-se tal limite por um dos símbolos:

$$(L)\int f(x)\,d\mu = (L)\int f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to o} \sum_i l_{i-1}\,\mu(A_i) = \lim_{\lambda \to o} \sum_i l_i\,\mu(A_i)$$

Diz-se, ainda, que $f(x)$ é L-integrável sobre o conjunto C.

Observações: Para que essa definição possa ser aceita sem restrições, devemos mostrar que:

1.º) As duas somas s_D e S_D tendem, sempre — sob as hipóteses feitas — a um limite comum, finito e único, qualquer que seja o modo pelo qual a malha, λ, da decomposição, tenda a zero.

2º) A definição acima, quando aplicada a uma função simples *limitada,* conduz ao mesmo valor da integral, que o obtido pela definição do capítulo anterior.

Vejamos, então, que ambas as condições são satisfeitas:

** 1.º) É evidente que, para qualquer decomposição D, se tem:

$$s_D \leqslant S_D$$

Além disso, podemos observar que, quando a malha, λ, de uma decomposição qualquer decresce, indefinidamente, pelo acréscimo de novos pontos de divisão, as somas inferiores, s_D, formam uma sucessão monótona não decrescente, e as somas superiores, s_D, formam uma sucessão monótona não crescente.

Com efeito, partindo da decomposição D acima, acrescentamos um novo ponto de divisão, l', por exemplo, no intervalo $(l_{k-1},\ l_k)$. Obtemos uma nova decomposição D', para a qual resulta:

$$s_{D'} = \sum_{i \neq k} l_{i-1}\,\mu(A_i) + l_{k-1}\,\mu(A'_k) + l' \cdot \mu(A''_k)$$

onde:

$$A'_k = \{x : l_{k-1} \leqslant f(x) < l'\} \quad \text{e} \quad A''_k = \{x : l' \leqslant f(x) < l_k\}$$

Podemos, então, escrever:

$$s_{D'} = s_D - l_{k-1} \cdot \mu(A_k) + l_{k-1}\,\mu(A'_k) + l' \cdot \mu(A''_k)$$

Entretanto, $\mu(A_k) = \mu\{A'_k) + \mu(A''_k)$; e, por ser $l_{k-1} < l'$ vem:

$$s_{D'} - s_D \geqslant -\,l_{k-1}\,\mu(A_k) + l_{k-1} \cdot \mu(A'_k) + l_{k-1}\,\mu(A''_k) = -\,l_{k-1}\,\mu(A_k) + \\ + l_{k-1}\,\mu(A_k) = 0$$

ou seja:

$$s_{D'} \geqslant s_D$$

Por um desenvolvimento análogo, podemos verificar que

$$S_{D'} \leqslant S_D$$

Outrossim, qualquer que seja a decomposição D, são válidas as limitações

$$l \,.\, \mu(C) \leqslant S_D \qquad \text{e} \qquad L \,.\, \mu(C) \geqslant s_D$$

Finalmente, se a malha, λ, da decomposição D, é inferior ao número positivo e arbitrário ε, tem-se:

$$S_D - s_D = \sum_i (l_i - l_{i-1}) \cdot \mu(A_i) \leqslant \varepsilon \sum_i \mu(A_i) = \varepsilon\mu(C),$$

ou seja, a diferença S_D — s_D pode tornar-se tão pequena (em módulo) quanto se queira.

Conclusão: quando a malha, λ, de uma decomposição tende a zero, pelo acréscimo de novos pontos de divisão, as somas s_D e S_D formam duas sucessões monótonas, limitadas e contíguas; existindo e sendo finito, portanto, o

$$\lim_{\lambda \to o} s_D = \lim_{\lambda \to o} S_D = I \tag{1}$$

Resta mostrar que esse limite independe da maneira de se construir as duas sucessões $\{s_D\}$ e $\{S_D\}$; isto é, independe do modo pelo qual λ tende a zero.

Imaginemos, pois, contrariando a tese, que se pudessem construir duas outras sucessões, $\{s'_D\}$ e $\{S'_D\}$, nas condições anteriores, tais que

$$\lim_{\lambda \to o} s'_D = \lim_{\lambda \to o} S'_D = I'$$

sendo, por exemplo, $I - I' = \delta > 0$.

Ora, se as malhas correspondentes fossem suficientemente pequenas, poderíamos achar uma soma inferior da sucessão $\{s_D\}$, e uma soma superior da sucessão $\{S_D\}$, tais que

$$S'_D - I' < \frac{\delta}{2} \qquad \text{e} \qquad I - s_D < \frac{\delta}{2}$$

donde: $$S'_D - s_D + I - I' = S'_D - s_D + \delta < \delta$$

isto é: $$s_D > S'_D$$

Entretanto, essa última desigualdade é absurda, posto que qualquer soma superior é maior ou igual que qualquer soma inferior, mesmo quando provenientes de decomposições diferentes.

Para demonstrar esta última afirmação, consideremos duas quaisquer decomposições, D_1 e D_2. Então:

$$s_{D_1} \leqslant S_{D_1} \qquad \text{e} \qquad s_{D_2} \leqslant S_{D_2}$$

Agora, se acrescentarmos a D_1 os pontos de D_2 que não fazem parte de D_1, obteremos uma terceira decomposição D_3, que tanto pode resultar de D_1 como pode resultar de D_2, pelo acréscimo de novos pontos. Assim:

$$s_{D_1} \leqslant s_{D_3} \qquad \text{e} \qquad S_{D_3} \leqslant S_{D_2}$$

e como $s_{D_3} \leqslant S_{D_3}$ vem:

$$s_{D_1} \leqslant s_{D_3} \leqslant S_{D_3} \leqslant S_{D_2}$$

isto é, a soma superior S_{D_2} é maior do que a soma inferior S_{D_1}.

A unicidade do limite (1) fica, portanto, completamente demonstrada.

** 2º) Para verificar a segunda condição, imaginemos, agora, que $\not f(x)$ é uma função simples, limitada. É evidente que $\not f(x)$ é integrável, no sentido da definição acima. Por outro lado, em virtude da propriedade III da L-integral, para funções simples, $\not f(x)$ é integrável, no sentido da definição do capítulo anterior. Nosso objetivo, todavia, é mostrar que as duas definições conduzem ao mesmo valor para a L-integral.

Sejam, ainda, L e 1 os extremos de $\not f(x)$ em C, e consideremos, também, a decomposição D do intervalo $[1, L]$, bem como as correspondentes somas s_D e S_D, referidas na parte inicial deste parágrafo. Formemos, além disso, a soma abaixo (cujo valor é a integral, I, de $\not f(x)$, de acordo com a definição D_1):

$$\sum_n y_n \mu (A'_n)$$

onde $\quad A'_n = \{x: \not f(x) = y_n\}; \quad n = 1, 2, \ldots$

Indiquemos por $y_{i1}, y_{i2}, \ldots y_{is}, \ldots$ os valores de $\not f(x)$ tais que

$$l_{i-1} \leqslant y_{is} < l_i; \quad i = 1, 2, \ldots, m-1.$$

Então: $A_i = \{x: l_{i-1} \leqslant \not f(x) < l_i\} = \bigcup_s A'_{is}; \quad i = 1, 2, \ldots, m-1;$ e como os conjuntos A'_{is} são, dois a dois, disjuntos e formam um sistema finito ou numerável, resulta:

$$\mu (A_i) = \sum_s \mu (A'_{is}) \qquad (2)$$

Ora, da relação $l_{i-1} \leqslant y_{is} < l_i$, tiramos:

$$l_{i-1}\,\mu\,(A'_{is}) \leqslant y_{is}\,\mu\,(A'_{is}) < l_i\,\mu\,(A'_{is})$$

e somando em relação a s, tendo em vista (2):

$$l_{i-1}\,\mu\,(A_i) \leqslant \sum_s y_{is}\,\mu\,(A'_{is}) < l_i\,\mu\,(A_i) \tag{3}$$

$$i = 1, 2, \ldots, m-1$$

De modo análogo, indicando por $y_{m1}, y_{m2}, \ldots, y_{ms}, \ldots$ os valores de $f(x)$ tais que

$$l_{m1} \leqslant y_{ms} \leqslant l_m$$

acharemos: $A_m = \bigcup_s A'_{m_s}$; $\mu(A_m) = \sum_s \mu(A'_{m_s})$ e, em seguida:

$$l_{m-1} \cdot \mu(A_m) \leqslant \sum_s y_{m_s} \cdot \mu(A'_{m_s}) \leqslant l_m\,\mu(A_m) \tag{4}$$

Somando, membro a membro, as relações (3), para $i = 1, 2, \ldots, m-1$ juntamente com a (4), obtemos

$$\sum_{i=1}^{m} l_{i-1} \cdot \mu(A_i) \leqslant \sum_n y_n \cdot \mu(A'_n) \leqslant \sum_{i=1}^{m} l_i \cdot \mu(A_i)$$

isto é:

$$s_D \leqslant \sum_n y_n \cdot \mu(A'_n) \leqslant S_D$$

Por conseguinte, a integral I está, sempre, compreendida entre as duas somas, superior e inferior. Passando ao limite, achamos:

$$\lim_{\lambda \to o} s_D = \sum_n y_n\,\mu(A'_n) = I = \lim_{\lambda \to o} S_D$$

como se pretendia demonstrar.

** 10.2 — Teorema n.º 1 — Se existe uma seqüência $\{f_n(x)\}$ de funções simples, todas definidas e L-integráveis (definição D_1) sobre o conjunto mensurável C; e se essa seqüência converge, uniformemente, em C, para a função $f(x)$; então:

a) existe e é finito o limite

$$J = \lim_{n \to \infty} \int_C f_n(x)\,dx$$

b) esse limite independe da seqüência $\{f_n(x)\}$, ou melhor, depende, exclusivamente, da função limite $f(x)$.

Demonstração a) De acordo com as propriedades I e III da L-integral (definição D_1), podemos escrever:

$$\left| \int_C \phi_n(x)\, dx - \int_C \phi_m(x)\, dx \right| = \left| \int_C [\phi_n(x) - \phi_m(x)]\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \mu(C) \cdot \sup_{x \in C} \{ | \phi_n(x) - \phi_m(x) | \}$$

Ora, como a seqüência $\{ \phi_n(x) \}$ é uniformemente convergente, em C, dado $\varepsilon > 0$, arbitrário, podemos achar n_o tal que, se $m \geqslant n_o$ e $n \geqslant n_o$, se tenha

$$\sup_{x \in C} \{ | \phi_n(x) - \phi_m(x) | \} < \frac{\varepsilon}{\mu(C)}$$

Então:

$$\left| \int_C \phi_n(x)\, dx - \int_C \phi_m(x)\, dx \right| < \varepsilon, \quad se\ m,\ n \geqslant n_o$$

Porém, essa desigualdade exprime a condição necessária e suficiente para que a seqüência $\int_C \phi_n(x)dx$ seja convergente. Assim, o limite J existe e é finito.

b) Consideremos, agora, a existência de outra seqüência, $\{ \phi_n^*(x) \}$, de funções simples, nas condições do enunciado. Podemos escrever, pelos motivos já apontados:

$$\left| \int_C \phi_n(x)\, dx - \int_C \phi_n^*(x)\, dx \right| = \left| \int_C [\phi_n(x) - \phi_n^*(x)]\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \mu(C) \cdot \sup_{x \in C} \{ | \phi_n(x) - \phi_n^*(x) | \} \qquad (1)$$

Entretanto, qualquer que seja x, tem-se:

$$| \phi_n(x) - \phi_n^*(x) | \leqslant | \phi_n(x) - \phi(x) | + | \phi_n^*(x) - \phi(x) |$$

Desse modo:

$$\sup \{ | \phi_n(x) - \phi_n^*(x) | \} \leqslant \sup \{ | \phi_n(x) - \phi(x) | + | \phi_n^*(x) - \phi(x) | \} =$$

$$= \sup \{ | \phi_n(x) - \phi(x) | \} + \sup \{ | \phi_n^*(x) - \phi(x) | \} \qquad (2)$$

Desde que ambas as seqüências, $\{ \phi_n(x) \}$ e $\{ \phi_n^*(x) \}$, convergem, uniformemente, para $\phi(x)$, em C; dado $\varepsilon > 0$ (arbitrário), podemos achar n_o tal que, para $n \geqslant n_o$, sejam válidas as relações:

$$\sup \{ | \phi_n(x) - \phi(x) | \} < \frac{\varepsilon}{2\,\mu(c)} \quad \text{e} \quad \sup \{ | \phi_n^*(x) - \phi(x) | \} < \frac{\varepsilon}{2\,\mu(c)}$$

Assim, tendo em vista (1) e (2), resulta:

$$\left| \int_C \phi_n(x)\, dx - \int_C \phi_n^*(x)\, dx \right| < \varepsilon \quad ; \qquad n \geqslant n_o$$

Conseqüentemente, sendo ε arbitrário:

$$\lim_{n \to \infty} \int_C f_n(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \int_C f_n^*(x)\, dx$$

como queríamos provar.

Observação: O teorema acima permite estender o conceito de *L*-integral às funções não limitadas, desde que estas possam ser expressas como o limite de alguma seqüência de funções simples, nas condições do enunciado. Assim, Kolmogorov e Fomin (obra citada na bibliografia) dão-nos a seguinte ...

** 10.3 — Definição D_3 — "Diz-se que uma função $f(x)$ é *L*-integrável sobre o conjunto mensurável *C*, se existe uma seqüência de funções simples, $\{f_n(x)\}$, integráveis sobre *C* (definição D_1), e convergindo, uniformemente, em *C*, para $f(x)$. Ao limite

$$J = \lim_{n \to \infty} \int_C f_n(x)\, dx$$

dá-se o nome de *L*-integral da função $f(x)$, sobre o conjunto *C*".

Essa definição se justifica pelo seguinte:

1) o limite *J* existe, é finito e depende, apenas, como acabamos de demonstrar, da função $f(x)$;

2) ela se aplica, de imediato, a qualquer função simples, $f(x)$ — limitada ou não —, bastando, para isso, considerar a seqüência $\{f_n(x)\}$, onde $f_n(x) \equiv f(x)$, para todo índice *n;* o limite *J* obtido é, assim, a própria integral de $f(x)$, nos termos da definição D_1;

3) finalmente, toda função mensurável limitada — portanto, L-integrável nos termos da definição D_2 — é, também, *L*-integrável nos termos da definição D_3; e os valores das integrais, segundo ambas as definições, coincidem.

Para demonstrar as afirmações contidas neste último item, consideremos uma função $f(x)$, limitada e mensurável sobre o conjunto mensurável *C*, e admitindo, aí, os extremos *l* e *L*. Desde que o limite comum das somas inferiores e superiores não depende do modo de decomposição do intervalo $[l, L]$, consideremos a particular seqüência de decomposições, D_n, assim definidas:

$$D_n: \quad l = l_0 < l_1 < l_2 < \ldots < l_{n-1} < l_n = L$$

$$\text{sendo} \qquad l_i = l + \frac{L - l}{n} \cdot i\,; \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Para cada decomposição desse tipo, isto é, para cada valor de n, vamos definir uma função $\varphi_n(x)$, do seguinte modo:

$$\varphi_n(x) = l_i \quad \text{se} \quad l_{i-1} \leqslant \varphi(x) < l_i \; ; \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$\varphi_n(x) = l_n = L \quad \text{se} \quad l_{n-1} \leqslant \varphi(x) \leqslant l_n$$

Nessas condições, os conjuntos

$$A_i = \{x : \varphi_n(x) = l_i\} = \{x : l_{i-1} \leqslant \varphi(x) < l_i\} \; ; \qquad i = 1, 2, \ldots n-1$$

$$A_n = \{x : \varphi_n(x) = l_n\} = \{x : l_{n-1} \leqslant \varphi(x) \leqslant l_n\}$$

são, todos, mensuráveis; e a função $\varphi'_n(x)$, por conseguinte, é uma função simples. Além disso, como $\varphi_n(x)$ assume, em C, um número finito de valores, essa função é L-integrável (definição D_1), em C; e o valor da respectiva integral é dado por:

$$\int_C \varphi_n(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} l_i\, \mu(A_i) = S_n$$

isto é, coincide com a soma superior da decomposição D_n.

Vejamos, agora, que a seqüência de funções simples $\{\varphi_n(x)\}$ converge, uniformemente, para $\varphi(x)$, sobre o conjunto C. De fato, se $x \in A_i$, temos:

$$0 \leqslant \varphi_n(x) - \varphi(x) = l_i - \varphi(x) \leqslant l_i - l_{i-1} =$$

$$= \left[1 + \frac{L-l}{n} \cdot i\right] - \left[1 + \frac{L-I}{n} \cdot (i-1)\right]$$

ou seja: $$0 \leqslant \varphi_n(x) - \varphi(x) \leqslant \frac{L-l}{n}, \qquad \text{se } x \in C$$

Portanto: $$\lim_{n \to \infty} [\varphi_n(x) - \varphi(x)] = 0, \quad \text{isto é:}$$

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) = \varphi(x) \; ; \qquad x \in C$$

Aplicando, então, a definição D_3 resulta:

$$J = \lim_{n \to \infty} \int_C \varphi_n(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} S_n = \int_C \varphi(x)\, dx$$

ou seja, o limite obtido pela definição D_3 coincide com o limite das somas superiores, que é, precisamente, o valor da integral de $\varphi(x)$ nos termos da definição D_2.

Nessas condições, toda função mensurável e limitada — definida no conjunto mensurável C — é L-integrável em C, quer pela definição D_2, quer pela definição D_3; e essas definições conduzem ao mesmo valor para a integral de $\varphi(x)$.

Entretanto, a definição D_3 é mais geral, pois ela se aplica, inclusive, às funções não limitadas, o que não ocorre com a definição D_2.

10.4 — Vejamos, agora, as propriedades básicas da L-integral, no caso geral. Daqui por diante, faremos uso da definição D_3, salvo declaração em contrário.

** Teorema n.º 2 — Se k é uma constante, e C é um conjunto mensurável, tem-se:

$$\int_C k \, . \, dx = k \cdot \mu(C)$$

Demonstração: A função simples $\phi(x) \equiv k$, se x e C, assume um só valor; e $C = \{x: \phi(x) = k\}$. Aplicando a definição D_1, tem-se:

$$\int_C \phi(x) \, dx = \int_C k \, . \, dx = k \, . \, \mu(C)$$

Em particular, se $k = 1$, vem: $\int_C dx = \mu(C)$

* Teorema n.º 3 — Se k é uma constante e $\phi(x)$ é integrável sobre C, então, $k \cdot \phi(x)$ também o é, valendo a igualdade:

$$k \int_C \phi(x) \, dx = \int_C \{k \cdot \phi(x)\} \, dx$$

Demonstração: Se $\phi(x)$ é integrável sobre C, existe uma seqüência de funções simples, $\{\phi_n(x)\}$, convergindo, uniformemente, para $\phi(x)$, em C. Então, a seqüência de funções simples, $\{k \, . \, \phi_n(x)\}$, converge, uniformemente, para $k \, . \, \phi(x)$. De acordo com a propriedade II, do capítulo anterior, podemos escrever:

$$k \int_C \phi_n(x) \, dx = \int_C \{k \cdot \phi_n(x)\} \, dx$$

Portanto:

$$\lim_{n \to \infty} k \int_C \phi_n(x) \, dx = k \cdot \lim_{n \to \infty} \int_C \phi_n(x) \, dx = \lim_{n \to \infty} \int_C \{k \cdot \phi_n(x)\} \, dx$$

e, de acordo com a definição D_3: $k \int_C \phi(x) \, dx = \int_C \{k \cdot \phi(x)\} \, dx$

** Teorema nº 4 — Se $\phi(x)$ e $g(x)$ são duas funções definidas e integráveis sobre o conjunto mensurável C, a função $\phi(x) + g(x)$ também o será, e:

$$\int_C \{\phi(x) + g(x)\} \, dx = \int_C \phi(x) \, dx + \int_C g(x) \, dx$$

Demonstração: Desde que $f(x)$ e $g(x)$ são integráveis em C, podemos achar duas seqüências de funções simples, $\{f_n(x)\}$ e $\{g(x)\}$, integráveis em C, e convergindo, uniformemente, para $f(x)$ e $g(x)$, respectivamente. Ora, pela propriedade I — § 9.3 —, $f_n(x) + g(x)$ é integrável sobre C e

$$\int_C \{f_n(x) + g_n(x)\}\, dx = \int_C f_n(x)\, dx + \int_C g_n(x)\, dx$$

Além disso, a seqüência de funções simples $\{f_n(x) + g_n(x)\}$ converge, uniformemente, para $f(x) + g(x)$. Portanto, fazendo n tender a infinito, na igualdade anterior, resulta:

$$\int_C \{f(x) + g(x)\}\, dx = \int_C f(x)\, dx + \int_C g(x)\, dx$$

** Teorema nº 5 — Se $f(x)$ é integrável sobre o conjunto mensurável C e $f(x) \geqslant 0$ para $x \in C$, então:

$$\int_C f(x)\, dx \geqslant 0$$

Demonstração: Se $f(x)$ é uma função simples, o teorema decorre, imediatamente, da definição D_1. Consideremos, pois, o caso geral:

Sendo $f(x)$ integrável sobre C, existe, por definição, uma seqüência de funções simples, $\{f_n(x)\}$, convergindo, uniformemente, para $f(x)$, em C, e integráveis sobre esse conjunto.

Para cada função $f_n(x)$, podemos definir uma outra função $g_n(x) = |f_n(x)|$. A nova seqüência de funções simples, $\{g_n(x)\}$, também converge, uniformemente, para $f(x)$, em C. De fato, dado $\varepsilon > 0$, arbitrário, existe n_o tal que:

$$|f_n(x) - f(x)| = |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \text{ , se } n \geqslant n_o$$

Entretanto, lembrando que $f(x) = |f(x)|$, temos:

$$f(x) - |f_n(x)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

$$|f_n(x)| - f(x) \leqslant |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Conseqüentemente: $|f(x) - g_n(x)| < \varepsilon$, se $n \geqslant n_o$.

Além disso, as funções simples $g_n(x)$ são integráveis sobre C; e como são funções não negativas, suas integrais (conforme observação inicial) também são não negativas. Portanto:

$$\int_C f(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \int_C g_n(x)\, dx \geqslant 0$$

como queríamos demonstrar.

Corolário n.º 1 — $f(x)$ e $g(x)$ são duas funções definidas e integráveis sobre o conjunto mensurável C, tais que $f(x) \geqslant g(x)$, então:

$$\int_C f(x)\, dx \geqslant \int_C g(x)\, dx$$

Demonstração: Basta aplicar o teorema à função $f(x) - g(x) \geqslant 0$, tendo em vista os Teoremas n.º 3 e n.º 4.

Corolário nº 2 — Se $f(x)$ é integrável sobre o conjunto mensurável C e $m \leqslant f(x) \leqslant M$, se $x \in C$, então:

$$m \cdot \mu(C) \leqslant \int_C f(x)\, dx \leqslant M \cdot \mu(C)$$

Demonstração: Basta aplicar o corolário 1.º às funções $f(x) \geqslant m$ e $M \geqslant f(x)$, e usar o Teorema n.º 2.

* 10.5 — Teorema n.º 6 — Seja $\{A_n\}$ um sistema finito ou numerável de conjuntos mensuráveis, tais que

$$A = \bigcup_n A_n \qquad \text{e} \qquad A_i \cap A_j = \phi \quad , \quad \text{se} \quad i \neq j \quad ,$$

e seja $f(x)$ uma função integrável sobre A. Então:

1) $f(x)$ é integrável sobre qualquer A_n;

2) vale a igualdade

$$\int_A f(x)\, dx = \sum_n \int_{A_n} f(x)\, dx$$

onde a série do segundo membro — se $\{A_n\}$ for um sistema numerável — converge absolutamente.

Demonstração: Consideremos, inicialmente, o caso de uma função simples, $f(x)$, que toma os valores

$$y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots$$

Façamos: $B_k = \{x : x \in A \quad \text{e} \quad f(x) = y_k\}$

e $B_{nk} = \{x : x \in A_n \quad \text{e} \quad f(x) = y_k\}$

Então: $B_k = \bigcup_n B_{nk} \quad \text{e} \quad B_{ik} \cap B_{jk} = \phi \quad \text{se} \quad i \neq j$

Portanto:

$$\int_A f(x)\,dx = \sum_k y_k\,\mu(B_k) = \sum_k y_k \sum_n \mu(B_{n\,k}) =$$

$$= \sum_k \sum_n y_k\,\mu(B_{n\,k}) = \sum_n \sum_k y_k\,\mu(B_{n\,k}) \qquad (1)$$

Ora, como $f(x)$ é integrável sobre A, a série $\sum_k y_k \mu(B_k)$ é absolutamente convergente. Entretanto, em face das igualdades anteriores e por ser a medida μ não negativa, vem:

$$\sum_k |\,y_k\,|\,\mu(B_k) = \sum_n \sum_k |\,y_k\,|\,\mu(B_{n\,k}) \qquad (2)$$

ou seja, a série do segundo membro de (2) é absolutamente convergente, o mesmo acontecendo com qualquer série parcial

$$\sum_k |\,y_k\,|\,\mu(B_{n\,k})\,; \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Mas, isto significa, precisamente, que $f(x)$ é integrável sobre A_n $(n = 1, 2, \ldots)$, e ainda, de acordo com (1), temos:

$$\int_A f(x)\,dx = \sum_n \int_{A_n} f(x)\,dx \qquad (3)$$

Finalmente, notando que

$$\left| \int_{A_n} f(x)\,dx \right| \leqslant \sum_k |\,y_k\,|\,\mu(B_{n\,k})$$

e que

$$\sum_n \left| \int_{A_n} f(x)\,dx \right| \leqslant \sum_n \left(\sum_k |\,y_k\,|\,\mu(B_{n\,k}) \right)$$

concluímos que o segundo membro de (3) é uma série absolutamente convergente.

Passemos, agora, ao caso em que $f(x)$ é uma função qualquer, integrável sobre A. Isto significa a existência de uma seqüência de funções simples, $\{f_k(x)\}$, integráveis sobre A, e convergindo para $f(x)$, em A. Nessas condições, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, podemos achar a função simples $f_k(x)$, tal que:

$$|\,f(x) - f_k(x)\,| < \varepsilon \quad ; \quad x \in A \qquad (4)$$

Como o teorema já foi demonstrado para funções simples, $f_k(x)$ é integrável sobre qualquer A_n, valendo a igualdade:

$$\int_A f_k(x)\,dx = \sum_n \int_{A_n} f_k(x)\,dx \qquad (5)$$

onde o segundo membro é uma série absolutamente convergente.

Ora, $\{ \varphi_k(x) \}$ é uma seqüência de funções simples, integráveis sobre qualquer A_n, e que, aí, converge uniformemente para $\varphi(x)$. Logo, por definição, $\varphi(x)$ é integrável sobre qualquer A_n.

De acordo com as propriedades I e II — § 9.3 — e tendo em vista a desigualdade (4), podemos escrever:

$$\left| \int_{A_n} \varphi(x)\, dx - \int_{A_n} \varphi_k(x)\, dx \right| = \left| \int_{A_n} [\varphi(x) - \varphi_k(x)]\, dx \right| \leqslant \varepsilon \cdot \mu(A_n)$$

e também:

$$\sum_n \left| \int_{A_n} \varphi(x)\, dx - \int_{A_n} \varphi_k(x)\, dx \right| \leqslant \varepsilon \sum_n \mu(A_n) = \varepsilon\, \mu(A) = \varepsilon_o \qquad (6)$$

Entretanto:

$$\left| \sum_n \left\{ \int_{A_n} \varphi(x)\, dx - \int_{A_n} \varphi_k(x)\, dx \right\} \right| \leqslant \sum_n \left| \int_{A_n} \varphi(x)\, dx - \int_{A_n} \varphi_k(x)\, dx \right|,$$

o que, combinado com (6), fornece:

$$\left| \sum_n \left\{ \int_{A_n} \varphi(x)\, dx - \int_{A_n} \varphi_k(x)\, dx \right\} \right| \leqslant \varepsilon_o$$

que também pode ser escrita assim:

$$\left| \sum_n \int_{A_n} \varphi(x)\, dx - \int_A \varphi_k(x)\, dx \right| \leqslant \varepsilon_o \qquad (7)$$

Por outro lado, como

$$\int_A \varphi(x)\, dx = \lim_{k \to \infty} \int_A \varphi_k(x)\, dx \quad ,$$

podemos escolher k_o de modo que, para $k \geqslant k_o$, se tenha:

$$\left| \int_A \varphi_k(x)\, dx - \int_A \varphi(x)\, dx \right| < \varepsilon_o \qquad (8)$$

Somando as expressões entre barras em (7) e (8) e tendo em vista que o módulo da soma é menor ou igual que a soma dos módulos, vem:

$$\left| \sum_n \int_{A_n} \varphi(x)\, dx - \int_A \varphi(x)\, dx \right| < 2\, \varepsilon_o \ ,$$

e desde que ε_o é arbitrário, isto implica:

$$\int_A \varphi(x)\, dx = \sum_n \int_{A_n} \varphi(x)\, dx$$

Para provar a convergência absoluta da série do segundo membro, devemos notar que, sendo $|\psi(x)-\psi_k(x)| < \varepsilon$ para $x \in A$ vem:

$$\left|\int_{A_n}\psi(x)\,dx\right| - \left|\int_{A_n}\psi_k(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int_{A_n}\psi(x)\,dx - \int_{A_n}\psi_k(x)\,dx\right| < \varepsilon\,\mu(A_n)$$

e daí, sucessivamente:

$$\left|\int_{A_n}\psi(x)\,dx\right| < \left|\int_{A_n}\psi_k(x)\,dx\right| + \varepsilon\,\mu(A_n)$$

$$\sum_n\left|\int_{A_n}\psi(x)\,dx\right| \leqslant \sum_n\left|\int_{A_n}\psi_k(x)\,dx\right| + \varepsilon\,\mu(A);$$

e como $\sum_n \int_{A_n}\psi_k(x)\,dx$ é absolutamente convergente, resulta que

$$\sum_n \int_{A_n}\psi(x)\,dx$$

também o é.

O teorema fica, pois, completamente demonstrado.

Corolário — Se $\psi(x)$ é integrável sobre o conjunto mensurável A, também é integrável sobre qualquer conjunto mensurável $A' \subseteq A$.

Demonstração: Basta notar que $A = A' \cup (A - A')$ e que o segundo membro é constituído de dois conjuntos mensuráveis disjuntos.

* 10.6 — Teorema nº 7 — Se a função $\varphi(x)$ é integrável sobre o conjunto mensurável C e a função mensurável $\psi(x)$ é tal que $|\psi(x)| \leqslant \varphi(x)$, se $x \in C$, então $\psi(x)$ também é integrável sobre C.

Demonstração: Admitamos, inicialmente, que $\psi(x)$ e $\varphi(x)$ são funções simples, que tomam os valores $a_1, a_2, \ldots a_i, \ldots$ e $b_1, b_2, \ldots b_j, \ldots$ respectivamente. Consideremos os conjuntos

$$A_i = \{x : \psi(x) = a_i\} \quad ; \quad B_j = \{x : \varphi(x) = b_j\}$$

$$\text{e} \quad C_{ij} = A_i \cap B_j \quad ;$$

de modo que $C = \bigcup_{i,j} C_{ij}$ e $C_{ij} \cap C_{i'j'} = \phi$, se $(i, j) \neq (i', j')$.

Além disso, se $x \in C_{ij}$, resulta

$$\psi(x) = a_i, \qquad \varphi(x) = b_j \qquad \text{e} \qquad |a_i| \leqslant b_j\,;$$

e, por conseguinte,

$$\sum_{i,j}|a_i|\,\mu(C_{ij}) \leqslant \sum_{i,j} b_j\,\mu(C_{ij})$$

donde tiramos: $$\sum_i |a_i|\mu(A_i) \leqslant \sum_j b_j\,\mu(B_j)$$

Como $\varphi(x)$ é integrável em C, a desigualdade acima nos dá:

$$\sum_i |a_i \mu| (A_i) \leqslant \int_c \varphi(x)\, dx$$

Vemos, assim, que a série $\sum_i a_i \mu(A_i)$ é absolutamente convergente, em C; isto é, $f(x)$ é integrável em C.

Consideremos, agora, o caso em que $f(x)$ e $\varphi(x)$ são duas funções mensuráveis quaisquer. Em virtude do Teorema n.º 6 — § 7.9 — é possível encontrar duas seqüências de funções simples, $\{f_n\}$ e $\{\varphi_n\}$, convergindo uniformemente para $f(x)$ e $\varphi(x)$, em C, respectivamente. Podemos, ainda, em face da hipótese, supor que $\varphi_n(x)$ é integrável, sobre C, para todo valor de n.

Nessas condições, dado $K > 0$, podemos achar n_o tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < K \quad \text{e} \quad |\varphi_n(x) - \varphi(x)| < K, \qquad \text{se } n \geqslant n_o$$

Daí, tiramos:

$$|f_n(x)| - |f(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| < K$$

ou

$$|f_n(x)| < |f(x)| + \varepsilon \leqslant \varphi(x) + K \tag{1}$$

Do mesmo modo:

$$|\varphi(x)| - |\varphi_n(x)| \leqslant |\varphi(x) - \varphi_n(x)| < K$$

e

$$|\varphi(x)| < |\varphi_n(x)| + K \tag{2}$$

Combinando (1) e (2), resulta:

$$|f_n(x)| < |\varphi_n(x)| + 2K \qquad ; \qquad n \geqslant n_o$$

Sendo $\varphi_n(x)$ integrável em C, a função simples $|\varphi_n(x)| + 2K$ também o será. Portanto, em face da parte já demonstrada, a função simples $f_n(x)$ — $n \geqslant n_o$ — é integrável em C; e, pela definição D_3, o mesmo acontece com a função limite $f(x)$, como queríamos provar.

** 10.7 — Teorema nº 8 — Se $f(x)$ é uma função mensurável, definida sobre o conjunto mensurável C, as integrais

$$J_1 = \int_C f(x)\, dx \qquad \text{e} \qquad J_2 = \int_C |f(x)|\, dx$$

existem ou não, simultaneamente.

Demonstração: Pelo teorema anterior, a existência de J_2 implica a existência de J_1. Por outro lado, no caso particular de uma função simples, a existência de J_1 implica, por definição, a existência de J_2.

Vejamos, agora, o caso geral. Sendo $f(x)$ integrável — portanto, mensurável — poderá ser expressa como o limite de uma seqüência de funções simples, $\{f_n(x)\}$, convergindo, uniformemente, para $f(x)$, em C — § 10.3 — e integráveis em C.

Ora, a existência de $\int_C f_n(x)\,dx$ implica, como já foi dito acima, a existência de

$$\int_C |f_n(x)|\,dx$$

Por outro lado, a seqüência de funções simples $\{|f_n(x)|\}$ converge, uniformemente, em C, para a função $|f(x)|$; posto que, para qualquer $\varepsilon > 0$, temos:

$$\Big||f_n(x)| - |f(x)|\Big| \leqslant |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad ; \qquad n \geqslant n_o$$

Em virtude disso, a função limite $|f(x)|$ é integrável em C.

* 10.8 — Teorema nº 9 — (Desigualdade de Tchebycheff) — Se $\varphi(x) \geqslant 0$ sobre o conjunto mensurável C e, além disso, $\varphi(x)$ é integrável em C, então, para qualquer $\sigma > 0$, vale a desigualdade:

$$\mu\{x : x \in C \quad \text{e} \quad \varphi(x) \geqslant \sigma\} \leqslant \frac{1}{\sigma}\int_C \varphi(x)\,dx$$

Demonstração: Considerando o conjunto mensurável

$$C' = \{x : \quad x \in C \quad \text{e} \quad \varphi(x) \geqslant \sigma\},$$

o Teorema n.º 6 e seu corolário nos dão:

$$\int_C \varphi(x)\,dx = \int_{C'} \varphi(x)\,dx + \int_{C-C'} \varphi(x)\,dx \geqslant \int_{C'} \varphi(x)\,dx$$

Pelo corolário 1º do Teorema nº 5, também podemos escrever:

$$\int_{C'} \varphi(x)\,dx \geqslant \int_{C'} \sigma\,dx = \sigma\,\mu(C')$$

Combinando esses dois resultados, temos: $\int_C \varphi(x)\,dx \geqslant \sigma\,\mu(C')$,

ou seja: $$\mu(C') \leqslant \frac{1}{\sigma}\int_C \varphi(x)\,dx$$

* Corolário — Se $\int_C |f(x)|\,dx = 0$ então, $f(x) = 0$ quase por toda a parte de C.

Demonstração: Façamos

$$C_n = \left\{x: \quad x \in C \quad \text{e} \quad |f(x)| \geqslant \frac{1}{n}\right\} \quad \text{e} \quad C' = \{x: \quad x \in C \quad \text{e} \quad f(x) \neq 0\}$$

Então: $C' = \bigcup C_n$ e $\mu(C') \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n)$

Entretanto, pela desigualdade de Tchebycheff, temos:

$$\mu(C_n) = \mu\left\{x: \quad x \in C \quad \text{e} \quad |f(x)| \geqslant \frac{1}{n}\right\} \leqslant n \int_C |f(x)|\,dx = 0$$

Conseqüentemente:

$$\mu(C') = \mu\{x: \quad x \in C \quad \text{e} \quad f(x) \neq 0\} = 0$$

o que demonstra o corolário.

CAPÍTULO 11.º — PASSAGEM AO LIMITE SOB O SINAL DE L-INTEGRAL

11.1 — O problema da passagem ao limite, sob o sinal de integral, identifica-se ao problema da possibilidade de integração, termo a termo, de uma série convergente.

Aprendemos, em Análise Clássica, que uma condição suficiente, para tal procedimento, é a convergência uniforme da série em estudo.

Veremos, agora, alguns teoremas, relativos ao processo de passagem ao limite, sob o sinal de L-integral, que representam uma ampla generalização dos correspondentes teoremas da Análise Clássica.

* 11.2 — Teorema n.º 1 — Se a seqüência de funções mensuráveis $f_n(x)$, definidas sobre o conjunto mensurável C, converge para a função $f(x)$; e se, para todo valor de n e todo $x \in C$, tivermos

$$|f_n(x)| \leqslant \varphi(x),$$

sendo $\varphi(x)$ integrável sobre C; então, a função limite $f(x)$ é integrável sobre C, e

$$\int_C f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \int_C f_n(x)\,dx$$

Demonstração: Pelas condições do enunciado, resulta que $|\not{f}(x)| \leqslant \varphi(x)$, em C. Portanto, de acordo com o Teorema n.º 7, do capítulo anterior, a função $\not{f}(x)$ é integrável sobre C. Façamos, então:

$$A_k = \{x : k \leqslant \varphi(x) < k+1\} \quad \text{e} \quad B_m = \bigcup_{k \geqslant m} A_k = \{x : \varphi(x) \geqslant m\}$$

Pelo Teorema n.º 6, também, do capítulo anterior.

$$\int_C \varphi(x)\,dx = \sum_k \int_{A_k} \varphi(x)\,dx \quad ,$$

onde a série do segundo membro é absolutamente convergente; e como seu resto de ordem $m-1$ é, precisamente,

$$\int_{B_m} \varphi(x)\,dx = \sum_{k \geqslant m} \int_{A_k} \varphi(x)\,dx \quad ,$$

resulta a existência de um índice m_o, tal que

$$\int_{B_{m_o}} \varphi(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{5} \tag{1}$$

Por outro lado, sobre o conjunto mensurável $E = C - B_{m_o}$ valem as limitações: $|\not{f}_n(x)| \leqslant \varphi(x) < m_o$ e $|\not{f}(x)| \leqslant \varphi(x) < m_o$.

Ora, de acordo com o Teorema n.º 2 — § 8.2 —, existe um conjunto mensurável $E_\delta \subseteq E$, tal que: $\not{f}_n(x)$ converge, uniformemente, para $\not{f}(x)$, em E_δ; e $\mu(E - E_\delta) < \delta$, onde δ, por ser arbitrário, pode ser suposto igual a $\varepsilon/5m_o$. Nessas condições, é possível achar um índice n_o de modo que se tenha, para $n \geqslant n_o$:

$$|\not{f}_n(x) - \not{f}(x)| < \frac{\varepsilon}{5\,\mu(E_\delta)} \; ; \quad x \in E_\delta \tag{2}$$

Posto que $C = B_{m_o} \cup E_\delta \cup (E - E_\delta)$ e os conjuntos do segundo membro são, dois a dois, disjuntos, podemos escrever:

$$\int_C [\not{f}_n(x) - \not{f}(x)]\,dx = \int_{B_{m_o}} [\not{f}_n - \not{f}]\,dx + \int_{E_\delta} [\not{f}_n - \not{f}]\,dx + \int_{E-E_\delta} [\not{f}_n - \not{f}]\,dx$$

e daí:

$$\int_C [\not{f}_n(x) - \not{f}(x)]\,dx = \int_{B_{m_o}} \not{f}_n(x)\,dx - \int_{B_{m_o}} \not{f}(x)\,dx + \int_{E_\delta} [\not{f}_n(x) - \not{f}(x)]\,dx +$$

$$+ \int_{E-E_\delta} \not{f}_n(x)\,dx - \int_{E-E_\delta} \not{f}(x)\,dx \tag{3}$$

Tendo em vista que $|\psi_n(x)| \leqslant \varphi(x)$, $|\psi(x)| \leqslant \varphi(x)$ e levando em conta (1), vem:

$$\left| \int_{B_{m_o}} \psi_n(x)\, dx \right| \leqslant \int_{B_{m_o}} \varphi(x)\, dx < \frac{\varepsilon}{5}$$

e, analogamente:

$$\left| \int_{B_{m_o}} \psi(x)\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{5}$$

Do mesmo modo, em virtude de (2), resulta (para $n \geqslant n_o$):

$$\left| \int_{E_\delta} [\psi_n(x) - \psi(x)]\, dx \right| \leqslant \int_{E_\delta} \frac{\varepsilon}{5\,\mu(E_\delta)}\, dx = \frac{\varepsilon}{5},$$

e posto que, em $E - E_\delta$ valem as limitações $|\psi(x)| < m_o$ e $|\psi_n(x)| < m_o$, temos:

$$\left| \int_{E-E_\delta} \psi_n(x)\, dx \right| \leqslant \int_{E-E_\delta} m_o\, dx = m_o\, \mu(E - E_\delta) < \frac{\varepsilon}{5}$$

e, analogamente:

$$\left| \int_{E-E_\delta} \psi(x)\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{5}$$

Levando, agora, esses resultados em (3), podemos escrever (para $n \geqslant n_o$):

$$\left| \int_C [\psi_n(x) - \psi(x)]\, dx \right| < 5\,\frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon$$

Desde que ε é arbitrário, resulta, daí:

$$\lim_{n \to \infty} \int_C [\psi_n(x) - \psi(x)]\, dx = \lim_{n \to \infty} \int_C \psi_n(x)\, dx - \int_C \psi(x)\, dx = 0$$

ou seja:

$$\int_C \psi(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \int_C \psi_n(x)\, dx$$

Observação: O teorema que acabamos de demonstrar vale, em particular, quando a função $\varphi(x)$ se identifica a uma constante qualquer, M, positiva. Além disso, basta que a seqüência $\{ \psi_n(x) \}$ seja convergente, para $\psi(x)$, quase por toda a parte de C.

* 11.3 — Teorema n.º 2 — Seja uma seqüência monótona de funções,

$$\psi_1(x) \leqslant \psi_2(x) \leqslant \ldots \leqslant \psi_n(x) \leqslant \ldots,$$

definidas e integráveis sobre um conjunto mensurável C; e admitamos que, para qualquer valor de n, a integral de $f_n(x)$ não ultrapasse uma certa constante positiva M:

$$\int_C f_n(x)\,dx \leqslant M$$

Então, quase por toda a parte de C, o limite

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

existe e é finito; a função $f(x)$ é integrável sobre C e, ainda:

$$\int_C f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \int_C f_n(x)\,dx$$

Demonstração: Primeiramente, admitamos que $f_1(x) \geqslant 0$. Consideremos os conjuntos:

$$K = \{x:\ x \in C \quad \text{e} \quad f_n(x) \to \infty\},$$

$$K_r^{(n)} = \{x:\ x \in C \quad \text{e} \quad f_i(x) > r, \quad \text{se} \quad i \geqslant n\},$$

$$\text{e} \qquad K_r = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_r^{(n)}.$$

Isto posto, é fácil mostrar que

$$K = \bigcap_{r=1}^{\infty} K_r \tag{1}$$

De fato, se $x \in K$, então, qualquer que seja o inteiro positivo r, podemos achar n_o tal que

$$f_i(x) > r, \quad \text{se} \quad i \geqslant n_o$$

Assim, $x \in K_r^{(n_o)}$, e também

$$x \in K_r = \bigcup_u K_r^{(n)},$$

qualquer que seja r. Conseqüentemente, $x \in \bigcap K_r$.

Reciprocamente, se $x \in \bigcap K_r$, é porque $x \in K_r$, para todo o valor de r. Então, dado r inteiro e positivo, arbitrário, existe pelo menos um n_o tal que $x \in K_r^{(no)}$; em outras palavras, dado $r > 0$ arbitrário, existe pelo menos um n_o tal que:

$$f_i(x) > r \quad , \quad \text{se} \quad i \geqslant n_o.$$

Mas, isto significa, precisamente, que $lim\ \ell_n(x) = \infty$, isto é: $x \in K$

A igualdade (1) é, pois, verdadeira.

Agora, pela desigualdade de Tchebycheff, temos:

$$\mu[K_r^{(n)}] \leqslant \frac{1}{r} \int_C \ell_i(x)\, dx \leqslant \frac{M}{r} \tag{2}$$

Por outro lado, desde que a relação

$$\ell_i(x) > r, \text{ para } i \geqslant n,$$

implica a relação

$$\ell_i(x) > r, \text{ para } i \geqslant n+1,$$

resulta que $K_r^{(n)} \subseteq K_r^{(n+1)}$, e, conseqüentemente:

$$K_r^{(1)} \subseteq K_r^{(2)} \subseteq \ldots \subseteq K_r^{(n)} \subseteq \ldots$$

Como a medida μ é σ-aditiva e contínua, vem, em virtude de (2):

$$\mu\left[\bigcup_n K_r^{(n)}\right] = \lim_{n \to \infty} \mu[K_r^{(n)}] \leqslant \frac{M}{r} \tag{3}$$

Entretanto, de (1), deduzimos:

$$K \subseteq \bigcup_n K_r^{(n)} \text{ ; para todo } r.$$

Logo, $\mu(K) \leqslant \mu[\bigcup K_r^{(n)}]$ e, em virtude de (3):

$$\mu(K) \leqslant \frac{M}{r}, \text{ para todo } r.$$

o que implica, finalmente: $\mu(K) = 0$.

Vemos, assim, que o conjunto K, dos pontos de C, para os quais $\ell_n(x)$ tende a infinito, tem medida nula; isto é, a seqüência $\{\ell_n(x)\}$ tem um limite finito, $\ell(x)$, quase por toda a parte de C; convindo notar, além disso, que $\ell_n(x) \leqslant \ell(x)$, qualquer que seja o índice n.

Vamos, agora, introduzir uma função $\varphi(x)$, definida do seguinte modo $\varphi(x) = r$ para todo ponto $x \in C$ tal que:

$$r - 1 \leqslant \ell(x) < r.$$

Dessa definição resulta que

$$\ell_n(x) \leqslant \ell(x) \leqslant \varphi(x) \quad ; \quad x \in C$$

Nessas condições, se conseguirmos provar que a função $\varphi(x)$ é integrável sobre C, a parte final do teorema será uma conseqüência do Teorema n.º 1, já demonstrado. Para isto, consideremos os conjuntos da forma:

$$A_r = \{x: x \in C \quad \text{e} \quad \varphi(x) = r\}$$

e façamos

$$B_s = \bigcup_{r=1}^{s} A_r .$$

Desde que, sobre o conjunto B_s, as funções $\not{f}(x)$ e $\varphi(x)$ são mensuráveis e limitadas — portanto, integráveis — ; e notando, ainda, que

$$\varphi(x) \leqslant \not{f}(x) + 1$$

vem:

$$\int_{B_s} \varphi(x)\, dx \leqslant \int_{B_s} \not{f}(x)\, dx + \int_{B_s} 1\, dx \leqslant \int_{B_s} \not{f}(x)\, dx + \mu(C)$$

ou ainda:

$$\int_{B_s} \varphi(x)\, dx \leqslant \lim_{n \to \infty} \int_{B_s} \not{f}_n(x)\, dx + \mu(C) \leqslant M + \mu(C)$$

Entretanto, sendo $\varphi(x)$ uma função simples:

$$\int_{B_s} \varphi(x)\, dx = \sum_{r=1}^{s} r \cdot \mu(A_r)$$

Demonstramos, assim, que as somas parciais da série de termos positivos

$$\sum_{r=1}^{\infty} r \cdot \mu(A_r)$$

são, todas, limitadas; esta série é, pois, convergente e $\varphi(x)$ é integrável sobre C:

$$\sum_{r=1}^{\infty} r \cdot \mu(A_r) = \int_C \varphi(x)\, dx.$$

Finalmente, no caso em que $\not{f}_1(x) < 0$, podemos raciocinar com as funções

$$g_n(x) = \not{f}_n(x) - \not{f}_1(x) \geqslant 0 \; ; \qquad n = 1, 2, \ldots$$

que, obviamente, satisfazem às demais condições do enunciado. O teorema vale, portanto, em qualquer caso.

Observação: O teorema vale, ainda, para uma seqüência monótona não crescente, $\phi_1 \geqslant \phi_2 \geqslant \ldots \geqslant \phi_n \geqslant \ldots$, desde que as integrais dessas funções, sobre o conjunto C, sejam limitadas inferiormente, por um número negativo N. A demonstração segue sendo a mesma, pois basta multiplicar cada função por (-1) para recairmos no caso de uma seqüência monótona não decrescente, cujas integrais serão limitadas superiormente pelo número positivo $(-N)$.

** Corolário — Se, sobre o conjunto mensurável C, e para todo índice n, a função $\Psi_n(x)$ é não negativa e integrável; e se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_C \Psi_n(x)\, dx < \infty$$

então: a série $\sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(x)$ converge quase por toda a parte de C; sua soma é uma função integrável sobre C, e

$$\int_C \left[\sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(x)\right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_C \Psi_n(x)\, dx$$

Demonstração:

Façamos $\phi_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \Psi_i(x) \quad ; \quad n = 1, 2, \ldots$

Então: $0 \leqslant \phi_1(x) \leqslant \phi_2(x) \leqslant \ldots \leqslant \phi_n(x) \leqslant \ldots,$

e também: $$\int_C \phi_n(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} \int_C \Psi_i(x)\, dx \leqslant M$$

A seqüência de funções integráveis, $\{\phi_n(x)\}$, satisfaz às condições do enunciado do teorema anterior. Portanto, existe e é finito, quase por toda a parte de C, o limite:

$$\phi(x) = \lim_{n \to \infty} \phi_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \Psi_i(x)$$

sendo $\phi(x)$ integrável sobre C e, ainda:

$$\int_C \phi(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \int_C \phi_n(x)\, dx$$

isto é: $$\int_C \left[\sum_{i=1}^{\infty} \Psi_i(x)\right] dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_C \Psi_i(x)\, dx$$

como queríamos provar.

* 11.4 — Teorema nº 3 (Fatou) — Se, sobre o conjunto mensurável C, a seqüência de funções mensuráveis não negativas, $\{f_n(x)\}$, converge, quase por toda a parte, para a função $f(x)$; e se, para todo índice n,

$$\int_C f_n(x)\,dx \leqslant K\,,$$

então, $f(x)$ é integrável sobre C, e

$$\int_C f(x)\,dx \leqslant K\,.$$

Demonstração: Façamos, para cada $x \in C$,

$$\varphi_n(x) = \inf_{k \geqslant n} \{f_k(x)\}\ ; \qquad n = 1, 2, \ldots$$

e mostremos que a função $\varphi_n(x)$ é mensurável sobre C.

De fato, dado um número real qualquer, α, tem-se:

$$\{x: \varphi_n(x) < \alpha\} = \bigcup_{k \geqslant n} \{x: f_k(x) < \alpha\}\,,$$

porque, se x pertence ao primeiro membro,

$$\inf_{k \geqslant n} \{f_k(x)\} < \alpha\ ;$$

e, para algum $k_o \geqslant n$, devemos ter : $f_{k_o}(x) < \alpha$, mostrando que x pertence ao segundo membro.

Reciprocamente, se x pertence ao segundo membro, $f_k(x) < \alpha$ para todo $k \geqslant n$; e, conseqüentemente,

$$\inf_{k \geqslant n} \{f_k(x)\} \leqslant f_k(x) < \alpha\,,$$

isto é, x pertence ao primeiro membro.

Nessas condições, para todo α real, o conjunto

$$\{x: \varphi_n(x) < \alpha\}\,,$$

por ser a união de um sistema numerável de conjuntos mensuráveis, é mensurável; logo, a função $\varphi_n(x)$ é mensurável.

Além disso, é evidente que, para qualquer índice n, temos:

$$0 \leqslant \varphi_n(x) \leqslant f_n(x)$$

Portanto, em face do Teorema n.º 7 — § 10.5 — $\varphi_n(x)$ é integrável sobre C, e

$$\int_C \varphi_n(x)\,dx \leqslant \int_C f_n(x)\,dx \leqslant K \qquad (1)$$

Ora, é evidente que

$$\inf_{k \geq n} \left\{ \psi_k(x) \right\} \leqslant \inf_{K \geq n+1} \left\{ \psi_k(x) \right\} \quad ,$$

de onde concluimos:

$$\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x) \leqslant \ldots \leqslant \varphi_n(x) \leqslant \ldots \tag{2}$$

Os resultados (1) e (2), acima obtidos, mostram que a seqüência de funções $\varphi_n(x)$ satisfaz às condições do enunciado Teorema n.º 2. Então existe, quase por toda a parte de C, o limite

$$\varphi(x) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(x)$$

e

$$\int_C \varphi(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \int_C \varphi_n(x)\, dx \leqslant K, \tag{3}$$

onde a desigualdade é uma conseqüência (1).

Entretanto, facilmente se vê que

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) = \lim_{n \to \infty} \psi_n(x) = \psi(x)$$

e, assim, a (3) pode ser escrita sob a forma

$$\int_C \psi(x)\, dx \leqslant K$$

como se desejava provar.

* 11.5 — Teorema n.º 4 — Seja $\{A_n\}$ um sistema finito ou numerável de conjuntos mensuráveis, tais que

$$A = \bigcup_n A_n \qquad \text{e} \qquad A_i \cap A_j = \phi \ , \qquad i \neq j \ ;$$

e seja $\psi(x)$ uma função integrável sobre cada A_n. Se a série

$$\sum_n \int_{A_n} |\psi(x)|\, dx$$

converge, então, a função $\psi(x)$ é integrável sobre o conjunto A, e

$$\int_A \psi(x)\, dx = \sum_n \int_{A_n} \psi(x)\, dx$$

Demonstração: Devemos notar, de saída, que, para demonstrar o teorema, basta provar que $\psi(x)$ é integrável sobre o conjunto A; de vez que, feito isso, a parte final da tese passa a ser uma conseqüência do Teorema n.º 6 — § 10.4.

Consideremos, primeiro, o caso em que $\psi(x)$ é uma função simples, que toma os valores

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_i, \ldots$$

Admitamos, ainda, que $A = \bigcup_k B_k$, onde $B_i \cap B_j = \phi$, se $i \neq j$; e

$$\psi(x) = \psi_k, \quad \text{se} \quad x \in B_k$$

Consideremos os conjuntos — dois a dois disjuntos — da forma

$$A_{nk} = A_n \cap B_k$$

Por definição, temos:

$$\int_{A_n} |\psi(x)|\, dx = \sum_k |\psi_k| \cdot \mu(A_{nk})$$

e daí:

$$\sum_n \int_{A_n} |\psi(x)|\, dx = \sum_n \sum_k |\psi_k| \cdot \mu(A_{nk}) =$$

$$= \sum_k |\psi_k| \sum_n \mu(A_{nk})$$

Sendo $B_k = \bigcup_n A_{nk}$, resulta que $\mu(B_k) = \sum_n \mu(A_{nk})$; e, assim:

$$\sum_n \int_{A_n} |\psi(x)|\, dx = \sum_k |\psi_k|\, \mu(B_k)$$

Como o primeiro membro é, por hipótese, finito, a série do segundo membro é convergente. Mas, esta é, precisamente, a condição para que $\psi(x)$ seja integrável sobre A; isto é, a integral

$$\int_A \psi(x)\, dx = \sum_k \psi_k \cdot \mu(B_k)$$

existe.

No caso geral, em que $\psi(x)$ é uma função mensurável qualquer, é possível aproximá-la por meio de uma seqüência de funções simples — integráveis sobre qualquer A_n. De sorte que, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, podemos achar a função simples $\psi_k(x)$, tal que

$$|\psi_k(x)| - |\psi(x)| \leqslant |\psi_k(x) - \psi(x)| < \varepsilon \tag{1}$$

e daí:

$$\int_{A_n} |\psi_k(x)|\, dx \leqslant \int_{A_n} |\psi(x)|\, dx + \varepsilon \cdot \mu(A_n)$$

Posto que $\sum_n \mu(A_n) = \mu(A)$, resulta:

$$\sum_n \int_{A_n} |\psi_k(x)|\, dx \leqslant \sum_n \int_{A_n} |\psi(x)|\, dx + \varepsilon \cdot \mu(A),$$

onde a convergência da série do segundo membro implica a convergência da série do primeiro membro; e isto implica, por sua vez — desde que o teorema já foi demonstrado para funções simples — , que a função $\phi_k(x)$ é integrável sobre o conjunto A.

Finalmente, ainda de (1), tiramos:

$$|\phi(x)| - |\phi_k(x)| \leqslant |\phi(x) - \phi_k(x)| < \varepsilon ,$$

ou seja:

$$|\phi(x)| \leqslant |\phi_k(x)| + \varepsilon ,$$

e como a função $|\phi_k(x)| + \varepsilon$ é integrável sobre A, também a função $\phi(x)$ — Teorema n.º 7, § 10.5 — é integrável sobre A.

O teorema vale, pois, em qualquer caso.

APÊNDICE À QUARTA PARTE

Antes de encerrar estes apontamentos, vamos mostrar a relação entre a integral de Lebesgue, cujas propriedades básicas acabamos de estudar, e a conhecida integral de Riemann.

A fim de facilitar essa comparação, limitar-nos-emos ao caso unidimensional.

* Teorema — Se a integral de Riemann

$$J = (R) \int_a^b \phi(x)\, dx$$

existe, então, a função $\phi(x)$ é L-integrável sobre o intervalo $[a, b]$ e tem-se:

$$(L) \int_{[a.b]} \phi(x)\, dx = (R) \int_a^b \phi(x)\, dx$$

Demonstração: Sabemos que o limite comum das somas inferiores e superiores — de Darboux — , que definem a integral de Riemann, sobre o intervalo $[a, b]$, não depende do modo pelo qual se decompõe o referido intervalo, para construir aquelas somas. Então, podemos considerar a seqüência de decomposições, $\{D_n\}$, da forma:

$$D_n : \qquad a = l_o < l_1 < l_2 \ldots < l_{2^n - 1} < l_{2^n} = b$$

onde

$$l_i = a + \frac{b-a}{2^n} \cdot i \quad ; \qquad i = 1, 2, \ldots 2^n$$

As somas de Darboux, correspondentes à decomposição D_n, ficam sendo:

$$\overline{S}_n = \frac{b-a}{2^n} \sum_{i=1}^{2^n} M_{n_i} \qquad \text{e} \qquad \underline{S}_n = \frac{b-a}{2^n} \sum_{i=1}^{2^n} m_{n_i}$$

onde M_{ni} e m_{ni} representam, respectivamente, o supremo e o ínfimo dos valores de $f(x)$ no segmento

$$l_{i-1} \leqslant x < l_i \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots, 2^n$$

Devemos lembrar, ainda, que as somas superiores formam uma sucessão monótona não crescente, limitada inferiormente; e que as somas inferiores formam uma sucessão monótona não decrescente, limitada superiormente. Além disso, se existe a R — integral, J, de $f(x)$, em $[a, b]$, devemos ter:

$$J = \lim_{n \to \infty} \bar{S}_n = \lim_{n \to \infty} \underline{S}_n$$

Consideremos, agora, para cada valor de n, as funções simples, assim definidas:

$$\bar{f}_n(x) = M_{n_i}, \qquad \text{se} \qquad l_{i-1} \leqslant x < l_i$$

$$\underline{f}_n(x) = m_{n_i}, \qquad \text{se} \qquad l_{i-1} \leqslant x < l_i$$

devendo observar-se que, no ponto $x = b$, as funções $\bar{f}_n$ e $\underline{f}_n$ poderão ser em ser arbitrariamente definidas.

É fácil constatar que as duas funções $\bar{f}_n(x)$ e $\underline{f}_n(x)$ são integráveis em $[a, b]$, segundo Lebesgue (definição D_1), tendo-se:

$$\int_{[a,b]} \bar{f}_n(x)\, dx = \bar{S}_n \qquad \text{e} \qquad \int_{[a,b]} \underline{f}_n(x)\, dx = \underline{S}_n$$

Por outro lado, quando passamos da decomposição D_n para a decomposição D_{n+1}, cada intervalo da primeira fica dividido ao meio; e se x pertence ao intervalo $[l_{i-1}, l_i)$, da primeira, x pertencerá a um dos dois intervalos parciais $[l'_{2i-2}, l'_{2i-1})$ e $[l_{2i-1}, l_{2i})$, da segunda — posto que $l'_{2.2} = l_{i-1}$ e $l'_{2i} = l_j$. Como o extremo superior de $f(x)$, no intervalo primitivo, supera ou iguala o extremo superior de $f(x)$ em cada intervalo parcial em que o mesmo é subdividido, resulta que $\bar{f}_n(x) \geqslant \bar{f}_{n+1}(x)$. De modo análogo, vemos que $\underline{f}_n(x) \leqslant \underline{f}_{n+1}(x)$. Segue-se, portanto, que

$$\bar{f}_1(x) \geqslant \bar{f}_2(x) \geqslant \bar{f}_3(x) \geqslant \ldots$$

$$\underline{f}_1(x) \leqslant \underline{f}_2(x) \leqslant \underline{f}_3(x) \leqslant \ldots$$

Desse modo, as duas seqüências $\{\bar{f}_n(x)\}$ e $\{\underline{f}_n(x)\}$ satisfazem às condições do enunciado do Teorema n.º 2 — § 11.3 — isto é: existem, quase por toda a parte de $[a, b]$, os limites:

$$\bar{f}(x) = \lim_{n \to \infty} \bar{f}_n(x) \geqslant f(x)$$

$$\underline{f}(x) = \lim_{n \to \infty} \underline{f}_n(x) \leqslant f(x) \quad ;$$

e ainda, pelo mesmo teorema:

$$\int_{[a,b]} \overline{f}\,(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \overline{f}_n\,(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \overline{S}_n = J$$

$$\int_{[a,b]} \underline{f}\,(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \underline{f}_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \underline{S}_n = J$$

Lembrando que $\overline{f}\,(x) \geqslant f(x) \geqslant \underline{f}\,(x)$, resulta:

$$\int_{[a,b]} \left|\overline{f}\,(x) - \underline{f}\,(x)\right| dx = \int_{[a,\,b} \left\{\overline{f}\,(x) - \underline{f}\,(x)\right\}\,dx = 0 \quad ;$$

e daí, pelo corolário do Teorema n.º 9 — § 10.7 — deduz-se que, quase por toda a parte de $[a, b]$:

$$\overline{f}\,(x) - \underline{f}\,(x) = 0$$

isto é:

$$\overline{f}\,(x) = f(x) = \underline{f}\,(x)\,.$$

Assim, podemos escrever:

$$\int_{[a.b]} f(x)\,dx = \int_{[a,b]} \overline{f}\,(x)\,dx = J$$

e o teorema fica demonstrado.

Observação: Um exemplo de função *L*-integrável, mas não *R*-integrável, é o da já citada função de Dirichlet — cuja *L*-integral é nula —. Para essa função, as somas superiores de Darboux valem sempre 1; e as somas inferiores valem sempre 0; não apresentando, pois, um limite comum.

BIBLIOGRAFIA

Na execução deste trabalho, foram consultadas várias obras, destacando-se, pela ordem em que mais contribuiram, as seguintes:

1 — KOLMOGOROV, A. N. & FORMIN, S. V. *Measure, Lebesgue Integrals and Hilbert Space.* cap. 1, 2 e 3.

2 — MONTEIRO, Antônio & GOMES, A. Pereira. *Funções contínuas.* cap. 2.

3 — BERRA, A. E. Sagastume. *Introduccion a la matematica superior.* cap. 1, 6 e 10.

4 — GAMA, Lélio I. Introdução à teoria dos conjuntos. *Revista Brasileira de Estatística,* Rio de Janeiro, *2* (5 e 7) jan./mar. e out./dez. 1941, cap. 1, 3 e 7.

ESTUDO SOBRE A FECUNDIDADE NO ESTADO DE SÃO PAULO 1940/1950

CELSO CARDOSO DA SILVA SIMÕES
Estatístico

SUMÁRIO

1. *Introdução*
2. *Dados Básicos Utilizados*
3. *Nível da Fecundidade*
   3.1. *Número Médio de Filhos Tidos Nascidos Vivos*
      3.1.1. *Procedimento*
      3.1.2. *Metodologia Utilizada*
4. *Conclusões*
5. *Bibliografia*

1. INTRODUÇÃO

Como é do conhecimento geral, os países subdesenvolvidos, em particular o Brasil, não dispõem de estatísticas vitais fidedígnas, impedindo assim, o cálculo de medidas diretas de fecundidade, havendo necessidade de serem aproveitados todos os elementos que os censos proporcionam, como única fonte de dados para estudos demográficos.

Desenvolveram-se então, procedimentos para a elaboração desses estudos e, dentre eles, os devidos a Giorgio Mortara.

O presente estudo visa dar uma idéia dos níveis de fecundidade pela comparação entre os resultados dos censos de 1940 e 1950, para o Estado de São Paulo.

Desde já, salientemos que existem certas limitações neste trabalho, uma vez que os métodos aplicados na determinação das taxas de fecundidade, refletem o comportamento de coortes diferentes, cada uma das quais, chegou a uma determinada etapa de sua vida reprodutiva no momento do Censo. Temos então o nível de fecundidade num dado momento.

2. DADOS BÁSICOS UTILIZADOS

Um dos requisitos básicos quando se fazem comparações entre censos é que haja comparabilidade entre os dados através do tempo.

Em nosso estudo, contamos com a informação sobre *filhos tidos* pelas mulheres presentes em São Paulo, distribuídas por grupos de idade. No Censo de 1940, esta informação veio em separado para *filhos nascidos vivos* e para filhos *nascidos mortos*. Houve necessidade de tornar comparáveis os dados de 1950, cujas cifras sobre *filhos tidos* incluem os *nascidos vivos* e os *nascidos mortos,* com os dados de 1940.

Corrigiram-se as cifras de 1950, deduzindo-se a proporção correspondente a *filhos nascidos mortos,* segundo a idade da mãe, observada em 1940 e aplicamos esta proporção aos dados de 1950, obtendo assim os *filhos tidos nascidos vivos.*

3. NÍVEL DE FECUNDIDADE

3.1. Número Médio de Filhos Tidos Nascidos Vivos

Utilizando-se a informação sobre *filhos tidos nascidos vivos,* fornecida pelo Censo, em 1940 e 1950, determinou-se o número médio de

TABELA I

IDADE DA MÃE	1940	1950
15 —— 19	0,1010	0,1059
20 —— 24	0,9585	0,8778
25 —— 29	2,2508	2,0282
30 —— 34	3,5543	3,1048
35 —— 39	4,7974	4,1093
40 —— 44	5,7007	4,7640
45 —— 49	6,3569	5,2435
50 —— 54	6,5420	5,8482
55 —— 59		
60 —— 64	6,7375	6,1668
65 —— 69		
70 —— 74	6,5005	6,1559
75 —— 79		

FONTE: IBGE.: Censo Demográfico, 1940 e 1950. Estado de São Paulo. — Brasil.

filhos tidos nascidos vivos, para a população feminina de 15 anos e mais de idade, presente no Estado, no momento do Censo, segundo grupos qüinqüenais de idade.

O número médio de *filhos nascidos vivos* segundo a idade das mulheres, em 1940 e 1950, aparecem na Tabela I.

Na Tabela II, se apresentam estes valores mas já corrigidos, de acordo com considerações que passaremos a analisar:

a) à exceção do grupo inicial, o número médio de filhos nascidos vivos em 1950, é inferior ao de 1940.

b) comparando os valores dos censos de 1940 e 1950, verifica-se que existe incompatibilidade entre o número médio de *filhos tidos nascidos vivos,* a partir de 50 anos. Assim, em 1950, nota-se que houve um declínio desse número médio (5,85), para as mulheres que tinham na ocasião idades entre 50 — 59 anos, quando o dado deveria aparecer pelo menos igual ao declarado pelas mesmas mulheres que em 1940 tinham idades compreendidas entre 40 — 49 anos e que seria aproximadamente igual a 6,03, ou seja, ½ (5,7007 + 6,3569).

Para que as informações de 1940 fossem comparáveis com as de de 1950 procedeu-se a um ajuste desses valores, de modo que a fecundidade acumulada por uma coorte até o Censo de 1950, fosse pelo menos igual, e em geral maior, que a fecundidade acumulada por essa mesma coorte até o Censo de 1940:

1. representou-se graficamente (ver Gráfico 1), os resultados sobre o número médio de filhos para 1940 e 1950, atribuindo-se à idade central de cada grupo de idades, o valor do número médio de *filhos tidos nascidos vivos* pelas mulheres, do dito grupo, com excessão do de 15 — 19 anos, ao qual atribuimos o número médio de filhos à idade de 18 anos, por ser a mais representativa do grupo. Unindo-se os pontos, assim obtidos, haveríamos de ter uma curva regular e crescente até o máximo do último grupo considerado;

2. como o número médio de filhos tidos nascidos vivos por mulher na classe 50 — 59 anos, em 1950, deveria ser pelo menos igual a 6,03, procedeu-se ao aumento dos valores correspontes aos grupos finais, a partir de 40 — 44 anos, de modo que o valor máximo fosse de aproximadamente 6,03 filhos, obtendo-se assim uma curva suave e regular. Este ajustamento foi feito a mão livre.

Uma vez corrigidos os dados básicos que se encontram tabulados por grupos qüinqüenais de idade na Tabela II, e cuja representação se acha também no Gráfico 1, passamos a determinar as medidas de

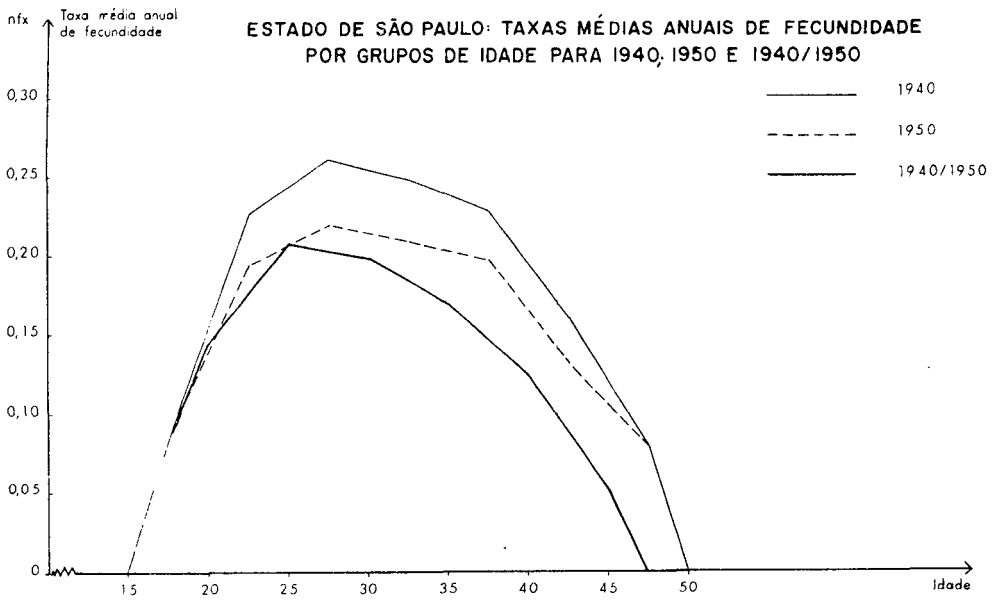


Gráfico 1

fecundidade para as datas censitárias 1940 e 1950 utilizando o Método de Mortara.

TABELA II

IDADE DA MÃE	1940	1950
15 —— 19	0,1010	0,1059
20 —— 24	0,9585	0,8778
25 —— 29	2,2508	2,0282
30 —— 34	3,5543	3,1048
35 —— 39	4,7974	4,1093
40 —— 44	5,7007	5,0000
45 —— 49	6,3569	5,6000
50 —— 54	6,5000	5,8000

3.1.1. Procedimento

Seja $\phi(X)$ a fecundidade acumulada. Determina-se, através do gráfico ajustado, os valores da taxa cumulativa de fecundidade nas idades exatas 15, 20, 25 ....., 50, 55. A diferença entre os valores, ou seja: $\phi(X + 5) - \phi(X)$ vai dar as taxas médias de fecundidade para cada um desses intervalos qüinqüenais entre o 15º e 50º aniversários. Dividindo-se essas taxas pela amplitude do intervalo correspondente, obtemos as taxas médias anuais de fecundidade (Tabelas III e IV), respectivamente, para 1940 e 1950.

Analisando os dados das Tabelas III e IV, e sua representação no Gráfico 2, verificamos haver declínio na fecundidade. Acreditamos que as taxas de fecundidade sejam, ainda assim, exageradas, uma vez que

TABELA III
1940

X	ϕ (X)	ϕ (X + 5)-ϕ (X)	$_nf_x$	X —— X + n
15	0,0000	0,475	0,095	15 —— 19
20	0,4750	1,125	0,225	20 —— 24
25	1,6000	1,300	0,260	25 —— 29
30	2,9000	1,250	0,250	30 —— 34
35	4,1500	1,150	0,230	35 —— 39
40	5,3000	0,800	0,160	40 —— 44
45	6,1000	0,400	0,080	45 —— 49
50	6,5000			

TABELA IV
1950

X	ϕ (X)	ϕ (X + 5)-ϕ (X)	$_nf_x$	X —— X + n
15	0,0000	0,475	0,095	15 —— 19
20	0,4750	0,975	0,195	20 —— 24
25	1,4500	1,100	0,220	25 —— 29
30	2,5500	1,050	0,210	30 —— 34
35	3,6000	1,000	0,200	35 —— 39
40	4,6000	0,650	0,130	40 —— 44
45	5,4000	0,400	0,080	45 —— 49
50	5,8000			

o Método de Mortara tomando como base os dados de um só Censo, parte da suposição, dentre outras, de que a fecundidade se mantenha constante através do tempo. Logo, os resultados obtidos serão sobreestimados, pois verificamos haver descenso nos níveis apresentados na Tabela I, comparando 1940 com 1950.

Tendo em vista estas observações, passaremos a determinar o nível da fecundidade intercensitária, através de uma análise *por coorte* ou seja, um exame da fecundidade de uma mesma geração de mulheres nos dois censos [1].

O procedimento é uma generalização do proposto por Mortara. As mudanças no comportamento reprodutivo serão reais e referentes ao período (1940/1950), e coorte de mulheres, que se estuda.

[1] Método utilizado no CELADE, e referido em aulas ministradas no Curso intensivo de Demografia, realizado na PUC, em 1971, pelo Prof. Jorge Somoza.

3.1.2. Metodologia Utilizada

Sejam $\phi^Z(X)$ o número de filhos tidos nascidos vivos até o momento Z para as mulheres que neste momento tinham idade X; e $\phi^{z+n}(X+n)$ o número médio de filhos tidos até $(Z + n)$ pelas mulheres com idades $(X + n)$.

A diferença $\phi^{Z+n}(+n) - \phi^Z(X)$ representa a fecundidade acumulada no período Z a $Z+n$ por esta coorte de mulheres, se se supõe:

i) a população feminina no período intercensitário de 10 anos se manteve fechada;

ii) a fecundidade das mulheres até uma idade determinada é independente da mortalidade, ou seja, as mulheres sobreviventes, no censo, têm uma fecundidade igual à das mulheres falecidas;

iii) existe comparabilidade entre as cifras censitárias (coerência quanto à qualidade).

Essa fecundidade acumulada se produziu em n anos. Dividindo-a por n se terá uma taxa anual média de fecundidade.

O cálculo desses valores se acha a seguir, e sua representação gráfica, no Gráfico 2.

TABELA V

X	$\phi^{40}(X)$	$\phi^{50}(X)$
15	0,0000	0,0000
20	0,4750	0,4750
25	1,6000	1,4500
30	2,9000	2,5500
35	4,1500	3,6000
40	5,3000	4,6000
45	6,1000	5,4000
50	6,5000	5,8000
55	6,5000	6,1000

$\phi^{50}(20) - \phi^{40}(15) = {}_5f_{15}$ ..... ${}_5f_{15} = 0{,}0950$

$\phi^{50}(25) - \phi^{40}(15) = {}_{10}f_{15}$ ..... ${}_{10}f_{15} = 0{,}1450$

$\phi^{50}(30) - \phi^{40}(20) = {}_{10}f_{20}$ ..... ${}_{10}f_{20} = 0{,}2075$

$\phi^{50}(35) - \phi^{40}(25) = {}_{10}f_{25}$ ..... ${}_{10}f_{25} = 0{,}2000$

$\phi^{50}(40) - \phi^{40}(30) = {}_{10}f_{30}$ ..... ${}_{10}f_{30} = 0{,}1700$

$\phi^{50}(45) - \phi^{40}(35) - {}_{10}f_{35}$ ..... ${}_{10}f_{35} = 0{,}1250$

$\phi^{50}(50) - \phi^{40}(40) = {}_{10}f_{40}$ ..... ${}_{10}f_{40} = 0{,}0500$

$\phi^{50}(55) - \phi^{40}(45) = {}_{50}f_{45}$ ..... ${}_5f_{45} = 0{,}0000$

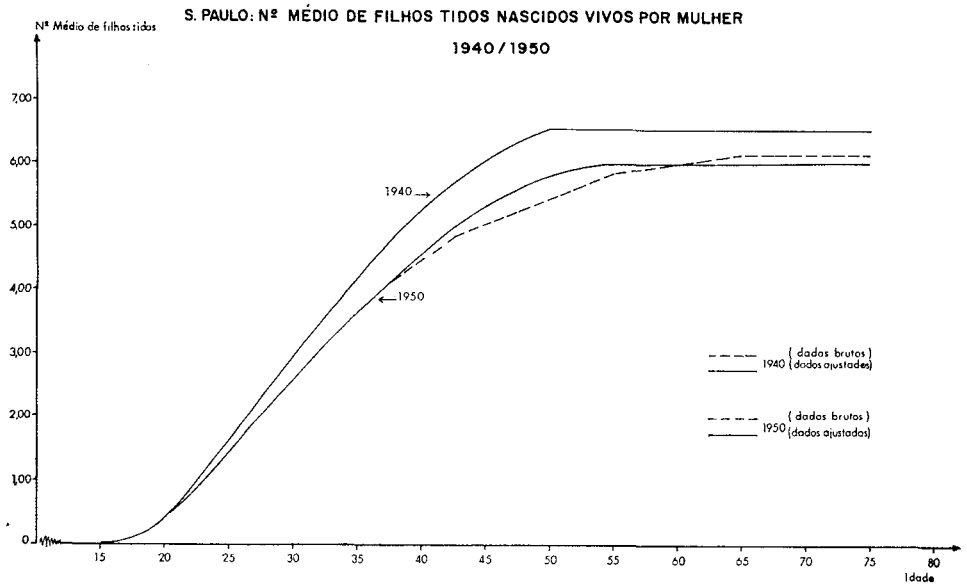


Gráfico 2

4. CONCLUSÕES

Para termos uma medida sintética da fecundidade no período estudado calcularam-se as *taxas brutas de reprodução* que são iguais à taxa global de fecundidade multiplicada pelo coeficiente de feminilidade, aproximadamente (0,48).

Os resultados se apresentam na Tabela a seguir:

TAXA BRUTA DE REPRODUÇÃO: 1940, 1950 e 1940/1950

1940	1950	1940/1950
3,12	2,71	2,13

Verifica-se que a Taxa Bruta de Reprodução, quando se calculam as taxas de fecundidade para o período intercensitário, é inferior à de 1940 e 1950. Podemos interpretar esta taxa como a que resultaria, no futuro, se a fecundidade observada, no período 1940/1950 se mantivesse indefinidamente.

Podemos concluir que ao examinarmos as Tabelas e o Gráfico 2:

i) as taxas que se obtiveram pela aplicação do método intercensitário dão resultados que podemos considerar como coerentes;

ii) observa-se uma diminuição acentuada da fecundidade no período 1940/1950.

5. BIBLIOGRAFIA

ARRETEX, Carmen. *Minas Gerais. Projecciones de la Poblacion, 1950/1960* (Informe Provisional). Santiago, Chile, Centro Latino Americano de Demografia. 1971. 59 p. (S.519/59).

CASSINELLI, Robert Robichez. *Analisis de la fecundidad en un Estado de Brasil.* (Trabalho inédito).

MORTARA, Giorgio. *Methods of using census statistics for the calculation of life tables and other demographic measures (with applications to the population of Brazil)* Lake Success, United Nations, Departament of Social Affairs, 1949. 60 p. tab., graf. (United Nations Publications. Population Studies, 7).

Documentário

II CONFERÊNCIA NACIONAL DE ESTATÍSTICA

e

II CONFERÊNCIA NACIONAL DE GEOGRAFIA E CARTOGRAFIA

Realizaram-se, com inteiro êxito, no período de 28 de novembro último a 9 de dezembro corrente, a II Conferência Nacional de Estatística — CONFEST e a II Conferência Nacional de Geografia e Cartografia — CONFEGE. Decorrente de prescrição legal, as Conferências tiveram a participação de representantes ministeriais, dos Governos Estaduais e de outras entidades públicas e privadas, tanto produtoras como usuárias de estatísticas e de informações geográfico-cartográficas.

As reuniões efetuaram-se na Escola Nacional de Ciências Estatísticas — ENCE, tendo resultado dos trabalhos 14 Recomendações da II CONFEST e 4 da II CONFEGE. Foram aprovadas, conjuntamente, mais 3 Recomendações e 3 Sugestões.

A solenidade de abertura das Conferências teve lugar no auditório da Caixa Econômica Federal, sob a Presidência do Ministro do Planejamento e Coordenação Geral, Professor João Paulo dos Reis Velloso, com a presença do Professor Isaac Kerstenetzky, Presidente da Fundação IBGE, e de grande número de autoridades civis e militares. Pouco antes fora feito o lançamento, no saguão daquele estabelecimento, pelo representante do Presidente da Empresa de Correios e Telégrafos — ECT, Brigadeiro José Carlos Teixeira Rocha, de 4 selos da série Desenvolvimento Nacional, um dos quais comemorativo do Primeiro Centenário do Censo Demográfico.

Ao convidar o Ministro João Paulo dos Reis Velloso para presidir a sessão de abertura das Conferências, o Professor Isaac Kertenetzky pronunciou as seguintes palavras:

— "Em nome da Fundação IBGE e no meu próprio, tenho a honra de agradecer a presença, nesta solenidade de abertura dos trabalhos da II Conferência Nacional de Estatística e da II Conferência Nacional de Geografia e Cartografia, do Exmo. Sr. Ministro do Planejamento e Coordenação Geral, Doutor João Paulo dos Reis Velloso, bem como das demais autoridades, que aqui vieram prestigiar esta reunião inaugural, e dos participantes de ambas as Conferências.

Seria desnecessário salientar, neste instante, a importância especial de que se revestem as Conferências Nacionais de Estatística e de Geografia e Cartografia. Constituem elas a melhor oportunidade de um encontro entre os que produzem dados e informações estatísticas e geográfico-cartográficas, e os usuários desses mesmos dados e informações.

O interregno entre as duas Conferências caracterizou-se pela implementação de medidas objetivando alcançar plena compatibilidade da produção de dados e informações estatísticas, geográficas e cartográficas em relação às atividades desenvolvidas pelos setores públicos e privados.

Nesse sentido, a Fundação IBGE procurou aparelhar-se da melhor maneira possível, aproveitando a experiência de alguns decênios para renovação dos métodos e processos de trabalho, em consonância com o ritmo de crescimento do Brasil e as peculiaridades setoriais de expansão da vida nacional.

Vejo, aqui, condignamente representados, os órgãos e entidades da mais larga projeção, no País, consumidores e produtores de tais elementos informativos.

A Fundação IBGE está certa de que as atuais Conferências virão trazer às investigações, pesquisas e levantamentos estatísticos, bem como aos estudos geográficos, levantamentos geodésicos e topográficos e ao mapeamento do Brasil, reajustamentos e impulsos novos, em decorrência dos contatos e trocas de idéias entre os participantes deste promissor encontro.

E devo assegurar que, como no passado, a Fundação IBGE dará o melhor dos seus esforços no sentido de cumprir e realizar as Recomendações das presentes Conferências.

Passo agora ao Exmo. Sr. Ministro do Planejamento e Coordenação Geral a Presidência desta Sessão de Instalação dos Trabalhos da II Conferência Nacional de Estatística e da II Conferência Nacional de Geografia e Cartografia".

A seguir, o Ministro João Paulo dos Reis Velloso abriu os trabalhos das Conferências com o discurso cujo teor vai a seguir transcrito:

— "Ao abrir os trabalhos destas Conferências Nacionais de Estatística, Geografia e Cartografia, realizadas no ano em que se comemora o centenário do I Censo nacional, desejo levar a todos os seus participantes a saudação da Fundação IBGE e do Ministério do Planejamento e Coordenação Geral.

Com a operação efetiva de seu órgão de informática, aparelhado com os mais modernos computadores, e já no estágio de lançamento da nova fase do programa de pesquisas econômico-sociais domiciliares, o sistema estatístico nacional se mostra perfeitamente equipado tecnologicamente e motivado programaticamente para o conhecimento da realidade da sociedade moderna e do tempo de criação em que se encontra o Brasil.

Importa, desde logo, definir a importância da Fundação IBGE no conjunto de órgãos e entidades que integram o sistema de funcionamento do Ministério.

Responsável pela Coordenação do planejamento e acompanhamento do processo de crescimento e desenvolvimento do País, o Ministério conta com o setor específico de produção de dados e informações da natureza estatística, geográfica e cartográfica, bem assim de apoio de processamento de dados, como uma das condições básicas para o êxito de seu trabalho.

A Fundação IBGE funciona como uma das grandes unidades componentes do sistema integrado do Ministério do Planejamento, ao lado de entidades cujas atribuições, necessariamente diversificadas, se complementam em trabalho sincronizado visando a um mesmo fim — como o IPEA, o BNDE, a FINEP; e unidades integrantes da Secretaria-Geral do Ministério: as diversas Secretarias — de Planejamento, de Orçamento, de Modernização e Reforma Administrativa, de Articulação com os Estados e Municípios, de Cooperação Técnica e Econômica Internacional.

A Fundação IBGE, por sua vez, é integrada por serviços igualmente diferenciados, como os de Estatística, Geografia, Cartografia e Informática, que abrangem inquéritos, levantamentos de variada espécie, pesquisas de toda ordem — tudo isso, no entanto, sob critérios rigorosos de interação, porque objetivando um só e único fim, isto é, o da produção de um quadro tão completo e atualizado quanto possível da realidade social e econômica do País.

Desejo, assim ressaltar que os diversos setores de trabalho da Fundação IBGE funcionam dentro do enfoque de sistema, como um todo coerente, espelhando, desse modo, em sentido particularizado, a filosofia que inspira o mecanismo de ação conjugada e interdependente do Ministério a que se acha vinculada.

A idéia básica dessa atuação sistêmica tem dois sentidos. Primeiro, que as atividades da instituição não devem constituir mera repetição rotineira de tarefas isoladas. E, sim, têm caráter finalista — proporcionar uma visão da trajetória da evolução do País em suas múltiplas di-

mensões. Segundo, da estreita interdependência das atividades, que poderiam ser visualizadas dentro de um "continuum", que vai desde a concepção dos programas estatísticos e geográficos, coleta de dados e informações no campo, elaboração, processamento e armazenamento, até a realização de estudos e divulgação de resultados.

Nessa direção, vem a Fundação IBGE desdobrando e articulando as suas atividades, em expansão correspondente aos imperativos do próprio desenvolvimento nacional, para isso não lhe faltando a compreensão e o apoio do Governo do Presidente Médici.

Torna-se agora oportuno fixar alguns dos aspectos mais expressivos das realizações da Fundação IBGE durante os anos recentes, no interregno havido entre as primeiras Conferências e as que tenho hoje a satisfação de inaugurar.

Quero destacar, antes do mais, as bem conduzidas operações do VIII Recenseamento Geral do Brasil, as quais, pela primeira vez, permitiram a obtenção dos resultados do Censo Demográfico coincidentes em sua referência cronológica com as dos Censos Econômicos, propósito este do maior alcance para a comparabilidade dos dados demográficos e econômicos.

Quero também salientar que as apurações preliminares globais do Censo Demográfico foram divulgadas em tempo recorde, poucos meses decorridos do início da coleta dos dados respectivos. Neste momento, estão sendo divulgados os resultados definitivos, por Unidades da Federação.

Além do bem sucedido esforço de atualização das estatísticas, nada obstante o crescente aumento de novos inquéritos e pesquisas, fato que decorre de uma demanda cada vez mais variada e exigente, em exatidão e minúcia, de informações sócio-econômicas, a Fundação IBGE aperfeiçoa a elaboração das estatísticas industriais e fornece, com periodicidade mensal, indicadores da produção industrial que estão permitindo ao Governo e aos setores da iniciativa privada acompanhar de perto a evolução nesse importante setor da economia nacional.

Merece referência especial o levantamento sistemático que, sob a denominação de Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios (PNAD), possibilita acompanhar a muito breve prazo a evolução de características sócio-econômicas da mais profunda significação, em país da extensão territorial e conseqüente diversificação de aspectos como o nosso, tais as referentes a mão-de-obra, emprego, nível econômico da família, grau de instrução, saúde, habilitação e outras desse gênero.

O estudo da organização do espaço geográfico nacional e o mapeamento do Brasil tiveram impulso considerável nos últimos anos.

Mantendo serviços de Geodésia e Topografia, fundamentais para o apoio às atividades cartográficas que vem desenvolvendo em ritmo ascendente e em consonância com as diretrizes básicas do planejamento do desenvolvimento do País, a Fundação IBGE apresenta notável acer-

vo de trabalhos, no campo dos estudos especificamente geográficos, dentre os quais não posso deixar de mencionar os relacionados à organização regional do País como um todo à caracterização das unidades macro-regionais e à identificação de unidades menores dessa mesma organização, com a utilização de métodos de Geografia Quantitativa.

Fato digno de menção especial é o do advento, no esquema organizacional da Fundação IBGE, há cerca de uma ano e meio, do setor de Informática, para execução do processamento dos dados necessários às atividades da Fundação; desenvolvimento de arquivo eletrônico de acesso automático de informações indispensáveis ao planejamento sócio-econômico na área do Ministério do Planejamento e Coordenação Geral, ou seja, um Banco de Dados; a promoção e generalização do uso dos métodos de informática do âmbito da Fundação IBGE e do Ministério do Planejamento; e a realização de estudos e pesquisas metodológicos no domínio da Informática. Além disso, o setor de Informática da Fundação IBGE vem atendendo com inteiro sucesso a solicitações outras, como no caso de sua valiosa contribuição no processamento do Orçamento da União.

O grande salto tecnológico representado pela computação eletrônica e a aplicação dos modernos métodos e processos de Informática às pesquisas e levantamento sócio-econômico traduzem-se em aperfeiçoamento do processo de concepção e elaboração do planejamento do desenvolvimento nacional.

Paralelamente, a Fundação IBGE cuida, ela própria, através da Escola Nacional de Ciências Estatísticas, da formação e aperfeiçoamento do seu pessoal técnico e essa contribuição ao preparo de especialistas se estende às demais organizações integrantes do Ministério do Planejamento. E vale dizer que não poucos dos diplomados são absorvidos em outros setores, não só públicos como de outra natureza.

As Conferências que ora se iniciam trazem o ensejo de um contato de maior alcance entre produtores de dados e informações sócio-econômicas e seus usuários de todos os matizes — não apenas aqueles da área governamental, mas também os que representam o imenso e tão variado setor dos empreendimentos privados.

Decorrentes de prescrição legal, e com a participação de representantes ministeriais, dos Governos Estaduais e de outras entidades públicas e privadas, tanto produtoras como usuárias de estatísticas e de informações geográfico-cartográficas, as Conferências oferecem oportunidade para contatos e troca de idéias e opiniões, visando a uma racional coordenação de esforços para o melhor atendimento possível das necessidades do País nesses campos de atividades.

Entre os múltiplos e importantes temas da agenda das Conferências, creio que devem ser destacados os seguintes:

1) No âmbito das estatísticas contínuas: a ampliação das informações de curto prazo indispensáveis para a formulação da política

conjuntural; a modernização das estatísticas agrícolas; melhor cobertura do setor terciário; e prioridades na regionalização de dados.

2) O aperfeiçoamento da comparabilidade das estatísticas particularmente quanto às provenientes de registros administrativos.

3) Integração dos processos de coleta em diferentes áreas do sistema estatístico.

4) Na esfera das estatísticas derivadas, além da tabela de relações inter-setoriais de 1970, já objeto de trabalhos preliminares na Fundação IBGE, novas dimensões de contabilidade social devem ser discutidas, com atenção especial para construção de indicadores sociais.

5) O processo de ocupação econômica do território nacional e o crescimento demográfico do País fazem com que seja importante definir investigações e estudos prioritários de urbanização, migrações internas e desenvolvimento agrário.

Por outro lado, são de grande interesse as conclusões das discussões a serem realizadas sobre o mapeamento sistemático do território nacional.

Tão expressiva quanto a produção, em si mesmo, de dados e informações estatísticas e geográfico-cartográficas, é, igualmente, a coordenação, que também cabe à Fundação IBGE, dos esforços globais para esse fim. E aqui está um dos objetivos principais destas Conferências, cujo valor se impõe de maneira irrecusável, como uma das condições de êxito das atividades da Fundação IBGE.

Formulo os melhores votos no sentido de que as Conferências de Estatística e de Geografia e Cartografia, de 1972, alcancem completo êxito. E, de sua parte, que a Fundação IBGE continue trabalhando e produzindo com a eficiência que todos reconhecemos. Sabendo, ela própria, com a experiência e o tirocínio de vários decênios, adaptar-se às condições resultantes do progresso e do desenvolvimento do País, não se deixando estratificar em esquemas estáticos de organização, mas, ao contrário, articulando-se através dos reajustamentos que se forem impondo pelo sentido eminentemente dinâmico da vida nacional, que lhe cabe observar e medir a cada passo".

COMISSÕES TÉCNICAS DA II CONFEST

As Comissões Técnicas, em número de 7, são as seguintes:

"A" — Estatísticas Demográficas, Sociais e Culturais — que teve como Coordenador Raul Romero de Oliveira e como Relator Roberto Robichez Cassinelli;

"B" — Situação Econômica — Estatísticas Primárias — Legislação Censitária — que teve como Coordenador Sylvio Warick Ribeiro e Relator Sebastião de Oliveira Reis;

"C" — Situação Econômica — Estatísticas Derivadas — que teve como Coordenador Luiz Zottmann e Relator Maristela A. A. Sant'Ana;

"D" — Registro Administrativo como Fonte de Informação Estatística — que teve como Coordenador Cori Loureiro Acioli e Relator Hervey Guimarães Cova;

"I" — Mista (CONFEST/CONFEGE) — Informática — que teve como Coordenador Ricardo Sauz e Relator Fernando Lacorte;

"J" — Mista (CONFEST/CONFEGE) — Projeto de Definição de "Áreas" para Fins de Comparação e de Planejamento — que teve como Coordenador Speridião Faissol e Relator Paulo Augusto Alencar;

"L" — Mista (CONFEST/CONFEGE) — Treinamento e Aperfeiçoamento de Pessoal — que teve como Coordenador Lauro Sodré Viveiros de Castro e Relator Lysis M. C. Bernardes.

Estas Comissões debateram os seguintes trabalhos:

Comissão "A"

— Dedução de uma Tábua de Vida Através de Análise Demográfica — Brasil 1960/70 (Richard Irwin e João Lyra Madeira)

— Considerações Sobre as Estatísticas Demográficas (Centro Latino-Americano de Pesquisas em Ciências Sociais)

— O Censo e os Indicadores Sociais (José Arthur Rios)

— Análise de um Modelo de Tabela de Cidades por grupos de Habitantes, para Planejamentos Cartográficos (José de Mattos)

— Estatísticas de Nascimento — Sugestões sobre um Novo Método de Coleta (Subcomissão da Comissão A da CONPLANE)

— Classificação da População em Urbana e Rural (Subcomissão da Comissão A da CONPLANE)

— Sugestão para Aprovação sobre os Dados do Censo Demográfico 1970 — Melhoria das Informações para o Planejamento Urbano (Pergi Cafiero e Luís Carlos Campos Leal)

— A Problemática das Informações Censitárias (Banco Nacional da Habitação)

— Estatísticas Sociais — Situação Atual em face do PNEB (Subcomissão da Comissão A da CONPLANE)

— Estatísticas Educacionais — Quadro Atual e Perspectivas Futuras (Subcomissão da Comissão A da CONPLANE)

Comissão "B"

— Importância dos Censos Econômicos Qüinqüenais (Sebastião Oliveira Reis e Aloysio V. de Azevedo)

Comissão "C"

— Contas Sociais no Contexto Regional (Paulo Roberto Haddad)

— Contabilidade Social (Subcomissão da CONPLANE)

— Índices de Produção (Subcomissão da CONPLANE)

— Balanços Financeiros (subcomissão da CONPLANE)

— Índices de Preços (Subcomissão da CONPLANE)

— Balanço Alimentar (Subcomissão da CONPLANE)

— Balanço Energético (Subcomissão da CONPLANE)

Comissão "D"

— Registro Administrativo como fonte de Informações Estatísticas (José Ayres de Souza Filho, Milton Rangel da Silva, Gilberto da S. Barros, Yedda Borges de Mendonça, Hulda M. Gomes, Maurício S. Gonçalves, Jorge Lima, Paulo A. de Alencar e Mario F. Paulo)

Comissão "I"

— O Instituto Brasileiro de Informática e um Sistema Integrado de Planejamento (Antônio Cesar Olinto)

Comissão Mista "J"

— Modelos Regionais para fins de Planejamento (Speridião Faissol)

— Projeto de Definição das "Áreas" para fins de Comparação e Planejamento (Ângelo Dias Maciel, Lindalvo Bezerra dos Santos, Luiz Rosso, Paulo Augusto de Alencar e Nélia Santos)

Comissão Mista "L"

— Treinamento de Pessoal (Maria Francisca Theresa Cardoso)

— Treinamento e Aperfeiçoamento de Pessoal (Departamento de Pesquisas da ENCE)

— Formação e Qualificação Profissional do Geógrafo na Universidade Federal do Rio de Janeiro (Departamento de Geografia da UFRJ)

RECOMENDAÇÕES DA II CONFEST

As 14 Recomendações são:

Recomendação n.º 1

"À Fundação IBGE, promova a criação de um Grupo de Trabalho a ser constituído por especialistas e representantes de órgãos interessados no assunto, para estudar um novo critério de classificação urbano-rural para fins de levantamentos estatísticos".

Recomendação n.º 2

"À Fundação IBGE:

1) Que sejam iniciados, imediatamente, estudos e tomadas providências para a implantação de novo sistema de obtenção de dados sobre nascimentos;
2) Que tal sistema seja implantado gradativamente a começar pelos grandes centros urbanos e estendendo-se, em seguida, às demais áreas do Território Nacional;
3) Que a coleta tenha seu início nos hospitais, abrangendo, posteriormente, os profissionais autônomos de saúde;
4) Que sejam propostas, conseqüentemente, as modificações necessárias na legislação vigente sobre a matéria, bem como nos dispositivos legais existentes sobre o exercício das profissões médicas e para-médicas (parteiras, etc.) de forma a que se torne obrigatória a comunicação, em formulário próprio, das ocorrências de nascimentos, fora dos hospitais, nas quais tenham tido participação profissional;
5) A utilização imediata de levantamentos periódicos através da PNAD para estimativas de taxas de fecundidade e natalidade e o estabelecimento de confronto dessas estimativas, com dados obtidos pelo novo sistema".

Recomendação n.º 3

"À Fundação IBGE, a criação de uma Comissão Especial sob sua coordenação, composta de representantes dos Ministérios do Planejamento e Coordenação Geral, Saúde, e Trabalho e Previdência Social, e de outras instituições usuárias e produtoras, para:

1) Estudar a situação das Estatísticas da Saúde;
2) Definir as informações essenciais para a formulação da Política de Saúde e a elaboração e avaliação de planos;
3) Sugerir modificações, inclusive medidas de ordem legal, consideradas necessárias ao atual sistema de Estatística da Saúde, de modo a torná-lo apto a atingir os objetivos visados".

Recomendação n.º 4

"À Fundação IBGE, adote providências no sentido de assegurar a periodicidade qüinqüenal para o Censo Agropecuário e demais econômicos e a periodicidade decenal para o Censo Demográfico".

Recomendação n.º 5

"Sejam instalados, nas Unidades da Federação, Grupos de Coordenação das Estatísticas Agropecuárias, constituídos de representantes de órgãos produtores e usuários dessas estatísticas, sob a coordenação das Delegacias de Estatística do Instituto Brasileiro de Estatística da Fundação IBGE".

Recomendação n.º 6

"1. Que as séries estatísticas da produção agrícola e da pecuária, de caráter contínuo, sejam retificadas com base nos resultados dos Censos Agropecuários, para correção das distorções observadas;

2. Que se evitem mudanças nas referências cronológicas adotadas para os Censos Agropecuários, de forma a minimizar distorções, estabelecendo que os dados de estrutura se refiram à data de 31 de dezembro e os demais, ao ano civil;

3. Que, no tocante às estatísticas agropecuárias e industriais levantadas simultaneamente pela Fundação IBGE e por outras entidades, oficiais ou privadas, se procure obter maior entrosamento e cooperação entre os órgãos interessados, visando à melhoria das informações estatísticas;

4. Que, nas estatísticas industriais do IBE, de periodicidade mensal e trimestral, se destaque, na divulgação dos dados, além dos Estados já selecionados, o Estado do Rio de Janeiro;

5. Que, nas estatísticas do consumo industrial de energia elétrica, sejam adotados critérios uniformes, com base na Classificação de Indústrias da Fundação IBGE;

6. Que se estude a reformulação dos levantamentos estatísticos referentes às telecomunicações, de maneira a acompanhar as rápidas transformações que se operam no setor;

7. Que se promova a apuração mais detalhada dos fluxos de transporte de passageiros e carga, em termos de tráfego absoluto e tráfego quilométrico, sobretudo para o setor rodoviário;

8. Que se restabeleça a divulgação de dados do movimento bancário em nível de região e praça, com especificação das principais operações;

9. Que se promova a divulgação de dados de maior detalhe no tocante aos créditos concedidos pelo sistema bancário, oficial e privado, aos diferentes setores da economia;

10. Que, nas estatísticas relativas aos financiamentos agrícolas, se divulguem dados referentes à área, em hectares, das lavouras financiadas pelo sistema bancário, oficial e privado, com discriminação dos produtos financiados, por Unidades da Federação".

Recomendação n.º 7

"1. À Fundação IBGE, institua uma comissão com vistas ao estudo do sistema de elaboração de índices de custo de vida e coleta de preços, considerando a possibilidade de cálculo de indicadores para diferentes classes de renda;

2. Estude a possibilidade de ampliar os levantamentos de preços sob sua responsabilidade, quanto à área coberta e número de produtos específicos, levando em conta as recomendações das entidades consumidoras dessas informações".

Recomendação n.º 8

"Que a Fundação IBGE tome iniciativa no sentido de estudar, em colaboração com o Ministério da Saúde, o aperfeiçoamento da elaboração de Balanços Alimentares Anuais, de âmbito nacional".

Recomendação n.º 9

"1. Que o programa de levantamentos da estatística da construção da Fundação IBGE, já iniciado com o Inquérito sobre Edificações, seja ampliado para as obras públicas (barragens, açudes, estradas de rodagens, túneis, etc.);

2. Que sejam promovidos estudos para implantação da estatística da construção, à nível de empresas;

3. Que se promovam entendimentos com as Prefeituras Municipais, não abrangidas pelo Inquérito de Edificações do IBGE, no sentido de adotarem o formulário adotado nessa investigação como modelo de registro administrativo mínimo, para as informações das mencionadas estatísticas".

Recomendação n.º 10

"À Fundação IBGE, estudar e promover as providências necessárias a:

1) Implantação de um sistema padronizado de balanços financeiros para cada setor da economia;

2) Discriminação, nos referidos balanços, dos resultados das operações financeiras realizadas com especificação de liquidez e explicitação dos setores econômicos envolvidos na operação;

3) Adoção de uma classificação de Setores Econômicos coerente com a atualmente utilizada pelo IBGE, para fins de apresentação de Balanços Financeiros".

Recomendação n.º 11

"1. Seja acelerada a implantação das "Comissões Estaduais de Coordenação" previstas pela estruturação básica do IBGE, para melhor atender também a nível local, à demanda por pesquisas regionais;

2. Que a Fundação IBGE conjugue esforços com órgãos regionais ou estaduais pertinentes, visando a elaboração de estatísticas contínuas em particular conjunturais, consideradas necessárias, de molde a integrá-las na orientação geral do PNEB, inclusive dando novas bases aos convênios com os órgãos estaduais de estatística;

3. Que a Fundação IBGE promova entendimentos com a Fundação Getúlio Vargas no sentido da obtenção de estimativas da renda interna por Unidades da Federação, a preços constantes;

4. Que a Fundação IBGE, para os próximos censos industriais, estude a viabilidade do detalhamento dos itens "distribuição do valor das vendas e transferências durante o ano" segundo a Unidade da Federação a que se destinam os produtos vendidos e nos censos comerciais, além da última informação, o valor das vendas correspondentes a mercadorias produzidas no referido Estado e as de origem de outros Estados;

5. Que os próximos censos industriais procurem identificar o valor das matérias-primas consumidas, produzidas na própria Unidade da Federação, e das produzidas em outras Unidades da Federação;

6. Que, na medida em que a pesquisa "Comércio por Vias Internas" passe a ser feita diretamente junto aos exportadores, conforme plano da Fundação IBGE, seja feita a identificação do fluxo de mercadorias de origem interna produzidas nessa Unidade da Federação, mercadorias de origem interna não produzidas numa Unidade da Federação e ainda, dos fluxos de mercadorias de origem interna que se destinam ao exterior".

Recomendação n.º 12

"1. Que a Fundação IBGE promova um processo contínuo de compatibilização entre os vários componentes do sistema de contabilidade social;

2. Que a Fundação IBGE desenvolva esforços no sentido de uma melhor adequação das estatísticas primárias necessárias ao sistema;

3. Que a Fundação IBGE dê prioridade em seus programas de trabalho à obtenção de informações sobre os seguintes aspectos:

—— Pagamento e fatores de produção referentes ao setor agropecuário;

—— Consumo intermediário e investimentos do mesmo setor, segundo regiões;

—— Produtos hortigrangeiros, com periodicidade anual.

4. Expansão das pesquisas no Setor de Serviços Comerciais e de Comunicações;

5. Promova a divulgação estatística padronizada dos orçamentos e balanços da administração centralizada federal, estadual e municipal, autarquias, empresas estatais e mistas e fundos especiais, de forma a possibilitar a desagregação dos dispêndios a nível setorial e regional".

Recomendação n.º 13

"À Fundação IBGE, que adote as providências a seu alcance no sentido de ser criada, através de Decreto, uma Comissão Interministerial permanente com a finalidade de efetuar estudos objetivando o máximo aproveitamento, para fins estatísticos, dos registros administrativos compulsórios existentes, ou que devam ser instituídos, nos órgãos da Administração Pública, direta ou indireta".

Recomendação n.º 14

"À Fundação IBGE, diligencie, junto às autoridades competentes, no sentido de que as fichas policiais preenchidas nos estabelecimentos de hospedagem pelos hóspedes, sejam padronizadas, aperfeiçoadas e extraídas em número de vias que permita a sua utilização para fins de levantamento do fluxo interregional de hospedagem".

As 3 Recomendações Conjuntas são:

Recomendação n.º 1

"1. Que a Fundação IBGE estude as possibilidades de fornecimento de informações, respeitadas as exigências de sigilo, sob a forma de fitas magnéticas ou meios semelhantes, adequados ao tratamento eletrônico dos dados.

2. Que, a exemplo de iniciativas correlatas em outras áreas, seja estimulada a celebração de convênios de assistência técnica pelo IBI, na formação e expansão dos diversos centros de informações regionais e setoriais afins, divulgando e promovendo a tecnologia desenvolvida no setor".

Recomendação n.º 2

"1. Que seja estudada a possibilidade de se obter um nível de desagregação maior que o Estado, nas apurações do levantamento "Comércio por Vias Internas", do DEICOM, propiciando inclusive informações sobre a origem e destino dos produtos transacionados;

2. Que nas pesquisas geográficas realizadas com vistas à contribuição para o planejamento sócio-econômico seja dada ênfase às análises correlacionando os dois modelos de divisão regional, face a interdependência entre estrutura formal e funcional, utilizando seus parâmetros para modelos de simulação de desenvolvimento econômico regional e nacional.

3. Que seja criado um Grupo de Trabalho para o estudo e definição de áreas permanentes para fins de comparação de resultados censitários".

Recomendação n.º 3

"1. Aos Institutos de Geociências, Departamentos de Geografia e outras entidades interessadas nos cursos de aperfeiçoamento ministrado pelo IBG:

a) que, objetivando maior adequação dos referidos cursos às suas necessidades, remetam a este órgão as ementas dos programas dos cursos de geografia que vem sendo ministrados dentro de suas programações curriculares;

b) que se articulem regionalmente para proposições conjuntas de modo que seja ampliado o alcance dos cursos a serem realizados, atendendo-se a maior número de interessados.

2. À Fundação IBGE que na programação de cursos de treinamento e aperfeiçoamento a serem organizados pelo IBG/DEDIGEO:

a) sejam dadas prioridades aos temas contidos nas recomendações aprovadas pela II CONFEGE, em particular àqueles temas vinculados a planos e pesquisas de órgãos regionais e estaduais de planejamento;

b) que os cursos promovidos fora da sede se desdobrem com a realização de seminários destinados ao aperfeiçoamento dos professores do magistério superior, paralelamente aos cursos de extensão universitária ou de reciclagem, destinados a universitários e professores do ensino médio;

c) que seja ampliado, na medida do possível, o número de cursos realizados fora da sede destinados ao aperfeiçoamento de geógrafos e professores de geografia;

d) que estude a possibilidade de serem oferecidos estágios de treinamento àqueles que tenham obtido melhor aproveitamento em cursos ministrados pelo Órgão, a fim de capacitá-los na organização e execução de pesquisas geográficas;

e) que considere a possibilidade da realização de um Curso de Aperfeiçoamento em Geografia na Região Norte, tendo em vista que esta Região, objeto de especial atenção do Governo Federal, ainda não foi beneficiada por esta iniciativa;

f) que seja incluída na programação do Centro de Cooperação Técnica do IBG/DEDIGEO, a difusão de programas relativos à área Estudos Sociais, através de seminários, palestras e outras formas de divulgação, de modo a esclarecer a posição da Geografia nessa área de estudos.

3. À Fundação IBGE, que tendo em vista os cursos universitários existentes em Cartografia e Geografia realize entrosamento, através de convênios, com as entidades universitárias qualificadas para a formação dos profissionais, geógrafos e cartógrafos, com vistas à renovação e aperfeiçoamento de seus quadros e à elevação do nível profissional nessas especialidades.

4. À Fundação IBGE que examine a possibilidade de em sua política de pessoal estabelecer que:

a) O servidor da Fundação IBGE, autorizado a fazer curso de treinamento, aperfeiçoamento ou pós-graduação, em área afim à do cargo exercido, seja beneficiado com a redução da jornada de trabalho ou licenciamento, conforme o nível e o tempo exigidos, sem prejuízo de seus direitos e vantagens, desde que o curso seja realizado pela própria Fundação IBGE, ou por ela julgado de seu interesse;

b) sejam criadas normas que possibilitem ao servidor, melhoria salarial (acesso ou promoção) uma vez concluído o curso com aproveitamento.

5. À Fundação IBGE, que através da ENCE procure oferecer ou apoiar cursos de treinamento e aperfeiçoamento destinados ao pessoal auxiliar e técnico de entidades filiadas ao Sistema Estatístico Nacional, sempre que possível em colaboração com as Universidades ou outros órgãos locais".

As 3 Sugestões Conjuntas são:

Sugestão n.º 1

"Aos Conselhos Estaduais de Educação, que adotem uma política que intensifique a criação de cursos de técnico de estatística de nível médio".

Sugestão n.º 2

"Às Universidades, que adotem uma política que intensifique a criação de cursos de Estatística de nível superior, nos principais centros regionais de Ensino do País".

Sugestão n.º 3

"Ao Conselho Federal de Educação, tendo em vista que a regulamentação da profissão de Estatístico, habilitou legalmente estatísticos provisionados não portadores de diploma de nível superior, que examine a possibilidade de ser propiciada a matrícula de estatísticos provisionados em estabelecimentos de ensino superior, respeitadas as exigências da Lei".

ENCERRAMENTO

A Sessão de encerramento das Conferências realizou-se no dia 9 de dezembro do corrente, sob a Presidência do Professor Isaac Kerstenetzky. Ao dar por findos os trabalhos da II CONFEST e da II CONFEGE, o Presidente da Fundação IBGE aludiu inicialmente ao volume dos trabalhos levados a cabo nos doze dias de duração das Conferências e ao amplo repertório de recomendações produzidas, ressaltando a importância dessa contribuição para o prosseguimento das atividades da Fundação IBGE. Assinalou o caráter e o sentido dessas atividades, salientando constituírem elas um sistema articulado, abrangendo informações, pesquisas e planejamento, com vistas ao apoio necessário e fundamental à política de desenvolvimento do País e à visão prospectiva desse desenvolvimento.

Ressaltou, ainda, o Professor Isaac Kerstenetzky o valor do relacionamento cada vez maior entre a Fundação IBGE e os usuários de estatística, geografia e cartografia, afirmando que, dentro dessa orientação, até o próximo encontro geral — a III CONFEST e a III CONFEGE — seriam promovidas reuniões parciais com os usuários para tratar de segmentos dos trabalhos de interesse comum. Por último, o Presidente da Fundação IBGE apresentou às Instituições que se fizeram representar nas Conferências e a todos os participantes os melhores agradecimentos pela alta contribuição que haviam trazido ao completo sucesso do importante encontro.

A RBE divulga, a seguir, na íntegra, sete dos Documentos oficiais elaborados para debate e aprovados na II Conferência Nacional de Estatística. Os Documentos restantes serão publicados nos próximos números.

DEDUÇÃO DE UMA TÁBUA DE VIDA ATRAVÉS DE ANÁLISE DEMOGRÁFICA BRASIL, 1960/70*

Richard Irwin
e
João Lyra Madeira

Tema:

1. *Apreciação do Plano Nacional de Estatísticas Básicas*

   1.2. Indicadores demográficos

Dados estatísticos minuciosos, necessários para o cálculo de uma tábua de vida, ainda não são disponíveis no Brasil. Usando-se técnicas analíticas foi possível no entanto estimar as funções da tábua de vida; este estudo apresenta uma tábua abreviada para o decênio 1960-70. Esta tábua foi preparada tendo como objetivo o estabelecimento posterior de estimativas e projeções da população, pelo método das componentes, no qual são necessários cálculos separados para nascimentos e mortes.

* Agradecemos aos estagiários que auxiliaram na confecção do presente trabalho, e em particular, a cooperação valiosa de Evelyn Spielman.

Este estudo baseia-se num trabalho anteriormente publicado pelo Centro Brasileiro de Estudos Demográficos (CBED). Usando métodos analíticos originalmente desenvolvidos por Mortara (1), o CBED estimou a vida média ao nascer, no Brasil, no período intercensitário 1960/70, como sendo de 57,61 para os homens e 61,10 para as mulheres (2). Estas estimativas foram desenvolvidas utilizando-se as tábuas modelo "West" (3), estando a mortalidade entre os níveis 17 e 19. Mais precisamente, uma interpolação linear entre os dois indica o nível 17,48 para os homens e 17,44 para as mulheres (17,46 para ambos os sexos). Uma interpolação linear para cada idade pode ser executada usando-se as Tabelas dos níveis 17 e 19, obtendo-se desse modo os valores de uma tábua de vida intermediária. Nós iremos nos referir a estes valores como estimativas do Método da Tábua de Vida Modelo (MTVM).

Não é válido admitir-se que as estimativas do MTVM, representem o padrão verdadeiro de sobrevivência no Brasil, como foi acentuado nas publicações do CBED acima mencionadas; os métodos analíticos empregados estimam o *nível* de mortalidade no Brasil, mas não permitem estabelecer a configuração da curva de sobrevivência por idade.

Além disso, o CBED também publicou estimativas separadas da mortalidade no Brasil para as idades mais jovens (4). Estas estimativas foram calculadas pelo Método de Brass e indicam que, para o decênio 1960/70, o valor l_5 da tábua de vida é, substancialmente, mais baixo que o correspondente ao nível 17,46 (MTVM), e que l_{10}, também fica abaixo deste nível, porém já bastante mais próximo (Tabela 1).

TABELA 1

ESTIMATIVAS DE l_x DAS TÁBUAS DE VIDA MODELO COMPARADAS COM AS ESTIMATIVAS CALCULADAS PELO MÉTODO DE BRASS

X	TÁBUAS DE VIDA "WEST" NÍVEL 17,46 (MTVM)	ESTIMATIVAS PELO MÉTODO DE BRASS	DIFERENÇA	
			Absoluta	%
5	89.794	88.300	1.494	1,7
10	88.854	87.800	1.054	1,2

O Método de Brass usa as proporções de filhos sobreviventes dentre os filhos tidos, segundo a idade da mãe, obtidos de um único Censo. Portanto, estas estimativas são essencialmente independentes das do MTVM que são baseadas na relação entre 2 Censos sucessivos.

Se nós admitirmos que o nível geral de mortalidade (igual a 17,46 com $\bar{e}_o$ de 59,31 anos) é válido para o Brasil, e se as baixas estimativas de taxas de sobrevivência infantil obtidas pelo Método de Brass estão corretas, então as taxas de sobrevivência devem ser mais altas do que as de nível 17,46 para as idades mais avançadas.

A tábua de vida apresentada aqui, baseia-se nesta hipótese, e ajusta as funções da tábua de vida modelo, nível 17,46, por idade, levando em conta a diferença observada nas estimativas de Brass para as idades mais jovens, enquanto mantém a vida média de 59,31 anos da tábua de vida modelo.

Este processo foi efetuado separadamente para cada sexo, e uma vez que as estimativas do Método de Brass foram calculadas somente para a população total, tornou-se necessário estimar os valores para cada sexo, da seguinte forma: foram aplicadas aos valores l_x de Brass (x = 2,3,5 e 10) as mesmas relações homens/total e mulheres/total, existentes no nível 17,46.

TABELA 2

VALORES ESTIMADOS POR SEXO, OBTIDOS A PARTIR DAS ESTIMATIVAS CALCULADAS PELO MÉTODO DE BRASS PARA l_2, l_3, l_5 e l_{10}

TIPO DE ESTIMATIVA E SEXO	l_1	l_2	l_3	l_5	l_{10}
Tábua de vida modelo, Nível 17,46					
População total (PT)...	(1) 92 645	...	...	(1) 89 794	(1) 88 854
Masculino (M).....	91 916	...	...	89 003	88 033
Feminino (F).....	93 411	...	...	90 624	89 717
Razões:					
M/PT.....	0,992131	(2)0,991896	(2)0,991661	0,991191	0,990760
F/PT.....	1,008268	(2)1,008512	(2)1,008756	1,009243	1,009713
Estimativas pelo Método de Brass					
População total.....	...	89 080	88 740	88 300	87 800
Masculino.....	...	88 358	88 000	87 522	86 989
Feminino.....	. .	89 838	89 517	89 116	88 653

[1] Calculados admitindo-se os pesos de 105 para homens e 100 para mulheres.
[2] Interpolação linear entre l_1 e l_5.

Visto que a tábua de vida modelo não fornece valores para l_2 e l_3 necessários para o cálculo de ${}_5L_0$, foi necessário estimar relações entre eles através de interpolação linear entre as relações obtidas para l_1 e l_5.

A esta altura do trabalho eram disponíveis um conjunto completo de valores qüinqüenais para l_x (as estimativas do MTVM) e estimativas mais baixas, do Método de Brass, para l_5 e l_{10}. Como ajustar os valores da tábua de vida modelo de tal forma que a vida média ao nascer permanecesse inalterada? Na busca de uma base racional sobre a qual apoiar este ajustamento, foi examinada a distribuição por idades da população urbana e rural do Brasil. Como era de se esperar, as distribuições são bastante diferentes tendo a rural uma maior par-

cela de sua população nas idades mais jovens. Por exemplo, em 1970 a população rural abaixo de 5 anos de idade era de 17,2% do total, comparada com 13,1% da urbana. Em termos absolutos, a população rural só excedeu a urbana por uma pequena margem, já que a população urbana total é maior do que a rural. Porém, em 1960, a diferença absoluta era muito maior, sendo a população rural, abaixo de 5 anos, de 6,5 milhões, comparada com 4,7 milhões da urbana.

Visto que as taxas de sobrevivência no Brasil, são certamente mais baixas nas zonas rurais, especialmente para as idades mais jovens, a composição da população urbana e rural foi examinada mais profundamente. Calculou-se uma distribuição da população, urbana e rural, representativa da década, pela média dos resultados dos Censos de 1960 e 1970, idade por idade (Tabela 3, Gráfico 1).

TABELA 3

POPULAÇÃO URBANA E RURAL, SEGUNDO AS IDADES
BRASIL, 1960/70

(Média dos Censos de 1960 e 1970)

IDADES	HOMENS		MULHERES	
	Urbana	Rural	Urbana	Rural
TOTAL...	20 417 935	20 252 745	21 867 006	19 124 045
0 — 4.....	2 909 975	3 456 088	2 858 386	3 323 020
5 — 9.....	2 798 927	3 145 532	2 777 312	3 009 588
10 — 14.....	2 457 316	2 611 110	2 566 618	2 484 756
15 — 19.....	2 057 133	2 132 671	2 402 792	2 080 372
20 — 24.....	1 813 556	1 699 814	2 091 218	1 686 867
25 — 29.....	1 504 704	1 357 294	1 702 076	1 313 694
30 — 34.....	1 392 884	1 164 236	1 527 938	1 120 605
35 — 39.....	1 218 963	987 490	1 305 642	925 804
40 — 44.....	1 049 248	888 043	1 101 582	791 753
45 — 49.....	877 651	755 096	913 338	650 415
50 — 54.....	695 774	607 415	740 855	516 297
55 — 59.....	543 309	480 740	586 774	399 403
60 — 64.....	409 677	367 775	458 943	301 197
65 — 69.....	297 504	261 976	323 345	205 818
70 e mais (1).....	391 314	337 465	510 187	314 456

FONTE — IBE. Departamento de Censos. *Censo Demográfico; Resultados Preliminares — —1960;* e *Tabulações avançadas do censo demográfico — 1970.*

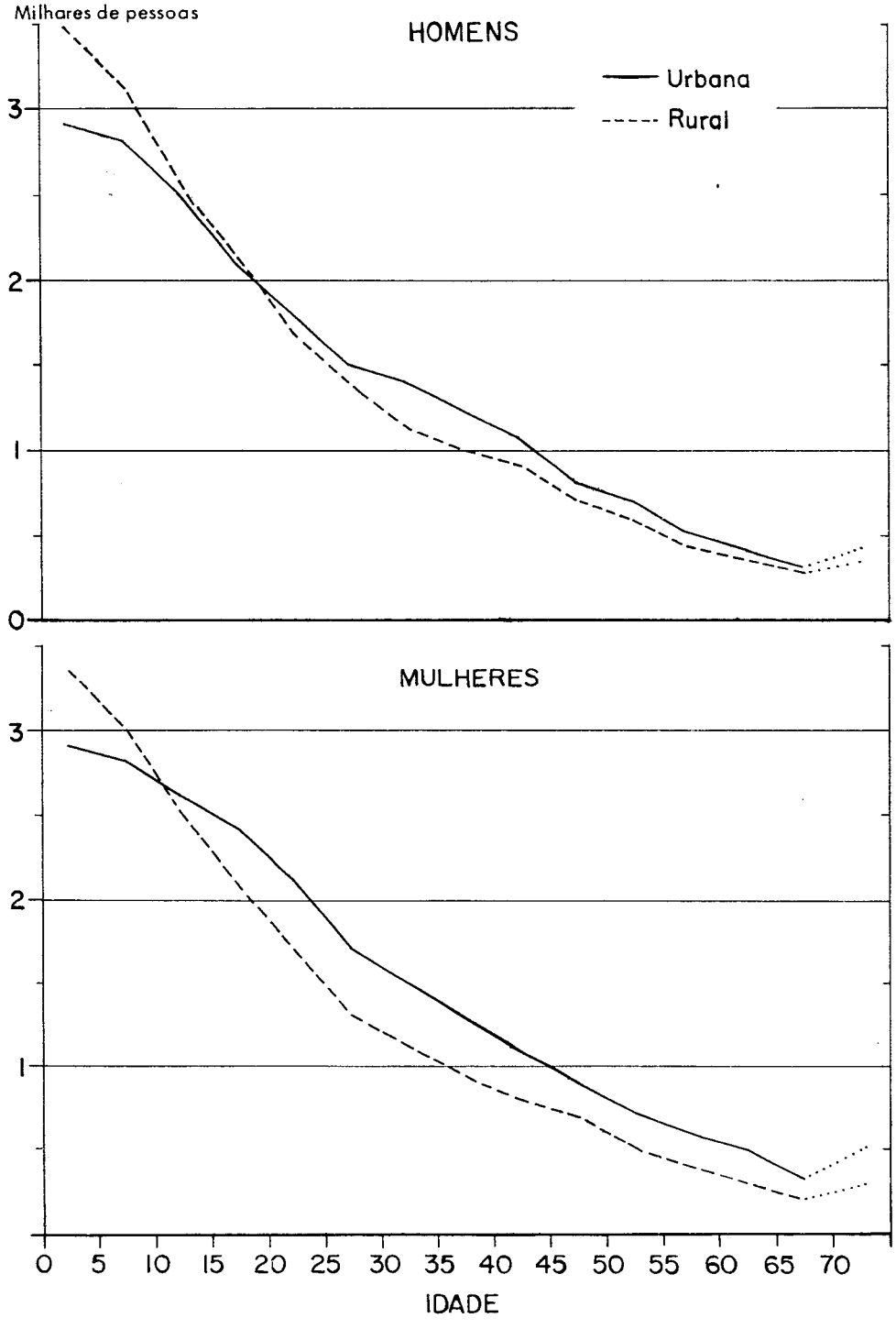
[1] Inclusive idade ignorada.

A população rural é substancialmente maior do que a urbana, para ambos os sexos, até os 9 anos de idade. A maneira sistemática pela qual a proporção da população urbana cresce com a idade é apresentada claramente no Gráfico 1. Para as idades adultas a população urbana é maior, especialmente para as mulheres.

A fim de simular a configuração da curva de sobrevivência no Brasil, tábuas de vida modelo de níveis diferentes foram ponderadas, pela população urbana e rural, para a obtenção de um novo conjunto

Gráfico 1

POPULAÇÃO URBANA E RURAL, SEGUNDO AS IDADES BRASIL 1960 / 1970



de funções da tábua de vida **. Uma tábua de vida modelo de baixa sobrevivência, nível 15 ($\bar{e}_0$ de 53,4 anos) foi arbitrariamente selecionada para a população rural, e o nível 19 ($\bar{e}_0$ de 63,1 anos), para a urbana. Visando uma melhor correspondência entre a população e as funções da tábua de vida, os valores L_x da tábua de vida modelo foram usados, ponderando-se ${}_5L_0$ com a população abaixo de 5; ${}_5L_5$ com a população entre 5 e 9 e, assim em diante. O conjunto resultante de valores ${}_5L_x$ foi ajustado "pro rata" para manter a igualdade com o valor T_0 do MTVM, e comparado, idade por idade, com as estimativas do MTVM (que, tornamos a repetir, foram obtidas através de interpolação entre os níveis 17 e 19). Esta comparação é válida porque o valor do MTVM representa uma década inteira, assim como a distribuição urbano-rural, usada para ponderar as tábuas de vida modelo.

Esta comparação revelou um padrão de variação entre a tábua ponderada e os valores do MTVM, com as idades jovens mais baixas na primeira e com o ponto de interseção aproximadamente em ${}_5L_{30}$ para homens e ${}_5L_{40}$ para mulheres. Os valores da tábua ponderada para as idades acima destes pontos de interseção tendiam a ser maiores do que as estimativas do MTVM. Esta configuração parecia representar um passo na direção certa, mas a diferença entre a tábua ponderada e os valores da MTVM era menor do que a indicada pelo Método de Brass, e a configuração ainda não estava perfeitamente definida.

Portanto, os limites foram ampliados, usando-se o nível 13 ($\bar{e}_0$ de 48,5 anos) e o nível 21 ($\bar{e}_0$ de 68,0 anos).

Os resultados foram encorajadores, com as duas curvas contrastantes apresentando um padrão sistemático de divergência. Para os homens os valores ponderados até a idade 25 eram, definitivamente, mais baixos do que a curva do MTVM. (Tabela 4, Gráfico 2.) (5). Para as idades entre 30 e 50 as curvas são quase idênticas, e para as idades de 55 em diante, a curva ponderada é mais alta do que a tábua modelo. Em geral, os valores ponderados para ${}_5L_0$ e ${}_5L_5$ ajustam-se ao nível das estimativas do Método de Brass, que são mostrados com pontos no Gráfico 2. Embora a estimativa do Método de Brass de ${}_5L_0$ seja ainda mais baixa do que o valor ponderado, para ${}_5L_5$ as estimativas estão próximas.

Para mulheres os resultados foram parecidos, apesar de menos impressionantes do que os para homens, porque os valores ponderados para ${}_5L_0$ e ${}_5L_5$ estão em abaixo das estimativas do Método de Brass. Isto em parte foi causado pelo ajustamento decrescente dos valores ponderados de tal forma que coincidisse com T_0 do MTVM. A soma das mé-

** Este procedimento, que fornece apoio teórico para a técnica de interpolação usada na obtenção da tábua de vida final, foi sugerida por Robert Robichez Cassinelli, Coordenador do CBED.

TABELA 4

COMPARAÇÃO ENTRE O $_5L_x$ DA TÁBUA DE VIDA MODELO E O DA PONDERAÇÃO URBANO-RURAL

a) Homens

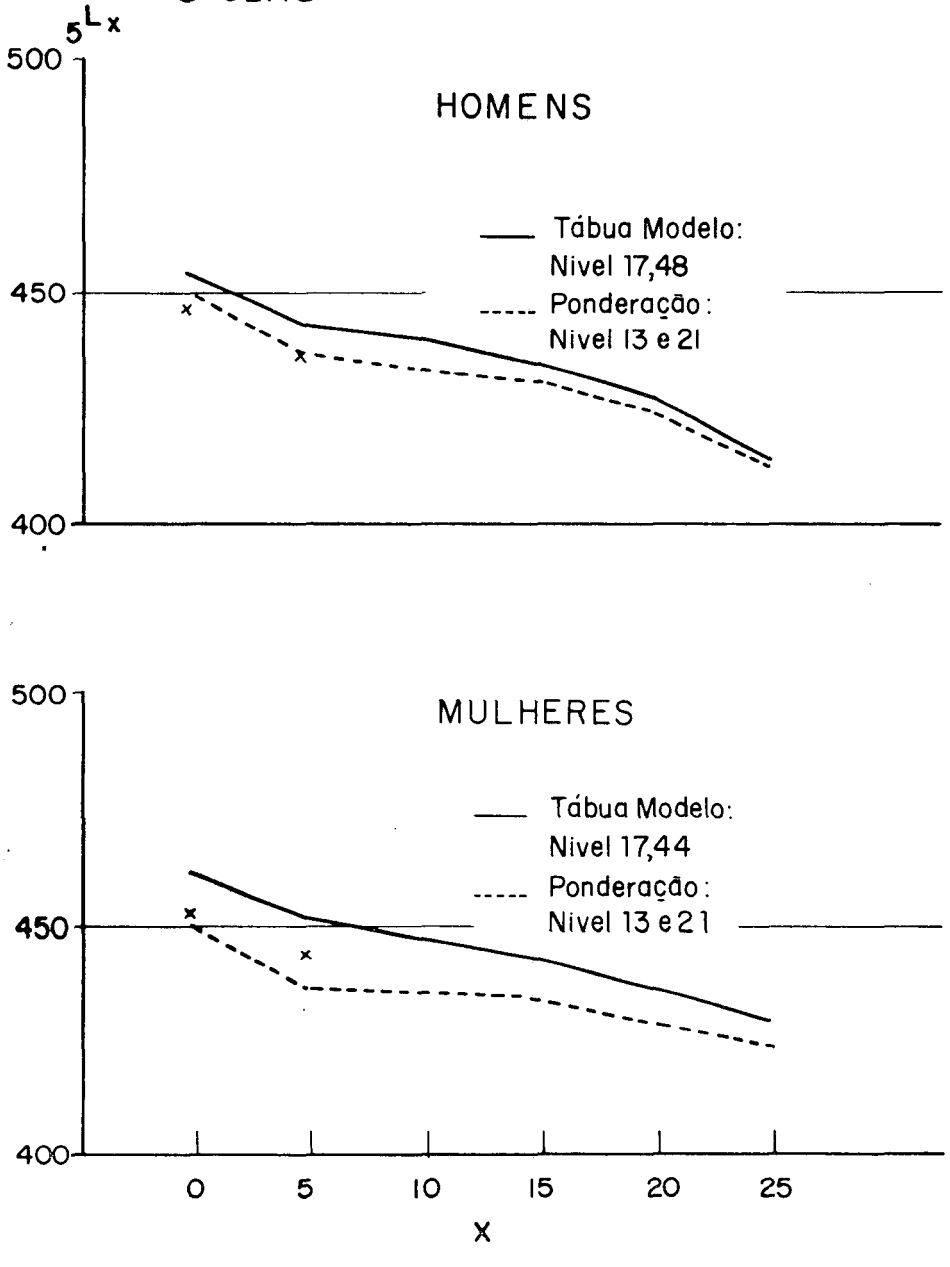
IDADE x	TÁBUA MODELO NÍVEL 17.48 (1)	PONDERAÇÃO URBANO-RURAL NÍVEL 15 e 21 (2)	DIFERENÇA	
			Absoluto (3) = (2) — (1)	q_o (4) = (3) ÷ (1)
0	454 408	450 201	— 4 207	— 0,93
5	442 775	436 744	— 6 031	— 1,36
10	438 561	433 190	— 5 371	— 1,22
15	433 952	428 787	— 5 165	— 1,19
20	427 212	424 081	— 3 131	— 0,73
25	419 177	416 800	— 2 377	— 0,57
30	410 486	410 061	— 425	— 0,10
35	400 439	401 042	+ 603	+ 0,15
40	388 031	387 577	— 454	— 0,12
45	372 023	371 523	— 500	— 0,13
50	350 724	350 523	— 201	— 0,06
55	322 234	322 673	+ 439	+ 0,14
60	284 540	285 896	+ 1 356	+ 0,48
65	236 548	240 213	+ 3 665	+ 1,55
70	179 289	182 922	+ 3 633	+ 2,03
75	117 605	124 871	+ 7 266	+ 6,18
80 e mais	83 490	94 388	+ 10 898	+ 13,05

b) Mulheres

IDADE x	TÁBUA MODELO NÍVEL 17.48 (1)	PONDERAÇÃO URBANO-RURAL NÍVEL 13 e 21 (2)	DIFERENÇA	
			Absoluta (3) = (2) — (1)	q_o (4) = (3) ÷ (1)
0	461 372	449 974	— 11 398	— 2,47
5	450 677	437 359	— 13 318	— 2,96
10	446 652	434 066	— 11 686	— 2,62
15	442 341	432 736	— 9 605	— 2,17
20	436 426	428 440	— 7 986	— 1,83
25	429 243	422 591	— 6 652	— 1,55
30	421 086	416 256	— 4 830	— 1,15
35	411 796	408 642	— 3 154	— 0,77
40	401 039	398 386	— 2 653	— 0,66
45	388 106	386 840	— 1 266	— 0,33
50	371 421	372 259	+ 838	+ 0,23
55	349 198	352 610	+ 3 412	+ 0,98
60	318 748	328 347	+ 9 599	+ 3.01
65	277 044	283 847	+ 6 803	+ 2,46
70	222 042	230 691	+ 8 649	+ 3,90
75	155 918	173 216	+ 17 298	+ 11,09
80 e mais	126 802	152 840	+ 25 948	+ 20,45

Gráfico 2

COMPARAÇÃO ENTRE O $_5L_x$ DA PONDERAÇÃO URBANO-RURAL E O DA TÁBUA DE VIDA MODELO, DE $_5L_0$ ATÉ $_5L_{25}$, SEGUNDO O SEXO



dias ponderadas dos níveis 13 e 21 era superior ao T_0 do MTVM (nível 17,44) em quase 1%, devido, em parte, ao número substancialmente maior de mulheres nas áreas urbanas.

Seria possível uma análise mais detida dos níveis que representassem as populações rural e urbana. Provavelmente o nível 21 ($\bar{e}_0$ de 68,0 anos) é alto para a população urbana. Mesmo São Paulo ainda não deve ter atingido este nível, visto que uma tábua de vida de 1959/61, para o Município, apresenta $\bar{e}_0$ de 62,4 contra 57,5 de 1949/51. Na Guanabara, a vida média era de 58,44 em 1959/61. Pode ser, também, que o nível 13 seja baixo para a população rural.

Essas relações merecem, certamente, novos estudos mas, a análise precedente estabelece um padrão de divergência das funções da tábua de vida para o Brasil em relação às das tábuas modelo. Portanto, este padrão foi utilizado para ajustar a curva l_x do MTVM compatível com os resultados do Método de Brass para l_5 e l_{10}, estimando-se outros valores de l_x para se adaptarem a forma da curva obtida pela ponderação urbano-rural. Este ajustamento foi executado de forma que a vida média ao nascer coincidisse com as estimativas do CBED, obtidas anteriormente.

Especificamente, foi decidido que:

1) a curva l_x para o Brasil cruzasse a curva do MTVM no ponto médio entre l_5 e l_{80}, isto é, $l_{42,5}$;

2) fossem utilizadas as estimativas do Método de Brass obtidas para l_5 e l_{10};

3) se calculasse o desvio percentual para l_{10} entre o valor do Método de Brass e do MTVM;

4) se obtivessem os desvios percentuais da curva do MTVM para l_{15} até l_{40} por interpolação entre o valor de l_{10} e $l_{42,5}$ (zero); e

5) que se utilizassem essas diferenças absolutas (entre os valores ajustados e os valores do MTVM obtidos desta forma de l_5 até l_{40}) para ajustar os valores do MTVM desde l_{45} até l_{80}, de maneira idêntica. Isto é, a correção absoluta para l_{40} foi usado para ajustar l_{45}; a de l_{35} para ajustar l_{50}, e assim por diante.

Este procedimento de ajuste pode ser descrito como sendo uma rotação, contra o sentido horário, da curva do MTVM, em torno de um ponto fixo $l_{42,5}$. Este procedimento nos levou a uma nova curva com a mesma vida média, mas com valores mais baixos de sobreviventes aquém de $l_{42,5}$, e com valores mais altos para as idades acima deste ponto central.

Porém, os cálculos obtidos por este procedimento não nos conduziram a resultados satisfatórios para a função q_x. A seqüência destes

valores apresentou irregularidades devidas à relação previamente estabelecida entre l_5 e l_{10}. Especificamente, o valor de ${}_5q_5$ era muito pequeno, por causa da pequena diferença entre l_5 e l_{10}. Observe-se que ${}_5q_5 = \dfrac{l_5 - l_{10}}{l_5}$

A fim de melhorar as estimativas de ${}_5q_x$, foi feita uma redistribuição dos valores de l_5 e l_{10}, mantendo-se constante a soma destes dois números, mas ajustando-os de tal forma que a progressão linear de percentagens interpoladas (os desvios percentuais entre os valores ajustados e a curva do MTVM de l_{10} até l_{40}) fosse extendida até l_5. Esta redistribuição entre l_5 e l_{10} produziu uma mudança nestes valores de aproximadamente 0,1 por cento (Tabela 5).

TABELA 5

ESTIMATIVAS DE l_5 e l_{10} AJUSTADAS E CALCULADAS PELO MÉTODO DE BRASS

SEXO e l_x	ESTIMATIVAS PELO MÉTODO DE BRASS (1)	ESTIMATIVAS AJUSTADAS (2)	DIFERENÇA	
			(3) = (2)—(1)	Por cento (4) = (3) ÷ (1)
MASCULINO				
l^5	87 522	87 639	+ 117	+ 0,13
l^{10}	86 989	86 872	— 117	— 0,13
FEMININO				
l^5	89 116	89 244	+ 128	+ 0,14
l^{10}	88 653	88 525	— 128	— 0,14

Usando os valores ajustados para l_5 e l_{10}, obteve-se uma perfeita progressão linear de desvios percentuais entre os valores ajustados e as estimativas do MTVM para l_5 até l_{40}; esses resultados figuram na Tabela 6.

Esta Tabela apresenta o cálculo completo da função l_x ajustada conforme os dados disponíveis no Brasil. A função ${}_5q_x$ produzida pelos valores ajustados de l_x, apresenta agora uma variação suave de cada idade para a seguinte. A tábua de vida completa é apresentada na Tabela 7, com as funções q_x, l_x, d_x L_x, T_x e $\bar{e}_x$. O impacto do ajustamento na tábua de vida como um todo, pode ser melhor apreciado através de uma comparação entre os valores ajustados de ${}_5q_x$ que representam a mortalidade do Brasil e os valores originais do MTVM. (Tabela 8 e Gráfico 3).

Observa-se que, para o Brasil, ${}_5q_0$ é substancialmente mais alto do que a estimativa do MTVM, mas para todas as outras idades as estimativas do Brasil são mais baixas, com desvios percentuais bastante significativos para algumas idades.

A diferença absoluta em ${}_5q_0$ é maior do que a de qualquer outro valor exceto o de ${}_5q_{75}$, e a diferença percentual é também substancial, 12,8% para homens e 14,3% para mulheres. Para as idades jovens seguintes a ${}_5q_0$, os valores para o Brasil não são muito mais baixos do que os da tábua modelo, mas os desvios percentuais são grandes. Para as idades mais velhas as diferenças absolutas são maiores, mas as diferenças relativas decrescem conforme as idades avançam. Para o último intervalo a taxa ${}_5q_{75}$, para o Brasil é 5,4% inferior à da tábua modelo para os homens, e 4,3% para as mulheres.

O padrão de variação que resulta destas comparações de taxas de mortalidade, representa a diferença entre a experiência particular do Brasil, e aquela de um grupo de países titulados "West" (Austrália, Canadá, Israel, Japão, Nova Zelândia, África do Sul, Formosa, Estados Unidos e 13 países da Europa Ocidental). A comparação mostra uma taxa alta de mortalidade nos primeiros cinco anos de vida em relação ao nível geral da mortalidade no Brasil. Nós levantamos a hipótese de que isto é a conseqüência de duas condições:

1) taxas de mortalidade mais altas nas áreas rurais;

2) uma maior proporção da população nas idades mais jovens nas áreas rurais do que nas urbanas.

Restaria comparar as estimativas obtidas com a família de tábuas de vida, desenvolvida por Coale e Demeny para os países da Europa Central, países estes também possuidores de uma mortalidade infantil maior do que a média. Infelizmente estas tabelas não estavam disponíveis durante a preparação da tábua de vida brasileira.

Uma característica peculiar do Brasil é a baixa mortalidade entre 5 e 10 anos de idade $({}_5q_5)$ comparada com os primeiros 5 anos de idade $({}_5q_0)$. Admitindo-se como verdade que a mortalidade infantil é relativamente alta no Brasil, porque seria a mortalidade de 5 até 10 anos de idade especialmente baixa? Existem algumas respostas possíveis, mas estas devem continuar como hipótese na ausência de estatísticas de morte detalhadas.

Uma confirmação independente do baixo valor de ${}_5q_5$ em relação a ${}_5q_0$ na tábua analiticamente deduzida para o Brasil, é dada pela comparação entre ela e as tábuas anteriormente computadas pelo CBED a partir das estatísticas dos óbitos para a Guanabara e o Município de São Paulo (Tabela 9).

TABELA 6

CÁLCULO DA FUNÇÃO l_x:BRASIL — 1960/70

a) Homens

IDADE x	TÁBUA MODELO NÍVEL 17,48[1] (1)	NÍVEL 17,48 AJUSTADO (2)=(1)+(3)	DIFERENÇA	
			Absoluta (3)	Relativa (4)=(3)÷(1)
0	100 000	100 000	0 000	—
5	89 038	87 639[2]	— 1 399	0,015712
10	88 071	86 872[2]	— 1 199	0,013617
15	87 353	86 347	— 1 006	0,011522
20	86 228	85 415	— 813	0,009427
25	84 657	84 036	— 621	0,007332
30	83 013	82 578	— 435	0,005237
35	81 181	80 926	— 255	0,003142
40	78 995	78 912	— 83	0,001047
45	76 218	76 301	83 [3]	0,001089 [3]
50	72 591	72 846	255	0,003513
55	67 698	68 133	435	0,006426
60	61 195	61 816	621	0,010148
65	52 621	53 434	813	0,015450
70	41 998	43 004	1 006	0,023954
75	29 718	30 917	1 199	0,040346
80 e mais	17 324	18 723	1 399	0,080755

b) Mulheres

IDADE x	TÁBUA MODELO NÍVEL 17,44[1] (1)	NÍVEL 17,44 AJUSTADO (2)=(1)÷(3)	DIFERENÇA	
			Absoluta (3)	Relativa (4)=(3)÷(1)
0	100 000	100 000	0 000	—
5	90 590	89 244[2]	— 1 346	0,014858
10	89 680	88 525[2]	— 1 155	0,012879
15	88 980	88 010	— 970	0,010896
20	87 956	87 172	— 784	0,008915
25	86 614	86 013	— 601	0,006934
30	85 083	84 662	— 421	0,004953
35	83 351	83 103	— 248	0,002972
40	81 367	81 286	— 81	0,000991
45	79 049	79 130	81 [3]	0,001025 [3]
50	76 195	76 443	248	0,003255
55	72 374	72 795	421	0,005817
60	67 304	67 905	601	0,008930
65	60 195	60 979	784	0,013024
70	50 623	51 593	970	0,019161
75	38 194	39 349	1 155	0,030240
80 e mais	24 174	25 520	1 346	0,055680

[1] Os níveis 17,48 e 17,44 são interpolações lineares entre os níveis 17 e 19 da tábua de vida modelo.
[2] Estes valores são as estimativas ajustadas, calculadas pelo Método de Brass (ver Tabela 5).
[3] Ver explicação no texto (pág. 705).

TABELA 7

TÁBUA DA VIDA ABREVIADA
BRASIL — 1960/1970

a) Homens

IDADE (x)	$_5q_x$	l_x	d_x	$_5L_x$	T_x	^oe_x
0	0,1236	100 000	12 361	446 355	5 761 489	57,61
5	0,0088	87 639	767	436 278	5 315 134	60,65
10	0,0060	86 872	525	433 048	4 878 856	56,16
15	0,0108	86 347	932	429 405	4 445 808	51,49
20	0,0161	85 415	1 379	423 628	4 016 403	47,02
25	0,0173	84 036	1 458	416 535	3 592 775	42,75
30	0,0200	82 578	1 652	408 760	3 176 240	38,46
35	0,0249	80 926	2 014	399 595	2 767 480	34,20
40	0,0331	78 912	2 611	388 032	2 367 885	30,01
45	0,0453	76 301	3 455	372 868	1 979 853	25,95
50	0,0647	72 846	4 713	352 448	1 606 985	22,06
55	0,0927	68 133	6 317	324 872	1 254 537	18,41
60	0,1356	61 816	8 382	288 125	929 665	15,04
65	0,1952	53 434	10 430	241 095	641 540	12,01
70	0,2811	43 004	12 087	184 802	400 445	9,31
75	0,3944	30 917	12 194	124 100	215 643	6,97
80 e mais	—	18 723	—	91 543	91 543	4,89

b) Mulheres

IDADE (x)	$_5q_x$	l_x	d_x	$_5L_x$	T_x	^oe_x
0	0,1076	100 000	10 756	453 196	6 109 999	61,10
5	0,0081	89 244	719	444 422	5 656 803	63,39
10	0,0058	88 525	515	441 338	5 212 381	58,88
15	0,0095	88 010	838	437 955	4 771 043	54,21
20	0,0133	87 172	1 159	432 962	4 333 088	49,71
25	0,0157	86 013	1 351	426 688	3 900 126	45,34
30	0,0184	84 662	1 559	419 412	3 473 438	41,03
35	0,0219	83 103	1 817	410 972	3 054 026	36,75
40	0,0265	81 286	2 156	401 040	2 643 054	32,52
45	0,0340	79 130	2 687	388 932	2 242 014	28,33
50	0,0477	76 443	3 648	373 095	1 853 082	24,24
55	0,0672	72 795	4 890	351 750	1 479 987	20,33
60	0,1020	67 905	6 926	322 210	1 128 237	16,61
65	0,1539	60 979	9 386	281 430	806 027	13,22
70	0,2373	51 593	12 244	227 355	524 597	10,17
75	0,3514	39 349	13 829	162 172	297 242	7,55
80 e mais	—	25 520	—	135 070	135 070	5,29

TABELA 8

COMPARAÇÃO ENTRE AS PROBABILIDADES DE MORTE, $_5q_x$, DA TÁBUA DE VIDA DO BRASIL E DA TÁBUA DE VIDA MODELO

a) Homens

IDADE x	TÁBUA DE VIDA MODELO NÍVEL 17,48 (1)	TÁBUA DE VIDA DO BRASIL (2)	DIFERENÇA	
			Absoluto (3) = (2)—(1)	% (4) = (3) ÷ (1)
0	0,1096	0,1236	+ 0,0140	+ 12,8
5	0,0109	0,0088	— 0,0021	— 19,3
10	0,0082	0,0060	— 0,0022	— 26,8
15	0,0129	0,0108	— 0,0021	— 16,3
20	0,0182	0,0161	— 0,0021	— 11,5
25	0,0194	0,0173	— 0,0021	— 10,8
30	0,0221	0,0200	— 0,0021	— 9,5
35	0,0269	0,0249	— 0,0020	— 7,4
40	0,0352	0,0331	— 0,0021	— 6,0
45	0,0476	0,0453	— 0,0023	— 4,8
50	0,0674	0,0647	— 0,0027	— 4,0
55	0,0961	0,0927	— 0,0034	— 3,5
60	0,1401	0,1356	— 0,0045	— 3,2
65	0,2019	0,1952	— 0,0067	— 3,3
70	0,2924	0,2811	— 0,0113	— 3,9
75	0,4171	0,3944	— 0,0227	— 5,4

b) Mulheres

IDADE x	TÁBUA DE VIDA MODELO NÍVEL 17,44 (1)	TÁBUA DE VIDA DO BRASIL (2)	DIFERENÇA	
			Absoluto (3) = (2)—(1)	% (4) = (3) ÷ (1)
0	0,0941	0,1076	+ 0,0135	+ 14,3
5	0,0100	0,0081	— 0,0019	— 19,0
10	0,0078	0,0058	— 0,0020	— 25,6
15	0,0115	0,0095	— 0,0020	— 17,4
20	0,0153	0,0133	— 0,0020	— 13,1
25	0,0177	0,0157	— 0,0020	— 11,3
30	0,0204	0,0184	— 0,0020	— 9,8
35	0,0238	0,0219	— 0,0019	— 8,0
40	0,0285	0,0265	— 0,0020	— 7,0
45	0,0361	0,0340	— 0,0021	— 5,8
50	0,0501	0,0477	— 0,0024	— 4,8
55	0,0701	0,0672	— 0,0029	— 4,1
60	0,1056	0,1020	— 0,0036	— 3,4
65	0,1590	0,1539	— 0,0051	— 3,2
70	0,2455	0,2373	— 0,0082	— 3,3
75	0,3671	0,3514	— 0,0157	— 4,3

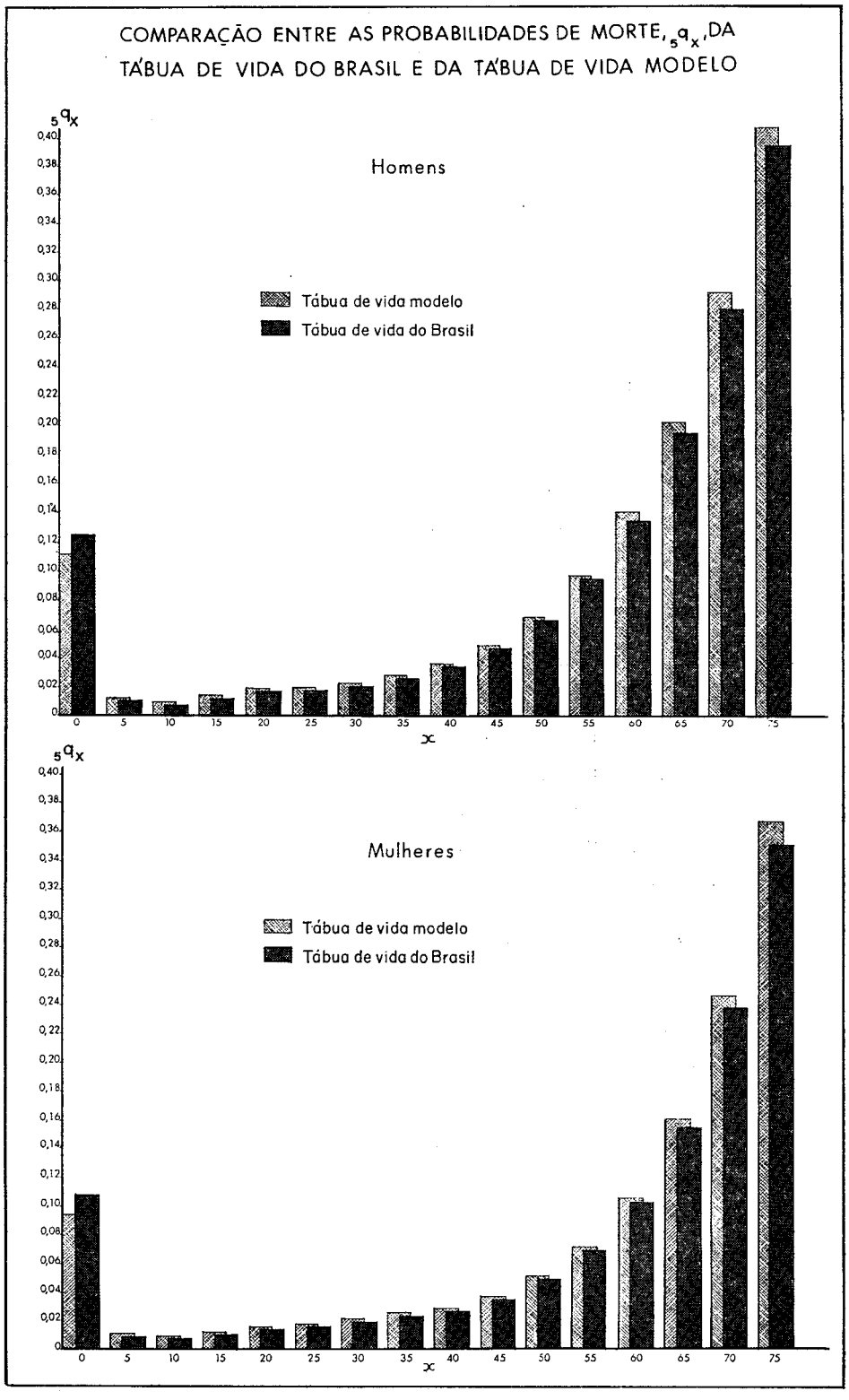

COMPARAÇÃO ENTRE AS PROBABILIDADES DE MORTE, $_5q_x$, DA TÁBUA DE VIDA DO BRASIL E DA TÁBUA DE VIDA MODELO
$_5q_x$
Homens
Tábua de vida modelo
Tábua de vida do Brasil
0,40
0,38
0,36
0,34
0,32
0,30
0,28
0,26
0,24
0,22
0,20
0,18
0,16
0,14
0,12
0,10
0,08
0,06
0,04
0,02
0
0 5 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60 65 70 75
x
$_5q_x$
Mulheres
Tábua de vida modelo
Tábua de vida do Brasil
0,40
0,38
0,36
0,34
0,32
0,30
0,28
0,26
0,24
0,22
0,20
0,18
0,16
0,14
0,12
0,10
0,08
0,06
0,04
0,02
0
0 5 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60 65 70 75
x

Gráfico 3

TABELA 9

TÁBUAS DE VIDA ABREVIADAS DA GUANABARA E DE SÃO PAULO: 1959/1961

CLASSES DE IDADES x a x+5	GUANABARA				SÃO PAULO	
	Homens		Mulheres		Ambos os sexos	
	$_5q_x$	lx	$_5q_x$	lx	$_5q_x$	lx
0 — 5	0,1226	100 000	0,1092	100 000	0,0948	100 000
5 — 10	0,0072	87 743	0,0059	89 079	0,0050	90 523
10 — 15	0,0057	87 108	0,0037	88 552	0,0042	90 072
15 — 20	0,0114	86 609	0,0072	88 220	0,0064	89 696
20 — 25	0,0177	85 618	0,0119	87 587	0,0090	89 126
25 — 30	0,0238	84 105	0,0153	86 543	0,0118	88 327
30 — 35	0,0307	82 102	0,0173	85 221	0,0161	87 284
35 — 40	0,0392	79 582	0,0203	83 745	0,0219(1)	85 879
40 — 45	0,0515	76 461	0,0270	82 042	0,0289	84 001
45 — 50	0,0688	72 521	0,0368	79 825	0,0416	81 571
50 — 55	0,0857	67 534	0,0465	76 887	0,0602	78 178
55 — 60	0,1305	61 746	0,0706	73 314	0,0847	73 474
60 — 65	0,1707	53 686	0,0965	68 139	0,1246	67 250
65 — 70	0,2433	44 523	0,1520	61 565	0,1718	58 869
70 — 75	0,3121	33 692	0,2202	52 210	0,2442	48 758
75 — 80	0,4328	23 175	0,3089	40 712	0,3530	36 851
80 e mais	—	13 145	—	28 137	—	23 844

FONTE — Tábuas de mortalidade do Estado da Guanabara para o período de 1959 a 1961. *B. demogr. CBED*, Rio de Janeiro, *1* (4): 4-6, abr./jun. 1971, tab.

(1) Valor corrigido.

A razão entre $_5q_0$ e $_5q_5$ é mais alta para a tábua modelo do que para as tábuas do Brasil, Guanabara e São Paulo (Tabela 10).

TABELA 10

COMPARAÇÃO DAS RELAÇÕES ENTRE $_5q_0$ e $_5q_5$ NAS QUATRO TÁBUAS DE VIDA

ESPECIFICAÇÃO	NÍVEL 17,44 (mulheres)	BRASIL (mulheres)	SÃO PAULO (ambos os sexos)	GUANABARA (mulheres)
$_5q_0$	0,0941	0,1076	0,0948	0,1092
$_5q_5$	0,0100	0,0081	0,0050	0,0059
$_5q_5 \div {}_5q_0$	0,1063	0,0753	0,0527	0,0540

Na verdade, a razão para as duas tábuas computadas, através das estatísticas dos óbitos, desvia-se ainda mais da razão da tábua modelo do que a tábua do Brasil (observe-se que as quatro tábuas de onde foram evtraídos os valores da Tabela 10, têm aproximadamente a mesma vida média ao nascer).

As tábuas da Guanabara e de São Paulo têm configuração similar à do Brasil, com um nível relativamente alto de mortalidade para os primeiros cinco anos de vida comparado com o nível geral da mortalidade. Isto pode ser mostrado comparando-se o número de anos-pessoas vividos no grupo de idade mais jovens, ${}_5L_0$, com o número total de anos-pessoas vividos, T_0 (Tabela 11).

TABELA 11

COMPARAÇÃO DAS RELAÇÕES ENTRE ${}_5L_0$ e T_0 NAS QUATRO TÁBUAS DE VIDA

ESPECIFICAÇÃO	NÍVEL 17,44 (mulheres)	BRASIL (mulheres)	SÃO PAULO (ambos os sexos)	GUANABARA (mulheres)
${}_5L_0$	461 372	453 196	459 874	456 621
T_0	6 110 000	6 109 999	6 238 000	6 227 018
${}_5L_0/T_0$	7,55	7,42	7,37	7,33

Quanto mais baixa cada razão, mais alto o nível relativo de mortalidade para o grupo mais jovem. Na tábua modelo (mulheres) ${}_5L_0$ é 7,55% de T_0 comparado com 7,42% do Brasil; essa proporção é ainda mais baixa para a Guanabara e São Paulo.

Enquanto estas comparações oferecem algum apoio para a configuração geral da tábua para o Brasil, estatísticas preciosas de óbitos por idade, para a nação como um todo, continuam a ser uma necessidade crucial no estudo da mortalidade. As estatísticas de óbitos atualmente publicadas para os municípios das capitais, são um passo na direção certa, e a ampliação desta fonte de estatísticas a outras áreas deveria ser encorajada de toda a maneira possível.

O cálculo da tábua está baseado na suposição de percentagem igual de cobertura entre os Censos de 1960 e de 1970 o que nos parece aceitável. Seria preferível uma tábua baseada diretamente nas estatísticas dos óbitos, mas mesmo nesse caso geralmente existem problemas quanto à precisão dos dados, e também quanto à comparabilidade de dados detalhados de mortes e de população. No caso do Brasil a notória deficiência das estatísticas do Registro Civil, mesmo no que se refere aos óbitos, não permite a obtenção de uma tábua de vida através desse método direto. As estimativas analíticas aqui apresentadas são portanto úteis, levando-se em conta as limitações dos dados.

NOTAS

(1) MORTARA, Giorgio. *Methods of using census statistics for the calculation of life tables and other demographic measures* (with applications to the population of Brazil). Lake Success, United Nations Departament of Social Affairs. 1949, 60 p., gráf. (United Nations Publications Populations Studies, 7).

(2) CASSINELLI, Robert Robichez. *Estimativas para o Brasil, da vida média ao nascer durante o período 1960/70 a partir de razões de sobrevivência inter-censitárias.* Rio de Janeiro, CBED, 1971. Uma análise adicional estimando taxas de nascimento e mortalidade é apresentada em *COMPONENTES* do crescimento natural da população brasileira (primeiras conclusões baseadas nos resultados preliminares do Censo de 1970. *B. demogr. CBED,* Rio de Janeiro, 2(1): 6-9, jul./set. 1971. A estimativa de vida média ao nascer foi originalmente apresentada como sendo de 57,01 anos para os homens. O valor revisto mostrado aqui corrige um erro de cálculo descoberto após a publicação das estimativas preliminares.

(3) As tábuas de vida modelo, tipo "West", são parte de um conjunto preparadas por Ansley Coale e Paul Demeny, e publicadas em *Regional Model Life Tabels and Stable Populations, Princeton,* New Jersey, 1966. As tábuas tipo "West" foram reimpressas em parte pelas Nações Unidas no Manual IV, *Methods of Estimating Basic Demographic Measures from Incomplete Data.* Sales n.º 67. XIII. 2.

(4) LEITE, Valéria da Motta. Estimativa da mortalidade nas primeiras idades no Brasil, a partir dos resultados dos Censos de 1940, 1950 e 1970. *B. demogr. CBED,* Rio de Janeiro, 2 (2): 5-13, out./dez. 1971, tab., gráf.

(5) Gráfico 2 apresenta somente valores até ${}_5L_{25}$ permitindo assim o uso de uma escala muito grande para mostrar a diferença entre as curvas. O conjunto completo de valores é dado na Tabela 4.

ESTATÍSTICAS DE NASCIMENTOS

Sugestões sobre um novo método de coleta

Subcomissão da Comissão A da CONPLANE *

Robert Robichez Cassinelli (Coordenador)
Reinaldo Dos Santos Leal
Márcia Martins
Lindalvo Bezerra dos Santos
Wilson Rodrigues da Cruz

Tema:

1. *Apreciação do Plano Nacional de Estatísticas Básicas*

   1.1. Situação Demográfica

   1.1.1. Movimento da População

1. As estatísticas de nascimentos atualmente fornecidas pelo Registro Civil ainda estão incompletas. Mesmo nas áreas urbanas existem problemas graves do registro tardio, mas na zona rural o problema é

* A Comissão *A* agradece a valiosa contribuição do Sr. Richard Irwin na confecção deste Documento.

bem maior. Em alguns Estados do Norte uma grande proporção dos registros é feita mais de 5 anos depois da ocorrência. No Maranhão, dos 79.631 nascimentos registrados no ano 1969, 47.526 ocorreram antes de 1964 (Tabela 1-a).

Mesmo na Guanabara 11% dos nascimentos registrados em 1969 tinham ocorrido antes de 1964.

TABELA 1

NASCIMENTOS REGISTRADOS ENTRE 1964 e 1969, SEGUNDO O ANO DE REGISTRO, POR ANO DE NASCIMENTO, NO ESTADO DO MARANHÃO E GUANABARA

a) Maranhão

ANO DO NASCIMENTO	NASCIMENTO SEGUNDO O ANO DE REGISTRO						TOTAL DE OCORRÊNCIAS
	1964	1965	1966	1967	1968	1969	
Antes de 1964	36 442	44 150	62 002	35 151	56 844	47 526	282 115
1964	12 931	5 058	2 758	2 305	2 292	2 553	27 897
1965	—	13 268	5 312	2 830	2 643	2 745	26 798
1966	—	—	13 229	5 746	3 284	3 250	25 509
1967	—	—	—	13 058	6 300	4 057	23 415
1968	—	—	—	—	12 199	6 914	19 113
1969	—	—	—	—	—	12 586	12 586
TOTAL DE REGISTROS	49 373	62 476	83 301	59 090	83 562	79 631	417 433

b) Guanabara

ANO DO NASCIMENTO	NASCIMENTO SEGUNDO O ANO DE REGISTRO						TOTAL DE OCORRÊNCIAS
	1964	1965	1966	1967	1968	1969	
Antes de 1964	...	15 665	12 509	9 380	11 370	11 384	74 041
1964	...	7 582	2 021	1 266	1 290	1 574	
1965	—	88 107	7 941	2 039	1 717	1 604	101 498
1966	—	—	81 220	6 675	2 403	1 998	92 323
1967	—	—	—	63 152	8 818	3 083	75 053
1968	—	—	—	—	77 333	10 260	87 593
1969	—	—	—	—	—	78 972	78 972
TOTAL DE REGISTROS	...	111 354	103 691	82 512	102 958	108 875	509 390

2. A melhoria das estatísticas de nascimentos através do Registro Civil é um trabalho a longo prazo, porque o registro dos nascimentos depende da vontade dos pais, e somente através de um programa de educação é que se poderia fazer com que ele fosse efetuado logo após o nascimento. Na zona rural as dificuldades de transporte e de comunicações complicam a solução do problema, mas a Tabela 1-b) mostra que mesmo na zona urbana existem dificuldades.

3. Os dados atualmente fornecidos ao público são da pior qualidade e não podem servir de base a qualquer estimativa do movimento da população. Os casamentos, que constituem os melhores dados, ainda são deficientes por falta de uma cobertura total dos cartórios. Os óbitos, além dessa deficiência, apresentam uma outra, devida ao fato de serem algo incompletas as declarações no próprio cartório. Essas duas deficiências podem ser corrigidas em prazo relativamente curto, mediante medidas administrativas e legais adequadas. No entanto, com relação aos nascimentos, onde são bem maiores as deficiências, o assunto é muito mais complexo. As falhas resultam de várias circunstâncias sobre as quais dificilmente se pode exercer um controle eficiente. Em primeiro lugar a declaração depende da vontade dos pais. São muito freqüentes os registros tardios. O pai, que reside em local distante do cartório registra, de uma só vez, os filhos que nasceram nos últimos 3, 4 ou 5 anos. Além disso, em épocas de eleições (como estamos observando agora em vários Estados) são feitos registros tardios de adultos entre 18 e 60 anos, muitos dos quais, senão a maioria, constituem registros duplos (ou triplos). Para um possível eleitor é mais fácil declarar que não foi registrado e conseguir novo registro, para fins eleitorais, do que solicitar a certidão do registro original, em localidade distante, em outra Unidade da Federação. Assim, em 64 registros de certo Município verificado haviam, no 1.º trimestre de 1972, apenas 4 relativos a nascimentos ocorridos no trimestre; os demais eram de nascimentos ocorridos nas décadas de 60, de 50 e de 40, existindo até um registro de 1912 (pessoa com 60 anos de idade). Ora, deficiências desse tipo só podem ser corrigidas a longo, e muito longo prazo, não sendo concebível que as estatísticas vitais, tão importantes para o País, fiquem na dependência desse lento processo de melhoria.

4. Assim, enquanto o processo de melhoria dos dados do Registro Civil continua, é preciso um método rápido de fazer estimativas do número de nascimentos, o que será possível com o método ora proposto. É fato notório que nos centros metropolitanos do Brasil, uma grande proporção de nascimentos ocorre em hospitais. Para isso contribui a melhoria da rede hospitalar e a ação do INPS. É provável que esta proporção deva crescer com o tempo, existindo, portanto, para esses centros a possibilidade de se coletar, diretamente dos hospitais, dados bastantes completos sobre os nascimentos. Com a ação do INPS, estendida há pouco às zonas rurais, também aí a cobertura deverá melhorar. Existe, ainda, a possibilidade de serem completados estes dados com pesquisas especiais na zona rural para estimar o total de nascimento no País.

5. No Distrito Federal já foi implantado um sistema de coleta de informações sobre nascimentos diretamente nos hospitais *. A Secretaria de Saúde do Distrito Federal recebe um relatório mensal sobre nascimentos dos cinco hospitais públicos pertencentes à Fundação Hospitalar.

---

* A referência aos hospitais, inclui também as Casas de Saúde, ou, de um modo geral, as Maternidades.

Este relatório fornece, além do número total de nascimentos, dados sobre tipo de parto, número de nascidos vivos e mortos, etc. A Secretaria faz uma apuração semestral, e tem o direito de exigir relatórios dos hospitais da rede pública. Cada um deles tem um "Serviço de Arquivo Médico e Estatístico" com seis funcionários, no mínimo, conforme foi verificado "in loco".

6. O "Serviço de Arquivo" do Hospital Distrital (um dos integrantes daquela Fundação) foi visitado por Funcionários do IBGE. O S.A.M.E. ocupa duas grandes salas, e aí se preenche diversos relatórios detalhados. O Hospital Distrital mantém convênios com algumas entidades, e é grande a proporção de atendimentos a pacientes pelos quais recebe auxílio do INPS, ou de outras Agências. Para solicitar este auxílio, é obrigado a discriminar, num formulário para cada paciente o preço de cada serviço prestado, e de cada medicamento ministrado.

7. A fim de fornecer aos pais dados básicos sobre o recém-nascido, a Fundação Hospitalar do Distrito Federal utiliza um formulário com o título "Aviso de Nascimento", que inclui muitas informações úteis. Para servir como base inicial dum sistema de estatísticas sobre nascimento falta apenas a idade e lugar da residência habitual da mãe. Os funcionários do Hospital Distrital não hesitaram em concordar com a idéia de acrescentar ao formulário atual estas novas informações.

8. O Hospital Dom Bosco, em Brasília, é particular e possui uma maternidade muito grande. Essa instituição também preenche muitos formulários e possui, inclusive, um tipo de aviso com informações aos pais sobre o nascimento. O aviso utilizado é chamado "Identificação do Recém-nascido" (uma cópia segue em anexo) e contém os seguintes itens: nome do pai, nome da mãe, data e hora do nascimento da criança, estatura, sexo, cor, tempo de gestação, parto, vitalidade e vacinação BCG. Neste hospital houve também concordância com a idéia de colocar a residência habitual e a idade da mãe num formulário padronizado deste tipo.

9. Verifica-se, então, que existe a possibilidade de se padronizar um "Aviso de Nascimento" e solicitar, além das cópias para as finalidades próprias do hospital, mais uma para fins estatísticos, dada a boa receptividade para as sugestões apresentadas. É preciso que o Aviso fique bem simples para não se aumentar demasiadamente a carga já pesada daqueles funcionários. É preciso, também, deixar espaço no formulário para que cada hospital possa colocar outras informações de seu próprio interesse. Os formulários padronizados devem ser fornecidos gratuitamente e serão feitas cópias necessárias de modo que, por exemplo, a primeira fique com os pais, a segunda com o hospital e a terceira com o IBGE.

10. O plano sugerido é que no início de cada mês, funcionários do IBGE recolham, em cada hospital, os Avisos do mês anterior. Ao

mesmo tempo seria conveniente conseguir uma cópia do outro formulário que é preenchido mensalmente para o uso da Secretaria de Saúde do Distrito Federal mencionado no item 5. Há muito tempo os hospitais públicos já vêm fazendo isso, e recentemente os hospitais particulares começaram a mandar formulário semelhante à Secretaria. Estes formulários podem servir como controle do número total dos nascimentos.

11. O sistema poderia ser implantado inicialmente em Brasília; se funcionar bem, como é de se esperar, seria estendido gradativamente a outras grandes cidades do País, segundo a situação particular de cada uma. Visto que nos cinco maiores municípios do Brasil moram 15% da população, o sistema pode fornecer resultados úteis em curto prazo, e vir a ser rapidamente melhorado.

12. Depois que se dispuzer do número de nascimentos de uma parte considerável da população, mais um passo adiante seria conseguir dados para o resto do País através uma pesquisa especial. Esta pesquisa poderia usar o sistema de registro duplo já experimentado em outros países, ou a PNAD (Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílio), ou ainda uma combinação dos dois, adaptada às peculiaridades do Brasil. No caso da PNAD, seria possível comparar as estimativas obtidas com os resultados do novo sistema nas grandes cidades. Essa relação seria provavelmente de utilidade para ajustar os dados e obter estimativas para o resto do País. Visto que o custo do uso da PNAD é muito menor do que sistema de registro duplo, a proposta atual é começar com a PNAD.

13. O processo já está em caminho; só é preciso continuar. A PNAD, atualmente no campo, contém neste trimestre, as quatro perguntas necessárias para conseguir estimativas do número de nascimentos, isto é, para cada mulher, são feitas perguntas sobre o número total de filhos nascidos vivos e mortos, bem como os nascimentos ocorridos no último ano, e o número de filhos ainda vivos. As respostas a estas perguntas têm que ser apuradas, separadamente, para as áreas onde foi implantado o novo sistema e o resto do País. É possível fazer isso porque todas as cidades grandes estarão seguramente na amostra da PNAD.

14. É claro que o sistema proposto ainda é incompleto, não permite desde logo uma cobertura total, e como sistema definitivo depende de uma complementação que poderá ser obtida através de informes da PNAD. Todavia, os dados levantados são de boa qualidade, controlados e não retardatários e fantasmas como os que resultam do Registro Civil.

15. A complementação da cobertura através desse novo sistema poderia vir depois, mediante uma legislação adequada que obrigasse os médicos e parteiras, através da fiscalização da profissão, a declarar,

em registros próprios, na forma a ser estudada, os partos realizados fora de hospitais e casas de saúde. Essa obrigatoriedade de declaração já ocorre hoje, com os médicos, em relação a determinadas enfermidades. Mesmo depois de implantado o sistema, uma pesquisa periódica do tipo PNAD poderia continuar a ser feita de tempos em tempos a título de controle de qualidade a fim de manter o sistema em bom funcionamento. Estamos certos de que a fórmula proposta é a única que permitirá, de imediato, boas estimativas da natalidade e da fecundidade brasileiras, além de que, em prazo mais curto do que seria possível através do Registro Civil, se poderá estabelecer um sistema de estatísticas vitais com cobertura quase total, com a grande vantagem da melhor qualidade uma vez que iria fornecer dados puros, isto é, não registros de pessoas de todas as idades, mas efetivamente, as ocorrências de *nascimentos* em cada ano.

16. Como conseqüência natural sugere-se que os dados de casamentos e óbitos, devidamente melhorados em sua cobertura, continuem a ser levantados através do Registro Civil, mas que os nascimentos deixem de ser coletados nos cartórios, pelo menos na medida em que o novo sistema vá sendo implantado. Com isso não se sobrecarregaria a rede-de-coleta que passaria a obter esses dados através da nova rede de informantes.

ANEXO

CASA DE SAÚDE E MATERNIDADE D. BOSCO
Brasília — D. Federal

IDENTIFICAÇÃO DO RECÉM-NASCIDO

Clínica Obstétrica

REGISTRO N.º

Nome da mãe:

Nome do pai:

Data: Hora:

Peso: Estatura: Sexo: Cor: Credo:

Tempo de gestação: Parto:

Vitalidade:

Vacinação B.C.G.

Impressão Plantar do recém-nascido

Impressão digital da mãe

Fita no punho com o nome da mãe e número do registro

AVISO DE NASCIMENTO

Números do Registro

IBGE .....

Hospital .....

Lugar de nascimento

Hospital: [1]

Rua e N.º:

Estado: [2] Município: Cidade:

Informações sobre os pais

Nome do pai: Data de nascimento: Idade:

Nome da mãe: Data de nascimento: Idade:

Residência habitual, Rua e N.º

Estado: [2] Município: Cidade:

N.º total de filhos tidos nascidos vivos: [3]

Outras informações:

Informações sobre o recém-nascido

Nome:

Data de nascimento: Hora:

Peso: Estatura: Sexo: Cor:

Tempo de Gestação: Parto:

Vacinação B.C.G.:

Outras informações:

[1] Caso o nascimento ocorrer fora do hospital, nome do médico ou outra pessoa presente.

[2] Ou Unidade da Federação.

[3] Excluir o presente nascimento.

CLASSIFICAÇÃO DA POPULAÇÃO EM URBANA E RURAL

Subcomissão da Comissão A da CONPLANE

Robert Robichez Cassinelli (Coordenador)
Reinaldo dos Santos Leal
Márcia Martins
Lindalvo Bezerra dos Santos
Wilson Rodrigues da Cruz

TEMA

1. Apreciação do Plano Nacional de Estatísticas Básicas

1.1. Situação Demográfica

1.1.1. Estado da população

1. Um dos aspectos importantes para a caracterização econômico-social das populações é a sua classificação em *urbana* e *rural*. Por isso mesmo essa caracterização deveria obedecer a critérios rigorosos e isentos tanto quanto possível de condições arbitrárias. No entanto, não é o que ocorre no Brasil; a classificação da população em urbana e rural conforme residam em cidades ou vilas (população urbana) ou fora dessas aglomerações (população rural) é inteiramente arbitrária e não

permite um julgamento seguro das condições que pretende caracterizar. Muitas vilas e até mesmo cidades (sedes de municípios) são pequenos aglomerados cujos habitantes na sua grande maioria, desenvolvem atividades rurais e toda a estrutura econômica-social do aglomerado depende fundamentalmente dessas atividades. Esse critério, puramente administrativo, adotado nos censos brasileiros, não é pois recomendável; basta considerar que as populações de pequenos aglomerados, até de menos de 100 habitantes, podem ser consideradas como populações urbanas. Sugerimos pois seja esse critério modificado, nos próximos recenseamentos. Muito embora, para efeito de continuidade, o Censo de 1980 deva efetuar, também, a classificação segundo esse sistema, adotando-se o novo critério daí por diante. Assim, teríamos pelo menos um recenseamento (o de 1980) com uma dupla classificação da população urbana e rural, para fins de comparabilidade no tempo.

2. Numerosos são os critérios que têm sido propostos para a classificação das populações em urbana e rural, e nenhum deles é isento de defeitos. Uma das deficiências de todos eles é que pretendem fazer uma dicotomia que realmente não existe. Talvez fosse mais lógico dividir a população em pelo menos três classes: urbana, semi-urbana e rural, não devendo confundir-se a denominação "semi-urbana", com "sub-urbana", muito embora em certos casos se pudesse confundir as duas. A população sub-urbana do Rio de Janeiro deverá ficar incluída na classe "urbana" ao passo que, em outras cidades a população sub-urbana possa apresentar características de semi-urbana (intermediária entre urbana e rural) ou mesmo de uma população claramente rural.

3. Não pretendemos, no presente documento, definir completamente todos os critérios que têm sido utilibados para os fins de classificação das populações em urbana e rural; vamos apenas citar os principais critérios utilizados para definir a população urbana, resultando a rural como resíduo:

a) critério puramente administrativo: habitantes de cidades e vilas (o adotado no Brasil);

b) dimensão do aglomerado (variando desde 200 habitantes nos países escandinavos, até 30.000 habitantes no Japão);

c) a existência de governo local;

d) a combinação de determinadas características e serviços de natureza urbana (padrões de ruas, de construções, de edifícios, serviços públicos tais como: água, esgotos, hospitais, etc.);

e) atividade predominante, com caráter não rural;

f) combinação de 2 ou 3 dos critérios anteriores.

Além desses critérios poderiam ser examinados outros não incluídos nessa relação, com base nas condições econômico-sociais de cada aglomerado.

4. A sugestão que fazemos é de que seja constituído um grupo do qual participarão representantes do CBED, do IBG e do DECEN com o objetivo de estabelecer o novo critério. Em princípio esse critério deveria depender de características resultantes do questionário na sua *fase de apuração*. Nada impediria que o critério definitivo fosse diferente do que tivesse sido utilizado inicialmente para o estabelecimento dos setores censitários, para os quais poderia ser mantido o atual sistema. Com isso ficaria assegurada a classificação na sua forma atual em todos os censos futuros, apenas para os fins indicados, mas que, de qualquer forma poderia servir como elemento de comparabilidade permanente com a forma atual de classificação. Para fins de estudos mais sérios e rigorosos valeria no entanto a nova forma de classificação, segundo as características objetivas de natureza mais elaborada, que permitissem uma melhor visão do aspecto urbano-rural da população. Com relação a normas de caráter internacional já não existe atualmente nenhuma comparabilidade entre os resultados dos diferentes países; as normas em vigor são no sentido de que cada país adote aquele critério que melhor se adapte às suas condições reais. Todavia, esse aspecto poderia ser eventualmente examinado, e levado a consideração de um congresso internacional como o que se vai realizar em 1974 onde as representações terão caráter de delegações governamentais.

ESTATÍSTICAS SOCIAIS
Situação atual em face do PNEB

Subcomissão da Comissão A da CONPLANE

Raul Romero de Oliveira (Coordenador)
Heitor Câmara Veloso
Carlos Marcos Barbosa
Gilberto da Silva Barros
Ernani Timótheo de Barros

SUMÁRIO:

1. *Introdução*
2. *Principais Fontes produtoras de Estatísticas Sociais*
   - 2.1. Habitação
   - 2.1.1. *IBE — Departamento de Censos*
   - 2.1.2. *IBE — Grupo Executivo de Pesquisas Domiciliares*
   - 2.2. Trabalho
   - 2.2.1. *IBE — Departamento de Censos*
   - 2.2.2. *IBE — Grupo Executivo de Pesquisas Domiciliares (Vede 2.1.2)*
   - 2.2.3. *IBE — Departamento de Estatísticas Industriais, Comerciais e de Serviços*
   - 2.3. Saúde
   - 2.3.1. *Divisão Nacional de Epidemiologia e Estatística de Saúde*
3. *Apreciação sobre as estatísticas sociais disponíveis em face do PNEB.*
   - 3.1. *Habitação*
   - 3.2. *Trabalho*
   - 3.3. *Saúde*
4. *Considerações finais*

1. INTRODUÇÃO

O Plano Nacional de Estatísticas Básicas — PNEB, aprovado pelo Decreto n.º 63.010, de 18 de julho de 1968, estabelece uma série de informações estatísticas da área social, que deverão ser levantadas no interesse do planejamento e da segurança nacional.

Ao ensejo da II CONFEST, julgou-se oportuno dar um balanço sumário da situação dessas estatísticas, especialmente, relativas aos setores HABITAÇÃO, TRABALHO e SAÚDE.

Deste modo, estão reunidos no presente documento, referências às fontes produtoras das estatísticas em causa, mas, tão somente daquelas que obtém os dados através de investigações diretas. Não foram consideradas as fontes, que obtém estatísticas mediante a compilação de registros, documentos administrativos, como ocorre no caso da "Lei dos 2/3" o do Decreto que estabelece o cadastro de admissões e dispensas de empregados nas empresas, que permitem elaborar estatísticas do setor TRABALHO. O mesmo ocorre com outros registros, dos quais se extraem estatísticas do interesse do setor SAÚDE.

As apreciações apresentadas sobre as estatísticas sociais disponíveis em face do PNEB, apenas, dão um primeiro enfoque sobre o assunto, que necessita ser examinado em profundidade pelos usuários nelas interessados, análise que, sem dúvida, se beneficiará das primeiras observações que venham a surgir na II CONFEST, por força desta colocação do tema em discussão.

2. FONTES PRODUTORAS DE ESTATÍSTICAS SOCIAIS

2.1. Habitação

2.1.1 — IBE — DEPARTAMENTO DE CENSOS (DECEN)

Esse órgão do Instituto Brasileiro de Estatística da Fundação IBGE, ao planejar o Censo Demográfico de 1970, esquematizou a obtenção de dados relativos a habitação, segundo as Unidades prediais e domicílios.

A fim de que se possa ter uma visão clara e uma melhor interpretação das variáveis pesquisadas pelo DECEN, na época da realização do Censo, segue-se uma descrição sucinta do que objetivou o planejamento censitário.

Variáveis e Suas Caracterizações

Habitação

Unidades prediais

Definição — Considerou-se *Prédio* qualquer edificação ocupada ou não, inclusive as construções não concluídas, mas que na data do Cen-

so, estavam com as paredes externas levantadas e os telhados colocados.

Não foram considerados como prédios:

a) as construções rústicas da zona rural que não tinham moradores e serviam como paióis, cocheiras, abrigos contra a chuva, etc.;

b) as construções que não possuíssem paredes externas;

c) as construções anexas à principal, destinadas à residência de empregados, guarda de veículos, animais, etc.

As unidades prediais foram contadas de acordo com os seguintes critérios:

a) construção isolada ou não — com entrada comum para todos os moradores ou entrada principal para cada pavimento: 1 prédio;

b) construção de telhado corrido (caso das vilas) porém repartidos internamente por paredes divisórias, as quais correspondam entradas independentes: tantos prédios quanto forem as entradas independentes;

c) construções de conjuntos residenciais — *tantos prédios* quantas forem as entradas principais e independentes dos blocos residenciais;

d) construções institucionais — dentro de hospitais, sanatórios, quartéis, colégios, etc., cada edificação: 1 *prédio.*

Itens investigados e classificações

1. Número de pavimentos; 2. Paredes; 3. Coberturas; 4. Piso; 5. Forro; 6. Iluminação elétrica; 7. Água encanada; 8. Instalação sanitária; 9. Número de unidades para fins domiciliares e não domiciliares; 10. Número de unidades para fins domiciliares; 11. Utilização e 12. Número de pessoas residentes.

Divulgação — Do plano de divulgação constam as seguintes Tabelas:

Resultados para o conjunto das Unidades da Federação:

1. Prédios por material de cobertura e de forro, segundo o material das paredes e do piso.

2. Prédios, por material de cobertura e do piso, segundo o material das paredes e o número de pavimentos.

3. Prédios, por instalações existentes, segundo o material das paredes e do piso.

4. Prédios, por instalações existentes, segundo a situação e o número de pavimentos.

5. Prédios, por número de unidades domiciliares e não domiciliares, segundo a situação e o número de pavimentos.

6. Prédios, por número de unidades domiciliares, segundo a situação e o número de pavimentos.

7. Prédios, por utilização, segundo algumas principais características.

Resultados por Microrregiões e Municípios:

8. Prédios, por instalações existentes, segundo as Microrregiões, os Municípios, as Cidades e as Vilas.

9. Prédios, por utilização, segundo as Microrregiões, os Municípios, as Cidades e as Vilas.

Domicílios

Definição — Conceituou-se *Domicílio* como local de moradia, estruturalmente independente, formado por um ou mais cômodos, com entrada privativa. Por extensão foram considerados também como Domicílio, prédios em construção, embarcações, veículos, barracas, tendas, grutas e outros locais que estivessem sendo utilizados para moradia na data do Censo.

Classificaram-se os domicílios em Particulares, quando fossem habitados por, no máximo três Famílias; e Coletivos quando fossem ocupados por Grupos Conviventes (religiosos em conventos; hóspedes em hotéis e similares; militares em quartéis ou navios; estudantes em internatos; asilados em instituições de assistência etc.). Os domicílios ocupados por mais de três Famílias conviventes ou por Famílias e grupos conviventes foram considerados Domicílios Coletivos. As casas de cômodos (cabeças-de-porco, cortiço, etc.) foram assemelhadas a edifícios de apartamentos, considerando-se cada unidade residencial como um domicílio particular.

A pesquisa das características limitou-se aos Domicílios particulares.

Itens investigados e classificações

1. Tipo de construção; 2. Condição de ocupação; 3. Aluguel mensal (Cr$); 4. Tempo de residência; 5. Abastecimento dágua; 6. Instalações sanitárias; 7. Iluminação elétrica; 8. Fogão; 9. Rádio; 10. Geladeira; 11. Televisão; 12. Automóvel; 13. Número total de cômodos; 14. Número de cômodos servindo de dormitórios e 15. Número de moradores.

Divulgação — Do plano de divulgação constam as seguintes Tabelas:

Resultados para o conjunto das Unidades da Federação:

1. Domicílios particulares, por tipo de construção e situação, segundo o número de moradores.
2. Domicílios particulares permanentes e número de moradores, por situação, segundo algumas das principais características.
3. Domicílios particulares permanentes, por número de moradores, segundo algumas das principais características.
4. Domicílios particulares permanentes, por grupos de renda domiciliária mensal, segundo algumas das principais características.
5. Domicílios particulares permanentes, por situação, condição de ocupação e grupos de aluguel mensal, segundo algumas das principais características.
6. Domicílios particulares permanentes, por número de cômodos, segundo a situação e o número de moradores.
7. Domicílios particulares permanentes, por número de dormitórios, segundo a situação e o número de moradores.
8. Domicílios particulares permanentes, por número de cômodos, segundo a situação e o número de dormitórios.

Resultados para as Microrregiões e Municípios:

9. Domicílios particulares permanentes, por tipo da construção, condição de ocupação, número de cômodos e número de moradores, segundo as Microrregiões e os Municípios.
10. Domicílios particulares permanentes, por instalações e utilidades existentes, segundo as Microrregiões e os Municípios.
11. Domicílios particulares permanentes, por tempo de residência, segundo as Microrregiões e os Municípios.
12. Domicílios particulares permanentes alugados, por valor de aluguel mensal, segundo as Microrregiões e os Municípios.

Os dados censitários relativos à Habitação, se constituem, pois, amplo acervo com que contará o PNEB para os fins a que se destina.

2.1.2. IBE — GRUPO EXECUTIVO DE PESQUISAS DOMICILIARES (GEPD)

A aplicação da técnica de pesquisas domiciliares no Brasil realizada através do Grupo Executivo de Pesquisas Domiciliares (GEPD) do IBE, representou um avanço marcante para o desenvolvimento de conjunto de micro dados e de indicadores sociais.

No resumo, que se apresenta a seguir, sobre a Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios, além dos aspectos metodológicos destacados, dá-se relevo aos aspectos pesquisados, não sendo conveniente separar apenas os referentes aos pontos específicos desse relatório. Deste modo, essa descrição da PNAD abrange todos os pontos de nosso interesse ou sejam os relativos ao Domicílio, à Força-de-Trabalho, ao Salário e à Instrução.

As Pesquisas Domiciliares no Brasil constituem um levantamento por amostragem probabilística, realizado com a finalidade de proporcionar, nos períodos intercensitários, estimativas de periodicidade trimestral sobre aspectos sócio-econômicos da população.

Tendo por base o modelo "Atlantida — A Study case in Household Sample Survey" preparado pelo "Bureau of the Census" sob os auspícios da Agência para o Desenvolvimento Internacional, a Fundação IBGE, após adaptá-lo às características brasileiras, realizou o primeiro teste em 1966 para examinar a viabilidade de sua aplicação no Brasil e formular especificações para programas alternativos que seriam considerados numa segunda fase dos trabalhos.

Verificada a exeqüibilidade do programa, constatou-se que a sua realização num país extenso e com um grau de variabilidade substancial refletido em diversificadas características da população só poderia ser desenvolvido a longo prazo, o que exigia um planejamento cuidadoso, infraestrutura técnica e administrativa, e suporte financeiro.

Realizado o planejamento por técnicos da Fundação IBGE com a assistência técnica da USAID e assegurados os meios para realização da Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios (PNAD) — denominação dada ao programa brasileiro — o Grupo Executivo de Pesquisas Domiciliares, do Instituto Brasileiro de Estatística, iniciou em 1967 a implantação da Pesquisa que abrangeu, as 7 Regiões sócio-econômicas em que o Brasil foi dividido para fins da PNAD:

Região I — Guanabara e Rio de Janeiro

Região II — São Paulo

Região III — Paraná, Santa Catarina e Rio Grande do Sul

Região IV — Minas Gerais e Espírito Santo

Região V — Maranhão, Piauí, Ceará, Rio Grande do Norte, Paraíba, Pernambuco, Alagoas, Sergipe e Bahia

Região VI — Distrito Federal

Região VII — Demais Unidades da Federação.

De 1967 ao primeiro trimestre de 1970, foi ampliada até abranger 80,2 milhões de habitantes, ou sejam 93,1% da população. No primeiro trimestre de 1970, em decorrência da realização do Recenseamento Geral do Brasil as operações da PNAD foram suspensas, sendo retomadas no primeiro trimestre de 1971.

Atualmente, com início a 1.º de outubro de 1972, estão sendo realizadas nas Regiões I a VI as pesquisas de mão-de-obra, rendimento familiar, de migração interna e fecundidade.

Unidade de investigação

A unidade de investigação da Pesquisa é o domicílio, ou seja, local ou recinto que serve de moradia a um grupo familiar, formado por um só cômodo ou conjunto de cômodos com entrada independente, dando para lagradouro ou terreno de uso público ou para local de uso comum a mais de um domicílio.

A amostra utilizada investiga os domicílios particulares e os domicílios coletivos. Nestes, arrolam-se apenas os residentes, aqui entendido como as pessoas que residam ou pretendam residir no domicílio por período igual ou superior a 30 dias, ou que não tenham outro local de residência habitual.

Estratificação

A mecânica operacional de estratificação e seleção da amostra de unidades primárias utilizou materiais disponíveis de programa do Censo de 1960 e informações de outras fontes no tocante a clima, precipitação pluviométrica, tipo de agricultura, tipo e concentração de indústria e informações fisiográficas sobre pequenas áreas. A seleção de amostras foi efetuada em quatro estágios; municípios, setores censitários, subsetores e domicílios, respectivamente.

Cobertura

O programa da Pesquisa sobre a população residente, com exceção dos membros das Forças Armadas residindo em quartéis, e dos internados, pacientes e membros de instituições como sanatórios, asilo de velhos, órfãos ou inválidos, claustros religiosos e penitenciárias. Assim a população investigada compreende as pessoas que vivem em domicílios particulares e domicílios coletivos, exceto as especificadas acima. Todavia, os empregados e suas famílias, residentes nas instituições, são abrangidos pelos levantamentos.

A pesquisa não alcança os membros das forças armadas quando aquarteladas, mas inclui os militares que vivam fora da caserna, residindo ou não com suas famílias.

Seqüência das Etapas na Seleção da Amostra

O projeto de amostra adotou por base:

— Taxas globais de amostragem específicas para cada região com um processo de seleção a quatro estágios;

— Designação de uma lista de municípios auto-representativos;

— Agrupamento dos municípios restantes, em estratos;

— Seleção de dois pseudo-municípios em cada estrato regular e três entre os estratos de 1½ dimensão;

— Seleção de cinco pseudo-setores dentre o grupo dos não auto-representativos e dentre os auto-representativos, como segue:

Um setor para cada 4.000 domicílios de 1960, na Região I;

8.000 domicílios de 1960, nas Regiões II, III e V;

6.000 domicílios de 1960, na Região IV; e

2.000 domicílios de 1960, na Região VII;

— Seleção de dois subsetores com áreas de listagem dentro dos setores da amostra;

— Seleção de domicílios dentro das áreas de listagem dos setores da amostra;

— Seleção de domicílios dentro das áreas de listagem com base em uma taxa de amostragem de modo a manter a taxa global de amostragem da região.

Processo de Estimativas

As estimativas da pesquisa por amostra de domicílios foram feitas individualmente para cada região. Dois processos foram usados. Inicialmente, as estimativas foram obtidas pelo produto dos totais da amostra de cada item pela recíproca da fração global de amostragem. Subseqüentemente, os cálculos foram feitos usando-se o método das estimativas de razão. Um fator de crescimento é calculado para cada região, como quociente das projeções da população elaboradas pelo Laboratório de Estatística do IBE, dividido pelo número de indivíduos enumerados na amostra. Estimativas das características individuais são então obtidas pela multiplicação dos totais da amostra pelo fator de expansão calculado.

Aspectos Pesquisados

1 — População

1.1 — Situação do domicílio, sexo e grupos de idade

1.2 — Relação com o chefe da família, sexo e grupos de idade

1.3 — Relação com o chefe da família, sexo e número de componentes da família

1.4 — Lugar de nascimento, sexo, situação do domicílio e relação com o chefe da família

1.5 — Grupos de idade, sexo e estado civil das pessoas de 14 anos e mais

2 — Domicílio

2.1 — Domicílios particulares e pessoas residentes, por situação do domicílio

2.1.1 — Natureza da habitação e número de habitações no prédio

2.1.2 — Abastecimento dágua, instalação sanitária, instalação elétrica e telefone

2.1.3 — Condição de ocupação e número de cômodos

2.2 — Domicílios particulares, por número de pessoas

2.2.1 — Natureza da habitação, e número de habitações no prédio

2.2.2 — Abastecimento dágua, instalação sanitária, instalação elétrica e telefone

2.2.3 — Situação do domicílio e número de cômodos

3 — Força-de-trabalho

3.1 — Posição das pessoas de 14 anos e mais em relação à força-de-trabalho

3.2 — Pessoas na força-de-trabalho (ocupadas e desocupadas)

3.3 — Pessoas ocupadas

3.4 — Pessoas desocupadas

3.5 — Pessoas fora da força-de-trabalho

3.5.1 — Pessoas que trabalharam nos últimos 5 anos, grupos de idade, sexo, atividade do último emprego e intenção de procurar trabalho nos próximos 12 meses

4 — Salário

4.1 — Empregados, por grupos de salário semanal (somente em dinheiro)

4.2 — Empregadores e trabalhadores por conta própria, em atividades não agrícolas, por grupo de ganho líquido mensal, e classes de atividade

5 — Instrução

5.1 — Alfabetização e sexo das pessoas de 6 anos e mais, situação do domicílio e grupos de idade

5.2 — Pessoas alfabetizadas de 6 anos e mais, por grupos de idade, sexo e grau de instrução

Divulgação dos resultados

A partir de 1968 até fins de 1970, o Grupo Executivo de Pesquisas Domiciliares divulgou os resultados da PNAB, por Regiões, em publicações de periodicidade trimestral.

Os diversos aspectos divulgados compreenderam uma seleção prioritária, expressiva das possibilidades da Pesquisa, mas o plano tabular permite a produção de um elenco de mais de 50 tabelas relacionadas com os assuntos investigados.

As publicações editadas incluem informes sobre a população, domicílio, força-de-trabalho, salário e instrução.

* * *

A partir de 1.º de outubro corrente, a Fundação IBGE iniciou nas Regiões I a VI, uma pesquisa básica de mão-de-obra e uma pesquisa suplementar do rendimento familiar, com a inclusão de quesitos sobre migração-interna e sobre fecundidade.

A amostra abrange 76.122 domicílios na pesquisa básica e 76.122 domicílios na pesquisa suplementar.

2.2. Trabalho

2.2.1 — IBE — DEPARTAMENTO DE CENSOS (DECEN)

Os Recenseamentos Gerais de 1970 investigaram aspectos de trabalho exercido em todos os setores de atividade. Os resultados que serão obtidos se constituirão parte importante do repertório básico de estatísticas de trabalho disponível no País, com que, certamente, os analistas poderão executar estudos de há muito protelados, em face da inexistência das informações necessárias e suficientes.

O Departamento de Censos, respingando aspectos dos Censos Demográfico, Agropecuário, Industrial, Comercial e dos Serviços oferece a seguir informações resumidas sobre conceitos e classificações e sobre o plano de divulgação a ser dado a resultados que atendem a pontos previstos no "Plano Nacional de Estatísticas Básicas".

A — População Economicamente Ativa

Definição — Compõem a População Economicamente Ativa as pessoas de 10 anos e mais que, no ano anterior à data do Censo, exerceram uma atividade econômica, mesmo que na data do Censo estivessem desempregadas, em gozo de férias, presas aguardando julgamento ou estavam procurando emprego pela 1.ª vez.

Como Não Economicamente Ativas são consideradas, além das pessoas Sem ocupação, os Estudantes, Aposentados, Pensionistas, Detidos

em cumprimento de pena; Inválidos e as pessoas que vivem de renda ou exercem Atividades domésticas não remuneradas.

Para as Pessoas Economicamente Ativas, foram investigadas a Ocupação habitual; o Ramo e a Classe de atividade, onde era exercida a ocupação; a Posição na atividade em que se ocupava — Posição na ocupação; a Ocupação exercida na semana anterior à data do Censo; a Duração do Trabalho, em meses para as ocupadas em atividades agropecuárias ou da extração vegetal e número de horas semanais, para as demais ocupações; e para os desempregados na data do Censo, o Tempo de procura de trabalho.

B — Setores de Atividade

Definição — As Pessoas Economicamente Ativas são classificadas segundo a finalidade ou ramo de negócio da organização, empresa ou entidade a que prestem serviços, ou de acordo com a natureza da atividade exercida, para os que trabalham por conta própria.

Classificação — Segundo os Setores de Atividades as Pessoas Economicamente Ativas são classificadas:

1. Agricultura, Pecuária, Silvicultura, Extração Vegetal, Caça e Pesca; 2. Atividades industriais (Extração mineral, Indústrias de transformação, Indústria de construção e Serviços industriais de atividade pública; 3. Comércio de mercadorias; 4. Prestação de Serviços; 5. Transportes, comunicações e armazenagem; 6. Atividades sociais (Ensino, Assistência médico-hospitalar, Previdência social etc.) 7. Administração pública (Serviços administrativos governamentais, Legislativo, Defesa Nacional e Segurança Pública) e 8. Outras atividades (Comércio de imóveis e valores mobiliários, Crédito, Seguros e Capitalização; Profissões liberais, etc.), que incluem também as pessoas que procuravam trabalho pela 1.ª vez.

Divulgação — Do Plano de divulgação constam as seguintes Tabelas a respeito de Setores de atividade:

Resultados para o conjunto das Unidades da Federação:

1. Ocupação das pessoas economicamente ativas, por sexo e setor de atividade.
2. Situação do emprego, por sexo, segundo o Setor de atividade e a posição na ocupação.
3. Ramo e classe de atividade das pessoas de 10 anos e mais por sexo e situação do domicílio.
4. Setor de atividade e posição na ocupação das pessoas de 10 anos e mais, por sexo e grupos de idade.
5. Setor de atividade de dependência, das pessoas de 10 anos e mais, por sexo e anos de estudos.

6. Setor de atividade de dependência e condição de atividade, das pessoas de 15 anos e mais, por sexo e estado conjugal.

7. Rendimento mensal das pessoas de 10 anos e mais, por sexo, segundo o Setor de atividade e a posição na ocupação.

8. Fecundidade das mulheres de 15 anos e mais, segundo o setor de atividade e a condição na ocupação.

Resultados por Microrregiões e Municípios:

9. Setor de atividade das pessoas de 10 anos e mais por sexo, segundo as Microrregiões e os Municípios.

10. Setor de atividade de dependência, por condição de atividade, por Microrregiões e os Municípios.

— Mão-de-obra ocupada em atividades agropecuárias

Definição — No Censo Agropecuário a indagação sobre pessoal ocupado abrange todas as pessoas que na data do Censo participavam das atividades do estabelecimento, com exceção das que se encontravam nos estabelecimentos desempenhando tarefas por conta de empreiteiros com os quais tenha sido contratada a execução de quaisquer serviços.

Classificação — O pessoal ocupado é classificado por sexo, discriminados conforme a idade em menores de 14 anos e mais, de acordo com as seguintes categorias:

1. Responsável e membros não remunerados da família; 2. Empregados permanentes; 3. Empregados temporários; 4. Parceiros e 5. Outra condição (Agregados, moradores, etc.).

Divulgação — Do plano de divulgação constam as seguintes Tabelas:

Resultados para o conjunto da Unidade da Federação:

1. Pessoal ocupado, distribuído por categoria e sexo, segundo a atividade predominante.

2. Pessoal ocupado, distribuído por categoria e sexo, segundo a condição do produtor, grupo de pessoal ocupado e grupos de área.

3. Grupo de pessoal ocupado, segundo a condição de produtor, a atividade predominante, grupo de área de lavouras e grupos de área total.

4. Serviços de empreitada, no ano de 1970, segundo a atividade predominante, grupos de área de lavouras e grupo de área total.

5. Empregados temporários no mês de maior emprego de pessoal da categoria, no ano de 1970, segundo a condição do produtor, a atividade predominante, e período de ocupação e grupos de área.

Resultados por Microrregiões:

6. Pessoal ocupado, distribuído por categoria e sexo, segundo as Microrregiões.

7. Empregados temporários no mês de maior emprego de pessoal da categoria, segundo as Microrregiões.

Resultados por Microrregiões e os Municípios:

8. Pessoal ocupado, distribuído por categoria, segundo as Microrregiões e os Municípios.

9. Grupos de pessoal ocupado, segundo as Microrregiões e os Municípios.

10. Serviços de empreitadas, no ano de 1970, segundo as Microrregiões e os Municípios.

— Mão-de-obra ocupada em outros setores da economia.

A investigação censitária abrange o pessoal ocupado nos estabelecimentos industriais, comerciais, de serviços, mercado de crédito, instituições financeiras, capitalização, seguros e produção e distribuição de energia elétrica.

Definição — A investigação de pessoal ocupado compreende as pessoas com atividade no estabelecimento na data de referência do Censo (31-12-72), em regime de tempo integral ou parcial, inclusive proprietários e sócios, as pessoas em férias ou afastadas por período não superior a 30 dias e os membros não remunerados da família dos proprietários e sócios, com atividade no estabelecimento superior a 2/3 do tempo normal.

No Censo Industrial recomendação expressa é feita para não incluir, como pessoal ocupado do estabelecimento, os trabalhadores em domicílio, isto é, os que executam em sua residência, mediante remuneração por tarefa, trabalhos parciais ou de acabamento com materiais fornecidos pelos estabelecimentos.

Classificação — O pessoal ocupado é classificado por sexo, sendo que para o pessoal ligado à atividade do estabelecimento a classificação é específica, conforme a seguinte discriminação:

Para os estabelecimentos, industrial, comercial e dos serviços:

1. Proprietários ou sócios com atividade no estabelecimento; 2. Membros não remunerados da família do proprietário ou sócios e 3. Pessoal administrativo.

Para os estabelecimentos industriais:

4. Técnicos; e 5. Mestres, contra-mestres e operários.

Para os estabelecimentos comerciais:

4. Pessoal técnico ou especializado e 5. Vendedores (caixas, pracistas e viajantes).

Para os estabelecimentos dos serviços:

4. Técnicos especializados; 5. Recepcionistas, porteiros, copeiras, arrumadeiras, etc.; 6. Mecânicos, pintores, operários, etc.; 7. Barbeiros, manicuras, costureiras, alfaiates, etc. e 8. Agentes, corretores, atores, bilheteiros, bailarinas, etc.

Para as empresas de mercado de crédito, instituições financeiras, capitalização e seguros:

1. Diretores e gerentes; 2. Técnicos de nível superior (ligados à atividade); 3. Escriturários, correntistas, pagadores, programadores e operadores de sistema, etc; 4. Corretores e agentes; 5. Profissionais de nível superior e 6. Demais empregados.

Para as empresas de produção e distribuição de energia elétrica:

1. Proprietários ou sócios; 2. Diretores e gerentes; 3. Técnicos de nível superior ligados à atividade; 4. Operários ligados à produção; 5. Operários ligados à distribuição; 6. Profissionais de nível superior não ligados à atividade e 7. Pessoal administrativo e demais empregados.

Divulgação — Do plano de divulgação constam Tabelas para o Pessoal ocupado por sexo e categoria e para grupos de empregados, segundo a classe e gênero da atividade.

3.1.4 — Discriminação das ocupações econômicas (estrutura ocupacional)

As ocupações são apresentadas em 261 títulos, dispostos em grupos e sub-grupos genéricos que correspondem, de um modo geral, à classificação organizada pela Repartição Internacional do Trabalho. Os Títulos reúnem ocupações ou designações constantes dos formulários, num total de cerca de 2.700, relacionados no "Código Suplementar do Censo Demográfico", para uso da codificação.

Constam da divulgação, apenas, as ocupações declaradas por mais de cinqüenta informantes, ficando as demais incluídas no Total do subgrupo, conforme o caso.

A estrutura adotada é a seguinte:

Ocupações administrativas

Ocupações técnicas, científicas, artísticas e afins

Ocupações de produção extrativa mineral

Ocupações das indústrias de transformação e de construção civil

Ocupações de comércio e atividades auxiliares

Ocupações dos transportes e das comunicações

Ocupações da prestação de serviços

Ocupações de Defesa Nacional e Segurança Pública

Outras ocupações, ocupações mal definidas ou não declaradas.

2.2.2. IBE — GRUPO EXECUTIVO DE PESQUISAS DOMICILIARES (GEPD)
— (VIDE 2.1.1)

2.2.3. IBE — DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICAS INDUSTRIAIS COMERCIAIS E DE SERVIÇOS (DEICOM)

O Departamento de Estatísticas Industriais, Comerciais e de Serviços — DEICOM, do IBE, a partir de 1969, vem realizando pesquisas sobre as indústrias de transformação segundo um esquema de amostragem baseado nos estabelecimentos constantes do cadastro da "Produção Industrial — 1966", que representam cerca de 90% da produção de cada gênero de indústria na respectiva Unidade da Federação.

Uma das pesquisas, de periodicidade mensal (PESQUISA MENSAL), abrange o conjunto do País e os Estados de São Paulo (com discriminação para Região Grande São Paulo), Guanabara, Rio Grande do Sul, Minas Gerais e Pernambuco, enquanto outra (PESQUISA INDUSTRIAL), de periodicidade anual, inclue todas as Unidades da Federação.

Em ambas pesquisas são investigados aspectos relacionados com o *PESSOAL OCUPADO,* incluindo todas as pessoas que exerciam atividades nos estabelecimentos pesquisados. Na *Pesquisa Mensal,* as indagações são relativas à distribuição do pessoal ocupado (Pessoal ligado à administração: proprietários, sócios e diretores e empregados; pessoal ligado à produção: técnicos e mestres, operários e aprendizes), segundo seus vencimentos e salários. Na *Pesquisa Industrial,* o inquérito investiga sobre o pessoal ocupado em 31-XII (Proprietários ou sócios com atividade no estabelecimento; pessoal ligado à administra-

ção; pessoal ligado à produção e membros não-remunerados da família) e sobre a flutuação do emprego no ano de referência (dados do último dia de cada do ano de referência).

Esses dados relativos à mão-de-obra do setor da indústria de transformação constam regularmente das apurações gerais executadas pelo DEICOM e divulgadas nas publicações especiais difundidas por esse órgão e volumes do "Anuário Estatístico do Brasil".

2.3. Saúde

2.3.1 DIVISÃO NACIONAL DE EPIDEMIOLOGIA E ESTATÍSTICA DE SAÚDE (DNEES)

A Divisão Nacional de Epidemiologia e Estatística de Saúde, criada pelo Decreto n.º 66.623, de 22 de maio de 1970, assume na área do Ministério da Saúde a responsabilidade de levantar estatísticas relacionadas com as atividades dessa Secretaria de Estado. Algumas também de interesse demográfico, como as de mortalidade por causa, outras ligadas ao bem estar da população, como sejam as dos serviços de utilidade pública: abastecimento dágua, esgotos e coleta de lixo.

A maior parte, entretanto, das estatísticas de saúde elaboradas pelo DNEES é obtida através dos levantamentos tradicionalmente incluídos nas "Campanhas Estatísticas" do IBGE pelo órgão atual e pelos que o antecederam nas funções de órgão central estatístico. No momento, esses levantamentos investigam: o movimento dos estabelecimentos hospitalares e para-hospitalares, através do questionário modelo Q-6.01/1 — ASSISTÊNCIA HOSPITALAR e PARA-HOSPITALAR e dos estabelecimentos oficiais de saúde pública com o questionário modelo Q-6.01/2 — SERVIÇOS OFICIAIS DE SAÚDE PÚBLICA. Esses levantamentos abrangem todas as unidades cadastradas em todo o País e são de periodicidade anual.

O inquérito sobre a *Assistência Hospitalar e Para-Hospitalar* procura obter informações sobre: caracterização dos estabelecimentos (entidade mantenedora, finalidade, especialidade, instalações, serviços e equipamentos); número de leitos existentes; corpo clínico e auxiliares; receita e despesa; movimento anual.

Quanto à investigação sobre os *Serviços Oficiais de Saúde Pública* colhe dados sobre: caracterização geral dos estabelecimentos (entidades mantenedora, especialidade, instalações e equipamentos); pessoal empregado; atividades durante o ano (atendimento por especialidade e exames realizados).

A coleta dos dados é executada pela Rede-de-Coleta do IBGE, durante o período regular estabelecido para realização dessa fase do trabalho estatístico pela CONPLANE.

Os trabalhos de apuração são de responsabilidade do órgão, que se encarrega também da divulgação dos resultados em publicações especiais.

No entanto, a divulgação prioritária vem sendo feita nos volumes do "Anuário Estatístico do Brasil".

Cuida, ainda, o DNEES da coordenação de outras estatísticas de saúde, provenientes dos registros realizados por serviços oficiais especializados sobre algumas doenças transmissíveis, tuberculose, doenças venéreas e lepra. Essas estatísticas, bem como outras obtidas através de registros em repartições que atuam no campo da saúde, serão objeto de outra comissão especial.

São ainda atribuições do órgão central de estatística da saúde o preparo de cadastros de médicos, dentistas, farmacêuticos, enfermeiras, nutricionistas e fisioterapeutas, além de pessoal auxiliar de saúde, informações essas de interesse militar.

Essas informações não vem sendo divulgadas com regularidade.

3. APRECIAÇÃO SOBRE AS ESTATÍSTICAS SOCIAIS DISPONÍVEIS EM FACE DO PNEB

3.1. Habitação

Os resultados do Censo Demográfico de 1970 realizado pelo Departamento de Censos do IBE, da Fundação IBGE, satisfazem o PNEB, na parte que enumera as informações estatísticas relativas à *Habitação*.

O Plano prevê o levantamento decenal de dados sobre as unidades prediais, segundo a função ocupacional, estendido aos Municípios, Capitais e Cidades selecionadas, o que é satisfeito pelo conjunto de tabulações censitárias.

O documento apresentado sumariza essas tabulações, que são, no entanto, extremamente numerosas, ultrapassando as exigências do PNEB.

Quanto aos domicílios particulares e suas características, o censo explora esse aspecto, mas, também, em periodicidade decenal.

Outro órgão do Instituto Brasileiro de Estatística, da Fundação IBGE, o Grupo Executivo de Pesquisas Domiciliares (GEPD) executa levantamento, com periodicidade trimestral, com a finalidade de proporcionar, nos períodos intercensitários, estimativas, inclusive sobre as características dos domicílios particulares. Oferece vantagens determinadas pela periodicidade trimestral, que permite a observação sazonal das variáveis inerentes ao projeto, possibilitando posteriormente um estudo do comportamento e de suas características peculiares segundo evolução temporal. Observe-se, porém, que a *Pesquisa* abrange sete re-

giões sócio-econômicas convencionadas para sua implantação, não se estendendo às áreas das grandes Regiões Norte e Centro-Oeste.

Os resultados da PNAD, na parte relativa aos *Domicílios* atende, somente, em parte, as exigências do PNEB.

Há, portanto, aperfeiçoamentos a realizar no planejamento da PNAD com vistas não somente ao atendimento do PNEB, mas, também, de alguns usuários, como o Banco Nacional de Habitação, que baseado no êxito da Pesquisa sugere que se implante a metodologia estatística a nível de cidades, pois, fornecerão as características essenciais micro-econômicas requeridas ao planejamento urbano. Exemplifica observando que o Banco Nacional de Habitação vem desenvolvendo pesquisas conjunturais de mercado habitacional em 10 cidades e o GEPD colaborando com essa iniciativa poderia ajudar com seus resultados ao conhecimento das estruturas sociais.

3.2. Trabalho

O elenco de estatísticas relativas ao trabalho inclue dados provenientes de registros administrativos, como os proporcionados pela chamada "Lei dos 2/3" e pelo controle e apuração do cadastro permanente das admissões e dispensas de empregados de empresas abrangidas pelo regime CLT, bem como os obtidos em levantamentos estatísticos específicos. A presente apreciação será dedicada apenas aos resultados estatísticos desses últimos levantamentos, entre os quais sobressai os Censos Demográfico, Agropecuário e demais Censos Econômicos.

Os resultados dos citados Censos oferecerão as informações previstas no PNEB, a nível de municípios e com a periodicidade decenal ou sejam as sob os seguintes títulos: População economicamente ativa por setores de atividades; Mão-de-obra ocupada em atividades agropecuárias; Mão-de-obra ocupada em outros setores da economia e Discriminação das ocupações econômicas (estrutura ocupacional). Uma verificação da descrição apresentada no documento para o IBE/DECEN mostrará o grau de extensão das classificações adotadas pela investigação censitária, bem como o plano de divulgação dos dados obtidos, que parece atender de maneira suficiente às exigências do PNEB.

De maneira parcial é, entretanto, o atendimento que os resultados da Pesquisa Nacional Por Amostra de Domicílios — PNAD, executada pelo Grupo Executivo de Pesquisas Domiciliares (GEPD), oferece a alguns itens do PNEB. Esses resultados da PNAD referentes aos aspectos pesquisados da Força-do-Trabalho e do Salário ensejam informações sobre: Emprego (nível e movimento do desemprego) e Salários pagos relativos a outras atividades não agropecuárias (itens 3.2.5.2 e 3.2.8 do PNEB).

Com relação as estatísticas sobre *Pessoal Ocupado na Indústria de Transformação,* elaboradas pelo Departamento de Estatísticas Industriais, Comerciais e de Serviços (DEICOM), do IBE, segundo um es-

quema de amostragem, o que se verifica é que atendem, com limitações, aos itens do PNEB, a seguir indicados: Emprego (nível e movimento de desemprego) na Indústria de Transformação, Salários pagos na Indústria de Transformação e Distribuição do pessoal Ocupado na Indústria de Transformação, segundo classes de salários).

A conclusão de uma análise, mesmo rápida e superficial, é de que, apenas, os resultados censitários oferecem satisfatórias informações sobre setor de tão grande importância quanto o do trabalho.

O pronunciamento dos usuários em crítica de profundidade será a grande contribuição no sentido de que se possa orientar o planejamento de novas pesquisas visando a obtenção de dados previstos no PNEB, especialmente, na parte de Emprego e Desemprego.

3.3. Saúde

As estatísticas de saúde provenientes de levantamentos sistemáticos continuam a cobrir apenas um dos aspectos previstos na enumeração prioritária estabelecida no PNEB. Deste modo, somente para o item 3.3.1 — Características gerais dos estabelecimentos de assistência médico-hospitalar e 3.3.2 — Corpo Médico e Auxiliar, inquérito anual regular, levado a efeito pela Divisão Nacional de Epidemiologia e Estatística de Saúde sobre *Assistência Hospitalar e Para-Hospitalar* oferece informações, provavelmente, ainda não completamente satisfatórias. Os outros itens não estão cobertos, nem por levantamentos sistemáticos, nem pelo aproveitamento de registro administrativo. No entanto, esses itens são relativos a dois importantes aspectos do setor saúde: o movimento de pacientes e o custo dos serviços nos estabelecimentos médico-hospitalares.

Impõe-se, em face disso, um exame mais apurado do problema visando a reformulação dos meios e processos a serem aplicados na obtenção de informações que permitam o desenvolvimento do planejamento do setor Saúde.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O quadro apresentado sobre os levantamentos das estatísticas relativas à Habitação, ao Trabalho e à Saúde, embora sumário, oferece elementos para um juízo da situação dessas estatísticas no País. Sem dúvida, aceita-se a conclusão de que as informações obtidas, através do Recenseamento de 1970, são satisfatórias e atendem às prioridades estabelecidas pelo PNEB. Para períodos decenais, parece ser tranqüila a certeza da disponibilidade dessas informações, provavelmente, com os aperfeiçoamentos que se julgue necessários.

Há, entretanto, problemas a solucionar com relação às estatísticas não-provenientes do Departamento de Censos.

A Pesquisa Nacional Por Amostra de Domicílios, ainda em fase inicial, deverá ser rigorosamente analisada, especialmente, com referência aos resultados que, gradativamente, fôr oferecendo à divulgação. Ainda não se conhece suficientemente bibliografia relacionada com a utilização das informações obtidas pela PNAD. O conhecimento circunstanciado dessas elaborações será de grande valia para os aperfeiçoamentos que deve sofrer, alguns já introduzidos na fase da atual pesquisa, ora em realização.

É de se prever também, que algumas decisões sobre as estatísticas de trabalho devam ser adotadas considerando também estatísticas do mesmo setor obtidas de registros compulsórios ("Lei de 2/3" e "Cadastro de Admissões e Dispensas").

Quanto às estatísticas de Saúde, a impressão dominante é de que se exige uma reformulação total, abrangendo a reestruturação dos recursos empregados para levantá-las e mais a renovação dos procedimentos técnicos. Medidas urgentes que se impõem em face da importância do setor Saúde no contexto do desenvolvimento nacional.

Aos analistas e estudiosos dos problemas sócio-econômicos cabe, pois, as sugestões e as recomendações a serem submetidas ao plenário da II CONFEST.

ESTATÍSTICAS EDUCACIONAIS

Quadro atual e perspectivas futuras

Subcomissão da Comissão A da CONPLANE

Raul Romero de Oliveira
(Coordenador)
Heitor Câmara Veloso
Carlos Marcos Barbosa
Gilberto da Silva Barros
Ernani Timotheo de Barros

SUMÁRIO:

1. *Generalidades*
2. *Atuação do SEEC*
3. *Programas atuais do SEEC*
4. *Centro Brasileiro de Estatísticas Educacionais*
5. *Considerações Finais*

1. GENERALIDADES

Entre os feitos relevantes da história da Estatística Brasileira se incluem os esforços no sentido de se organizar de maneira permanente a Estatística da Educação no País. O sistema previsto para uniformiza-

ção dos levantamentos das estatísticas educacionais, por exemplo, serviu de modelo para o sistema estatístico nacional estruturado em 1936 sob a coordenação do IBGE, hoje, transformado em FIBGE.

No caso especial da Educação e Cultura, onde se faz sentir forte ação programática do Governo, tornou-se premente um sólido apoio às estatísticas. Embora sejam sentidos enormes entraves e dificuldades ao aperfeiçoamento do sistema estatístico educacional, muitas iniciativas e muitos estudos vêm sendo realizados para melhorar a situação vigente.

A partir de 1970, em face da Reforma de Ensino que encetou, o MEC intensificou providências correlacionadas com a implantação sistemática do planejamento educacional. No "Plano Setorial de Educação e Cultura" — 1972/74 dispensou particular atenção ao problema da "informação educacional", constando do referido Plano dois projetos especiais de estatística educacionais: o Projeto 21 — "Aperfeiçoamento do sistema de informação sobre educação" e o Projeto 29 — "Carta Escolar".

Tendo em vista o planejamento nacional da Educação, a partir de 1971, o SEEC procurou dinamizar ainda mais suas atividades através de esforços de planejamento de maneira associada com o Centro Brasileiro de Estudos Educacionais (CBESE), do IBE. Tais iniciativas, obedecendo ao espírito do Projeto 21, resultaram numa relativa ampliação das informações educacionais e numa tentativa de detalhamento do PNEB no que tange às estatísticas do ensino.

O Projeto 21 DO PSEC — Como se mencionou, o Projeto 21 trata do "aperfeiçoamento do sistema de informação sobre educação" e estabelece os seguintes objetivos face ao sistema de informações:

— dinamizar os levantamentos das estatísticas acelerando processos de apuração para que o apoio ao planejamento ocorra em tempo mais útil e hábil;

— reforçar programação em curso tendo em vista ampliar o quadro das informações para que se procedam estudos educacionais indispensáveis ao planejamento da educação;

— proceder estudos para implantar o Sistema Estatístico da Educação como parte do sistema geral de informação sobre recursos humanos;

— envolver órgãos estaduais de educação na coleta e crítica dos dados coletados bem como no próprio processamento desses dados tendo em vista obter maior fidedignidade das informações e acelerar o processo de produção dos mesmos;

— estabelecer um plano básico de estudos e pesquisas sobre o desempenho do sistema educacional e fatores endógenos e exógenos que o afetam;

— dar continuidade ao sistema aperfeiçoado, revisando critérios em uso desde que a prática o recomende para que se tenha o exato retrato do quadro brasileiro no campo educacional e cultural.

Outras medidas visando a implantação desse projeto tem condicionado o SEEC nas respostas que as condições de trabalho permitem que sejam dadas.

Embora não haja tido o tempo suficiente, para se alcançar todos os objetivos assinalados, muitos já estão sendo contemplados nos trabalhos atuais das estatísticas educacionais.

Mantendo ligações com os órgãos usuários e coordenadores de atividades estatísticas e, muito especialmente com a Secretaria Geral do MEC e a FIBGE, o SEEC tem realizado e promovido iniciativas visando a alcançar esses objetivos assinalados.

Propôs e aguarda a assinatura final de convênio com a Fundação IBGE, a Fundação IPEA e as Unidades da Federação, através do qual se espera garantir a rapidez e a qualidade da coleta, cujas dificuldades crescem com a ampliação dos dados investigados, bem como acelerar o processo de apuração pela descentralização em órgãos estaduais capazes tecnicamente de assumir tal responsabilidade.

Para planejamento e supervisão de tarefas desse porte, organizou o SEEC uma Assessoria Técnica, que mesmo com equipe reduzida já é atuante e presta significativos serviços, concorrendo para um relativo aperfeiçoamento técnico e, também, de ordem estrutural.

Em relação a dados educacionais previstos e já coletados para 1972, haverá um sensível aumento das informações em relação aos anos anteriores. É possível que o volume não seja ainda satisfatório mas, como preconiza a técnica, o aumento de informações deve ser um processo continuado em função paralela à de re-estruturação do sistema e das condições de infra-estrutura de trabalho, o que não acontecerá subitamente.

Tentando reestruturar o sistema estatístico educacional, o SEEC vem realizando estudos com a participação, tanto quanto possível, dos órgãos que dele devem participar. Tais estudos, difíceis de realizar em curto espaço de tempo, já receberam inclusive a contribuição de técnicos estrangeiros de organismos internacionais, principalmente, da UNESCO, em especial, da especialista Melle. Isabelle Deblé, que atuou junto ao SEEC em 1969. O SEEC vem, porém, estudando com mais vagar a situação por entender que a realidade brasileira (polivalente, difusa e original) requer o atendimento de peculiaridades nacionais, sob pena dos resultados obtidos se apresentarem de baixo rendimento. A insuficiência numérica de técnicos brasileiros especializados em informação é, por outro lado, um entrave, embora já se notem sinais de que a valorização do profissional, no Serviço Público, caminha para o reco-

nhecimento tão desejado, o que estimulará a formação desses especialistas, tão necessários, inclusive em áreas regionais.

No desenvolvimento desses estudos, algumas interrogações assaltam o SEEC: será acertado envolver outros órgãos (Secretarias de Educação nos Estado) na coleta? Deve-se conferir a outros órgãos a coleta das informações? Como desenvolver-se-á o aperfeiçoamento da Rede-de-Coleta da FIBGE? Será viável melhorar o relacionamento da Rede-de-Coleta da FIBGE com os organismos estaduais e municipais da Educação? Um ponto de vista técnico e administrativo prevalece, desde já, é que estando uma rede montada em todo o País por um organismo credenciado, oficial e nacionalmente reconhecido, com experiência e conhecimento das distintas situações brasileiras — não seria mais técnico, mais econômico e mais seguro promover o aperfeiçoamento da rede já existente, através de um relacionamento mais próximo com os organismos estaduais e municipais, do que projetar atividades paralelas que só gerariam confusões e desencontros? Por questões como esta, o estudo da renovação das estruturas deve ser bastante ponderado, em conjunto, e é isso que pretende o SEEC.

Com relação ao plano básico de estudos e pesquisas sobre o desempenho do sistema educacional, aí parece ao SEEC, a grande inovação presente no espírito do Projeto 21. Mesmo contando, nos trabalhos contínuos que realizava, com as estatísticas derivadas, os números, por si só apresentados não levavam a uma identificação dos fatores endógenos e exógenos assinalados no Projeto. O SEEC despertou para a necessidade de aperfeiçoamento, já pretendendo, a partir de 1972, oferecer as informações tratadas sob o ponto de vista técnico da análise de sistema. Sem dúvida, será colaboração e apoio indispensável ao planejamento tal iniciativa na produção das informações. O órgão já está empreendendo, por exemplo, a análise do ensino superior no País, que pretende oferecer o estudo em publicação especial e pretende desenvolver uma perspectiva da análise do antigo ensino primário e antigo 1.º ciclo do médio tendo em vista a implantação do novo ensino de 1.º grau. Com relação ao 2.º ciclo do Ensino Médio, projeta-se a análise voltada para a perspectiva da implantação do novo ensino de 2.º grau. Dessa forma, estará o SEEC atendendo ao mais novo anseio da política e filosofia educacional brasileira às quais obedece o planejamento nacional da Educação.

O Projeto 29 do PSEC — Como foi dito, o Projeto 29 trata da "Carta Escolar". O Projeto da Carta Escolar representa uma esperança de que os resultados obtidos possam vir a enriquecer o sistema estatístico nacional atendendo ao interesse de ampliar o PNEB com relação aos dados da situação educacional.

A Carta Escolar é concebida como uma representação visual sistemática de distribuição espacial da capacidade do sistema de ensino em termos de fatores da produção. Elaborada de tal forma que permita uma atualização e aprimoramento contínuo.

Os dados da carta devem permitir:

— *Visualização da distribuição espacial*:

  — da população escolarizável

  — da população escolarizada

  — das escolas situadas nos aglomerados espaciais, na caracterização e na capacitação física por redes de ensino.

— *Visualização, decorrente da 1.ª, da capacidade disponível visando*:

  — informação da redução de sub-utilização ou super-utilização das capacidades existentes

  — determinação de intercomplementaridade das capacidades disponíveis

  — planejamento racional da expansão da rede escolar.

— *Utilização de novos métodos visando à elevação qualitativa do ensino*

— *Formulação da política de integração Escola* x *Empresa.*

O projeto será executado em todas as Unidades da Federação pelo Programa Nacional da Carta Escolar — PROCARTA, mecanismo criado na Secretaria-Geral, com a cooperação das Secretarias Estaduais de Educação.

Sem dúvida, os objetivos da Carta Escolar são procedentes e úteis ao desenvolvimento do processo educacional do País. Na medida das solicitações, o SEEC tem colaborado com a Carta Escolar e ofertado pontos de vista que redundam no anseio de que os resultados obtidos sejam absorvidos pelo sistema estatístico nacional.

2. A ATUAÇÃO DO SEEC

De acordo com o Art. 4.º do Decreto n.º 63.010, de 18 de julho de 1968, que aprova o Plano Nacional de Estatísticas Básicas, continua o SERVIÇO DE ESTATÍSTICA DA EDUCAÇÃO E CULTURA (SEEC/MEC), a levantar as estatísticas de ensino, a nível nacional, contando com a cooperação da Fundação IBGE, que executa a coleta de dados através de sua Rede.

Essa atividade básica é realizada em consonância com a nova perspectiva Ministerial, delineada no PLANO SETORIAL DE EDUCAÇÃO E CULTURA, que estabelece o aperfeiçoamento do sistema de informa-

ção através de levantamentos exaustivos de dados úteis ao planejamento e da análise dessas informações de maneira a identificar os óbices do sistema educacional, especialmente, com referência ao ensino superior, de 1.º e de 2.º grau.

Para isso, o SEEC vem renovando todos os seus procedimentos e ampliando, por prioridade, as estatísticas primárias no sentido de um maior volume de informações. Sempre atento, no entanto, a preocupação de atender ao previsto no PNEB:

— CARACTERÍSTICAS GERAIS DOS ESTABELECIMENTOS DE ENSINO E UNIDADES ESCOLARES

a) Anual b) Municípios

— CORPO DOCENTE

a) Anual b) Municípios

— CUSTO DO ENSINO (público e privado)

a) Anual b) Unidades da Federação

Por outro lado, com base na descrição e justificativa do Projeto 21 do MEC, tem, presente oferecer dados que satisfaçam as seguintes características básicas, algumas já previstas no Plano:

— aluno matriculado;
— pessoal docente e administrativo;
— prédios escolares, equipamento e material de ensino;
— finanças.

Todos os dados devem se referir à situação por localização (zona urbana e rural) e apresentar caracterização relativas aos níveis de ensino em todas as suas diversificadas formas de configuração.

Variando nos levantamentos por ensino, em face das citadas formas de configuração dos níveis, as estatísticas devem indicar:

— *Número de Escolas e/ou Estabelecimentos de Ensino*

Segundo nome
Segundo tipo
Segundo dependência administrativa
Segundo localização
Segundo turnos e períodos de funcionamento
Segundo número de salas de aula utilizadas para o ensino

— *Número de Alunos*

Por sexo
Por idade
Por composição em turnos
Por séries
Por ingresso novo no sistema escolar
Repetentes no sistema escolar
Segundo aprovação
Segundo reprovação
Segundo causa de abandono escolar
Segundo a matrícula total
Segundo a matrícula inicial
Segundo a matrícula final

— *Número de Professores*

Segundo docência na escola
Segundo funções técnicas
Segundo função administrativa
Segundo habilitação
Segundo regência de classe

— *Número de Pessoas na Administração*

Em funções administrativas principais
Em funções administrativas auxiliares

— *Números de Prédios Escolares*

Segundo localização
Segundo fins
Segundo estado físico
Segundo características físicas
Segundo entidade proprietária
Segundo estabelecimentos escolares em funcionamento no prédio

— *Custo do Ensino*

Custo público e privado
Despesas e receitas com o ensino superior
Despesas e receitas com o orçamento público em educação nos Estados.

Essas estatísticas indicadas procuram satisfazer todos os itens do PNEB e mais os acréscimos contidos pelos levantamentos do SEEC, além de permitir a elaboração de algumas estatísticas derivadas, há muito reclamadas.

A partir de 1973, com base nos dados levantados dos anos mais recentes, o SEEC pretende preparar diversas estatísticas derivadas, como as indicadas a seguir:

— *Taxas de Evasão*

Mediata

Imediata

— *Taxa de Escolarização*

— *Taxa de Retenção*

— *Taxa de Repetência*

— *Taxa de Reprovações*

— *Índice de Atendimento Escolar por Rede de Ensino*

— *Indicador do Fluxo Etário por Nível de Ensino*

— *Relação Aluno/Sala*

— *Relação Aluno/Professor*

— *Índice de Qualificação do Magistério*

Essa perspectiva se constituirá em uma definida contribuição ao PNEB e ao planejamento da educação.

3. PROGRAMAS ATUAIS DO SEEC

Norteado pelos objetivos do PNEB e do Projeto 21, antes citados, tem o SEEC procurado reexaminar os levantamentos estatísticos que executa regularmente e para isso tem contado com a colaboração do Centro Brasileiro de Estatísticas Educacionais — CBESE, do Instituto Brasileiro de Estatística, cuja atuação é descrita em capítulo especial desse documento.

Integrando a XXXVI Campanha Estatística, promovida pelo IBE, no ano corrente, os levantamentos educacionais utilizaram os seguintes modelos de questionários:

EP-01 — Ensino Primário Comum
EP-02 — Ensino Pré-primário
EP-03 — Ensino Supletivo
EE-01 — Ensino Médio
EE-02 — Ensino Superior

Registre-se que, em decorrência de convênio firmado entre o Instituto Brasileiro de Geografia e o Conselho Nacional de Educação, estabeleceu-se ajuste entre a Fundação IBGE e o SEEC, de que resultou a ampliação do levantamento sobre o Ensino Superior com o lançamento de quatro questionários complementares ao modelo EE-02. Esses questionários obtiveram novas informações sobre: as universidades e os estabelecimentos isolados (mod. C-1). As Unidades Universitárias (mod. C-2); os alunos que iniciaram o curso superior em 1972 (mod. C-3) e os alunos formandos em 1972. Esses dois últimos são formulários individuais. Coube ao SEEC executar a apuração conjunta dos questionários mod. C-1 e C-2 com o mod. EE-02, o que irá assegurar um aumento considerável no elenco de dados sobre o Ensino Superior do País.

Além desses levantamentos, o SEEC, em caráter contínuo, executa investigações na área da Cultura, abrangendo os seguintes setores:

— *Radiodifusão e Radiotelevisão*

a) Anual b) Municípios

— *Imprensa Periódica*

a) Anual b) Municípios

— *Bibliotecas*

a) Trienal b) Municípios

— *Museus*

a) Trienal b) Municípios

— *Associações Culturais*

a) Anual b) Municípios

— *Associações Desportivas*

a) Anual b) Municípios

— *Empresas Editoras de Livros e Folhetos*

a) Anual b) Municípios

— *Cinemas, Cine-teatros e Teatros*

a) Trienal b) Municípios

Todos os inquéritos são de caráter censitário e baseado em cadastros levantados pelos órgãos que realizam a coleta dos questionários, as Delegacias Estaduais de Estatística do IBE, através das Agências de Estatística instaladas nas sedes dos principais municípios brasileiros.

Visando ao próximo programa de levantamento das estatísticas nacionais a ser realizado em 1973, o SEEC submeteu à CONPLANE a seguinte relação de inquéritos:

I — *Estatísticas do Ensino*

A) — Ensino Pré-primário
B) — Ensino Supletivo
C) — Ensino Primário Comum
D) — Ensino Médio — 1.º ciclo
E) — Ensino Médio — 2.º ciclo
F) — Ensino Superior
G) — Prédios Escolares
H) — Professores de Ensino Primário e Médio (1.º e 2.º ciclos)

II — *Estatísticas Culturais*

A) — Radiodifusão e Radiotelevisão
B) — Imprensa Periódica
C) — Empresas Editoras de Livros e Folhetos
D) — Museus
E) — Associações Desportivas

Os resultados dos levantamentos estatísticos do SEEC são divulgados no "Anuário Estatístico do Brasil", editado pela FIBGE, e em publicação do próprio órgão.

4. CENTRO BRASILEIRO DE ESTATÍSTICAS EDUCACIONAIS

Embora não se possa incluir entre os órgãos produtores de estatísticas primárias, a atuação do Centro Brasileiro de Estatísticas Educacionais, integrante do IBE da Fundação IBGE, vem se tornando marcante, especialmente, no campo do planejamento e análise das estatísticas educacionais, seja em trabalhos conjuntos com o SEEC, seja em estudos desenvolvidos pela equipe que formou.

O CBESE iniciou suas atividades estudando minuciosamente as estatísticas sobre o ensino, então disponíveis.

Essa pesquisa levou à conclusão da necessidade de se aperfeiçoar o sistema estatístico vigente, principalmente tendo em vista as modificações que ocorriam na legislação sobre o ensino.

O primeiro passo consistiu no exame das estatísticas referentes ao ensino superior. A legislação vinha paulatinamente sendo alterada, vivendo-se uma fase de transição. A reforma universitária, aos poucos, ia sendo delineada, mas sua obrigatoriedade só mais tarde foi estabelecida.

Para o estabelecimento dos novos planos, iniciou-se por uma consulta prévia aos órgãos usuários dessas estatísticas para manifestação de suas necessidades.

Foram consideradas, também, as solicitações do Instituto Interamericano de Estatística, consubstanciadas no Plano Interamericano de Estatísticas Básicas.

Dentre as entidades consultadas sobre as estatísticas do ensino superior, sobressaem o INEP, a CAPES, o IPEA, etc.

Desse trabalho, resultou um plano de tabulação inteiramente reformulado, mas, ainda, referente a uma fase de transição e, portanto, sujeito a modificações. Esse plano previa duas séries de tabulações: uma dedicada àqueles estabelecimentos que ainda não tinham tido condições de se adaptar às novas normas e outra dedicada aos que já estavam aplicando a nova legislação.

Esta, posteriormente, foi consolidada, com modificações. Torna-se, portanto, necessário um reexame do assunto para adequação dos planos de tabulação e dos respectivos documentos de coleta à nova política educacional.

Em estreita colaboração com o SEEC, com o qual tem trabalhado coordenadamente, dedica-se o CBESE, no momento, ao exame minucioso dos instrumentos de coleta para as próximas apurações. Reflete o SEEC as necessidades da Divisão de Planejamento da Secretaria-Geral do MEC e o CBESE os interesses da Fundação IBGE visando ao cumprimento do Plano Nacional de Estatísticas Básicas, pelo qual é responsável.

Quanto ao ensino primário comum e ao ensino médio, também, se concluiu pela necessidade de nova formulação de suas estatísticas. Também com relação ao ensino desses níveis, a fase era de transição. Apesar disso, após criterioso estudo, análogo ao que fora realizado com relação ao ensino superior, elaborou-se um plano de tabulações para cada nível.

Tendo sido sancionada a lei que cria o ensino fundamental de 1.º e 2.º graus, torna-se necessário o reexame da matéria, diante das profundas alterações por que vai passar esse nível de ensino.

Em vista de não se contar, ainda, com uma sistematização global da terminologia adotada nas estatísticas educacionais brasileiras, o CBESE se tem dedicado ao preparo de um glossário técnico de termos usados nessas estatísticas. Trata-se de um trabalho adaptado ao caso brasileiro, mas no qual não se deixam de lado sugestões de entidades internacionais, como, por exemplo, a UNESCO, através de suas inúmeras publicações.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

As observações formuladas até este ponto demonstram que as estatísticas nacionais perseguem os objetivos definidos no Projeto 21, do Plano Setorial de Educação e Cultura, bem como procuram atender ao Plano Nacional de Estatísticas.

As atuais investigações relativas ao sistema escolar brasileiro, vem apresentando resultados mais amplos e, apenas, com relação ao financiamento do ensino tem sido encontradas dificuldades maiores no aperfeiçoamento dos processos de obtenção de dados, principalmente, pelas dificuldades relativas às estatísticas de finanças públicas e de aplicação de novas técnicas ao setor do ensino particular.

Quanto ao planejamento dos inquéritos estatísticos educacionais, a atividade conjunta do SEEC e CBESE vem se mostrando promissora e permitiu que os programas para 1972 e 1973 pudessem ser bastante ampliados e avançassem mais no sentido de atendimento da demanda de informações expressa pelos usuários, especialmente, da área do planejamento educacional.

Há, entretanto, que registrar o fato de que o SEEC, órgão de responsabilidade definida sobre as estatísticas educacionais, para atingir as metas previstas pelos objetivos delineados deverá dispor do devido suporte para produção dessas estatísticas, o qual depende dos seguintes fatores básicos:

a) *Nova estrutura*

Reformulação estrutural do órgão visando a dar condições necessárias ao trabalho: maior volume de recursos humanos, materiais e financeiros, que lhe permitam a capacitação técnica-operacional adequada. A nova estrutura deverá ser integrada e participar do SISTEMA DE INFORMAÇÕES do MEC. Sendo-lhe ainda assegurado, para uma implantação segura e funcionamento produtivo, o treinamento do pessoal e a disponibilidade de assistência técnica.

Já existem no órgão estudos sobre a nova estrutura desejada, que prosseguirão tão logo sejam estabelecidas, em definitivo, as diretrizes gerais do MEC sobre o *Sistema de Informações Educacionais e Culturais.*

b) *Cooperação mútua*

A cooperação mútua para obtenção das informações educacionais é igual fator básico, que justificam inclusive a proposta de convênio a ser celebrado entre: Ministério da Educação e Cultura, Ministério do Planejamento e Coordenação Geral e Fundação IBGE.

Esse convênio já mereceu a aprovação das Unidades da Federação. É preciso executá-lo, pois preconiza as seguintes medidas essenciais para consolidação das estatísticas educacionais:

— Estudo e planejamento dos levantamentos e pesquisas necessárias para obtenção das estatísticas educacionais de maneira conjunta entre SEEC, FIBGE, CNRH e IPEA, ouvindo-se os interesses dos Estados e principais usuários das informações.

— Colaboração e integração entre SEEC, FIBGE e Secretarias de Educação dos Estados visando a execução dos programas anuais de levantamentos. Destacam-se, dentro dessa colaboração, os encargos devidos aos Governos Estaduais e do Distrito Federal que, cumpridos, facilitarão a tarefa de produção das estatísticas educacionais.

Tal fator deve merecer, sobremaneira, o apoio da II CONFEST, uma vez que permitirá mais seguro e mais rápido desenvolvimento das estatísticas educacionais.

Cumpre finalizar propondo a II CONFEST manifestação de apoio favorável às medidas preconizadas no citado Convênio, em favor do desenvolvimento e racionalização das estatísticas educacionais.

O CENSO E OS INDICADORES SOCIAIS

José Arthur Rios

Todo Censo corresponde a um determinado tipo de sociedade. Em certo sentido poderia dizer-se que cada sociedade tem o Censo que merece. Basta percorrer o Censo norte-americano para sentir nitidamente como respondeu de forma diversa às transformações que a sociedade norte-americana atravessou e a sua problemática. Mais importante do que a extensão tentacular da indagação censitária é a preocupação crescente hoje em fazer com que os dados censitários representem uma qualidade de mudança social. Como disse muito bem Likert, estamos hoje mais preocupados com a *natureza* do sistema do que com o seu *estado*. Por informação quanto ao *estado* do sistema o sociólogo americano quer significar as medidas estatísticas que revelam a situação atual da Nação ou da economia como dados de população, índices, preços, e medidas outras do nível da atividade econômica. Por informação sobre a *natureza* do sistema, está querendo indicar o modelo conceitual básico ou o entendimento fundamental que serve para dizer-nos quais as dimensões do País, da sociedade ou da economia interpretada na formulação de decisões. Ao falar em natureza do sistema incluia, portanto, não só suas valorações como as medidas quantitativas e extensivas (1).

A opção que hoje se coloca para um Censo, no seu esforço de progressiva racionalização da informação, consiste exatamente em definir os parâmetros gerais da sociedade em processo de mudança, o que Mannheim chamou de *principia media,* a fim de identificar as medidas empíricas e pragmáticas dos processos sociais e suas mudanças.

R. bras. Estat., Rio de Janeiro, 33(132) : 759-765, out./dez. 1972

O problema não se limita ao Censo e aos seus administradores, mas envolve toda a sociedade e abrange dois aspectos essenciais: (a) o intracensitário que diz respeito ao aperfeiçoamento das estatísticas, às suas maiores ou menores sofisticações, a ampliação do Censo ou sua diversificação em pesquisas por amostragem, e (b) extracensitário que envolve as demandas da administração ao Censo e às expectativas do público em relação a seus dados, expectativas essas que por sua vez podem distribuir-se num grau menor ou maior de racionalidade.

Abandonemos o segundo grupo de considerações, embora mereça estudo detido e constitua assunto de grande relevância, e fiquemos nas considerações intracensitárias. Resumem-se estas numa diversificação e extensão dos dados estatísticos. Não podemos deixar de adotar aqui o programa traçado a esse respeito por Biderman que via essa ampliação e melhoria dos dados através da identificação dos seguintes meios:

1) Barreiras instantâneas, políticas e outras, responsáveis por lacunas nos dados sobre fenômenos sociais cruciais.
2) Barreiras à compreensão e uso dos dados no planejamento e na administração.
3) Fontes de distorção e preconceitos no registro e declaração de informações sociais.
4) Relações pertinentes, e até o momento desprezadas, entre os dados e os valores sociais (2).

Esse programa lança-nos diretamente no problema dos indicadores sociais ou, se se quiser, indicadores de mudança social. Não se pense que esses indicadores são algo diverso e oposto aos indicadores econômicos. Em ambos encontramos, sob o dado e a informação, um tipo de comportamento que, no caso dos indicadores econômicos, traduz-se mais facilmente em objetos que se prestam à quantificação.

O comportamento ou atividade econômica se exprime parcialmente em bens produzidos ou em volume de preços. Isso não quer dizer que os dados econômicos pareçam mais objetiváveis que os sociais ou estes menos objetiváveis por menos sujeitos à quantificação. A história de certos indicadores econômicos mostra que sua objetivação, como no caso dos índices de emprego, representa o resultado de um longo esforço. Há uma nítida evolução dos indicadores no sentido de uma maior racionalização e esse processo está longe de ser contínuo e progressivo.

O mesmo ocorre com os indicadores sociais. Tomemos por exemplo o caso da educação. Nos modernos recenseamentos, no nosso próprio Censo, os índices escolhidos para medir a educação dizem respeito ao sistema formal de ensino, aos seus diversos níveis, às suas unidades, à divisão em corpo docente e discente, ao número de prédios em que funcionam, etc. No entanto, por toda parte, tanto nos países adiantados, como nos em desenvolvimento, o grande esforço educacional se efetua no domínio do treinamento em serviço, nos cursos ministrados em orga-

nizações particulares, e finalmente nas relações extra-institucionais de mestres e alunos onde, muitas vezes, essa relação não é sequer definida como pedagógica. Em suma, é todo o sistema informal da educação que tende a adquirir importância cada vez maior onde quer que a educação, muito mais que um processo de informação, tende a assumir a forma de uma aculturação de populações marginalizadas. No entanto, nada disso aparece nas publicações censitárias.

Não é preciso descer aqui a detalhes de problemática social onde a simples indagação sociológica, para não falar na investigação estatística, é extremamente difícil e delicada. Por toda parte trava-se hoje acesa batalha em torno das estatísticas de criminalidade. É voz corrente que o crime vem aumentando. Não é essa, no entanto, a opinião geral dos criminalistas. Crêem muitos deles que o aumento aparente resulta de um aumento estatístico, isto é, de um erro de percepção na coleta e classificação das informações. O mesmo acontece com o problema das doenças mentais que se costuma associar ao desenvolvimento urbano, mas cujo aumento parece ter resultado apenas de uma mudança de atitudes em relação ao doente, correlata a certa fase de mudança social.

Não se pense que implícito no que foi dito acima está contido um preconceito contra a quantificação. A quantificação é um elemento relativamente recente na definição da estatística e a respeito alguém escreveu: "Entre os elementos compreendidos na estatística alguns podem ser expressos em números e outros de forma alguma podem ser reduzidos à expressão numérica". Quem escreveu isso chamava-se Quetelet. A quantificação é portanto uma etapa no planejamento racional das sociedades e não é possível imaginar, a não ser na ficção científica, sua extensão em todos os aspectos do comportamento humano. Há uma grande diferença entre universo sociológico e universo estatístico. Muitas vezes a pergunta ao orientar-se para a quantificação leva em si mesmo sua própria e dialética negação.

Tocamos aqui em outro problema. Há mais de um século, Spencer pedia que as estatísticas fornecessem, nem mais nem menos, que o consenso social. Mais modestos, pedimos apenas que a escolha desses indicadores corresponda a um modelo explícito da sociedade e reflita, num dado momento, os objetivos nacionais, tais como são definidos pela sua elite responsável. Por mais críticos que sejamos desses objetivos, explicitamente formulados pela liderança social, concordamos com Biderman quando diz: "Para ser útil, cada indicador deverá relacionar-se a um conceito sobre a sociedade que, por sua vez, é parte de uma teoria explícita ou implícita dessa mesma sociedade. A teoria abstrai dessa complexidade certas relações que considera importantes — tanto no sentido de significância de valor como na relação entre coisas". Não é muito diverso o que faz o economista ao selecionar determinados indicadores para montar o sistema de contas nacionais.

À luz de tudo isso torna-se claro que o cientista social está essencialmente preocupado com certos aspectos qualitativos da sociedade e

com os dados quantitativos apenas na medida em que lhe permitem elaborar ou identificar essas qualificações (3).

Talvez a maneira mais simples de prefigurar as expectativas desse cientista social seria partir da própria noção de desenvolvimento, tomada em seu mais amplo sentido. Formou-se hoje, no Brasil, uma consciência generalizada em torno do desenvolvimento embora sem unanimidade de consenso quanto a suas metas e opções. A ninguém ocorre contestar que a sociedade brasileira atravessa um processo acelerado de mudança. Num esquema muito geral, podemos afirmar que estamos partindo de uma sociedade "tradicional" para outra "moderna" ou "modernizante" — expressões que só adquirem sentido quando definidas por certos indicadores. Em traços gerais e superficiais, caracterizaríamos a primeira, nos seus casos limites, como de população predominantemente rural, dominantemente agrícola ou semi-industrializada, de baixa tecnologia, dirigida por uma minoria que teve acesso aos benefícios da educação e dotada de uma filosofia elitista de poder, desfrutando de certa estabilidade institucional, na qual a economia gira, sobretudo, em torno dos interesses do produtor. Estamos mudando para uma sociedade predominantemente urbana, sem querer discutir as características dessa urbanização, industrial ou pós-industrial, importadora de tecnologia avançada, onde atuam processos de massificação, dotada de alto nível de organização e na qual os interesses do consumidor primam ou contestam os do produtor.

Aceitas essas premissas, esses dois sistemas em presença passam a assumir grande importância para nós e assim tudo que indicar seus movimentos ou processos internos, as formas de comunicação e transição entre suas respectivas economias.

Tornam-se, portanto, de grande relevância para o dinamismo do novo sistema emergente todos os aspectos da mobilidade social. O primeiro deles diz respeito aos movimentos horizontais inter e intra-regionais, que são as migrações internas. Nosso conhecimento delas é ainda extremamente escasso, incompleto e imperfeito. Conhecemos as migrações interregionais e estaduais em seus grandes números, muito menos as migrações do campo para a cidade e quase nada das que ocorrem entre os diversos tipos de cidades, o que estas representam como estágios nessas migrações, e em que medida vêm esses movimentos contribuindo para antigas e novas frentes pioneiras. Desconhecemos também as diversas qualificações desses migrantes internos, o que vale dizer que desconhecemos seu potencial econômico e social.

Quanto aos processos de mobilidade vertical, muito ligados aos primeiros, é para nós essencial conhecer tudo que diz respeito à promoção social, o que está ocorrendo em seus vários níveis e patamares. É de primordial importância avaliar a extensão do mercado, entendida como tal a área das trocas econômicas em dinheiro. Evidentemente o zero da promoção social é a capacidade de sobrevivência e esta pode ocorrer extra-muros do mercado, através da simples coleta ou da agricultura

de subsistência cuja extensão nos é desconhecida e cujo conhecimento talvez introduza modificações na atual escala de rendas, temperando o pessimismo de alguns estudos recentes.

Já entrados os umbrais do mercado do trabalho, haveria muito que pesquisar nos seus diversos setores ou atividades. Na agricultura, por exemplo, que ainda constitui o gênero básico de subsistência para 44,1 por cento da população brasileira (1970), é importante conhecer os vários tipos de agricultura, temporário ou parcial, ou as diversas modalidades de biscate agrícola.

Todo problema da estrutura agrária exige maior aprofundamento, a começar por uma definição mais precisa de alguns conjuntos de categorias. Não é possível esperar nenhum planejamento agrário ou reforma agrária sem destrinçar o cipoal de duplicações e contradições que ainda sufocam os dados do Censo Agrícola. Em primeiro lugar, as categorias relativas à propriedade e ao uso da terra. De que nos serve, por exemplo, saber que entre os responsáveis dos estabelecimentos agrícolas recenseados há 67 por cento de proprietários (1970), quando aí se misturam tanto latifundiários como proprietários de minifúndios e de pequenas propriedades familiares? No entanto, sem uma idéia clara do número de proprietários é impossível chegar a uma conclusão válida sobre a estrutura de classes na sociedade agrária, problema básico para o cientista social.

Outro dado importante a ser analisado são os contrastes agrícolas e as categorias de contratantes, parceiros, meeiros, etc., e em que medida se incluem na categoria dos empregados e, ainda, dentre estes, os que percebem uma remuneração *in natura* ou participam de uma forma qualquer de assistência ou proteção dentro da melhor tradição feudal que ainda domina a estrutura agrária brasileira.

Precisamos também conhecer as diversas formas de solidariedade rural, as associações informais ou "cooperativas" extra-legais que constituem as verdadeiras sementes de um associativismo ou cooperativismo orgânico e, porque não, de um verdadeiro desenvolvimento da comunidade. Para todo o vasto trabalho que ainda tem diante de si a extensão agrícola no Brasil, é fundamental conhecer as práticas, processos e implementos agrícolas usados nos mais baixos escalões e não apenas o que se chama "mecanização".

Entre o setor agrícola e o setor industrial há uma atividade artesanal que estatisticamente aparece diluida em um daqueles setores, mas que apresenta características absolutamente originais. No entanto, da maneira como o dado estatístico é colhido, é impossível discriminar a oficina artesanal da pequena indústria, e esta da média e grande, embora tenham características sociológicas e econômicas próprias e necessidades muito diversas do ponto de vista da assistência técnica ou financeira, do treinamento de mão-de-obra e da capacidade gerencial.

Finalmente, o grande setor de transição para o meio urbano e seus estilos de vida, que é o setor terciário, é pouco conhecido principalmente

na parte de comércio e serviços. No entanto, todo processo de urbanização no Brasil, segundo tudo indica, está extremamente ligado à expansão do setor terciário pelo baixo custo dos investimentos que exige, pelo tipo de tecnologia empregado e pelo seu baixo nível de qualificação.

Um dos aspectos importantes dessa grande transição de sistemas que atravessamos, é a criação e expansão da rede urbana. A maior ou menor capilaridade dessa rede, da vila à pequena cidade, à média, à grande e finalmente, à metrópole, é um dado importante para o planejamento urbano, mas a própria estrutura das cidades, as relações entre-centro, zonas urbanas, zona residencial, zona industrial e áreas marginais, habitação — como tudo que diz respeito à habitação, ainda é uma incógnita. Aqui, mais do que em qualquer outro aspecto, é indispensável a expansão de pesquisas de bairro ou quarteirão por amostragem que, a nosso ver, representarão para o conhecimento das cidades o que representou o Censo Agrícola para o conhecimento da estrutura agrária. A determinação de indicadores sobre a função das cidades, sua articulação regional, as relações entre suas camadas componentes, sua tecnologia, poderá lançar os alicerces de um conhecimento da estrutura urbana que nos liberte do descritivismo estatístico, — ainda que requintado por manipulações de computador, — permitindo-nos teorizações mais seguras.

E que dizer das modalidades de tecnologia de que tanto falamos, cuja importação ou criação autóctone tanto discutimos, mola mestra da expansão de vários setores e que, no entanto, quase desconhecemos?

Em suma, impõe-se a formulação de um sistema de contas oficiais que amplie, sem substituir, o atual sistema de contas nacionais (4). Talvez a melhor maneira de defini-lo seria partir de um elenco de parâmetros. Esses parâmetros, no entanto, só terão sentido se exprimirem as reais necessidades de mudança de nossa sociedade no momento atual e se não se limitarem a um quantitativismo estreito. É, por exemplo, a crítica que se pode formular aos indicadores do Instituto de Pesquisas das Nações Unidas para o Desenvolvimento Social cuja lista de 73 itens divididos em dois setores (a) de condições sociais e demográficas e (b) de situação econômica, padece desse vício (5).

Os indicadores só serão satisfatórios se abrangerem as três séries de componentes utilizados pelo Pe. L-J. Lebret nos seus trabalhos de planejamento: (a) as necessidades físicas, abrangendo nutrição (proteção contra a fome), abrigo (proteção contra os elementos), saúde (proteção contra a doença); (b) as necessidades culturais correspondendo a educação (proteção contra a ignorância), lazer (proteção contra a estafa), segurança (proteções sociais contra o medo); e (c) as necessidades culturais superiores apoiadas no excedente dos rendimentos.

Podíamos acrescentar a essa lista outros indicadores sobre nutrição, habitação, saúde, lazer, segurança — tanto em relação à pessoa física

e moral, como ao seu destino e futuro — a cultura intelectual, moral e espiritual — o que suscita o problema dos seus parâmetros e da maneira de coletar o dado expressivo, problema que pede a colaboração estreita do sociólogo e do estatístico (6).

Ao utilizá-los, entretanto, devemos lembrar-nos da advertência de Alain Birou: "Os indicadores tomados isoladamente ou nada exprimem da vida em sociedade ou exprimem fatos brutos que só adquirem sentido quando relacionados ao conjunto da vida social. Parece, portanto, necessário, de qualquer maneira, ponderá-los, isto é, atribuir-lhes um valor significativo de existência social" (7).

Esses indicadores não podem ser captados todos por um Censo decenal. Exigem pesquisas por amostragem ou censos especiais, dependendo da capacidade operacional do órgão censitário. Mais que tudo, da seriedade com que encararmos no Brasil a necessidade de nos desprendermos de imagens importadas e de modelos pré-fabricados de censo, estimuladores de falsos valores e conceitos, e nos voltarmos para as necessidades concretas do planejamento nacional, buscando a informação que nos convém pela forma mais adequada aos nossos recursos.

NOTAS

(1) Biderman, Albert D. Social Indicators and Goals. In: Bauer, Raymond A. ed. *Social Indicators*. 3. ed. Cambridge, Mass., M.I.T. Press, 1967. p. 71.

(2) Ibidem, p. 73-4.

(3) A razão desse interesse está claramente explicada em Sheldon, E. B. & Moore, Wilbert E. Monitoring Social Change in American Society. In: *Indicators of Social Change*. New York, Russel Sage Foundation, 1968. p. 3.

(4) Com todas as reservas e cautelas apontadas por Etzioni, Amitai & Lehman, Edward W. Social dangers in "valid" social measures. In: THE ANNUALS, volume especial dedicado a Objetivos e Indicadores Sociais na Sociedade Americana. Philadelphia, American Academy of Political and Social Science, 1967. v. 373 — II, p. 1-15.

(5) Unrisd. United Nations Research Institute for Social Development. Genebra, n. 4, set. 1966; UNECO. *Appoches de la Science du Development Économique*. Paris, 1971.

(6) Ver a respeito a tentativa de Verger, Pierre. Une interpretation structurale des composants du niveau de vie. *Development et Civilisations,* Paris, Irfed (36): 39-47, 1968. O número, aliás, é todo dedicado a problemas de quantificação social.

(7) Birou, Alain. Bensoins, indicateurs de niveau de vie et development. *Development et Civilisations,* Paris, Irfed (36): 35, 1968.

CONSIDERAÇÕES SOBRE AS ESTATÍSTICAS DEMOGRÁFICAS

CENTRO LATINO-AMERICANO DE PESQUISAS EM CIÊNCIAS SOCIAIS

O item 1.1 — Situação Demográfica — abrange dois aspectos que poderemos considerar específicos: o sub-item 1.1.1 — Estado da população — é de natureza censitária, procurando fixar o quadro demográfico do Brasil num momento dado, isto é, no momento do censo, o sub-item 1.1.2 — Movimento da população — é de natureza propriamente estatística, isto é, para levantamentos periódicos, anuais ou mensais, envolvendo aspectos que permitem estudar diferentes situações da população, no intervalo censitário.

É evidente que ambos são importantes, completam-se e oferecem dados relevantes não só para estudos demográficos desinteressados, como igualmente para estudos da população visando ao planejamento econômico e social. Ou, pode-se mesmo dizer, ao planejamento global. Pois hoje em dia o planejamento não pode ser isolado a uma área, mas integrado, visando ao conhecimento da realidade e do que se pode projetar sobre esta realidade para obtenção de resultados que beneficiem a população.

O homem é, portanto, o centro do planejamento, e se assim é, claro que as estatísticas demográficas devem merecer acurada atenção, para que ofereçam, sobre este homem, elementos autênticos, de modo que os projetos de planejamento correspondam às necessidades do país, e respondam às aspirações de sua população.

Teremos de considerar, portanto, o que se refere ao estado da popopulação, de um lado, o que se refere ao movimento desta população, de

R. bras. Estat., Rio de Janeiro, 33(132): 766-771, out./dez. 1972

outro lado; os dois aspectos, como dissemos, completam-se para oferecer o que se poderia chamar um retrato de corpo inteiro da população brasileira, já que estamos tratando de censo e estatística referentes ao Brasil.

O PAPEL DO IBGE

A criação do IBGE em 1936, através da Convenção Nacional de Estatística, correspondeu às exigências, já então sentidas, de ter o Brasil estatísticas adequadas, corretas e oportunas; implantou-se um sistema cooperativo inter-administrativo, mercê do qual foi possível estabelecer unidade nos levantamentos e sistematização na apuração e apresentação dos dados.

Com o correr dos tempos cercou-se o IBGE do mais alto respeito face ao trabalho realizado que não era apenas o de divulgar estatísticas, mas sobretudo melhorar estas estatísticas, pelo aperfeiçoamento das próprias fontes, o que era, sem dúvida, essencial, pois não se poderiam obter boas estatísticas se as fontes produtoras dos dados primários não fossem, pelo menos, ótimas. Tornou-se o IBGE e assim o consideramos, um organismo do mais alto valor técnico, sendo destacada sua atuação em todas as frentes de estudo e de planejamento.

É deveras hercúleo o trabalho por ele já realizado, e por isso mesmo deveria apresentar resultados correspondentes ao referido esforço, de modo que se possuíssem, no momento adequado, as estatísticas necessárias e úteis ao governo e aos consumidores em geral. É de atribuir-se este arrítmico resultado exclusivamente às carências encontradas nas fontes, e jamais à administração do órgão, que vem dando continuidade à tarefa de retratar, geográfica e estatisticamente, o Brasil, em seus vários aspectos.

De outra parte, é evidente — e este ponto merece ser desde logo ressaltado — que o sistema estatístico não pode, infelizmente, atender a todos os reclamos, nas minúcias desejadas, dos consumidores de estatísticas, entre os quais se situa, como principal, o próprio governo.

AS ESTATÍSTICAS DEMOGRÁFICAS

Se nos colocarmos na dimensão do desenvolvimento ou de subdesenvolvimento, teríamos de considerar que, em termos estatísticos, ainda estamos numa fase subdesenvolvida, especialmente se levarmos em conta as estatísticas vitais, cujos dados, coletados apenas nos Municípios das Capitais, se apresentam ainda incompletos e deficientes, do que, a rigor, não cabe culpa ao IBGE. Na realidade, o problema fundamental ainda é o das fontes.

É necessário antes de tudo fazer que as fontes informadoras funcionem adequadamente, com a correção indispensável ao êxito dos da-

dos a serem divulgados e analizados. A obtenção de dados se cerca de dificuldades imensas, sobretudo nos Municípios do interior, em vilas ou povoados, quase sempre carentes de aparelhamento adequado para os registros estatísticos. Na realidade, face a tais deficiências, não sabemos permanentemente, com a exatidão desejável, quantos somos, quantos nascemos, quantos casamos, quantos morremos, quantos trabalhamos, quantos estudamos, e por aí afora; e em conseqüência não podemos considerar-nos suficientemente desenvolvidos.

Esta deficiência, que é principalmente decorrente de falhas nas fontes de registro, tem sido objeto de consideração das sucessivas administrações que, sem dúvida, muito fizeram, têm feito e estão fazendo, em favor do aperfeiçoamento do sistema. Outros elementos de política econômica e de diferentes campos de educação, saúde, transportes, finanças, defesa, administração etc., indispensáveis ao planejamento global ou mesmo setorial, sem esquecer o fato de constantes mudanças ocorrerem em hábitos, costumes etc., ocupam as preocupações do IBGE, e de tal modo que, na realidade, seu orçamento teria de superar o de muitos Ministérios, caso pretendesse oferecer respostas em números a todas as indagações requeridas pelos consumidores de estatísticas ou exigidas pelo progresso e pela técnica.

ALGUMAS IDÉIAS A SUGERIR

Exatamente por admitir que o País não poderia estruturar-se naquelas condições "ótimas" de computação estatística é que nos parece cabível sugerir, não uma solução precisa, mas, apenas, uma idéia que poderá, ou não, ser aceita e desenvolvida.

É inquestionável que uma empresa necessita de programação e planejamento para alcançar níveis de produção a preços competitivos. O governo não foge a essa regra.

A empresa moderna que não tiver ciência do seu custo operacional; das condições de mercado; da qualidade de seu produto; simplesmente perece, ante a concorrência e a técnica empregada pelos que não prescindem daqueles fatores de controle.

Os estudos e os planejamentos da mais alta importância para todos os brasileiros tomam por base, normalmente, elementos estatísticos nem sempre os mais fiéis e nem sempre os mais atuais.

A estimativa, o cálculo, a admissão e a lógica estão sempre presentes em tais estudos, permitindo que o erro, sempre tolerado em determinados limites e em determinadas coisas, frustrem irreversivelmente planos do maior significado social, político e econômico.

Todos sabem que alguns resultados do Censo de 1960 foram divulgados após 1966. Também sabemos que os levantamentos censitários nem sempre expressam com absoluta precisão a real situação, já que

o preenchimento dos questionários nem sempre é realizado com a melhor técnica.

Entre os milhares de entrevistadores, contratados por diminuto prazo, pagos assalariadamente ou por comissão (em função do número de questionários), são notórios os casos de preenchimento deficientes.

O curso deste empreendimento é muito grande se considerarmos que a sua interligação não pode ser aplicada imediatamente, o que torna obsoletos os resultados divulgados.

Assim ocorre também com outros elementos estatísticos de coleta cuja periodicidade é menor, como é o caso das estatísticas do registro civil, do custo de vida, dos depósitos bancários, da exportação, da importação, da emissão etc.

Ainda que o IBGE não atue sempre diretamente na coleta, ele é o elemento catalizador. E, mesmo nesta função coordenadora, aliada à ampla e quase interminável "lista" de indagação que é obrigado a efetuar em intervalos de tempo que variam do diário até o decenal, o IBGE fica "tolhido" de coletar, estudar, divulgar estatísticas do mais alto teôr e conteúdo social e econômico para o governo e para o empresariado e estudiosos em geral.

Ante estas dificuldades, entendemos que seria melhor limitarem-se as indagações que abrangem o "UNIVERSO" para ampliarem-se as que fazem referências à amostra representativa ou as que possam obter as respostas através de pesquisas.

A apuração, análise e divulgação de dados universais requerem maior tempo, maiores gastos, e, nem sempre se conseguem os melhores e mais racionais resultados.

A adoção da *amostra* — ainda que a margem de erro possa ser considerável — não atingirá a proporções inadmissíveis, já que a técnica (de coleta e análise empregada) será muito mais apurada que no sistema "universal".

A redução de inquéritos permanentes que revelem o "universo", permitirá a manutenção de um quadro permanente e de pesquisadores e analistas do mais alto gabarito, cuja técnica de coleta e análise jamais poderá ser comparada a de que são portadores os contratados eventuais.

Assim, em custo, em técnica, em tempo, ou melhor, sob todos os aspectos, a amostra sobrepõe-se ao universo, notadamente no "caso" brasileiro.

O BOLETIM CENSITÁRIO

Os dados globais do Boletim CD. 1.02 (da não-amostra) utilizado no VIII Recenseamento Geral do Brasil de 1970, pode ser ainda mais

simplificado, reduzindo a duração da entrevista, trabalho de apuração e custo em geral.

A indicação da "idade" — ainda que presumida — substitui perfeitamente os quesitos 5 e 6 que se referem à data do nascimento (dia, mês e ano), nem sempre do conhecimento do informante. Para os fins a que se dedica a investigação, a informação sobre dia, mês e ano do nascimento das pessoas, nenhum proveito traz, apenas retardando e onerando o custo da coleta. A declaração do imposto de renda exige tais elementos, já que os detalhes são importantes em relação aos abatimentos, deduções, isenções, exercício financeiro, etc. etc.

Considerando que o quesito 7 solicita a Unidade da Federação ou o País estrangeiro de nascimento, não vemos razão para a manutenção do quesito. É suficiente acrescentar um "N" ao lado do País estrangeiro, no caso de tratar-se de naturalização.

Finalmente, os quesitos 9 e 10 não justificam sua inclusão lógica no Boletim da Não-Amostra, em que são tão ou menos importantes do que a indicação do estado civil, a atividade, a religião e o rendimento, quesitos que se incluem apenas no Boletim da Amostra (CD. 101).

Cremos que a amostra poderá responder com a mesma margem de segurança — para os fins a que se destinam os referidos quesitos.

AMPLIAÇÃO DO IBGE

É de lamentar que o Plano Nacional de Desenvolvimento Econômico e Social 1972/74 (Lei 5.727 de 4 de novembro de 1971) não tenha incluído entre as suas realizações a ampliação e a juda ao IBGE, verdadeiro "termômetro" das iniciativas governamentais.

Ao pretender colocar o Brasil, no espaço de uma geração, na categoria das nações desenvolvidas e duplicar, até 1980, a renda "per capita" do Brasil, e, ainda, elevar a economia, em 1974, às dimensões resultantes de um crescimento anual do Produto Interno Bruto entre 8 e 10%, mediante o aumento da taxa de expansão do emprego e da redução da inflação, o Governo terá, forçosamente, que equilibrar, comparar, medir e testar, periodicamente, os resultados colhidos — que terão que ser gradativos — e, só o fará, e, só seguirá no seu intento, se dispuzer de uma sólida estrutura estatística, base para todas as considerações, estudos e planejamentos.

Uma simples deturpação nos índices do custo de vida, do cálculo da renda "per capita", do índice de crescimento demográfico, da taxa de investimento bruto fixo, do valor do produto industrial ou do valor do consumo global, pode alterar significativamente as dimensões da economia brasileira.

É também notório que grandes empresas multinacionais reaplicam na pesquisa parcela considerável de seus lucros, com a finalidade de os reaverem através do que a técnica lhes pode oferecer.

Logo, se a Fundação IBGE voltar suas atenção para a pesquisa imediata, para as apurações por amostra, etc. estará dotando o País de instrumentos precisos para que se possa atingir, até por antecipação, as metas desejadas pelo Plano Nacional de Desenvolvimento Econômico e Social (1972/74), já que as metas estatísticas setoriais poderão ser acompanhadas a curto prazo, o que permitirá as correções tempestivas e jamais lamúrias extemporâneas, como pode infelizmente acontecer.

Entendemos, finalmente, que a Fundação IBGE deveria, além de expandir sensivelmente o seu antigo "Laboratório de Estatística", ampliar, ou criar, um Departamento destinado à realização de pesquisas especiais, atendendo aos reclamos da política sócio-econômica do Governo. Tal Departamento que deveria atuar em permanente contacto com órgãos públicos, internacionais e particulares, que procedem a pesquisas no Brasil, poderia deles solicitar trabalhos específicos, pois muitos trabalham em condições de oferecer subsídios altamente valiosos, pela experiência de suas atividades, pelos resultados já auferidos.

Neste trabalho de implantação e coordenação que está, aliás, dentro do espírito com que o IBGE foi criado, estaria esta Instituição dotando o país de um aparelhamento vital, ainda não estimulado, mas de uso julgado imprescindível, para melhor conhecimento da realidade, através de instrumental moderno e, sem dúvida, representativo das exigências atuais do consumo de dados estatísticos ou mesmo qualitativos.

Noticiário

SAUDAÇÃO DE NATAL

É com a maior satisfação que levo ao numeroso e dedicado funcionalismo da Fundação IBGE a minha saudação de Natal e Ano Bom, neste dezembro de 1972, com a expressão do reconhecimento da Presidência da entidade pela valiosa colaboração em favor dos sucessos alcançados em nossos trabalhos.

O ano ora a encerar-se registrou, com efeito, êxitos dos mais expressivos na realização dos programas de atividades da Instituição, dentro dos rumos que a esta altura já lhe asseguram situação relevante no conjunto dos órgãos de apoio à elaboração e execução dos planos governamentais de desenvolvimento do País. Tanto nos setores técnicos, que constituem as atividades-fins desta Fundação, como no que se refere aos assuntos administrativos, suporte do qual depende em escala considerável a eficiente execução daqueles programas, foram vencidas todas as etapas.

A Direção da entidade sente-se sobretudo particularmente compensada dos esforços especiais que vinha desenvolvendo no sentido do enquadramento dos servidores da antiga Autarquia IBGE no Quadro Geral de Pessoal da Fundação.

Outro acontecimento da maior significação na vida da Instituição foi a realização das Conferências Nacionais de Estatística e de Geografia e Cartografia — II CONFEST e II CONFEGE. Promovidas pela Fundação IBGE, em cumprimento de prescrições legais, essas importantes reuniões tiveram repercussões altamente proveitosas para os superiores interesses do País, no campo dos serviços estatísticos e geográfico-cartográficos.

Unindo-me a todos, nas alegrias do Natal e nas esperanças do Ano Novo, renovo à dedicada coletividade ibgeana os meus agradecimentos pelo valor da contribuição recebida em favor dos sucessos obtidos pela Fundação IBGE em 1972.

ISAAC KERSTENETZKY
Presidente da Fundação IBGE

AOS COMPANHEIROS DA REDE-DE-COLETA

Na oportunidade em que a comunidade ibgeana comemora o Natal e se prepara para a jornada de 1973, mais uma vez a ela me dirijo, como colega e dirigente do IBE, para saudá-la e transmitir-lhe os mais efusivos agradecimentos por todo o esforço empregado no ano que finda, esforço esse que muito contribuiu para o êxito das atividades da Instituição.

De fato, a exação no cumprimento do dever, representada pela presteza dos trabalhos de coleta foi o fator decisivo para que as estatísticas nacionais viessem a ser dadas a público nos momentos precisos com evidentes reflexos positivos para o planejamento global do País.

Mostra eloqüente foi a apresentação, em prazo nunca antes obtido, dos resultados preliminares e das tabulações avançadas do Censo Demográfico e, já em princípio de 1972, das tabelas preliminares do Censo Agrícola, sucessos aos quais vem se somar a divulgação dos resultados finais do Censo Demográfico nos Estados do Piauí e Pernambuco, esperando-se que, até meados de 1973, estejam à disposição dos usuários, principalmente o Governo, todas as apurações do Censo de população.

Não só nos trabalhos censitários se observa o destaque da rede-de-coleta; em todas as demais pesquisas, algumas passando por modificações metodológicas, o chamamento do pessoal tem tido em geral adequada resposta, o que se pode comprovar pela atualização em que se encontram os levantamentos da responsabilidade do IBE.

Atendendo a tais fatos, vem, também, a Administração procurando dar ao pessoal da rede as compensações que seus integrantes fazem por merecer, em um processo que, iniciado no ano que ora se extingue, deverá ter sua conclusão no próximo, quando se espera estarem superadas todas as situações ainda pendentes de solução.

Essas palavras, espero que ressoem como de esperança e estímulo, em reconhecimento ao anônimo mas eficiente trabalho dedicado. E a oportunidade é a melhor possível, na fase do ano em que são esquecidas as incompreensões e eventuais diferenças havidas, para uma união de congraçamento natalino.

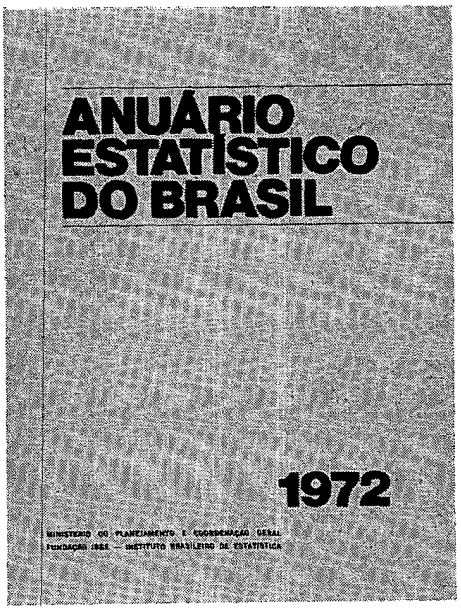
E ao encerrar, na esperança de ter honrado as promessas formuladas e na expectativa de que o Instituto possa continuar contando com a preciosa cooperação de todos, como Diretor-Superintendente e em meu próprio nome, formulo ao pessoal da rede-de-coleta e suas famílias, sinceros votos de um Natal de paz e tranqüilidade e de um Feliz Ano Novo.

Dezembro, 1972

Rodolf W. F. Wuensche
Diretor-Superintendente

Bibliografia

ANUÁRIO ESTATÍSTICO DO BRASIL – 1972



O Instituto Brasileiro de Estatística, da Fundação IBGE, acaba de editar o 33.º volume do "Anuário Estatístico do Brasil", referente ao ano de 1972. A presente edição do "Anuário" contém 989 páginas, impressas em *off set*, nas quais são retratados aspectos físicos, demográficos, econômicos, sociais, culturais, administrativos, etc. Mais de 125 gráficos, cuidadosamente elaborados, figuram no volume, além de dados preliminares dos Censos Demográficos e Agropecuário realizados em 1970. Os aspectos focalizados naquela útil e proveitosa publicação versam sobre a Situação Física — Caracterização do Território, Climatologia, Recursos Naturais; Situação Demográfica — Estado da População e Movimento da População; Situação Econômica — Silvicultura, Pesca, Agropecuária, Indústria, Comércio, Seguro, Serviços, Transportes, Comunicações, Mercado Monetário e Financeiro, Propriedade, Consumo, Contas Nacionais; Situação Social — Habitação, Urbanização, Trabalho, Saúde, Previdência e Assistência Social, Associativismo e Cooperativismo, Religião, Ocorrências Anti-Sociais; Situação Cultural — Ensino, Cultura; Situação Administrativa e Política — Divisão Territorial, Admi-

nistração Pública, Justiça e Segurança Pública, Representação Política.

O "Anuário Estatístico do Brasil" — 1972, acha-se à venda na Seção de Distribuição do Instituto Brasileido de Estatística — Avenida Franklin Roosevelt, 146, loja, GB, — ao preço unitário de Cr$ 50,00 (cinqüenta cruzeiros) — ou nas Delegacias de Estatísticas do IBGE, nas demais Unidades da Federação.

SINOPSE ESTATÍSTICA DO BRASIL-1972

Acaba de ser lançada pelo Instituto Brasileiro de Estatística, da Fundação IBGE, a *Sinopse Estatística do Brasil — 1972*. Esta edição, anteriormente intitulada "Atualidade Estatística do Brasil", apresenta, ao lado de informações estatísticas, gráficos e fotografias, bem como comentários analíticos sobre o comportamento de cada setor da economia e de outros aspectos da realidade brasileira.

O material incluído neste volume focaliza aspectos de interesse para um melhor conhecimento da evolução do processo de desenvolvimento do País nos últimos anos. Merecem destaque a apresentação de resultados dos Censos Demográfico e Agropecuário, relativos a 1970, e de dados sobre a Atividade Industrial, Preços e Ensino Superior, referentes a 1971.

"Sinopse Estatística do Brasil-1972" pode ser encontrada na Seção de Intercâmbio do IBGE, Av. Franklin Roosevelt, 166, GB, ou nas Delegacias Estaduais de Estatística, nas demais Unidades da Federação.

ESTATÍSTICAS DA EDUCAÇÃO NACIONAL
1960-71

O Serviço de Estatística da Educação e Cultura (SEEC), do Ministério da Educação e Cultura, acaba de lançar o volume "ESTATÍSTICAS DA EDUCAÇÃO NACIONAL 1960-1971", com o objetivo de atender aos usuários das estatísticas educacionais.

O volume apresentado reúne dados do ensino em séries históricas, procurando, deste modo, retratar a evolução educacional no período referenciado.

A seleção das informações incluídas na presente publicação, obedeceu a critério baseado no tratamento dos dados considerados de maior interesse para o planejamento educacional, bem como no atendimento ao conhecimento mais generalizado da situação. Os dados apresentados se encontravam dispersos em anuários e sinopses e, em alguns casos, não haviam sido divulgados.

Inicialmente, são apresentadas tabelas contendo dados gerais significativos para conexões dos estudos da problemática educacional em si mesma; sobrelevam-se os extraídos das "Tabulações Avançadas do Censo Demográfico de 1970". Seguem-se algumas elaborações estatísticas e informações sobre as bolsas de aperfeiçoamento concedidas através da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e, em ordenação lógica, as informações referentes aos níveis de ensino.

ANUÁRIO ESTATÍSTICO DOS TRANSPORTES

O Ministério dos Transportes, através do Grupo de Estudos para Integração da Política de Transportes — GEIPOT e do Setor de Coordenação e Processamento de Dados, acaba de lançar o ANUÁRIO ESTATÍSTICO DOS TRANSPORTES, correspondente ao ano de 1971.

Esta publicação reúne matéria informativa básica sobre a evolução dos Transportes no País, constituindo-se útil subsídio ao estudo e planejamento deste importante setor da economia brasileira.

As informações referem-se, na maioria dos casos, ao período 1966/70, estando distribuídos em cinco grandes seções: a primeira dedicada a dados globais e as seguintes por modalidade de transporte — rodoviário, ferroviário, hidroviário e aéreo.

O volume, com 228 páginas, além das tabelas vem fartamente ilustrado com diversos gráficos.

PUBLICAÇÕES EDITADAS PELO INSTITUTO BRASILEIRO DE ESTATÍSTICA NO TRIMESTRE OUTUBRO-DEZEMBRO DE 1972 *

CENTRO DE DOCUMENTAÇÃO E INFORMAÇÃO ESTATÍSTICA (CENDIE)

025.346

BOLETIM TRIMESTRAL DA BIBLIOTECA WALDEMAR LOPES. Rio de Janeiro, v. 3, n.º 3, jul./set. 1972.

DEPARTAMENTO DE DIVULGAÇÃO ESTATÍSTICA (DEDIVE)

Periódicos

31 (81) (05)

ANUÁRIO ESTATÍSTICO DO BRASIL 1972. Rio de Janeiro, v. 33, 1972.

31 (81) (05)

BOLETIM ESTATÍSTICO. Rio de Janeiro, v. 30, n.º 117, jan./mar. 1972. Trimestral.

311 (81) (05)

REVISTA BRASILEIRA DE ESTATÍSTICA. Rio de Janeiro, ano 32, n.º 128, out./dez. 1971. Trimestral.

Séries

911.6 (81)

SINOPSE ESTATÍSTICA DO BRASIL 1972. Rio de Janeiro, v. 2, 1972.

911.6 (811.5 VIS)

Viseu, Pará. Texto de Rilza Ferreira Saldanha. Rio de Janeiro, 1972. 12 p., il. (Coleção de Monografias, 525)

* Bibliografia preparada pelo Centro de Documentação e Informação Estatística do IBE.

DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICAS INDUSTRIAIS, COMERCIAIS E DE SERVIÇOS (DEICOM)

31:66/69 (81)

Indústrias de transformação. Pesquisa mensal — janeiro/agosto 1972. Rio de Janeiro, 1972. 45 p., tab. Mimeografado.

———— — *Janeiro/setembro 1972.* Rio de Janeiro, 1972. 49 p., tab. Mimeografado.

31:66/69 (81)

Indústrias de transformação. Pesquisa mensal — janeiro/outubro 1972. Rio de Janeiro, 1972. 51 p., tab. Mimeografado.

———— — *Janeiro/novembro 1972.* Rio de Janeiro, 1972. 51 p., tab. Mimeografado.

31:69 (81)

Indústria da construção. Inquérito mensal sobre edificações — abril de 1972. Rio de Janeiro, 1972. 249 p., tab.

———— — *maio de 1972.* Rio de Janeiro, 1972. 245 p., tab.

———— — *junho de 1972.* Rio de Janeiro, 1972. 241 p., tab.

———— — *julho de 1972.* Rio de Janeiro, 1972. 245 p., tab.

———— . *Preços de material de construção no comércio atacadista; salários na indústria da construção — janeiro a junho de 1972.* Rio de Janeiro, 1972. 353 p., tab.

———— *abril a setembro de 1972.* Rio de Janeiro, 1972. 353 p., tab.

338.5:31 (81)

Inquérito nacional de preços. Gêneros alimentícios e artigos do vestuário. Comércio atacadista e varejista nas Capitais — agosto de 1972. Rio de Janeiro, 1972. 37 p., tab. Mimeografado.

———— — *setembro de 1972.* Rio de Janeiro, 1972. 37 p., tab. Mimeografado.

———— — *outubro de 1972.* Rio de Janeiro, 1972. 37 p., tab. Mimeografado.

———— — *novembro de 1972.* Rio de Janeiro, 1972. 37 p., tab. Mimeografado.

———— . *Comércio atacadista e varejista nas Unidades da Federação — agosto de 1972.* Rio de Janeiro, 1972. 49 p., tab. Mimeografado.

———— — *setembro de 1972.* Rio de Janeiro, 1972. 49 p., tab. Mimeografado.

———— — *outubro de 1972.* Rio de Janeiro, 1972. 49 p., tab. Mimeografado.

381 (812.1)

Comércio interestadual. Exportatação por vias internas — 1969. Maranhão. Rio de Janeiro, 1972. 20 p., tab. Mimeografado.

381 (815.1)

———— . *Minas Gerais.* Rio de Janeiro, 1972. 148 p., tab. Mimeografado.

381 (811.4)

———— — *1970. Roraima.* Rio de Janeiro, 1972. 4 p., tab. Mimeografado.

381 (814.2)

Comércio interestadual. Exportação por vias internas — 1970. Bahia. Rio de Janeiro, 1972. 101 p., tab. Mimeografado.

381 (811.2)

———— — *1971. Acre.* Rio de Janeiro, 1972. 6 p., tab. Mimeografado.

381 (811.4)

———— . *Roraima.* Rio de Janeiro, 1972. 4 p., tab. Mimeografado.

381 (814.1)

———— . *Sergipe.* Rio de Janeiro, 1972. 25 p., tab. Mimeografado.

381 (815.4)

———— . *Guanabara.* Rio de Janeiro, 1972. 133 p., tab. Mimeografado.

DEPARTAMENTO DE CENSOS (DECEN)

312 (812.2)

Censo Demográfico. Piauí. Rio de Janeiro, 1972. LXXV + 381 p., tab., mapa em anexo (VIII Recenseamento geral — 1970. Série Regional v. 1, t. 6)

312 (813.4)

Censo Demográfico — Pernambuco. Rio de Janeiro, 1972. LXXVII + 551 p., tab., mapa em anexo (VIII Recenseamento geral — 1970. Série Regional v. 1, t. 10)

ATUALIDADES ESTATÍSTICAS DO RIO GRANDE DO SUL – 1972

A Secretaria de Coordenação e Planejamento, através da Superintendência de Estatística e Informática, acaba de publicar ATUALIDADES ESTATÍSTICAS DO RIO GRANDE DO SUL, uma sinopse expondo dados estatísticos, dentro de um critério de desejável atualização.

São nela divulgados aspectos demográficos e informes concernentes à realidade econômica, social e político-administrativa, permitindo uma apreciação da realidade gaúcha, segundo os principais municípios do Estado.

O presente volume é um repositório de dados estatísticos, contendo quadros e tabelas selecionados e devidamente sistematizados, de modo a constituir boa fonte de informes sobre o Estado.

Apresenta uma visão nítida da atualidade, prestando às autoridades, técnicos e estudiosos subsídios de real valia que possibilitam um acurado exame do potencial desenvolvimentista da terra gaúcha, e, conseguindo este objetivo, atinge a finalidade a que se propôs a SEI ao lançar este trabalho.

Legislação

LEIS FEDERAIS

LEI N.º 5.804, DE 3 DE OUTUBRO DE 1972

Dá nova redação ao artigo 6.º do Decreto-lei n.º 161, de 13 de fevereiro de 1967, que autorizou o Poder Executivo a instituir a Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, e dá outras providências.

O Presidente da República

Faço saber que o Congresso Nacional decreta e eu sanciono a seguinte Lei:

Art. 1.º O artigo 6.º do Decreto-lei n.º 161, de 13 de fevereiro de 1967, que autorizou o Poder Executivo a instituir a Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, passa a vigorar com a seguinte redação:

"Art. 6.º O patrimônio da Fundação IBGE será constituído de:

a) acervo do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, compreendendo os órgãos relacionados no artigo 3.º, incisos 1, 2, 3 e 4, por doação do Poder Executivo;

b) dotação orçamentária da União, prevista anualmente;

c) subvenções da União, dos Estados e Municípios;

d) doações e contribuições de pessoas de direito público e privado, inclusive de entidades internacionais;

e) recursos da Caixa Nacional de Estatística Municipal (Decreto-lei n.º 4.181 de 16 de março de 1942, artigo 9.º, alíneas *a* e *b*);

f) rendas resultantes da prestação de serviços, em qualquer dos campos de sua competência.

Parágrafo único. A Fundação IBGE poderá contrair empréstimo com entidades nacionais ou internacionais, observadas as normas reguladoras da matéria".

Art. 2.º Esta lei entrará em vigor na data de sua publicação, revogados o artigo 25 do Decreto-lei n.º 161, de 13 de fevereiro de 1967, e demais disposições em contrário.

Brasília, 3 de outubro de 1972; 151.º da Independência e 84.º da República.

EMÍLIO G. MÉDICI
João Paulo dos Reis Velloso

(Publicada no *Diário Oficial* de 4-10-72)

100

RESOLUÇÕES DO CONSELHO DIRETOR

RESOLUÇÃO COD-329, DE 10 DE OUTUBRO DE 1972

Abre Crédito Suplementar ao Orçamento-Programa da Fundação IBGE, destinado ao reforço de dotações orçamentárias da Tabela Explicativa da Despesa da Administração Central.

O CONSELHO DIRETOR da FUNDAÇÃO IBGE, no uso das atribuições que lhe confere o artigo 16, alínea *b*, do Estatuto, e

considerando que, para o atendimento dos encargos expostos no Processo n.º 1.360/72-AC, torna-se indispensável reforçar-se em Cr$ 195.000,00 (cento e noventa e cinco mil cruzeiros) a dotação específica da Tabela Explicativa da Despesa da Administração Central, aprovada pela Resolução COD/291/72, alterada pelas Resoluções COD/324/72 e COD/327/72;

considerando que, segundo o processo referido, a Fundação IBGE dispõe de recursos financeiros disponíveis, os quais poderão ser destacados da conta Fundo de Reserva Especial-FRE para utilização na cobertura do crédito suplementar ora solicitado;

considerando o disposto no artigo 48, do Estatuto da Fundação,

RESOLVE:

Art. 1.º — Fica aberto à Fundação IBGE, mediante apropriação dos recursos existentes em "Fundo de Reserva Especial-FRE", o crédito suplementar no montante de Cr$ 195.000,00 (cento e noventa e cinco mil cruzeiros), destinados ao reforço de dotações da Tabela Explicativa da Despesa da Administração Central, aprovada pela Resolução COD/291/72, alterada pelas Resoluções COD/324/72 e COD/327/72, consoante a seguinte distribuição:

3.0.0.0 — DESPESAS CORRENTES
3.1.0.0 — DESPESAS DE CUSTEIO
3.1.3.0 — SERVIÇOS DE TERCEIROS
3.1.3.2 — OUTROS SERVIÇOS DE TERCEIROS — Cr$ 195.000,00

TOTAL — Cr$ 195.000,00

Art. 2.º — A presente Resolução entra em vigor nesta data.

(a) *Regina Maria Lima Garcia,* Secretária-Assistente. — (a) *Horácio Rubens de Mello e Souza,* Secretário-Geral. — (a) *Isaac Kerstenetzky,* Presidente.

RESOLUÇÃO COD-330, DE 10 DE OUTUBRO DE 1972

Abre Crédito Suplementar ao Departamento de Censos do IBE, no montante de ..... Cr$ 5.000.000,00, *para reforço de dotações do Plano de Aplicação dos recursos ao VIII Recenseamento Geral do Brasil.*

O CONSELHO DIRETOR da FUNDAÇÃO IBGE, no uso das

atribuições que lhe confere o artigo 16, alínea *b*, do Estatuto, e

considerando que o Plano de Aplicação aprovado pelo Senhor Ministro do Planejamento e Coordenação Geral, publicado no "Diário Oficial", da União, de 18 de abril último, fixou o quantitativo em Cr$ 32.000.000,00 (trinta e dois milhões de cruzeiros), destinados à complementação do VIII Recenseamento Geral do Brasil, para o exercício de 1972;

considerando que para o prosseguimento normal dos trabalhos programados para o corrente exercício, a cargo do IBE/Departamento de Censos-DECEN torna-se necessário o reforço de alguns dos subelementos integrantes da Tabela Explicativa da Despesa a que se refere a Resolução COD/288/72, de 10 de janeiro de 1972, face à mencionada fixação do quantitativo anteriormente citado;

considerando que o aludido reforço poderá efetivar-se mediante abertura de crédito suplementar e que a Fundação dispõe de recursos financeiros oriundos de saldo orçamentário do exercício anterior, inscrito sob o título "Fundos Especiais";

considerando, finalmente, o disposto no artigo 48, do Estatuto da Fundação,

RESOLVE:

Art. 1.º — Fica aberto ao Departamento de Censos do IBE o Crédito Suplementar de ..... Cr$ 5.000.000,00 (cinco milhões de cruzeiros), destinado ao reforço de dotações de diversos subelementos integrantes da Tabela Explicativa da Despesa do IBE/DECEN, de que trata a Resolução COD-288/72, de 10 de janeiro de 1972, ora retificada e reajustada na forma da tabela anexa, consoante a seguinte distribuição:

3.0.0.0 — DESPESAS CORRENTES		
3.1.0.0 — DESPESAS DE CUSTEIO		
3.1.1.0 — PESSOAL		
3.1.1.1.02.00 — DESPESAS VARIÁVEIS COM PESSOAL		
01 — Ajuda de Custo.....		3 000,00
3.1.2.0 — MATERIAL DE CONSUMO		
3.1.2.04.00 — Combustíveis e lubrificantes.....		25 000,00
3.1.3.0 — SERVIÇOS DE TERCEIROS		
3.1.3.01.00 — Acondicionamento e Transporte de encomendas, cargas e animais.....	50 000,00	
3.1.3.02.00 — Passagens, transporte de pessoas e suas bagagens	10 000,00	
3.1.3.04.00 — Iluminação, força motriz e gás.....	30 000,00	
3.1.3.10.00 — Locação de bens móveis e imóveis; tributos e despesas de condomínio.....	65 000,00	

3.1.3.16.00 — Outros Serviços de Terceiros:		
02 — Serviços e tarefas de caráter temporário, esporádicos e de urgência	1 340 000,00	
03 — Processamento de dados estatísticos, censitários, geográficos e administrativos	2 980 000,00	4 475 000,00
4.0.0.0 — DESPESAS DE CAPITAL		
4.1.0.0 — INVESTIMENTOS		
4.1.3.0 — EQUIPAMENTOS E INSTALAÇÕES		
4.1.3.1 — Máquinas, motores e aparelhos	377 000,00	
4.1.4.0 — MATERIAL PERMANENTE		
4.1.4.07.00 — Modelos e Utensílios de escritório, ensino, laboratório e gabinete técnico ou científico	20 000,00	
4.1.4.08.00 — Mobiliário em geral	100 000,00	497 000,00
TOTAL		5 000 000,00

Art. 2.º — Esta Resolução entra em vigor nesta data.

(a) *Regina Maria Lima Garcia,* Secretária-Assistente. — (a) *Horácio Rubens de Mello e Souza,* Secretário-Geral. — (a) *Isaac Kerstenetzky,* Presidente.

RESOLUÇÃO COD-331, DE 13 DE OUTUBRO DE 1972

Altera o orçamento analítico da Escola Nacional de Ciências Estatística-ENCE, relativo ao exercício de 1972, *aprovado pela Resolução* COD/290/72, *de* 10 *de janeiro de* 1972.

O CONSELHO DIRETOR da FUNDAÇÃO IBGE, no uso das atribuições que lhe confere o artigo 16, alínea *b,* do Estatuto, e

considerando que o prosseguimento normal dos trabalhos programados para o exercício corrente, a cargo da Escola Nacional de Ciências Estatísticas-ENCE, impõe suplementação para alguns subelementos integrantes da tabela explicativa da despesa, a que se refere a Resolução COD/290/72, de 10 de janeiro de 1972;

considerando que essa suplementação poderá ser obtida mediante a transposição de recursos disponíveis em outros subelementos.

considerando o disposto no artigo 48, do Estatuto da Fundação,

RESOLVE:

Art. 1.º — Ficam autorizadas as alterações constantes da tabela anexa, as quais modificam o orçamento da despesa da Escola Nacional de Ciências Estatísticas-ENCE, aprovado pela Resolução COD-290/72, de 10 de janeiro de 1972.

Art. 2.º — Esta Resolução entra em vigor nesta data.

(a) *Regina Maria Lima Garcia,* Secretária-Assistente. — (a) *Horácio Rubens de Mello e Souza,* Secretário-Geral. — (a) *Isaac Kerstenetzky,* Presidente.

FUNDAÇÃO INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA

ESCOLA NACIONAL DE CIÊNCIAS ESTATÍSTICAS

Orçamento para o exercício de 1972

Tabela Explicativa da Despesa

(Continua)

CATEGORIA ECONÔMICA	ELEMENTO E SUBELEMENTO	DOTAÇÃO (Cr$)	
		Situação atual	Situação nova
3.0.0.0	DESPESAS CORRENTES		
3.1.0.0	DESPESAS DE CUSTEIO		
3.1.1.0	PESSOAL		
3.1.1.1	PESSOAL CIVIL		
01.00	VENCIMENTOS E VANTAGENS FIXAS		
01	Vencimentos	654 372	504 372
08	Gratificação adicional por tempo de serviço (qüinqüênio)	80 000	80 000
09	Gratificação pelo exercício em regime de tempo integral e dedicação exclusiva	28 000	28 000
	SOMA	762 372	612 372
02.00	DESPESAS VARIÁVEIS COM PESSOAL		
01	Ajuda de custo	2 000	2 000
02	Diárias	2 000	2 000
03	Substituições	10 000	10 000
06	Gratificação por encargos de seleção e aperfeiçoamento de pessoal (Artigo 145, item X, Lei 1.711/52)	4 000	4 000
11	Salário de pessoal regido pela CLT		
	01 — Salário dos Quadros em Extinção	10 000	10 000
	02 — Salários dos Quadros da Fundação		
	a) Salários	620 610	620 610
	b) Gratificação por Encargos Técnicos, Assessoramento e Chefia	260 000	350 000
13	Diversos		
	01 — Gratificação pelo desempenho de encargos especiais e prestação de serviços extraordinários	39 000	99 000
	SOMA	947 610	1 097 610
	SOMA DO ELEMENTO 3.1.1.0	1 709 982	1 709 982

104

FUNDAÇÃO INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA

ESCOLA NACIONAL DE CIÊNCIAS ESTATÍSTICAS

Orçamento para o exercício de 1972

Tabela Explicativa da Despesa

(Continuação)

CATEGORIA ECONÔMICA	ELEMENTO E SUBELEMENTO	DOTAÇÃO (Cr$)	
		Situação atual	Situação nova
3.1.2.0	MATERIAL DE CONSUMO		
02.00	Impressos, artigos de expediente, desenho, cartografia, geodésia, topografia e ensino	100 000	100 000
03.00	Artigos de higiene, conservação, acondicionamento e embalagem	20 000	20 000
04.00	Combustíveis e lubrificantes	7 000	7 000
05.00	Materiais e acessórios de máquinas, de viaturas, de aparelhos, de instrumentos e de móveis	30 000	30 000
10.00	Matérias-primas e produtos manufaturados ou semimanufaturados destinados a transformação; material para conservação de bens imóveis: 02 — Material para conservação de bens imóveis	57 000	57 000
11.00	Produtos químicos, biológicos, farmacêuticos e odontológicos; vidraria, artigos cirúrgicos e outros de laboratório, enfermaria, gabinetes técnicos e científicos	20 000	20 000
13.00	Vestuários, uniformes, artigos para esportes, jogos e divertimentos infantis, seus equipamentos e respectivos acessórios; calçados, roupa de cama, mesa, copa, cozinha e banho	20 000	20 000
15.00	Lâmpadas incandescentes e fluorescentes; acessórios para instalações elétricas	30 000	30 000
17.00	Outros materiais de consumo 03 — Diversos	10 000	10 000
	SOMA DO ELEMENTO 3.1.2.0	294 000	294 000
3.1.3.0	SERVIÇOS DE TERCEIROS		
3.1.3.1	REMUNERAÇÃO DE SERVIÇOS PESSOAIS		
01.00	Pessoal pago mediante recibo	429 028	429 028

105

FUNDAÇÃO INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA

ESCOLA NACIONAL DE CIÊNCIAS ESTATÍSTICAS

Orçamento para o exercício de 1972

Tabela Explicativa da Despesa

(Continuação)

CATEGORIA ECONÔMICA		ELEMENTO E SUBELEMENTO	DOTAÇÃO (Cr$) Situação atual	Situação nova
3.1.3.2		OUTROS SERVIÇOS DE TERCEIROS		
	01.00	Acondicionamento e transporte de encomendas, cargas e animais	10 000	10 000
	02.00	Passagens, transporte de pessoas e de suas bagagens; pedágios	20 305	20 305
	03.00	Assinaturas e aquisição de jornais, revistas e recortes de publicações	10 000	10 000
	04.00	Iluminação, força motriz e gás	70 000	70 000
	05.00	Serviços de asseio e higiene; taxas de água, esgoto, lixo e outras correlatas	90 000	90 000
	06.00	Reparos, adaptações e conservação de bens móveis e imóveis	80 000	125 000
	07.00	Serviços de divulgação, de impressão e de encadernação	40 000	40 000
	08.00	Serviços médicos, hospitalares, funerários e judiciários	20 000	20 000
	09.00	Serviços de comunicação em geral	20 000	20 000
	10.00	Locação de bens móveis e imóveis, tributos e despesas de condomínios	20 000	20 000
	11.00	Seguros em geral	15 000	15 000
	12.00	Comissões, corretagens e serviços bancários	20 000	20 000
	16.00	Diversos		
		01 — Serviços de seleção e aperfeiçoamento de pessoal	20 000	20 000
		02 — Serviços e tarefas de caráter temporário, esporádico e de urgência	30 000	30 000
		04 — Estagiários	90 000	45 000
		SOMA DO ELEMENTO 3.1.3.0	984 333	984 333
3.1.4.0		ENCARGOS DIVERSOS		
	01.00	Despesas miúdas de pronto pagamento	2 000	2 000
	04.00	Festividades, recepções, hospedagens e homenagens	8 000	8 000
	08.00	Exposição, congressos e conferências	90 000	90 000
	10.00	Assistência Social	5 000	5 000
	13.00	Outros encargos		
		01 — Bolsas de Estudo	15 000	15 000
		SOMA DO ELEMENTO 3.1.4.0	120 000	120 000
3.1.5.0		DESPESAS DE EXERCÍCIOS ANTERIORES	20 000	20 000
		SOMA DA CATEGORIA 3.1.0.0	3 128 315	3 128 315

106

FUNDAÇÃO INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA

ESCOLA NACIONAL DE CIÊNCIAS ESTATÍSTICAS

Orçamento para o exercício de 1972

Tabela Explicativa da Despesa

(Continuação)

CATEGORIA ECONÔMICA		ELEMENTO E SUBELEMENTO	DOTAÇÃO (Cr$)	
			Situação atual	Situação nova
3.2.0.0		TRANSFERÊNCIAS CORRENTES		
3.2.3.0		TRANSFERÊNCIAS DE ASSISTÊNCIA E PREVIDÊNCIA SOCIAL		
3.2.3.1		INATIVOS		
	01.00	PESSOAL CIVIL		
	01	Proventos	18 805	18 805
	02	Vantagens incorporadas	6 000	6 500
		SOMA DO ELEMENTO 3.2.3.1	24 805	25 305
3.2.3.3		SALÁRIO-FAMÍLIA		
	01.00	Pessoal Civil	13 939	16 439
3.2.5.0		CONTRIBUIÇÕES DE PREVIDÊNCIA SOCIAL		
	04.00	Obrigações da Entidade	142 695	139 695
	05.00	Fundo de Garantia do Tempo de Serviço	49 650	49 650
		SOMA DO ELEMENTO 3.2.5.0	192 345	189 345
3.2.7.0		DIVERSAS TRANSFERÊNCIAS CORRENTES		
3.2.7.5		PESSOAIS		
	01	Auxílio-doença	5 000	5 000
	02	Auxílio-funeral	5 000	5 000
		SOMA DO ELEMENTO 3.2.7.5	10 000	10 000
		SOMA DOS ELEMENTOS 3.2.0.0	241 089	241 089
		SOMA DA CATEGORIA 3.0.0.0	3 369 404	3 369 404

107

FUNDAÇÃO INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA

ESCOLA NACIONAL DE CIÊNCIAS ESTATÍSTICAS

Orçamento para o exercício de 1972

Tabela Explicativa da Despesa

(Conclusão)

CATEGORIA ECONÔMICA		ELEMENTO E SUBELEMENTO	DOTAÇÃO (Cr$)	
			Situação atual	Situação nova
4.0.0.0		DESPESAS DE CAPITAL		
4.1.0.0		INVESTIMENTOS		
4.1.3.0		EQUIPAMENTOS E INSTALAÇÕES		
4.1.3.1		Máquinas, motores e aparelhos.....	110 000	110 000
4.1.3.7		Diversos equipamentos e instalações.....	10 000	10 000
		SOMA DO ELEMENTO 4.1.3.0.....	120 000	120 000
4.1.4.0		MATERIAL PERMANENTE		
	02.00	Material bibliográfico, discotecas e filmotecas; objetos históricos, obras de arte e peças para museus...	20 000	20 000
	04.00	Material artístico e instrumentos de música; insígnias, flâmulas e bandeiras; artigos p/esportes e p/jogos e divertimentos infantis.....	15 000	15 000
	07.00	Modelos e utensílios de escritório, bibliotecas, ensino, laboratórios e gabinete técnico ou científico.....	2 000	2 000
	08.00	Mobiliário em geral.....	41 000	41 000
	11.00	*Outros materiais de uso duradouro* 02 — Outros materiais permanentes.....	2 000	2 000
		SOMA DO ELEMENTO 4.1.4.0.....	80 000	80 000
		SOMA DA CATEGORIA 4.0.0.0....	200 000	200 000
		RESUMO		
		DESPESAS CORRENTES.....		3 369 404
		DESPESAS DE CUSTEIO.....	3 128 315	
		TRANSFERÊNCIAS CORRENTES.....	241 089	
4.0.0.0		DESPESAS DE CAPITAL.....		200 000
		INVESTIMENTOS.....	200 000	
		TOTAL GERAL.....		3 569 404

108

RESOLUÇÃO COD-332, DE 13 DE OUTUBRO DE 1972

Altera disposições da Resolução COD/239/71, *de* 18 *de fevereiro de* 1971, *e dá outras providências.*

O CONSELHO DIRETOR da FUNDAÇÃO IBGE, no uso das atribuições que lhe confere o artigo 16, alíneas *f* e *g*, do Estatuto, e

considerando que a previsão orçamentária para o exercício de 1973 implica numa redução dos quantitativos atribuídos a despesas de pessoal,

RESOLVE:

Art. 1.º — Os dispositivos da Resolução COD/239/71, de 18 de fevereiro de 1971, adiante indicados, passam a vigorar com a seguinte redação:

"Art. 9.º — ...

§ 1.º — A gratificação de função será igual à diferença entre o salário do cargo de confiança, previsto na tabela do Anexo II, e o salário do cargo efetivo, ficando assegurada, porém, a percepção do salário do cargo efetivo, caso seja este o de maior valor.

§ 2.º — ao servidor dos quadros em extinção ou ao servidor posto à disposição da Entidade, poderá ser atribuída a gratificação de função nas formas previstas neste artigo".

"Art. 24 — Pelo desempenho de encargos especiais, de caráter transitório ou para o qual não haja sido criado o competente cargo efetivo ou de confiança, poderá ser concedida a empregado da Fundação ou a servidor do quadro em extinção, ou posto à disposição da Entidade, gratificação proporcional à duração do trabalho e à importância e complexidade da tarefa, dentro das normas a serem baixadas pela Presidência.

Parágrafo único — A gratificação prevista neste artigo será arbitrada e concedida pelo Presidente da Fundação".

Art. 2.º — Fica revogada a Resolução COD/304/72, de 17 de março de 1972, e demais disposições em contrário.

Art. 3.º — O servidor que, em decorrência do disposto no Art. 2.º desta Resolução, venha a sofrer decesso na sua remuneração, continuará com a mesma remuneração até posterior compensação, de acordo com normas a serem baixadas pela Presidência.

Art. 4.º — A presente Resolução entra em vigor a partir desta data.

(a) *Regina Maria Lima Garcia,* Secretária-Assistente. — (a) *Horácio Rubens de Mello e Souza,* Secretário-Geral. — (a) *Isaac Kerstenetzky,* Presidente.

109

RESOLUÇÃO COD-333, DE 26 DE OUTUBRO DE 1972

Abre Crédito Especial ao IBE — Departamento de Censos-DECEN, no montante de ..... Cr$ 328.000,00 (*trezentos e vinte e oito mil cruzeiros*) *destinado a obras de acréscimo no* 5.º *pavimento do imóvel da Rua Equador,* 558.

O CONSELHO DIRETOR da FUNDAÇÃO IBGE, no uso das

atribuições que lhe confere o artigo 16, alínea *b*, do Estatuto, e

considerando a necessidade da realização inadiável de obras de acréscimo, bem como adaptação da área existente no 5.º pavimento do edifício-sede do Departamento de Censos do IBE;

considerando a inexistência de recursos orçamentários próprios, para atendimento desse encargo;

considerando os pareceres constantes do processo n.º 4.199/72-IBE, e que a Fundação dispõe de recursos financeiros oriundos de saldo orçamentário do exercício anterior, inscrito sob o título "Fundos Especiais";

considerando, finalmente, o disposto no artigo 48, do Estatuto da Fundação.

RESOLVE:

Art. 1.º — Fica aberto ao Instituto Brasileiro de Estatística da Fundação IBGE, o Crédito Especial no montante de ..... Cr$ 328.000,00 (trezentos e vinte e oito mil cruzeiros), mediante apropriação de recursos financeiros oriundos de saldo orçamentário do exercício anterior, inscrito sob o título "Fundos Especiais", destinado à realização de obras de acréscimo no 5.º pavimento do edifício-sede do Departamento de Censos do IBE.

Art. 2.º — Esta Resolução entra em vigor nesta data.

(a) *Regina Maria Lima Garcia,* Secretária-Assistente. — (a) *Horácio Rubens de Mello e Souza,* Secretário-Geral. — (a) *Isaac Kerstenetzky,* Presidente.

RESOLUÇÃO COD-334, DE 26 DE OUTUBRO DE 1972

Altera o orçamento analítico do Serviço Gráfico, relativo ao exercício de 1972, *aprovado pela Resolução* COD-296/72, *de* 10 *de janeiro de* 1972.

O CONSELHO DIRETOR da FUNDAÇÃO IBGE, no uso das atribuições que lhe confere o artigo 16, alínea *b*, do Estatuto, e

considerando que o prosseguimento normal dos trabalhos programados para o exercício corrente, a cargo do Serviço Gráfico-SERGRAF, impõe suplementação para alguns elementos integrantes da tabela explicativa da despesa, a que se refere a Resolução COD-296/72, de 10 de janeiro de 1972;

considerando que essa suplementação poderá ser obtida mediante a transposição de recursos existentes em outros elementos;

considerando o disposto no artigo 48 do Estatuto da Fundação,

RESOLVE:

Art. 1.º — Ficam autorizadas as alterações constantes da tabela anexa, as quais modificam o orçamento da despesa do Serviço Gráfico-SERGRAF, aprovado pela Resolução COD-296/72, de 10 de janeiro de 1972.

Art. 2.º — Esta Resolução entra em vigor nesta data.

(a) *Regina Maria Lima Garcia,* Secretária-Assistente. — (a) *Horácio Rubens de Mello e Souza,* Secretário-Geral. — (a) *Isaac Kerstenetzky,* Presidente.

FUNDAÇÃO IBGE — SERVIÇO GRÁFICO

ORÇAMENTO DE 1972

(Continua)

CATEGORIA ECONÔMICA, ELEMENTO E SUBELEMENTO	SITUAÇÃO ATUAL (Cr$)	SITUAÇÃO NOVA (Cr$)
3.0.0.0 — DESPESAS CORRENTES		
3.1.0.0 — DESPESAS DE CUSTEIO		
3.1.1.0 — PESSOAL		
3.1.1.1 — PESSOAL CIVIL		
3.1.1.1.02.00 — DESPESAS VARIÁVEIS COM PESSOAL		
02 — Diária	5 000,00	24 000,00
03 — Substituições	18 000,00	22 000,00
11 — Salário do Pessoal Regido pela CLT		
01 — Salários dos Quadros em Extinção	4 790 000,00	4 640 000,00
02 — Salários dos Quadros da Fundação		
a) Salários	694 000,00	654 000,00
13 — Diversos		
01 — Gratificação por desempenho, de Encargos Especiais e Prestação de Serviços Extraordinários	300 000,00	272 000,00
SOMA DO ELEMENTO 3.1.1.0	5 807 000,00	5 617 000,00
3.1.2.0 — MATERIAL DE CONSUMO		
3.1.2.02.00 — Impressos, Artigos de Expediente, Desenho, Cartografia, Geodésia, Topografia e Ensino	16 000,00	18 000,00
3.1.2.03.00 — Artigos de Higiene, Conservação, Acondicionamento e Embalagem	39 000,00	39 000,00
3.1.2.04.00 — Combustíveis e Lubrificantes	75 000,00	75 000,00
3.1.2.05.00 — Materiais e Acessórios de Máquinas, de Viaturas, de Aparelhos, de Instrumentos e de Móveis	380 000,00	380 000,00
3.1.2.08.00 — Gêneros de Alimentação	470 000,00	520 000,00
3.1.2.10.00 — Matérias-Primas e Produtos Manufaturados ou Semi-Manufaturados, destinados a Transformação; Material para Conservação de Bens Imóveis		
01 — Matérias-Primas	3 400 000,00	3 400 000,00
02 — Material para Conservação	82 000,00	102 000,00
3.1.2.11.00 — Produtos Químicos, Biológicos, Farmacêuticos e Odontológicos, Vidraçaria, Artigos Cirúrgicos e Outros de Laboratório, Enfermaria, Gabinetes Técnicos e Científicos	9 000,00	9 000,00
3.1.2.13.00 — Vestuários, Uniformes, Artigos para Esportes, Jogos e Divertimentos Infantis, s/Equipamentos e Respectivos Acessórios, Calçados, Roupa de Cama, Mesa, Copa, Cozinha e Banho	22 000,00	22 000,00

111

FUNDAÇÃO IBGE — SERVIÇO GRÁFICO

ORÇAMENTO DE 1972

(Continuação)

CATEGORIA ECONÔMICA, ELEMENTO E SUBELEMENTO	SITUAÇÃO ATUAL (Cr$)	SITUAÇÃO NOVA (Cr$)
3.1.2.15.00 — Lâmpadas Incandescentes e Fluorescentes, Acessórios para Instalações Elétricas....	35 000,00	35 000,00
3.1.2.17.00 — Outros Materiais de Consumo 03 — Diversos.....	37 000,00	57 000,00
SOMA DO ELEMENTO 3.1.2.0.....	4 565 000,00	4 657 000,00
3.1.3.0 — SERVIÇOS DE TERCEIROS		
3.1.3.1.01.00 — Remuneração de Serviços Pessoais.....	31 000,00	16 000,00
3.1.3.2.01.00 — Acondicionamento e transporte de encomendas, Cargas e Animais.....	2 500,00	9 500,00
3.1.3.2.02.00 — Passagens, Transporte de Pessoas e de s/Bagagens, Pedágios.....	10 000,00	21 000,00
3.1.3.2.03.00 — Assinaturas e Aquisição de Jornais, Revistas e Recortes de Publicações.....	1 500,00	3 000,00
3.1.3.2.04.00 — Iluminação, Força Motriz, Gás.....	105 000,00	125 000,00
3.1.3.2.05.00 — Serviços de Asseio e Higiene, Taxas de água, Esgoto, Lixo e Outras Correlatas.....	15 000,00	65 000,00
3.1.3.2.06.00 — Reparos, Adaptações e Conservação de Bens Móveis e Imóveis.....	325 000,00	375 000,00
3.1.3.2.08.00 — Serviços Médicos, Hospitalares, Funerários e Judiciários.....	14 000,00	26 000,00
3.1.3.2.09.00 — Serviços de Comunicação em Geral.....	41 000,00	50 000,00
3.1.3.2.10.00 — Locação de Bens Móveis e Imóveis; Tributos e Despesas de Condomínios.....	18 000,00	18 000,00
3.1.3.2.11.00 — Seguros em Geral.....	25 000,00	50 000,00
3.1.3.2.12.00 — Comissões, Corretagens e Serviços Bancários	2 000,00	2 000,00
3.1.3.2.16.00 — Outros Serviços de Terceiros 01 — Serviços de Seleção e Aperfeiçoamento do Pessoal.....	4 000,00	7 000,00
02 — Serviços e Tarefas de Caráter Temporário, Esporádico e de Urgência....	135 000,00	100 000,00
SOMA DO ELEMENTO 3.1.3.0.....	729 000,00	867 500,00
3.1.4.0 — ENCARGOS DIVERSOS		
3.1.4.01.00 — Despesas Miúdas e de Pronto Pagamento...	7 000,00	7 000,00
3.1.4.04.00 — Festividades, Recepções, Hospedagens.....	3 000,00	3 000,00
3.1.4.13.00 — Outros Encargos 03 — Diversos.....	9 000,00	9 000,00
SOMA DO ELEMENTO 3.1.4.0.....	19 000,00	19 000,00
SOMA DA CATEGORIA 3.1.0.0.....	11 120 000,00	11 160 500,00

FUNDAÇÃO IBGE — SERVIÇO GRÁFICO

ORÇAMENTO DE 1972

(Conclusão)

CATEGORIA ECONÔMICA, ELEMENTO E SUBELEMENTO	SITUAÇÃO ATUAL (Cr$)	SITUAÇÃO NOVA (Cr$)
3.2.0.0 — TRANSFERÊNCIAS CORRENTES		
3.2.5.0 — CONTRIBUIÇÕES DE PREVIDÊNCIA SOCIAL		
3.2.5.04.00 — Obrigações das Entidades	1 026 000,00	985 500,00
3.2.5.05.00 — Fundo de Garantia de Tempo de Serviço	440 000,00	440 000,00
SOMA DO ELEMENTO 3.2.0.0	1 446 000,00	1 425 500,00
SOMA DA CATEGORIA 3.0.0.0	12 586 000,00	12 586 000,00
4.0.0.0 — DESPESAS DE CAPITAL		
4.1.0.0 — INVESTIMENTOS		
4.1.1.0 — OBRAS PÚBLICAS		
4.1.1.2 — Início das Obras	10 000,00	10 000,00
SOMA DO ELEMENTO 4.1.1.0	10 000,00	10 000,00
4.1.3.0 — EQUIPAMENTOS E INSTALAÇÕES		
4.1.3.1 — Máquinas, Motores e Aparelhos	487 285,00	416 285,00
4.1.3.7 — Diversos Equipamentos e Instalações	69 715,00	139 715,00
SOMA DO ELEMENTO 4.1.3.0	557 000,00	556 000,00
4.1.4.0 — MATERIAL PERMANENTE		
4.1.4.03.00 — Ferramentas e Utensílios das Oficinas	15 000,00	15 000,00
4.1.4.05.00 — Utensílios de Copa, Cozinha e Enfermaria	1 000,00	2 000,00
4.1.4.07.00 — Modelos e Utensílios de Escritório, Biblioteca, Ensino, Laboratório e Gabinetes Técnicos e Científicos	1 000,00	1 000,00
4.1.4.08.00 — Mobiliário em Geral	40 000,00	40 000,00
SOMA DO ELEMENTO 4.1.4.0	57 000,00	58 000,00
SOMA DA CATEGORIA 4.0.0.0	624 000,00	624 000,00
RESUMO		
3.0.0.0 — DESPESAS CORRENTES		
3.1.0.0 — DESPESAS DE CUSTEIO	11 120 000,00	11 160 500,00
3.2.0.0 — TRANSFERÊNCIAS CORRENTES	1 466 000,00	1 425 500,00
4.0.0.0 — DESPESAS DE CAPITAL		
4.1.0.0 — INVESTIMENTOS	624 000,00	624 000,00
TOTAL GERAL	13 210 000,00	13 210 000,00

113

RESOLUÇÃO COD-335, DE 26 DE OUTUBRO DE 1972

Altera o Plano de Aplicação dos recursos, destinados à Fundação IBGE, para implantação do Instituto Brasileiro de Informática, aprovada pela Resolução COD/322/72, *de 3 de agosto de* 1972.

O CONSELHO DIRETOR da FUNDAÇÃO IBGE, no uso das atribuições que lhe confere o artigo 16, alínea *b*, do Estatuto, e

considerando o Plano de Aplicação de recursos orçamentários, destinados à Fundação IBGE, para implantação do Instituto Brasileiro de Informática-IBI, aprovado pelo Ministério do Planejamento e Coordenação Geral, publicado no "Diário Oficial" da União, de 18 de abril último;

114

considerando que se faz mister, à vista do processo de número 1.062/72, oriundo daquele Instituto, o remanejamento dos quantitativos atribuídos aos itens do aludido Plano de Aplicação;

considerando, finalmente, o disposto no artigo 48 do Estatuto da Fundação,

RESOLVE:

Art. 1.º — Alterar, na forma do Anexo a esta Resolução, o Plano de Aplicação dos recursos orçamentários, destinados à Fundação IBGE, para implantação do Instituto Brasileiro de Informática-IBI, aprovado pela Resolução COD-322/72, de 3 de agosto de 1972.

Art. 2.º — Ficam autorizadas as alterações constantes da tabela anexa, as quais modificam o orçamento analítico da despesa do Instituto Brasileiro de Informática-IBI, aprovado pela Resolução COD-323/72, de 3 de agosto de 1972.

Art. 3.º — Esta Resolução entra em vigor a partir desta data.

(a) *Regina Maria Lima Garcia,* Secretária-Assistente. — (a) *Horácio Rubens de Mello e Souza,* Secretário-Geral. — (a) *Isaac Kerstenetzky,* Presidente.

ANEXO À RESOLUÇÃO COD/335/72, DE 26 DE OUTUBRO DE 1972

Alteração do Plano de Aplicação dos recursos orçamentários, destinados à Fundação IBGE, para implantação do Instituto Brasileiro de Informática-IBI, no valor de Cr$ 79.000.000,00 (setenta e nove milhões de cruzeiros) tendo em vista a aprovação anterior do Ministério do Planejamento e Coordenação Geral, publicada no "Diário Oficial" da União, de 18 de abril do corrente exercício.

28.03 — Fundo de Desenvolvimento de Áreas Estratégicas.

28.03.0102-10001 — Projetos Especiais na Área da Informática, dos Estudos e das Pesquisas para o Desenvolvimento.

CÓDIGO E ESPECIFICAÇÃO DA DESPESA	SITUAÇÃO ANTERIOR (Cr$)	SITUAÇÃO NOVA (Cr$)
4.0.0.0 — DESPESAS DE CAPITAL		
4.1.0.0 — INVESTIMENTOS		
4.1.2.0 — SERVIÇOS EM REGIME DE PROGRAMAÇÃO ESPECIAL		
Natureza da Despesa — Valor em Cr$		
3.0.0.0 — DESPESAS CORRENTES		
3.1.0.0 — DESPESAS DE CUSTEIO		
3.1.1.0 — PESSOAL		
3.1.1.1 — PESSOAL CIVIL		
02.00 — Despesas Variáveis com Pessoal Civil.....	12 490 000,00	9 570 000,00
3.1.2.0 — Material de Consumo.....	1 264 000,00	2 203 000,00
3.1.3.0 — SERVIÇOS DE TERCEIROS		
3.1.3.1 — Remuneração de Serviços Pessoais.....	7 789 000,00	865 000,00
3.1.3.2 — Outros Serviços de Terceiros.....	4 746 000,00	14 886 000,00
3.1.4.0 — Encargos Diversos.....	565 000,00	620 000,00
3.2.0.0 — TRANSFERÊNCIAS CORRENTES		
3.2.4.0 — Juros.....	100 000,00	100 000,00
3.2.5.0 — Contribuição de Previdência Social.....	3 320 000,00	2 440 000,00
3.2.7.0 — Diversas Transferências Correntes.....	56 000,00	56 000,00
4.0.0.0 — DESPESAS DE CAPITAL		
4.1.0.0 — INVESTIMENTOS		
4.1.3.0 — Equipamentos e Instalações.....	40 350 000,00	41 350 000,00
4.1.4.0 — Material Permanente.....	1 780 000,00	1 010 000,00
4.2.0.0 — INVERSÕES FINANCEIRAS		
4.2.1.0 — Aquisição de Imóveis.....	6 540 000,00	5 900 000,00
	79 000 000,00	79 000 000,00

115

ORÇAMENTO DE 1972

TABELA EXPLICATIVA DA DESPESA COM AS ALTERAÇÕES APROVADAS PELA RESOLUÇÃO COD/335/72, DE 26 DE OUTUBRO DE 1972

(Continua)

CÓDIGO	ESPECIFICAÇÃO DA DESPESA	SITUAÇÃO ATUAL (Cr$)	SITUAÇÃO NOVA (Cr$)
3.0.0.0	DESPESAS CORRENTES		
3.1.0.0	DESPESAS DE CUSTEIO		
3.1.1.0	PESSOAL		
3.1.1.1	PESSOAL CIVIL		
02.00	DESPESAS VARIÁVEIS		
02.01	Ajuda de Custo	60 000	60 000
02.02	Diárias	20 000	20 000
02.03	Substituições	20 000	20 000
02.06	Gratificação pelos encargos de seleção e aperfeiçoamento de pessoal	50 000	50 000
02.07	Gratificação pelo estudo ou serviço no estrangeiro	280 000	280 000
02.09	Salário do pessoal regido pela CLT		
	02 — Salários dos quadros da Fundação	10 000 000	7 500 000
	03 — Gratificação por encargos técnicos, assessoramento e chefia	2 000 000	1 000 000
	04 — Gratificação pelo desempenho de encargos especiais e prestação de serviços extraordinários	60 000	600 000
	SOMA DO ELEMENTO 3.1.1.0	12 490 000	9 570 000
3.1.2.0	MATERIAL DE CONSUMO		
02.00	Impressos, artigos de expediente, desenho, cartografia, geodésia, topografia e ensino	150 000	150 000
03.00	Artigos de higiene, conservação, acondicionamento e embalagem	25 000	50 000
04.00	Combustíveis e lubrificantes	115 000	115 000
05.00	Materiais e acessórios de máquinas, de viaturas, de aparelhos, de instrumentos e de móveis	30 000	50 000
10.00	Matérias-primas e produtos manufaturados destinados a transformação; material para conservação de bens imóveis	900 000	1 700 000
11.00	Produtos químicos, biológicos; vidraria, artigos cirúrgicos e outros de laboratório, enfermaria, gabinete técnico e científico	6 000	20 000
13.00	Vestuários, uniformes, artigos para esportes, jogos e divertimentos infantis, seus equipamentos e respectivos acessórios; calçados, roupa de cama, mesa, copa, cozinha e banho	6 000	26 000
14.00	Material para fotografia, filmagem, radiografia, gravação, radiofonia e telecomunicações	6 000	6 000
15.00	Lâmpadas incandescentes ou fluorescentes, acessórios para instalações elétricas	15 000	50 000
17.00	Outros materiais de consumo:		
	01 — Instrumentos de coleta e material de registro, controle e apuração estatística	6 000	6 000
	04 — Diversos	5 000	30 000
	SOMA DO ELEMENTO 3.1.2.0	1 264 000	2 203 000

116

ORÇAMENTO DE 1972

TABELA EXPLICATIVA DA DESPESA COM AS ALTERAÇÕES APROVADAS PELA RESOLUÇÃO COD/335/72, DE 26 DE OUTUBRO DE 1972

(Continuação)

CÓDIGO	ESPECIFICAÇÃO DA DESPESA	SITUAÇÃO ATUAL (Cr$)	SITUAÇÃO NOVA (Cr$)
3.1.3.0	SERVIÇOS DE TERCEIROS		
3.1.3.1	REMUNERAÇÃO DE SERVIÇOS PESSOAIS		
01.00	Pessoal pago mediante recibo	7 789 000	865 000
3.1.3.2	OUTROS SERVIÇOS DE TERCEIROS		
01.00	Acondicionamento e transporte de encomendas, cargas e animais	15 000	30 000
02.00	Passagens, transporte de pessoas e de suas bagagens, pedágios	50 000	500 000
03.00	Assinatura e aquisição de jornais, revistas e recortes de publicações	20 000	20 000
04.00	Iluminação, força motriz e gás	50 000	75 000
05.00	Serviços de asseio e higiene; taxas de água, esgoto, lixo e outras correlatas	80 000	150 000
06.00	Reparos, adaptaçeõs e conservação de bens móveis e imóveis	1 000 000	3 500 000
07.00	Serviços de divulgação, de impressão e de encadernação	150 000	150 000
08.00	Serviços médicos, hospitalares, funerários e judiciários	10 000	10 000
09.00	Serviços de comunicação em geral	80 000	80 000
10.00	Locação de bens móveis e imóveis; tributos e despesas de condomínio:		
	01 — Bens imóveis	500 000	500 000
	02 — Equipamentos de apuração mecânica	1 500 000	8 500 000
	03 — Outros bens móveis	100 000	100 000
11.00	Seguros em geral	60 000	60 000
12.00	Comissões, corretagens e serviços bancários	5 000	5 000
16.00	Diversos:		
	01 — Seleção e aperfeiçoamento de pessoal	1 000 000	1 000 000
	02 — Serviços e tarefas de caráter temporário, esporádico, de segurança e urgência	120 000	200 000
	04 — Publicações de editais e avisos	6 000	6 000
	SOMA DO ELEMENTO 3.1.3.0	12 535 000	15 751 000
3.1.4.0	ENCARGOS DIVERSOS		
01.00	Despesas miúdas de pronto pagamento	15 000	30 000
04.00	Festividades recepções, hospedagens e homenagens	80 000	80 000
08.00	Exposições, congressos e conferências	100 000	100 000
10.00	Assitência Social	20 000	60 000
13.00	Outros encargos		
	05 — Bolsas de estudos	300 000	300 000
	06 — Diversos	50 000	50 000
	SOMA DO ELEMENTO 3.1.4.0	565 000	620 000
	SOMA DA SUBCATEGORIA 3.1.0.0.	26 854 000	27 504 000

117

ORÇAMENTO DE 1972

TABELA EXPLICATIVA DA DEPESA COM AS ALTERAÇÕES APROVADAS PELA RESOLUÇÃO COD/335/72, DE 26 DE OUTUBRO DE 1972

(Continuação)

CÓDIGO	ESPECIFICAÇÃO DA DESPESA	SITUAÇÃO ATUAL (Cr$)	SITUAÇÃO NOVA (Cr$)
3.2.0.0	TRANSFERÊNCIAS CORRENTES		
3.2.4.0	JUROS		
3.2.4.2	JUROS DE EMPRÉSTIMOS		
02	Empréstimos externos	100 000	100 000
3.2.5.0	CONTRIBUIÇÃO DE PREVIDÊNCIA SOCIAL		
04.00	Obrigações da entidade INPS	1 980 000	1 300 000
05.00	Fundo de garantia de tempo de serviço	900 000	800 000
06.00	Programa de formação de patrimônio do servidor público (PASEP)	440 000	340 000
	SOMA DOS ELEMENTOS 3.2.4.0 e 3.2.5.0	3 420 000	2 540 000
3.2.7.0	DIVERSAS TRANSFERÊNCIAS CORRENTES		
3.2.7.5	PESSOAS		
01.00	Auxílio-doença	20 000	20 000
02.00	Indenizações trabalhistas	20 000	20 000
03.00	Auxílio funeral	6 000	6 000
3.2.7.6	Cotas de adesões, subvenções e auxílios	10 000	10 000
	SOMA DO ELEMENTO 3.2.7.0	56 000	56 000
	SOMA DA SUBCATEGORIA 3.2.0.0.	3 576 000	2 596 000
	TOTAL DA CATEGORIA 3.0.0.0	30 330 000	30 100 000
4.0.0.0	DESPESAS DE CAPITAL		
4.1.0.0	INVESTIMENTOS		
4.1.3.0	EQUIPAMENTOS E INSTALAÇÕES		
01.00	Máquinas, motores e aparelhos	40 500 000	40 500 000
04.00	Automóveis, autocaminhões e outros veículos de tração mecânica	250 000	250 000
07.00	Diversos equipamentos e instalações	100 000	600 000
	SOMA DO ELEMENTO 4.1.3.0	40 350 000	41 350 000

ORÇAMENTO DE 1972

TABELA EXPLICATIVA DA DEPESA COM AS ALTERAÇÕES APROVADAS PELA RESOLUÇÃO COD/335/72, DE 26 DE OUTUBRO DE 1972

(Conclusão)

CÓDIGO	ESPECIFICAÇÃO DA DESPESA	SITUAÇÃO ATUAL (Cr$)	SITUAÇÃO NOVA (Cr$)
4.1.4.0	MATERIAL PERMANENTE		
02.00	Material bibliográfico, discoteca e filmoteca, objetos históricos, obras de arte e peças para museus.....	1 200 000	200 000
03.00	Ferramentas e utensílios de oficinas.....	10 000	10 000
04.00	Material artístico e instrumentos de música, insígnias, flâmulas e bandeiras; artigos para esportes, para jogos e divertimentos.....	5 000	5 000
05.00	Utensílios de copa, cozinha, dormitórios e enfermaria	15 000	35 000
06.00	Veículos de tração pessoal e animal.....	50 000	50 000
07.00	Modelos e utensílios de escritório e gabinete técnico ou científico.....	600 000	60 000
08.00	Mobiliário em geral.....	400 000	600 000
11.00	Outros materiais de uso duradouro.....	40 000	50 000
	SOMA DO ELEMENTO 4.1.4.0.....	1 780 000	1 010 000
	SOMA DA SUBCATEGORIA 4.1.0.0.	42 130 000	42 360 000
4.2.0.0	INVERSÕES FINANCEIRAS		
4.2.1.0	Aquisição de Imóveis.....	6 540 000	5 900 000
	SOMA DO ELEMENTO 4.2.1.0.....	6 540 000	5 900 000
	TOTAL DA CATEGORIA 4.0.0.0.....	48 670 000	48 900 000
	TOTAL GERAL.....	79 000 000	79 000 000
	RESUMO		
3.0.0.0	DESPESAS CORRENTES		
3.1.0.0	DESPESAS DE CUSTEIO.....	26 854 000	28 144 000
3.2.0.0	TRANSFERÊNCIAS CORRENTES.....	3 476 000	2 596 000
4.0.0.0	DESPESAS DE CAPITAL		
4.1.0.0	INVESTIMENTOS.....	42 130 000	42 360 000
4.2.0.0	INVERSÕES FINANCEIRAS.....	6 540 000	5 900 000
	TOTAL GERAL.....	79 000 000	79 000 000

RESOLUÇÃO COD-336, DE 30 DE OUTUBRO DE 1972

Altera o orçamento analítico do Instituto Brasileiro de Estatística, relativo ao exercício de 1972, aprovado pela Resolução COD/292/72, de 10 de janeiro de 1972.

O CONSELHO DIRETOR da FUNDAÇÃO IBGE, no uso das atribuições que lhe confere o artigo 16, alínea *b*, do Estatuto, e

considerando que o prosseguimento normal dos trabalhos programados para o exercício em curso, a cargo do Instituto Brasileiro de Estatística-IBE, impõe sejam suplementados alguns subelementos integrantes da Tabela Explicativa da Despesa, a que se refere a Resolução COD/292/72, de 10 de janeiro de 1972;

considerando que parte dessa suplementação poderá ser obtida mediante a transposição de recursos disponíveis em outros subelementos na forma indicada no processo n.º 9.180/IBE;

considerando, finalmente, o disposto no artigo 48 do Estatuto da Fundação,

RESOLVE:

Art. 1.º — Ficam autorizadas as alterações constantes da tabela anexa, as quais modificam o orçamento analítico da despesa do Instituto Brasileiro de Estatística-IBE, aprovado pela Resolução COD/292/72, de 10 de janeiro de 1972.

Art. 2.º — Esta Resolução entra em vigor nesta data.

(a) *Regina Maria Lima Garcia,* Secretária-Assistente. — (a) *Horácio Rubens de Mello e Souza,* Secretário-Geral. — (a) *Isaac Kerstenetzky,* Presidente.

120

TABELA EXPLICATIVA DA DESPESA EXERCÍCIO DE 1972

(Continua)

CATEGORIA ECONÔMICA	DOTAÇÃO (Cr$)	
	Situação atual	Situação nova
3.0.0.0 — DESPESAS CORRENTES		
3.1.0.0 — DESPESAS DE CUSTEIO		
3.1.1.0 — PESSOAL		
3.1.1.1.01.00 — VENCIMENTOS E VANTAGENS FIXAS		
01 — Vencimentos	24 500 000	24 500 000
04 — Auxílio p/diferença de "Caixa"	10 000	10 000
05 — Gratificação de função	2 650 000	2 650 000
07 — Gratificação pela participação em órgãos de deliberação coletiva	40 000	40 000
08 — Gratificação adicional p/tempo de serviço (qüinqüênios)	4 530 000	4 530 000
09 — Gratificação pelo exercício em regime de tempo integral e dedicação exclusiva	2 460 000	2 460 000
10 — Gratificação de Raios X	20 000	20 000
SOMA	34 210 000	34 210 000

TABELA EXPLICATIVA DA DESPESA EXERCÍCIO DE 1972

(Continuação)

CATEGORIA ECONOMICA	DOTAÇÃO (Cr$)	
	Situação atual	Situação nova
3.1.1.1.02.00 — DESPESAS VARIÁVEIS COM PESSOAL		
01 — Ajuda de custo	70 000	70 000
02 — Diárias	2 500 000	2 500 000
03 — Substituições	10 000	10 000
06 — Gratificação p/encargos de seleção e aperfeiçoamento de pessoal	8 000	8 000
09.01 — Salário dos quadros em extinção:		
a) Salários	1 680 000	1 680 000
09.02 — Salário dos quadros da Fundação:		
a) Salários	11 214 727	11 214 727
b) Gratificação p/encargos técnicos, assessoramento e chefia	2 120 000	2 120 000
c) Gratificação p/tempo de serviço	2 000	2 000
11 — Outras Despesas variáveis	—	—
11.01 — Gratificação p/desempenho de encargos especiais e prestação de serviços extraordinários	50 000	50 000
SOMA	17 654 727	17 654 727
SOMA DO ELEMENTO 3.1.1.0	51 864 727	51 864 727
3.1.2.0 — MATERIAL DE CONSUMO		
3.1.2.02.00 — Impressos, artigos de expedientes, desenho, cartografia, geodésia, topografia e ensino	550 000	550 000
3.1.2.03.00 — Artigos de higiene, conservação, acondicionamento e embalagem	102 150	102 150
3.1.2.04.00 — Combustíveis e lubrificantes	81 300	81 300
3.1.2.05.00 — Materiais e acessórios de máquinas de viaturas, de aparelhos de instrumentos e de móveis	145 000	145 000
3.1.2.10.00 — Matérias primas e produtos manufaturados ou semimanufaturados destinados a transformação; material para conservação de bens imóveis	168 700	168 700
3.1.2.11.00 — Produtos químicos, biológicos, farmacêuticos e odontológicos; e outros de laboratório, enfermaria, gabinete técnico e científico	3 000	3 000
3.1.2.13.00 — Vestuários, uniformes, artigos para esportes, seus equipamentos e respectivos acessórios; calçados, roupa de cama, mesa, copa, cozinha e banho	40 000	40 000
3.1.2.14.00 — Material p/fotografia, filmagem, radiofonia, gravação, e radiografia e telecomunicações	2 000	2 000
3.1.2.15.00 — Lâmpadas incandescentes e fluorescentes; acessórios p/instalações elétricas	45 000	45 000
3.1.2.17.00 — Outros materiais de consumo:		
01 — Instrumentos de coleta e material de registro, controle e apuração estatística	180 000	180 000
04 — Diversos	57 347	57 347
SOMA DO ELEMENTO 3.1.2.0	1 374 497	1 374 497

121

TABELA EXPLICATIVA DA DESPESA EXERCÍCIO DE 1972

(Continuação)

CATEGORIA ECONÔMICA	DOTAÇÃO (Cr$) Situação atual	Situação nova
3.1.3.0 — SERVIÇOS DE TERCEIROS		
3.1.3.1 — REMUNERAÇÃO DE SERVIÇOS PESSOAIS		
3.1.3.1.01.00 — Pessoal pago mediante recibo	1 475 625	609 625
3.1.3.2 — OUTROS SERVIÇOS DE TERCEIROS		
3.1.3.2.01.00 — Acondicionamento e transportes de encomendas cargas e animais	360 000	435 030
02.00 — Passagens, transportes de pessoas e de suas bagagens, pedágios	500 000	708 800
03.00 — Assinaturas e aquisição de jornais, revistas e recortes de publicações	30 000	30 000
04.00 — Iluminação, força motriz e gás	200 000	283 040
05.00 — Serviços de asseio e higiene; taxas de água, esgoto, lixo e outras correlatas	300 000	457 100
06.00 — Reparos, adaptações e conservação de bens móveis e imóveis	450 000	584 000
3.1.3.2.07.00 — Serviços de divulgação, de impressão e de encadernação	1 700 000	1 900 000
08.00 — Serviços médicos, hospitalares, funerários e judiciários	70 000	144 700
09.00 — Serviços de comunicação em geral	300 000	534 170
10.00 — Locação de bens móveis e imóveis; tributos e despesas de condomínio:		
01 — Bens imóveis	1 145 000	1 145 000
03 — Outros bens móveis	80 000	105 000
11.00 — Seguros em geral	10 000	10 000
12.00 — Comissões, corretagens e serviços bancários	14 000	19 060
16.00 — Diversos:		
01 — Seleção e aperfeiçoamento de pessoal	5 000	5 000
02 — Serviços e tarefas de caráter temporário, esporádico e de urgência	51 000	67 000
03 — Processamento de dados estatísticos, censitários, geográficos e administrativos	1 632 000	1 334 000
04 — Publicações de editais e avisos	10 000	11 100
07 — Estagiários da ENCE	300 000	250 000
SOMA DO ELEMENTO 3.1.3.0	8 632 625	8 632 625
3.1.4.0 — ENCARGOS DIVERSOS		
3.1.4.01.00 — Despesas miúdas de *pronto pagamento*	40 000	40 000
04.00 — Festividades, recepções, hospedagens e homenagens	20 000	20 000
08.00 — Exposições, congressos e conferências	2 000	2 000
10.00 — Assistência social	5 000	5 000

TABELA EXPLICATIVA DA DESPESA EXERCÍCIO DE 1972

(Continuação)

CATEGORIA ECONÔMICA	DOTAÇÃO (Cr$) Situação atual	Situação nova
13.00 — Outros encargos:		
03 — Conferência Nacional de Estatística-Art. 31 — Dec. n.º 61.126/67	40 000	40 000
05 — Bolsas-de-estudo	60 000	60 000
06 — Diversos	4 382	4 382
SOMA DO ELEMENTO 3.1.4.0..	171 382	171 382
3.1.5.0 — DESPESAS DE EXERCÍCIOS ANTERIORES	380 000	380 000
SOMA DO ELEMENTO 3.1.5.0	380 000	380 000
SOMA DA CATEGORIA 3.1.0.0	62 423 231	62 423 231
3.2.0.0 — TRANSFERÊNCIAS CORRENTES		
3.2.3.0 — TRANSFERÊNCIAS DE ASSISTÊNCIA E PREVIDÊNCIA SOCIAL		
3.2.3.1 — INATIVOS		
3.2.3.1.01.00 — PESSOAL CIVIL		
3.2.3.1.01.01 — Proventos	2 769 900	2 769 900
02 — Vantagens incorporadas	628 280	628 280
03 — Abono provisório e novas aposentadorias	175 216	175 216
SOMA DO ELEMENTO 3.2.3.1	3 573 396	3 573 396
3.2.3.2 — PENSIONISTAS		
3.2.3.2.01.00 — Pensões vitalícias	206 000	206 000
02.00 — Abono provisório e novas pensões	10 437	10 437
SOMA DO SUBELEMENTO 3.2.3.2	216 437	216 437
3.2.3.3 — SALÁRIO-FAMÍLIA		
3.2.3.3.01.00 — Pessoal civil	2 207 820	2 207 820
03.00 — Inativos civis	290 000	290 000
05.00 — Pensionistas	141 625	141 625
SOMA DO SUBELEMENTO 3.2.3.3	2 639 445	2 639 445
SOMA DO ELEMENTO 3.2.3.0..	6 429 278	6 429 278
3.2.5.0 — CONTRIBUIÇÃO DE PREVIDÊNCIA SOCIAL		
3.2.5.04.00 — Obrigações da Entidade	7 565 000	7 565 000
05.00 — Fundo de garantia de tempo de serviço	3 127 819	3 127 819
SOMA DO ELEMENTO 3.2.5.0...	10 692 819	10 692 819

123

TABELA EXPLICATIVA DA DESPESA EXERCÍCIO DE 1972

(Continuação)

CATEGORIA ECONÔMICA	DOTAÇÃO (Cr$) Situação atual	Situação nova
3.2.7.0 — DIVERSAS TRANSFERÊNCIAS CORRENTES		
3.2.7.5 — PESSOAS		
3.2.7.5.01 — Auxílio doença	23 505	23 505
02 — Auxílio funeral	30 000	30 000
SOMA DO ELEMENTO 3.2.7.5..	53 505	53 505
3.2.7.6 — DIVERSOS		
3.2.7.6.01.00 — Quotas de adesão, subvenção e auxílio:		
01 — Auxílio a Campanha Ibegeana contra a Tuberculose	15 000	15 000
02 — Sociedade Brasileira de Estatística	3 000	3 000
04 — Instituto Internacional de Estatística (ISI)	630	630
05 — Instituto Interamericano de Estatística (IASI)	670	670
06 — Assistência a Órgãos do Sistema Estatístico Nacional	1 000 000	1 000 000
SOMA DO ELEMENTO 3.2.7.6..	1 019 300	1 019 300
SOMA DO ELEMENTO 3.2.7.0..	1 072 805	1 072 805
SOMA DA CATEGORIA 3.2.0.0..	18 194 902	18 194 902
SOMA DA CATEGORIA 3.0.0.0..	80 618 133	80 618 133
4.0.0.0 — DESPESAS DE CAPITAL		
4.1.0.0 — INVESTIMENTOS		
4.1.3.0 — EQUIPAMENTOS E INSTALAÇÕES		
4.1.3.1 — Máquinas, motores e aparelhos	1 224 500	1 224 500
4.1.3.7 — Diversos equipamentos e instalações	70 000	70 000
SOMA DO ELEMENTO 4.1.3.0	1 294 500	1 294 500
4.1.4.0 — MATERIAL PERMANENTE		
4.1.4.02.00 — Material bibliográfico, discoteca e filmoteca; objetos históricos, obras de arte e peças p/museus	25 000	28 000
03.00 — Ferramentas e utensílios de oficinas	5 000	5 000
04.00 — Material artístico e instrumentos de música; insígnias, flâmulas e bandeiras; artigos p/esportes para jogos e divertimentos	3 000	4 800
05.00 — Utensílios da copa, cozinha, dormitório e enfermaria	10 000	10 000
06.00 — Veículos de tração pessoal e animal	3 000	3 000
07.00 — Modelos e utensílios de escritório e gabinete técnico ou científico	65 000	55 200
08.00 — Mobiliário em geral	296 300	296 300
11.00 — Outros materiais de usos duradouro	5 000	10 000
SOMA DO ELEMENTO 4.1.4.0..	412 300	412 300
SOMA DA CATEGORIA 4.1.0.0..	1 706 800	1 706 800

124

TABELA EXPLICATIVA DA DESPESA EXERCÍCIO DE 1972

(Conclusão)

CATEGORIA ECONÔMICA	DOTAÇÃO (Cr$)	
	Situação atual	Situação nova
4.2.0.0 — INVERSÕES FINANCEIRAS		
4.2.3.0 — AQUISIÇÃO DE TÍTULOS REPRESENTATIVOS DE CAPITAL DE EMPRESAS EM FUNCIONAMENTO		
4.2.3.1 — Títulos diversos	46 000	46 000
SOMA DO ELEMENTO 4.2.0.0	46 000	46 000
SOMA DA CATEGORIA 4.0.0.0	1 752 800	1 752 800
RESUMO		
3.0.0.0 — DESPESAS CORRENTES	80 618 133	80 618 133
3.1.0.0 — DESPESAS DE CUSTEIO	62 423 231	62 423 231
3.2.0.0 — TRANSFERÊNCIAS CORRENTES	18 194 902	18 194 902
4.0.0.0 — DESPESAS DE CAPITAL	1 752 800	1 752 800
4.1.0.0 — INVESTIMENTOS	1 706 800	1 706 800
4.2.0.0 — INVERSÕES FINANCEIRAS	46 000	46 000
TOTAL GERAL	82 370 933	82 370 933

125

RESOLUÇÃO COD-337, DE 30 DE OUTUBRO DE 1972

Abre Crédito Suplementar ao Orçamento-Programa da Fundação IBGE, no montante de Cr$ 2.210.000,00 *(dois milhões, duzentos e dez mil cruzeiros), destinado ao reforço de dotações orçamentárias da Tabela Explicativa da Despesa do Instituto Brasileiro de Etatística-IBE.*

O CONSELHO DIRETOR da FUNDAÇÃO IBGE, no uso das atribuições que lhe confere o artigo 16, alínea *b*, do Estatuto da Fundação, e

considerando que os recursos orçamentários consignados ao Instituto Brasileiro de Estatística-IBE não permitem o total atendimento dos encargos decorrentes dos programas de trabalho estabelecidos para o segundo semestre do exercício em curso;

considerando que, na conformidade do exposto no processo de n.º 9.180/72-IBE, torna-se necessário o reforço de diversos subelementos, integrantes da Tabela

Explicativa da Despesa, aprovada pela Resolução COD/292/72, de 10 de janeiro de 1972;

considerando que, segundo o processo mencionado, o referido Instituto dispõe de recursos decorrentes de saldos de "Restos a Pagar" cancelados e convertidos em receitas, os quais adicionados às disponibilidades do "Fundo de Reserva Especial-FRE", poderão ser utlizados para a cobertura do "Crédito Suplementar" solicitado;

considerando, finalmente, o disposto no artigo 48 do Estatuto da Fundação,

RESOLVE:

Art. 1.º — Fica aberto, ao Orçamento-Programa da Fundação IBGE, de que trata a Resolução COD/284/71, de 22 de dezembro de 1971, o Crédito Suplementar de ... Cr$ 2.210.000,00 (dois milhões, duzentos e dez mil cruzeiros), destinado ao reforço de dotações orçamentárias da Tabela Explicativa da Despesa, aprovada para o Instituto Brasileiro de Estatística-IBE, pela Resolução COD/292/72, de 10 de janeiro de 1972, alterada pela Resolução COD/336/72, de 30 de outubro de 1972, e consoante as alterações seguintes:

3.0.0.0 — DESPESAS CORRENTES	
3.1.0.0 — DESPESAS DE CUSTEIO	
3.1.2.0 — Material de Consumo	1.092.400,00
3.1.3.0 — Serviços de Terceiros	384.000,00
3.1.4.0 — Encargos Diversos	156.000,00
3.1.5.0 — Despesas de Exercícios Anteriores ...	510.00,00
3.2.7.5 — Pessoas	7.600,00
3.2.7.6 — Diversos	10.000,00
SOMA	2.160.000,00
4.0.0.0 — DESPESA DE CAPITAL	
4.1.0.0 — INVESTIMENTOS	
4.2.0.0 — Inversões Financeiras	50.000,00
TOTAL	2.210.000,00

Art. 2.º — Os recursos necessários à cobertura dos encargos acima referidos serão obtidos, parte Cr$ 1.144.564,85, mediante anulação de Restos a Pagar, e o restante, Cr$ 1.065.435,15 através de destaques do "Fundo de Reserva Especial-FRE", de que trata a Resolução COD/204/70.

Art. 3.º — Fica autorizado o Diretor-Superintendente do Instituto Brasileiro de Estatística a proceder à distribuição, ao nível de subelemento de despesa, dos recursos atribuídos no artigo 1.º.

Art. 4.º — A presente Resolução entra em vigor a partir desta data.

(a) *Regina Maria Lima Garcia,* Secretária-Assistente. — (a) *Horácio Rubens de Mello e Souza,* Secretário-Geral. — (a) *Isaac Kerstenetzky,* Presidente.

· 126

RESOLUÇÃO COD-338, DE 30 DE OUTUBRO DE 1972

Altera o orçamento analítico da despesa do Instituto Brasileiro de Geografia, do exercício de 1972, *aprovado pela Resolução* COD/289/72, *de* 10 *de janeiro de* 1972.

O CONSELHO DIRETOR da FUNDAÇÃO IBGE, no uso das atribuições que lhe confere o artigo 16, alínea *b*, do Estatuto, e

considerando que o prosseguimento dos trabalhos programados para o exercício em curso, a cargo do Instituto Brasileiro de Geografia, requer reforço para alguns dos subelementos de despesa integrantes da Tabela Explicativa da Despesa a que se refere a Resolução COD/289/72, de 10 de janeiro de 1972;

considerando que parte desse reforço poderá ser efetivado mediante destaques de recursos disponíveis existentes em outros subelementos da despesa, consoante exposto no Processo n.º 2.752/72, do IBG;

considerando o disposto no artigo 48, do Estatuto da Fundação,

RESOLVE:

Art. 1.º — Ficam autorizadas as alterações dos subelementos constantes da Tabela Explicativa da Despesa anexa, no Orçamento Analítico de 1972, aprovado pela Resolução COD/289, de 10 de janeiro de 1972, para o Instituto Brasileiro de Geografia.

Art. 2.º — A presente Resolução entra em vigor nesta data.

(a) *Regina Maria Lima Garcia,* Secretária-Assistente. — (a) *Horácio Rubens de Mello e Souza,* Secretário-Geral. — (a) *Isaac Kerstenetzky,* Presidente.

127

ANEXO À RESOLUÇÃO COD/338/72, DE 30 DE OUTUBRO DE 1972

(Continua)

CÓDIGO	ESPECIFICAÇÃO DA DESPESA	DOTAÇÃO (Cr$)	
		Situação atual	Situação nova
3.0.0.0	DESPESAS CORRENTES		
3.1.0.0	DESPESAS DE CUSTEIO		
3.1.1.0	PESSOAL		
3.1.1.1	PESSOAL CIVIL		
01.00	Vencimentos e Vantagens Fixas		
01	Vencimentos	3 300 000,00	3 300 000,00
04	Auxílio p/ diferença de caixa	3 000,00	3 000,00
05	Gratificação de função	32 000,00	32 000,00
08	Gratificação adicional por tempo de serviço (qüinqüênios)	700 000,00	700 000,00
09	Gratificação pelo exercício em regime de tempo integral e dedicação exclusiva	1 250 000,00	1 250 000,00
	SOMA	5 285 000,00	5 285 000,00

ANEXO À RESOLUÇÃO COD/338/72, DE 30 DE OUTUBRO DE 1972

(Continuação)

CÓDIGO	ESPECIFICAÇÃO DA DESPESA	DOTAÇÃO (Cr$)	
		Situação atual	Situação nova
02.00	Despesas Variáveis c/Pessoal		
01	Ajuda de Custo	60 000,00	60 000,00
02	Diárias	1 000 000,00	1 000 000,00
03	Substituições	125 000,00	125 000,00
09	Salário do pessoal regido p/CLT:		
	01 — Salários dos quadros em extinção		
	a) Salários	30 000,00	30 000,00
	02 — Salários dos quadros da Fundação		
	a) Salários	130 000,00	130 000,00
	b) Gratificação p/encargos técnicos, assessoramento e chefia	1 656 521,00	1 656 521,00
	SOMA	3 001 521,00	3 001 521,00
	TOTAL DO ELEMENTO 3.1.1.0.	8 286 521,00	8 276 521,00
3.1.2.0	MATERIAL DE CONSUMO		
02.00	Impressos, artigos de expediente, desenho, cartografia, geodésia, topografia e ensino	338 000,00	338 000,00
03.00	Artigos de higiene, conservação, acondicionamento e embalagem	55 000,00	75 000,00
04.00	Combustíveis e lubrificantes	420 000,00	395 000,00
05.00	Materiais e acessórios de máquinas, de viaturas, de aparelhos, de instrumentos e de móveis	300 000,00	295 000,00
10.00	Matérias primas e produtos manufaturados ou semimanufaturados, destinados a transformação; material para conservação de bens imóveis	396 000,00	396 000,00
11.00	Produtos químicos, biológicos, farmacêuticos e odontológicos, vidraria, artigos cirúrgicos e outros de uso em laboratório, enfermaria, gabinetes técnicos ou científicos	55 000,00	55 000,00
13.00	Vestuários, uniformes, artigos para esportes e divertimentos infantis, seus equipamentos e respectivos acessórios; calçados, roupas de cama, mesa, copa, cozinha e banho	42 000,00	42 000,00
14.00	Material para fotografia, filmagem, radiografia, gravação, radiofonia e telecomunicações	200 000,00	200 000,00
15.00	Lâmpadas incandescentes e fluorescentes; acessórios para instalações elétricas	35 000,00	45 000,00
17.00	Outros materiais de consumo		
01	Material para construção de marcos	15 000,00	15 000,00
04	Diversos	20 209,00	20 209,00
	TOTAL DO ELEMENTO 3.1.2.0	1 876 209,00	1 876 209,00

ANEXO À RESOLUÇÃO COD/338/72, DE 30 DE OUTUBRO DE 1972

(Continuação)

CÓDIGO	ESPECIFICAÇÃO DA DESPESA	DOTAÇÃO (Cr$)	
		Situação atual	Situação nova
3.1.3.0	SERVIÇOS DE TERCEIROS		
3.1.3.1	Remuneração de Serviços Pessoais		
01.00	Pessoal pago mediante recibo	645 347,00	645 347,00
3.1.3.2	Outros Serviços de Terceiros		
01.00	Acondicionamento e transporte de encomendas, cargas e animais	30 000,00	42 000,00
02.00	Passagens, transporte de pessoas e de suas bagagens; pedágio	210 000,00	210 000,00
03.00	Assinatura e aquisição de jornais, revistas e recortes de publicações	16 000,00	18 000,00
04.00	Iluminação, força motriz e gás	100 000,00	100 000,00
05.00	Serviços de asseio e higiene; taxas de água, esgoto, lixo e outros correlatas	326 000,00	326 000,00
06.00	Reparos, adaptações e conservação de bens móveis e imóveis	200 000,00	200 000,00
07.00	Serviços de divulgação, de impressão e de encadernação	678 000,00	678 000,00
08.00	Serviços médicos, hospitalares, funerários e judiciários	20 000,00	20 000,00
09.00	Serviços de comunicação em geral	90 000,00	112 000,00
10.00	Locação de bens móveis e imóveis; tributos e despesas de condomínio	210 000,00	210 000,00
11.00	Seguros em geral	15 000,00	5 000,00
12.00	Comissões, corretagens e serviços bancários	9 000,00	3 000,00
16.00	Diversos		
01	Serviços de seleção e aperfeiçoamento de pessoal	30 000,00	35 000,00
02	Serviços e tarefas de caráter temporário, esporádico e de urgência	290 000,00	290 000,00
03	Serviços de processamento de dados estatísticos, censitários, geográficos e administrativos	100 000,00	100 000,00
04	Publicações de editais e avisos	8 288,00	10 288,00
07	Estagiários	267 000,00	240 000,00
08	Dinamização da cartografia sistemática no espaço territorial brasileiro (Decreto-lei n. 243, de 28-02-67)	2 000 000,00	2 000 000,00
	TOTAL DO ELEMENTO 3.1.3.0	5 244 635,00	5 244 635,00
3.1.4.0	ENCARGOS DIVERSOS		
01.00	Despesas miudas de pronto pagamento	25 000,00	33 000,00
04.00	Festividades, recepções, hospedagens e homenagens	20 000,00	20 000,00
08.00	Exposições, congressos e conferências	56 000,00	48 000,00
10.00	Assistência Social	14 000,00	14 000,00
130.0	Outros Encargos		
05	Bolsa de Estudo	6 000,00	6 000,00
06	Diversos	34 821,00	34 821,00
	TOTAL DO ELEMENTO 3.1.4.0	155 821,00	155 821,00
3.1.5.0	DESPESAS DE EXERCÍCIOS ANTERIORES	82 601,00	82 601,00
	TOTAL DO ELEMENTO 3.1.5.0	82 601,00	82 601,00

129

ANEXO À RESOLUÇÃO COD/338/72, DE 30 DE OUTUBRO DE 1972

(Continuação)

CÓDIGO	ESPECIFICAÇÃO DA DESPESA	DOTAÇÃO (Cr$)	
		Situação atual	Situação nova
3.2.0.0	TRANSFERÊNCIAS CORRENTES		
3.2.3.0	TRANSFERÊNCIAS DE ASSISTÊNCIA E PREVIDÊNCIA SOCIAL		
3.2.3.1	INATIVOS		
01.00	Pessoal Civil		
	01 Proventos	640 000,00	640 000,00
	02 Vantagens incorporadas	123 904,00	123 904,00
	SOMA DO ELEMENTO 3.2.3.1	763 904,00	763 904,00
3.2.3.2	Pensionistas		
01.00	Pensões vitalícias	21 996,00	21 996,00
	SOMA DO SUBELEMENTO 3.2.3.2	21 996,00	21 996,00
3.2.3.3	SALÁRIO FAMÍLIA		
01.00	Pessoal civil	439 440,00	439 440,00
03.00	Inativos civis	46 080,00	46 080,00
05.00	Pensionistas	11 280,00	11 280,00
	SOMA DO SUBELEMENTO 3.2.3.3	496 800,00	496 800,00
	TOTAL DO ELEMENTO 3.2.3.0	1 282 700,00	1 282 700,00
3.2.5.0	CONTRIBUIÇÃO DE PREVIDÊNCIA SOCIAL		
04.00	Obrigações da Entidade	1 900 000,00	1 700 000,00
05.00	Fundo de Garantia de Tempo de Serviço	42 347,00	242 347,00
	TOTAL DO ELEMENTO 3.2.5.0	1 942 347,00	1 942 347,00
3.2.7.0	DIVERSAS TRANSFERÊNCIAS CORRENTES		
3.2.7.5	PESSOAS		
01.00	Auxílio doença	7 000,00	7 000,00
02.00	Auxílio funeral	7 000,00	7 000,00
	SOMA DO SUBELEMENTO 3.2.7.5	14 000,00	14 000,00
3.2.7.6	DIVERSOS		
01.00	Quotas de adesão, subvenção e auxílios	21 397,00	21 397,00
	SOMA DO SUBELEMENTO 3.2.7.6	21 397,00	21 397,00
	TOTAL DO ELEMENTO 3.2.7.0	35 397,00	35 397,00
	TOTAL DA CATEGORIA 3.0.0.0	18 906 231,00	18 906 231,00

130

ANEXO À RESOLUÇÃO COD/338/72, DE 30 DE OUTUBRO DE 1972

(Conclusão)

CÓDIGO	ESPECIFICAÇÃO DA DESPESA	DOTAÇÃO (Cr$)	
		Situação atual	Situação nova
4.0.0.0	DESPESAS DE CAPITAL		
4.1.0.0	INVESTIMENTOS		
4.1.3.0	EQUIPAMENTOS E INSTALAÇÕES		
4.1.3.1	Máquinas, motores e aparelhos	1 180 000,00	1 060 000,00
1.3.4	Automóveis, autocaminhões e outros veículos de tração mecânica	60 000,00	200 000,00
1.3.7	Diversos equipamentos e instalações	174 400,00	154 400,00
	TOTAL DO ELEMENTO 4.1.3.0	1 414 400,00	1 414 400,00
4.1.4.0	MATERIAL PERMANENTE		
02.00	Material bibliográfico, discotecas e filmotecas; obras de arte e peças para museus	40 000,00	24 000,00
03.00	Ferramentas e utensílios de oficinas	20 000,00	10 000,00
04.00	Material artístico e instrumentos de música, insígnias, flâmulas e bandeiras; artigos p/esportes, p/jogos e divertimentos	6 000,00	1 000,00
05.00	Utensílios de copa, cozinha, dormitório e enfermaria	10 000,00	10 000,00
07.00	Modelos e utensílios de escritório e gabinete técnico ou científico	70 000,00	86 000,00
08.00	Mobiliário em geral	144 000,00	144 000,00
11.00	Outros materiais de uso duradouro	21 800,00	36 800,00
	TOTAL DO ELEMENTO 4.1.4.0	311 800,00	311 800,00
	TOTAL DA CATEGORIA 4.0.0.0	1 726 200,00	1 726 200,00
	TOTAL GERAL	20 632 431,00	20 632 431,00
	RESUMO		
3.0.0.0	DESPESAS CORRENTES		
3.1.0.0	DESPESAS DE CUSTEIO	15 645 787,00	
3.2.0.0	TRANSFERÊNCIAS CORRENTES	3 260 444,00	18 906 231,00
4.0.0.0	DESPESAS DE CAPITAL		
4.1.0.0	INVESTIMENTOS		1 726 200,00
	TOTAL GERAL		20 632 431,00

131

RESOLUÇÃO COD-339, DE 30 DE OUTUBRO DE 1972

Abre Crédito Suplementar ao Orçamento-Programa da Fundação, no montante de ..... Cr$ 1.640.000,00, *destinado ao reforço de dotações orçamentárias da Tabela Explicativa da Despesa do Instituto Brasileiro de Geografia.*

O CONSELHO DIRETOR da FUNDAÇÃO IBGE, no uso das atribuições que lhe confere o artigo 16, alínea *b*, do Estatuto, e

considerando que, para atendimento dos encargos expostos no Processo n.º 2.752/72, do Instituto Brasileiro de Geografia-IBG, torna-se indispensável reforçar algumas dotações da Tabela Explicativa da Despesa aprovada para o referido órgão, pela Resolução COD/289/72, de 10-01-72, alterada pela Resolução COD/338/72, de 30 de outubro de 1972;

considerando que, segundo o processo mencionado, o referido Instituto dispõe de recursos decorrentes de saldos de Restos a Pagar cancelados e convertidos em receita, os quais, adicionados às disponibilidades do Fundo de Reserva Especial-FRE, poderão ser empregados para a cobertura do Crédito Suplementar solicitado.

considerando o disposto no artigo 48 do Estatuto da Fundação,

RESOLVE:

Art. 1.º — Fica aberto, ao Orçamento-Programa da Fundação IBGE, de que trata a Resolução COD/284/71, de 22 de dezembro de 1971, o Crédito Suplementar de Cr$ 1.640.000,00 (hum milhão, seiscentos e quarenta mil cruzeiros), destinado ao reforço de dotações orçamentárias da Tabela Explicativa da Despesa, aprovada para o Instituto Brasileiro de Geografia, pela Resolução COD/289/72, de 10 de janeiro de 1972, alterada pela Resolução COD/338/72, de 30-10-72, e consoante as alterações seguintes.

132

	Cr$
3.0.0.0 — DESPESAS CORRENTES	
3.1.0.0 — DESPESAS DE CUSTEIO	
3.1.2.0 — Material de Consumo	235.000,00
3.1.3.0 — Serviços de Terceiros	705.000,00
3.1.5.0 — Despesas de Exercícios Anteriores	350.000,00
TOTAL	1.290.000,00
4.0.0.0 — DESPESA DA CAPITAL	
4.1.0.0 — INVESTIMENTOS	
4.1.3.0 — Equipamentos e Instalações	350.000,00
TOTAL	1.640.000,00

Art. 2.º — Os recursos necessários à cobertura dos encargos acima referidos serão obtidos, parte Cr$ 406.612,41 — mediante anulação de Restos a Pagar e o restante — Cr$ 1.233.387,59 — através de destaque do Fundo de Reserva Especial-FRE, de que trata a Resolução COD/204/70.

Art. 3.º — Fica autorizado o Diretor-Superintendente do Instituto Brasileiro de Geografia a proceder a distribuição, ao nível de subelemento da despesa, dos recursos atribuídos no artigo 1.º.

Art. 4.º — A presente Resolução entra em vigor a partir desta data.

(a) *Regina Maria Lima Garcia,* Secretária-Assistente. — (a) *Horácio Rubens de Mello e Souza,* Secretário-Geral. — (a) *Isaac Kerstenetzky,* Presidente.

RESOLUÇÃO COD-340, DE 9 DE NOVEMBRO DE 1972

Abre Crédito Suplementar ao Orçamento-Programa da Fundação IBGE, no montante de Cr$ 333.767,00 *(trezentos e trinta e três mil, setecentos e sessenta e sete cruzeiros), destinado ao reforço de dotações orçamentárias da Tabela Explicativa da Despesa da Administração Central.*

O CONSELHO DIRETOR da FUNDAÇÃO IBGE, no uso das atribuições que lhe confere o artigo 16, alínea *b*, do Estatuto, e

considerando a necessidade de se dar prosseguimento às obras de ampliação do Gabinete da Presidência, em fase de execução final e da reforma da Procuradoria Geral da Fundação, em andamento no 9.º pavimento do Edifício Nobel;

considerando a existência, no Departamento Financeiro, de vários processos de despesas urgentes e inadiáveis, cuja liquidação de pagamento cabe à Administração Central;

considerando, porém, que os recursos orçamentários disponíveis na Tabela Explicativa da Despesa da Administração Central são insuficientes para o atendimento dos referidos encargos, no montante global de Cr$ 333.767,00 (trezentos e trinta e três mil, setecentos e sessenta e sete cruzeiros);

considerando, também que a Fundação IBGE dispõe de recursos em FUNDO DE RESERVA—FRE e que poderá utilizá-los para "cobertura de encargos contingentes", na forma do artigo 5.º, alínea *c*, da Portaria n.º 25/70, do Senhor Presidente da Fundação IBGE,

RESOLVE:

Art. 1.º — Fica aberto ao Orçamento-Programa da Fundação IBGE, de que trata a Resolução COD/284/71, de 22 de dezembro de 1971, o crédito suplementar de Cr$ 333.767,00 (trezentos e trinta e três mil, setecentos e sessenta e sete cruzeiros) destinado ao reforço de dotações orçamentárias da Tabela Explicativa da Despesa aprovada para a Administração Central, pela Resolução COD/291/72, de 10 de janeiro de 1972, consoante a seguinte distribuição:

3.0.0.0 — Despesas Correntes
3.1.0.0 — Despesas de Custeio
3.1.3.0 — Serviços de Terceiros — Cr$ 333.767,00
Soma — Cr$ 333.767,00

Art. 2.º — Os recursos necessários à cobertura dos encargos acima referidos, serão obtidos mediante destaque do Fundo de Reserva Especial — FRE, de que trata a Resolução COD/204/70, de 21 de agosto de 1970.

Art. 3.º — Fica autorizado o Secretário-Geral da Fundação IBGE a proceder a distribuição, ao nível de subelemento da despesa, dos recursos atribuídos no artigo 1.º.

Art. 4.º — A presente Resolução entra em vigor nesta data.

(a) *Regina Maria Lima Garcia,* Secretária-Assistente. — (a) *Horácio Rubens de Mello e Souza,*

133

Secretário-Geral. — (a) *Miguel Alves de Lima,* Presidente em exercício.

RESOLUÇÃO COD-841, DE 9 DE NOVEMBRO DE 1972

Altera padrões de salários na Rede-de-Coleta.

O CONSELHO DIRETOR da FUNDAÇÃO IBGE, no uso das atribuições que lhe confere o artigo 16, alínea *e,* do Estatuto, e

considerando que se torna necessária revisão dos padrões salariais do pessoal investido em cargos de confiança na rede-de-coleta.

RESOLVE:

Art. 1.º — Os cargos de Chefia de Agência de Coleta e de Agência Territorial, criados de acordo com o artigo 8.º da Resolução COD/281/71, ficam reclassificados um padrão acima dos previstos no aludido ato.

Parágrafo único — Em conseqüência do disposto neste artigo, fica sendo a seguinte a distribuição numérica dos cargos de chefia de Agência de Coleta, segundo os respectivos padrões:

Padrão	*N.º de Cargos*
21	2
22	4
23	12
24	14
25	24
26	54
31	122
32	180
33	198
34	210

Art. 2.º — Os cargos de Chefia de Agência de Coleta e de Agência Territorial, nos municípios relacionados no Anexo II da Resolução COD/281/71, terão os respectivos padrões salariais alterados na forma desta Resolução.

Art. 3.º — Na gratificação de função resultante do disposto no Artigo 2.º, ficará absorvida, no todo ou em parte, quando fôr o caso, a gratificação de função na situação anterior, calculada de acordo com as Resoluções COD/304/72 e COD/332/72, de 17 de março de 1972 e 13 de outubro de 1972, respectivamente.

Art. 4.º — Esta Resolução entra em vigor a partir de 20-9-72, revogadas as disposições em contrário.

(a) *Regina Maria Lima Garcia,* Secretária-Assistente. — (a) *Horácio Rubens de Mello e Souza,* Secretário-Geral. — (a) *Miguel Alves de Lima,* Presidente em exercício.

RESOLUÇÃO COD-342, DE 9 DE NOVEMBRO DE 1972

Cria, na Escola Nacional de Ciências Estatísticas os órgãos que indica, e altera-lhe o Quadro de Lotação de Pessoal.

O CONSELHO DIRETOR da FUNDAÇÃO IBGE, no uso das atribuições que lhe confere o artigo 16, alíneas *e* e *f,* do Estatuto, e

considerando que a Escola Nacional de Ciências Estatísticas, pela expansão que vem tendo a cada ano letivo, necessita apoiar-se em

infra-estrutura administrativa adequada;

considerando que essa expansão traz conseqüências imediatas sobre as atividades de responsabilidade da Administração do Edifício-Sede,

RESOLVE:

Art. 1.º — A Administração do Edifício-Sede, subordinada diretamente ao Diretor-Superintendente, fica constituída da Equipe de Serviços Complementares, da Equipe de Portaria Diurna e da Equipe de Portaria Noturna.

Art. 2.º — Caberá à Equipe de Serviços complementares controlar a utilização, guarda e manutenção do mimeógrafo e da máquina copiadora; ordenar, grampear, colecionar e acondicionar as provas, testes, exames, apostilhas ou documentos mimeografados ou copiados; manter, sob rigoroso sigilo, os assuntos contidos nas provas, testes, exames ou documentos copiados; controlar, manter sob sua guarda e fornecer aos interessados, de acordo com normas estabelecidas, exemplares de apostilhas colecionadas; executar ou providenciar a manutenção e conservação do prédio, das instalações em geral e do material permanente; acompanhar e fiscalizar os serviços contratados com terceiros no campo de sua atividade e executar outros encargos que lhes forem atribuídos.

Art. 3.º — Caberá às Equipes de Portaria Diurna e Noturna, nos horários que lhes forem determinados, exercer, ou fazer exercer por terceiros, vigilância diurna e/ou noturna e a fiscalização constante nas dependências do prédio; ter sob sua responsabilidade o claviculário da ENCE e os serviços de portaria; fiscalizar a saída de material, máquina e equipamentos e executar outras tarefas ligadas à vigilância e segurança que lhes forem determinadas; providenciar a limpeza e conservação interna e externa do prédio e de suas dependências; distribuir e recolher os diários de classe dos respectivos professores; manter as salas de aula abastecidas do material escolar necessário; colaborar no controle da disciplina dos alunos de acordo com os horários estabelecidos; acompanhar e fiscalizar os serviços contratados com terceiros no campo de sua atividade e executar outros encargos que lhe forem atribuídos.

Art. 4.º — Fica acrescido ao Quadro de Lotação de Pessoal (QLP/ 400-C), da Escola Nacional de Ciências Estatísticas, aprovado pela Resolução COD/61/68, de 23 de outubro de 1968, 1 (um) cargo de Encarregado de Equipe (Equipe de Serviços Complementares), Padrão 34; 1 (um) cargo de Encarregado de Equipe (Equipe de Portaria Diurna), Padrão 36, e 1 (um) cargo de Encarregado de (Equipe de Portaria Noturna), Padrão 35.

Art. 5.º — Esta Resolução entra em vigor a partir desta data.

(a) *Regina Maria Lima Garcia,* Secretária-Assistente. — (a) *Horácio Rubens de Mello e Souza,* Secretário-Geral. — (a) *Miguel Alves de Lima,* Presidente em exercício.

135

RESOLUÇÃO COD-343, DE 8 DE DEZEMBRO DE 1972

Abre o Crédito Especial de ..... Cr$ 130.000,00, *destinado às despesas com as obras de acréscimo a serem realizadas na Delegacia de Estatística em Goiânia — GO.*

O CONSELHO DIRETOR da FUNDAÇÃO IBGE, no uso das atribuições que lhe confere o artigo 16, alínea *b*, do Estatuto, e

considerando a urgente e inadiável necessidade de se proceder às obras de recuperação e acréscimo a se efetivarem no prédio da Delegacia de Estatística (DELEST) do Instituto Brasileiro de Estatística em Goiânia, Estado de Goiás;

considerando que, para o atendimento do encargo, objeto do presente processo, no montante de Cr$ 130.000,00, não foi previsto, no orçamento da Administração Central, dotação específica para realização de obras;

136

considerando, entretanto, que os recursos no montante indicado poderão ser obtidos mediante apropriação do disponível em "Fundo de Reserva Especial — FRE", instituído pela Resolução COD/204/70 e regulamentado pela Portaria n.º 25/70;

considerando o disposto no artigo 48, do Estatuto da Fundação,

RESOLVE:

Art. 1.º — Fica aberto à Fundação IBGE — Administração Central, mediante apropriação dos recursos existentes em "Fundo de Reserva Especial — FRE", o Crédito Especial no montante de .... Cr$ 130.000,00 (cento e trinta mil cruzeiros), destinado à cobertura das despesas decorrentes das obras de recuperação e acréscimo na Sede própria da Delegacia de Estatística (DELEST) do Instituto Brasileiro de Estatística localizada em Goiânia, Estado de Goiás, consoante a seguinte distribuição:

4.0.0.0 — DESPESAS DE CAPITAL	
4.1.0.0 — INVESTIMENTOS	
4.1.1.0 — OBRAS PÚBLICAS	130.000,00
TOTAL	130.000,00

Art. 2.º — A presente Resolução entra em vigor nesta data.

(a) *Regina Maria Lima Garcia,* Secretária-Assistente. — (a) *Horácio Rubens de Mello e Souza,* Secretário-Geral. — (a) *Isaac Kerstenetzky,* Presidente.

RESOLUÇÃO COD-344, DE 19 DE DEZEMBRO DE 1972

Abre Crédito Suplementar ao Orçamento-Programa do Serviço Gráfico da Fundação IBGE-SERGRAF, no montante de Cr$ 567.000,00 (*quinhentos e sessenta e sete mil cruzeiros*), *destinado ao reforço do subelemento de despesa* "4.1.3.1 — *Máquinas, Motores e Aparelhos*", *do Orçamento Analítico do mencionado SERGRAF.*

O CONSELHO DIRETOR da FUNDAÇÃO IBGE, no uso das atribuições que lhe confere o artigo

16, alínea *b*, do Estatuto da Fundação, e

considerando que os recursos orçamentários existentes no subelemento de despesa "4.1.3.1 — Máquinas, Motores e Aparelhos", do Orçamento Analítico do Serviço Gráfico da Fundação IBGE-SERGRAF, não permitem o atendimento da realização da despesa, relativa à aquisição da máquina *offset* de que trata o processo de n.º AC-1624/72;

considerando que, na conformidade do exposto no mencionado processo, torna-se necessária, em regime de urgência, a aquisição da aludida máquina;

considerando que a Fundação dispõe de recursos financeiros oriundos do "Fundo de Reserva Especial-FRE", os quais podem ser utilizados na abertura de créditos suplementares;

considerando, finalmente, o disposto no artigo 48, do Estatuto da Fundação,

RESOLVE:

Art. 1.º — Fica aberto, ao Orçamento-Programa do Serviço Gráfico da Fundação IBGE-SERGRAF, o Crédito Suplementar no montante de Cr$ 567.000,00 (quinhentos e sessenta e sete mil cruzeiros), destinado ao reforço do subelemento de despesa "4.1.3.1 — Máquinas, Motores e Aparelhos", do Orçamento Analítico do mencionado SERGRAF, para aquisição de uma máquina *offset*, na conformidade do processo AC-1624/72.

Art. 2.º — Esta Resolução entra em vigor nesta data.

(a) *Regina Maria Lima Garcia*, Secretária-Assistente. — (a) *Horácio Rubens de Mello e Souza*, Secretário-Geral. — (a) *Isaac Kerstenetzky*, Presidente.

RESOLUÇÃO COD-345, DE 27 DE DEZEMBRO DE 1972

Abre Crédito Especial no montante de Cr$ 1.300.000,00 *(hum milhão e trezentos mil cruzeiros), destinado ao custeio de despesas preliminares, relativas às obras de ampliação do imóvel desta Fundação, situado na Rua Visconde de Niterói,* 1246, *nesta cidade.*

O CONSELHO DIRETOR da FUNDAÇÃO IBGE, no uso das atribuições que lhe confere o artigo 16, alínea *b*, do Estatuto, e

considerando a necessidade inadiável do início das obras de ampliação do imóvel desta Fundação, situado na Rua Visconde de Niterói, 1246, nesta cidade, recentemente adquirido para instalação do Instituto Brasileiro de Informática-IBI;

considerando que as despesas programadas no presente processo, referem-se a custeios preliminares das obras de ampliação do citado imóvel, objeto do processo de n.º AC-586/72;

considerando que a Fundação IBGE dispõe de recursos financeiros, inscritos sob o título "Fundo de Reserva Especial-FRE", que poderão ser aplicados na ampliação do imóvel de propriedade da Fundação IBGE, no endereço indicado;

considerando, finalmente, o disposto no artigo 48, do Estatuto da Fundação,

RESOLVE:

Art. 1.º — Fica aberto, à administração Central da Fundação IBGE, o Crédito Especial de .... Cr$ 1.300.000,00 (hum milhão e trezentos mil cruzeiros), mediante apropriação de recursos oriundos do "Fundo de Reserva Especial-FRE", destinado ao custeio de despesas preliminares, relativas às obras de ampliação do imóvel de propriedade desta Fundação, situado na Rua Visconde de Niterói, 1246, nesta cidade, observada a seguinte distribuição:

4.0.0.0 — DESPESAS DE CAPITAL

4.1.0.0 — INVESTIMENTOS

4.1.1.0 — OBRAS PÚBLICAS

4.1.1.2 — Início das obras Cr$ 1.300.000,00.

Art. 2.º — Esta Resolução entra em vigor nesta data.

(a) *Regina Maria Lima Garcia,* Secretária-Assistente. — (a) *Horácio Rubens de Mello e Souza,* Secretário-Geral. — (a) *Isaac Kerstenetzky,* Presidente.

138

RESOLUÇÕES DA COMISSÃO NACIONAL DE PLANEJAMENTO E NORMAS ESTATÍSTICAS

RESOLUÇÃO CONPLANE-16, DE 6 DE OUTUBRO DE 1972

Atribui ao Instituto Brasileiro de Estatística a responsabilidade dos levantamentos não incluídos no Plano Único de Estatísticas Agropecuárias, formulado pela Comissão Especial de Planejamento, Controle e Avaliação das Estatísticas Agropecuárias (CEPAGRO).

A COMISSÃO NACIONAL DE PLANEJAMENTO E NORMAS ESTATÍSTICAS, usando de suas atribuições, e,

considerando que o Plano Único de Estatísticas Agropecuárias, formulado pela Comissão Especial de Planejamento, Controle e Avaliação das Estatísticas Agropecuárias (CEPAGRO) — constituída de representantes do Ministério da Agricultura e do Instituto Brasileiro de Estatística — excluiu de seu âmbito os levantamentos que se situam na área das estatísticas industriais;

considerando que esses levantamentos, que fazem parte do elenco da XXXVII Campanha Estatística — Anexo II, vinham sendo efetuados, sob a responsabilidade da SUPLAN — Escritório de Estatística, através da rede-de-coleta do IBE,

RESOLVE:

Artigo Único — As estatísticas relativas ao abate de animais e de aves para abastecimento público, exportação ou fins industriais e à produção de derivados e subprodutos, compreendendo a produção de carnes verdes e conservadas, banha, toucinho, sebo, composto, caldo de carne, farinha de carne, de ossos e de sangue, produtos de salsicharia e de salamaria, miúdos em geral e couros e peles, bem como as estatísticas referentes à produção de óleos e gorduras vegetais, passam, a partir do ano base de 1972, à responsabilidade do Instituto Brasileiro de Estatística.

(a) *Hulda Maria Gomes*, Secretária. — (a) *Rudolf W. F. Wuensche*, Coordenador.

139

RESOLUÇÃO CONPLANE-17, DE 27 DE NOVEMBRO DE 1972

Dispõe sobre a realização da XXXVII Campanha Estatística.

A COMISSÃO NACIONAL DE PLANEJAMENTO E NORMAS ESTATÍSTICAS, usando de suas atribuições, e,

considerando que, na conformidade do artigo 11 do Decreto-Lei n.º 161, de 13 de fevereiro de 1967, compete à CONPLANE a coordenação técnica das atividades do Instituto Brasileiro de Estatística;

considerando o disposto no Decreto 63.010, de 18 de julho de 1968, que aprova o Plano Nacional

de Estatísticas Básicas, definido como um conjunto de levantamentos estatísticos necessários ao conhecimento da realidade nacional, em seus aspectos julgados essenciais ao planejamento econômico-social do País e à segurança nacional;

considerando que, de acordo com a Resolução CONPLANE/16, de 6 de outubro de 1972, as estatísticas relativas ao abate de animais e preparação de carnes e subprodutos passaram, a partir do ano base de 1972, à responsabilidade do Instituto Brasileiro de Estatística;

considerando, finalmente, o resultado dos estudos efetuados pelas Subcomissões Técnicas da CONPLANE sobre as pesquisas a cargo do sistema estatístico nacional,

RESOLVE:

Art. 1.º — A XXXVII Campanha Estatística será realizada segundo o plano especificado nos Anexos I e II desta Resolução.

Art. 2.º — O Instituto Brasileiro de Estatística, através da Coordenação Geral da Rede-de-Coleta (COGERE), procederá à remessa, às Delegacias e Agências Territoriais de Estatística e aos Serviços de Coleta, dos questionários atinentes aos inquéritos constantes do Anexo I desta Resolução, até 31 de janeiro de 1973.

Art. 3.º — Os Órgãos Centrais Federais e demais Órgãos encarregados dos inquéritos componentes do Anexo II desta Resolução encaminharão, às Delegacias e Agências Territoriais e aos Serviços de Coleta do IBE, os formulários referentes aos levantamentos sob sua responsabilidade, até 31 de janeiro de 1973.

Art. 4.º — Os Órgãos Centrais Regionais entregarão às Delegacias e Agências Territorais de Estatística e aos Serviços de Coleta, nas respectivas Unidas da Federação, até 31 de janeiro de 1973, os instrumentos de coleta dos inquéritos regionais a serem lançados em 1973, que tenham sido previamente aprovados pela CONPLANE, a fim de assegurar a obrigatoriedade legal de informação, de acordo com o artigo 29 do Estatuto da Fundação IBGE.

(a) *Hulda Maria Gomes*, Secretária. — (a) *Rudolf W. F. Wuensche*, Coordenador.

XXXVII CAMPANHA ESTATÍSTICA

ANEXO I

(Continua)

ÓRGÃO RESPONSÁVEL	CÓDIGO	INQUÉRITO
		QUESTIONÁRIO Q
EAGRI/MA	Q-1.03	Produção Extrativa Vegetal
SEDMP/MJ	Q-5.03/1.2	Assistência a Desvalidos
	Q-5.08	Serviços de Trânsito
	Q-5.09	Estabelecimentos Prisionais

XXXVII CAMPANHA ESTATÍSTICA
ANEXO I

(Conclusão)

ÓRGÃO RESPONSÁVEL	CÓDIGO	INQUÉRITO
	Q-5.10	Movimento Policial
	Q-5.11	Suicídios e Tentativas
	Q-5.12	Incêndios
	Q-5.13	Desastres e Acidentes de Trânsito
	Q-5.14	Desquites
	Q-5.17.2	Corpo de Bombeiros
DNEES/MS	Q-6.01/1	Assistência Hospitalar e Para-Hospitalar
	Q-6.01/2	Serviços Oficiais de Saúde Pública
	Q-6.02.2	Abastecimento d'água
	Q-6.03.2	Redes de Esgotos
	Q-6.04.2	Serviços de Limpeza Pública e Remoção de Lixo
CDI/MTPS	Q-7.01	Caixas Particulares de Pecúlio e Aposentadoria e Associações Particulares de Beneficência Mutuária
	Q-7.02	Previdência dos Servidores Públicos Estaduais e Municipais
CENDIE/IBE	Q-9.08.2	Rede Rodoviária
		FOLHA ESPECIAL DE CADASTRO
DNEES/MS	FEC-6.1	Médicos
	FEC-6.2	Dentistas
	FEC-6.3	Farmacêuticos, Enfermeiros, Nutricionistas e Fisioterapeutas
	FEC-6.4	Pessoal Auxiliar de Saúde
SEFM/IBE	FEC-9.1	Aeroportos e Campos de Pouso
- -	BAC	BOLETIM DE ALTERAÇÃO DE CADASTRO

141

XXXVII CAMPANHA ESTATÍSTICA
ANEXO II

(Continua)

ÓRGÃO RESPONSÁVEL	CÓDIGO	INQUÉRITO
EAGRI/MA	P-1	Pesca Empresarial (anual)
	P-2	Pesca Colonizada (anual)
	P-3	Pesca Não Colonizada (anual)
	—	Pecuária, Avicultura, Apicultura e Sericicultura (anual)
		Levantamento da Produção Agrícola Municipal (semestral)
	LEPAM-1	a) Culturas Temporárias
	LEPAM-2	b) Culturas Permanentes
SEEC/MEC	EP-1	Ensino Pré-Primário (anual)
		Ensino Primário (anual)
	EP-2/1	a) Escolas de uma sala de aula
	EP-2/2	b) Escolas de duas e mais salas de aula
		Ensino Médio (anual)
	EM-1/1	a) 1.º ciclo
	EM-1/2	b) 2.º ciclo

XXXVII CAMPANHA ESTATÍSTICA

ANEXO II

(Conclusão)

ÓRGÃO RESPONSÁVEL	CÓDIGO	INQUÉRITO
		Ensino Superior (anual)
	ES-1/1	a) Universidades
	ES-1/2	b) Universidades — Cursos
	ES-1/3	c) Estabelecimentos Isolados
	PE-1	Prédio Escolar (trienal)
	EC-01	Radiodifusão e Radiotelevisão (anual)
	EC-02	Imprensa Periódica (anual)
	EC-03	Empresas Editoras de Livros e Folhetos (anual)
	EC-05	Museus (trienal)
	EC-08	Associações Desportivas (trienal)
SEDMP/MJ	—	Cartórios (anual)
CDI/MTPS	—	Inquérito Estatístico Sindical (anual)
	—	Custo de Vida (mensal)
DEICOM/IBE		Pesquisa Industrial
	DI-1	a) Mineração, Beneficiamento e Transformação (anual)
	DI-2	b) Indústrias de Transformação (trimestral)
DEICOM/IBE	DI-3	c) Indústrias de Transformação (mensal)
	DI-4	d) Construção — Edificações (mensal)
	DI-5	e) Abate de Animais (mensal)
	DI-6	f) Abate de Animais e Preparação de Carnes e Subprodutos (anual)
		Inquéritos de Preços (mensal)
	DC-QA	a) Gêneros Alimentícios
	DC-QV	b) Artigos do Vestuário
	DC-QMC	c) Materiais de Construção
	DC-QMCE	d) Materiais de Construção e Mão-de-Obra nas Empresas de Construção
	DS-1	Empresas de Transporte Rodoviário (anual)
	DS-2	Empresas Telefônicas (anual)
	DS-3	Meios de Hospedagem (anual)
	DS-4	Veículos Licenciados (anual)
CBED/IBE		Registro Civil (trimestral)
	CBED-1A	a) Nascimentos (Nascidos vivos)
	CBED-1B	b) Nascimentos (Nascidos mortos)
	CBED-2	c) Casamentos
	CBED-3	d) Óbitos
CBEA/IBE	CBEA-1	Armazenagem e Estocagem a Seco (anual)
	CBEA-2	Armazenagem e Estocagem a Frio (anual)
CENDIE/IBE	—	Informações Básicas (anual)
DEDIVE/IBE	—	Alguns Aspectos Econômicos e Financeiros dos Municípios com mais de 100 mil habitantes

ÍNDICE

Leis e Decretos Federais

LEI N.º 5.707, de 27 de setembro de 1971

Dá nova redação ao **caput** do artigo 1.º e ao art. 3.º da Lei n.º 5.591, de 16 de julho de 1970, e dá outras providências 3

DECRETO N.º 70.210, de 28 de fevereiro de 1972

Dispõe a respeito da coleta e apuração das estatísticas do registro civil e dá outras providências 4

DECRETO N.º 70.280, de 14 de março de 1972

Institui a Medalha Carneiro Felippe e dá outras providências 4

LEI N.º 5.804, de 3 de outubro de 1972

Dá nova redação ao artigo 6.º do Decreto-lei n.º 161, de 13 de fevereiro de 1967, que autorizou o Poder Executivo a instituir a Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, e dá outras providências 99

Resoluções do Conselho Diretor

143

RESOLUÇÃO COD-287, de 10 de janeiro de 1972

Aprova o Plano de Aplicação dos recursos orçamentários consignados para a execução do VIII Recenseamento Geral do Brasil, para o exercício financeiro de 1972 6

RESOLUÇÃO COD-288, de 10 de janeiro de 1972

Aprova a Tabela Explicativa da Despesa para o Departamento de Censos do IBGE, referente ao Plano de Aplicação dos recursos destinados ao VIII Recenseamento Geral do Brasil, para o exercício financeiro de 1972 7

RESOLUÇÃO COD-289, de 10 de janeiro de 1972

Aprova a Tabela Explicativa da despesa do Instituto Brasileiro de Geografia, para o exercício financeiro de 1972 10

RESOLUÇÃO COD-290, de 10 de janeiro de 1972

Aprova a Tabela Explicativa da Despesa da Escola Nacional de Ciências Estatísticas, para o exercício financeiro de 1972 13

RESOLUÇÃO COD-291, de 10 de janeiro de 1972

Aprova a Tabela Explicativa da despesa da Administração Central, para o exercício financeiro de 1972 17

RESOLUÇÃO COD-292, de 10 de janeiro de 1972

Aprova a Tabela Explicativa da Despesa do Instituto Brasileiro de Estatística, para o exercício financeiro de 1972 .. 21

RESOLUÇÃO COD-293, de 10 de janeiro de 1972

Estima a Receita e fixa a Despesa do Centro de Processamento de Dados — CENPRO — do Instituto Brasileiro de Estatística, da Fundação IBGE, para o exercício financeiro de 1972 25

RESOLUÇÃO COD-294, de 10 de janeiro de 1972

Aprova a Tabela Explicativa da Despesa do Centro de Processamento de Dados — CENPRO — do Instituto Brasileiro de Estatística, para o exercício de 1972 .. 29

RESOLUÇÃO COD-295, de 10 de janeiro de 1972

Estima a Receita e fixa a Despesa do Serviço Gráfico da Fundação IBGE para o exercício de 1972 32

RESOLUÇÃO COD-296, de 10 de janeiro de 1972
Aprova a Tabela Explicativa da Despesa do Serviço Gráfico da Fundação IBGE para o exercício de 1972 36

RESOLUÇÃO COD-297, de 3 de fevereiro de 1972
Altera, em caráter provisório, a lotação dos cargos de confiança do Grupo Executivo de Pesquisas Domiciliares-GEPD-IBE 39

RESOLUÇÃO COD-298, de 3 de fevereiro de 1972
Cria em caráter provisório, no Departamento de Estatísticas Industriais, Comerciais e de Serviços, os órgãos que indica e altera o Quadro de Lotação de Pessoal do DEICOM — IBE 39

RESOLUÇÃO COD-299, de 3 de fevereiro de 1972
Dispõe sobre a contratação de pessoal por prazo determinado 40

RESOLUÇÃO COD-300, de 17 de março de 1972
Dá nova organização ao Gabinete da Presidência da Fundação IBGE 41

RESOLUÇÃO COD-301, de 17 de março de 1972
Dispõe sobre o recrutamento externo a que se refere a Resolução COD/282/71, de 22 de Novembro de 1971 42

RESOLUÇÃO COD-302, de 17 de março de 1972
Estabelece nova organização hierárquica aos cargos de confiança dos Gabinentes dos Diretores-Superintendentes do IBE, IBG, IBI e ENCE e dá outras providências 43

RESOLUÇÃO COD-303, de 17 de março de 1972
Cria do cargo de Chefe de Gabinete do Secretário-Geral da Fundação IBGE 45

RESOLUÇÃO COD-304, de 17 de março de 1972
Modifica a redação do § 1.º do artigo 9.º da Resolução COD/239/71, de 18 de fevereiro de 1971 45

RESOLUÇÃO COD-305, de 24 de março de 1972
Cria no Grupo Executivo de Pesquisas Domiciliares (GEPD) as Equipes de Crítica e de Codificação e altera-lhe o Quadro de Lotação de Pessoal (QLP/302-C) ... 46

RESOLUÇÃO COD-306, de 7 de abril de 1972
Dispõe sobre a concessão e distribuição do auxílio financeiro aos Órgãos Regionais de Estatística 47

RESOLUÇÃO COD-307, de 7 de abril de 1972
Dispõe sobre a distribuição do auxílio financeiro aos Órgãos Centrais Federais de Estatística 48

RESOLUÇÃO COD-308, de 12 de abril de 1972
Passa à subordinação do Secretário-Geral da Fundação IBGE, os serviços de Assistência Médica, Odontológica e Social (SAMOS) e o Serviço de Transporte 49

RESOLUÇÃO COD-309, de 12 de abril de 1972
Altera temporariamente as Resoluções COD/59/68 e COD/165/69, que dispõem sobre a remuneração de estudantes estagiários nos Órgãos da Fundação IBGE 49

RESOLUÇÃO COD-310, de 28 de abril de 1972
Aprova minuta padrão de contrato de locação 50

RESOLUÇÃO COD-311, de 9 de maio de 1972
Cria em caráter provisório, no Departamento de Geografia do IBG, o Órgão que indica e altera o Quadro de Lotação de Pessoal do DEGEO — IBG 53

RESOLUÇÃO COD-312, de 9 de maio de 1972
Cria, em caráter provisório, no Departamento de Documentação e Divulgação Geográfica e Cartográfica do IBG, o Órgão que indica e altera o Quadro de Lotação do Pessoal do DEDIGEO — IBG 53

RESOLUÇÃO COD-313, de 23 de maio de 1972
Estrutura a Secretaria-Geral da Fundação IBGE e dá outras providências 54

RESOLUÇÃO COD-314, de 23 de maio de 1972
Altera a lotação de cargos de confiança da Secretaria-Geral 67

RESOLUÇÃO COD-315, de 23 de maio de 1972
Reajusta percentualmente os valores de retribuição dos cargos QGP e dá outras providências 72

RESOLUÇÃO COD-316, de 5 de junho de 1972
Modifica dispositivos da Resolução COD/ /281/71, de 11 de novembro de 1971 .. 75

RESOLUÇÃO COD-317, de 9 de junho de 1972
Reajusta percentualmente os salários do Pessoal do Serviço Gráfico, regido pela Consolidação das Leis do Trabalho 75

RESOLUÇÃO COD-318, de 23 de junho de 1972
Dá nova redação ao Art. 1.º da Resolução COD/305/72, de 24 de março de 1972 75

RESOLUÇÃO COD-319, de 14 de julho de 1972
Cria, no Instituto Brasileiro de Informática, os órgãos que indica e altera-lhe o Quadro de Lotação do Pessoal ... 81

RESOLUÇÃO COD-320, de 21 de julho de 1972
Abre crédito suplementar ao Orçamento-Programa da Fundação IBGE, no montante de Cr$ 460.000,00, destinado ao reforço de dotações orçamentárias da Tabela Explicativa da Despesa da Administração Central 82

RESOLUÇÃO COD-321, de 21 de julho de 1972
Extingue o Centro de Processamento de Dados (CENPRO) e dá outras providências 83

RESOLUÇÃO COD-322, de 3 de agosto de 1972
Aprova o Plano de Aplicação dos recursos orçamentários consignados ao Instituto Brasileiro de Informática, para o exercício de 1972 84

RESOLUÇÃO COD-323, de 3 de agosto de 1972
Aprova a Tabela Explicativa da Despesa para o Instituto Brasileiro de Informática da Fundação IBGE, para o exercício de 1972 85

RESOLUÇÃO COD-324, de 25 de agosto de 1972
Abre crédito suplementar ao Orçamento-Programa da Fundação IBGE, no montante de Cr$ 84.750,00, destinado ao reforço de dotações orçamentárias da Tabela Explicativa da Despesa da Administração Central 89

RESOLUÇÃO COD-325, de 25 de agosto de 1972
Altera o Art. 12 do Regimento Interno da Comissão Especial de Planejamento, Controle e Avaliação das Estatísticas Agropecuárias (CEPAGRO) 89

RESOLUÇÃO COD-326, de 15 de setembro de 1972
Abre crédito suplementar ao Orçamento-Programa da Fundação IBGE, no montante de Cr$ 156.926,00, destinado ao reforço de dotações orçamentárias da Tabela Explicativa da Despesa da Administração Central 90

RESOLUÇÃO COD-327, de 15 de setembro de 1972
Altera o orçamento analítico da Administração Central, relativo ao exercício de 1972, aprovado pela Resolução COD/291/72, de 10 de janeiro de 1972 91

RESOLUÇÃO COD-328, de 21 de setembro de 1972
Altera o Quadro de Lotação do Pessoal referente aos cargos de confiança da Procuradoria-Geral 96

RESOLUÇÃO COD-329, de 10 de outubro de 1972
Abre Crédito Suplementar ao Orçamento-Programa da Fundação IBGE, destinado ao reforço de dotações orçamentárias da Tabela Explicativa da Despesa da Administração Central 101

RESOLUÇÃO COD-330, de 10 de outubro de 1972
Abre Crédito Suplementar ao Departamento de Censos do IBE, no montante de Cr$ 5.000.000,00, para reforço de dotações do Plano de Aplicação dos recursos ao VIII Recenseamento Geral do Brasil 101

RESOLUÇÃO COD-331, de 13 de outubro de 1972
Altera o orçamento analítico da Escola Nacional de Ciências Estatísticas-ENCE, relativo ao exercício de 1972, aprovado pela Resolução COD/290/72, de 10 de janeiro de 1972 103

RESOLUÇÃO COD-332, de 13 de outubro de 1972
Altera disposições da Resolução COD/239/71 de 18 de fevereiro de 1971, e dá outras providências 109

RESOLUÇÃO COD-333, de 26 de outubro de 1972
Abre Crédito Especial ao IBE — Departamento de Censos — DECEN, no montante de Cr$ 328.000,00 (trezentos e vinte e oito mil cruzeiros) destinados a obras de acréscimo no 5.º pavimento do imóvel da Rua Equador, 558 109

RESOLUÇÃO COD-334, de 26 de outubro de 1972
Altera o orçamento analítico do Serviço Gráfico, relativo ao exercício de 1972, aprovado pela Resolução COD/296/72, de 10 de janeiro de 1972 110

RESOLUÇÃO COD-335, de 26 de outubro de 1972
Altera o Plano de Aplicação dos recursos, destinados à Fundação IBGE, para implantação do Instituto Brasileiro de Informática, aprovado pela Resolução COD/322/72, de 3 de agosto de 1972 114

RESOLUÇÃO COD-336, de 30 de outubro de 1972
Altera o Orçamento analítico do Instituto Brasileiro de Estatística, relativo ao exercício de 1972, aprovado pela Resolução COD/292/72, de 10 de janeiro de 1972 120

RESOLUÇÃO COD-337, de 30 de outubro de 1972
Abre Crédito Suplementar ao Orçamento-Programa da Fundação IBGE, no montante de Cr$ 2.210.000,00 (dois milhões, duzentos e dez mil cruzeiros), destinado ao re-

força de dotações orçamentárias da Tabela Explicativa da Despesa do Instituto Brasileiro de Estatística-IBE 125

RESOLUÇÃO COD-338, de 30 de outubro de 1972

Altera o orçamento analítico da despesa do Instituto Brasileiro de Geografia, do exercício de 1972, aprovado pela Resolução COD/289/72, de 10 de janeiro de 1972 127

RESOLUÇÃO COD-339, de 30 de outubro de 1972

Abre Crédito Suplementar ao Orçamento-Programa da Fundação IBGE, no montante de Cr$ 1.640.000,00, destinado ao reforço de dotações orçamentárias da Tabela Explicativa da Despesa do Instituto Brasileiro de Geografia 131

RESOLUÇÃO COD-340, de 9 de novembro de 1972

Abre Crédito Suplementar ao Orçamento-Programa da Fundação IBGE, no montante de Cr$ 333.767,00 (trezentos e trinta e três mil, setecentos e sessenta e sete cruzeiros), destinado ao reforço de dotações orçamentárias da Tabela Explicativa da Despesa da Administração Central ... 133

RESOLUÇÃO COD-341, de 9 de novembro de 1972

Altera padrões de salários na Rede-de-Coleta 134

RESOLUÇÃO COD-342, de 9 de novembro de 1972

Cria, na Escola Nacional de Ciências Estatísticas, os órgãos que indica, e altera-lhe o Quadro de Lotação do Pessoal 134

RESOLUÇÃO COD-343, de 8 de dezembro de 1972

Abre o Crédito Especial de ..... Cr$ 130.000,00, destinado às despesas com as obras de acréscimo a serem realizadas na Delegacia de Estatística em Goiânia-GO 136

RESOLUÇÃO COD-344, de 19 de dezembro de 1972

Abre Crédito Suplementar ao Orçamento-Programa do Serviço Gráfico da Fundação IBGE-SERGRAF, no montante de .... Cr$ 567.000,00 (quinhentos e sessenta e sete mil cruzeiros) destinado ao reforço do sub-elemento da despesa "4.1.3.1-Máquinas, Motores e Aparelhos", do Orçamento Analítico do mencionado ..... SERGRAF 136

RESOLUÇÃO COD-345, de 27 de dezembro de 1972

Abre Crédito Especial no montante de Cr$ 1.300.000,00 (hum milhão e trezentos mil cruzeiros), destinado ao custeio de despesas preliminares, relativas às obras de ampliação do imóvel desta Fundação, situado na Rua Visconde de Niterói, 1.246, nesta cidade 137

Resoluções da Comissão Nacional de Planejamento e Normas Estatísticas

RESOLUÇÃO CONPLANE-14, de 12 de abril de 1972

Dispõe sobre os cabeçalhos de apuração para os questionários da XXXVI Campanha Estatística 76

RESOLUÇÃO CONPLANE-15, de 15 de abril de 1972

Dispõe sobre a remessa do plano de inquéritos regionais de realização prevista para 1973 80

RESOLUÇÃO CONPLANE-16, de 6 de outubro de 1972

Atribui ao Instituto Brasileiro de Estatística a responsabilidade dos levantamentos não incluídos no Plano Único de Estatísticas Agropecuários, formulados pela Comissão Especial de Planejamento, Controle e Avaliação das Estatísticas Agropecuárias (CEPAGRO) 139

RESOLUÇÃO CONPLANE-17, de 27 de novembro de 1972

Dispõe sobre a realização do XXXVII Campanha Estatística 139

Composto e impresso nas Oficinas do Serviço Gráfico da Fundação IBGE — Rio de Janeiro — GB.

IBGE

Presidente: ISAAC KERSTENETZKY

Diretor-Geral: EURICO DE ANDRADE NEVES BORBA

Diretor-Técnico: AMARO DA COSTA MONTEIRO

DEPARTAMENTO DE DIVULGAÇÃO ESTATÍSTICA
Chefe: Ovídio de Andrade Júnior

SECRETARIA DA REVISTA BRASILEIRA DE ESTATÍSTICA
Chefe: Fernando Pereira Cardim