REVISTA BRASILEIRA DE ESTATÍSTICA

Órgão oficial da Fundação IBGE
— Instituto Brasileiro de Estatística
e Sociedade Brasileira de Estatística

Redação:

Av. Franklin Roosevelt, 166 — ZC-39
Rio de Janeiro, GB — Brasil — Tel: 252-3605

Diretor responsável:

Raul Romero de Oliveira

Secretário:

José Bastos Távora

Chefe da Secretaria:

Fernando Pereira Cardim

Preço:

assinatura anual:	NCr$ 5,60
número avulso:	NCr$ 2,00

Vendas:

Av Franklin Roosevelt, 146-A
loja B — Tel: 242-7142

SUMÁRIO

Sebastião Aguiar Ayres

A Escola Nacional de Ciências Estatísticas e a Estatística Brasileira 3

Adalberto Serra

Um nôvo método de extrapolação . 8

Estudo de Estatística Teórica

Elementos de Estatística — Henrique Tafuri Malvar . . . 16

Legislação

Decreto-lei nº 428, de 22-1-1969 68
Resoluções da COD, de 80 a 98 . 68

Bibliografia

Publicações do Instituto Brasileiro de Estatística editadas no trimestre janeiro-março de 1969 . 102

Reportagem

Em Curitiba o Presidente da Fundação IBGE 104

Noticiário

Calendário das reuniões de órgãos internacionais de Estatística 106

Necrológio

Florêncio de Abreu . . 110

Resenha

Giorgio Mortara . 112

RBE — Índice Alfabético e Remissivo — 1968 115

PROFESSOR SEBASTIÃO AGUIAR AYRES

A ESCOLA NACIONAL DE CIÊNCIAS ESTATÍSTICAS E A ESTATÍSTICA BRASILEIRA

Aula inaugural do ano letivo, pronunciada em 3 de março de 1969, pelo Sr. Presidente da Fundação IBGE

Meus Senhores,

Agradeço, sensibilizado, ao Diretor Antônio Tânios Abibe e ao Conselho Técnico da Escola Nacional de Ciências Estatísticas, o honroso convite com que me distinguiram para participar desta solenidade, que marca o início do ano letivo de 1969. Aqui compareço animado de grande entusiasmo, motivado pelo acentuado progresso que se vem observando nas atividades dêste estabelecimento de ensino, onde se preparam as novas gerações de estatísticos brasileiros e se aperfeiçoam aquêles que, nos órgãos governamntais e nos setores da iniciativa privada, fazem estatística — a estatística de que êste jovem país em franco desenvolvimento tanto necessita

Desejo, aproveitar a oportunidade, que assim me é proporcionada, para expor, aos mestres e aos alunos da ENCE, em breve retrospecto, as realizações do IBGE nos últimos anos e, ao mesmo tempo, indicar alguns dos principais programas em desenvolvimento Permitam-me, porém, que ressalte, ainda uma vez, a crescente importância da Estatística nos dias atuais e a amplitude das perspectivas que a ela se abrem, como elemento fundamental das conquistas científicas de nossa era, na medida sempre mais apurada e rigorosa de tôdas as coisas Não seria possível, com efeito, nos tempos hodiernos, avançar por qualquer dos domínios em que se desdobra e se multiplica o conhecimento humano, sem o apoio, a orientação, o esclarecimento das indicações estatísticas

A Estatística ilumina os roteiros do conhecimento, confirma cientìficamente experiências e ensaios de tôda ordem, indica e autoriza conclusões. Pode-se afirmar que sua evolução acompanha, como fator indispensável de êxito, o esfôrço considerável que está impulsionando a humanidade, neste século, ao espantoso domínio do meio em que vivemos Desde os pacientes trabalhos de laboratório e de gabinete aos espetaculares eventos espaciais, a presença da Estatística se evidencia na precisão das avaliações, na previsão do que deve acontecer, nos processos de observação dos fatos, na mensuração minuciosa de causas e de efeitos.

Para chegar a ser o que é hoje em dia, êsse instrumento de tão aguda sensibilidade teve e continua a ter seus pioneiros, aquêles que se dedicam à pesquisa pura, à evolução da teoria e dos métodos, os que abrem caminho a novas aplicações que possibilitam medir, avaliar e até prever o que antes parecia insuscetível de qualquer quantificação, como no caso de fenômenos de natureza social que se inserem na categoria dos atos de vontade, de decisão e de julgamento das coletividades

A importância e o alto valor da Estatística mais e mais avulta em nosso país, que se defronta com problemas de expansão econômica e condicionamentos sociais na proporção mesma da sua magnitude territorial e demográfica. Muito já se fêz no Brasil, é certo, para encaminhar nos melhores têrmos soluções adequadas para êsses problemas, mas o que resta por fazer constitui o grande desafio lançado aos seus filhos, sobretudo à sua juventude, aos que agora se exercitam para levar adiante o progresso já alcançado

Os marcos atingidos nos últimos tempos, em diferentes campos, exigiram que a Estatística, neste país, adquirisse feição capaz de satisfazer aos reclamos do desenvolvimento nacional Desenvolvimento que assinala a transição de uma economia quase exclusivamente dedicada à produção de artigos primários, com reflexos diretos na composição das pautas de exportação e importação, para a crescente e promissora diversificação de atividades, resultante do surto industrial que o Brasil vem experimentando Permitindo expectativa encorajadora, essa realidade impõe, por isso mesmo, incessante modernização e aprimoramento das técnicas de bem planejar. Isso leva a redobrar os esforços para dotar o aparelho de prospecção estatística de eficiência cada vez maior, para que seja capaz de assegurar aos governantes e aos círculos empresariais a orintação certa para a formulação das políticas melhor indicadas e das previsões mais seguras na esfera das iniciativas vinculadas ao desenvolvimento econômico e social e ao planejamento.

Para atender às solicitações nesse sentido, tornou-se impositivo o emprêgo de novos e avançados métodos e processos de investigação estatística Notável tem sido, com efeito, o esfôrço realizado nessa direção e apreciáveis, animadores mesmo, vêm sendo os resultados obtidos Criou-se uma mentalidade sensível à urgência de modernização dos sistemas de coleta de dados primários, de crítica e aferição da qualidade dos elementos colhidos, do processamento dos dados, enquanto a pesquisa teórica, a especulação puramente científica, à procura das técnicas e normas mais aconselháveis de interpretação e de análise, vão encontrando ambiência e possibilitando a formação de profissionais de alto nível técnico e indiscutível valor científico

Para fornecer, aos observadores de nossas realidades, aos estudiosos e analistas dos fenômenos decorrentes da evolução do país, aos planejadores do desenvolvimento na área governamental, os elementos de que necessitam, em níveis de precisão e de tempo indispensáveis à formulação de prognósticos e previsões, aprimora-se o instrumento oficial de pesquisa estatística, atualiza-se a divulgação de dados estatísticos

É a consciência, plena e profunda, do papel que cabe à Fundação IBGE, nessa incansável busca de modernização, é essa consciência imperativa de incessante renovação e aperfeiçoamento, que desejo bem fixar perante êste auditório, constituído na maior parte de jovens animados do entusiasmo que lhe é próprio e que se exprime invariàvelmente em anseios de progresso e desenvolvimento

Quero aqui afirmar que se inscreve nessa constante renovação de métodos e processos de ação, o objetivo principal do esfôrço desenvolvido pelos que se acham à frente da Fundação IBGE, que vêem nesta Escola a fonte, o viveiro dos grandes especialistas futuros, daqueles que em breve irão participar das árduas tarefas destinadas a oferecer ao país elementos básicos para o planejamento adequado de seu desenvolvimento econômico e social, de sua prosperidade e de sua segurança.

A direção superior da Fundação IBGE observa e acompanha, com redobrado interêsse, os êxitos alcançados pela ENCE e, posso assegurar, tem feito o possível no sentido de apoiá-la — não só no que se relaciona com a eficiência do seu ensino, como no estímulo aos que a freqüentam

Até há pouco tempo, creio mesmo que até 1966, não se haviam criado condições que permitissem ao IBGE valer-se da colaboração de alunos desta Escola A participação da ENCE nas atividades do sistema estatístico nacional era quase nenhuma Os colegiados dirigentes das atividades estatísticas não contavam, entre os seus membros, com representantes desta Escola A rigor, a vinculação da ENCE ao IBGE se limitava às relações de dependência administrativa

Nunca pude aceitar êsse quase divórcio entre o Sistema Estatístico e a ENCE Entendia ser indispensável e imperiosa a integração das atividades dos dois órgãos — o Instituto Brasileiro de Estatística e a Escola Nacional de Ciências Estatísticas — como um dos fatôres essenciais do desenvolvimento da estatística brasileira

De dois anos a esta parte, é-me grato registrar, sensível modificação vem-se operando nas relações entre as duas grandes Unidades da Fundação IBGE

O Diretor da ENCE é um dos seis membros do Conselho Diretor da Fundação IBGE Representante da ENCE participa da CINPLANE — Comissão Nacional de Planejamento e Normas Estatísticas, o colegiado que orienta as atividades técnicas do sistema estatístico nacional Outros representantes da Escola integram Comissões de coordenação e orientação técnica das atividades de diversos setores incumbidos da produção de estatísticas, como o Grupo Executivo de Pesquisas Domiciliares (GEPD), o Centro Brasileiro de Estudos Demográficos, o Centro Brasileiro de Estatísticas Agropecuárias (CBEA), o Centro de Processamento de Dados (CENPRO), o Centro Brasileiro de Estatísticas Educacionais (CBESE), a Comissão Censitária Nacional

Essa integração objetiva também o melhor aproveitamento do corpo discente desta Escola. De 1967 até agora, 33 alunos da ENCE já participaram dos trabalhos do IBE, como estagiários. Neste instante, dezoito elementos do corpo discente da ENCE cooperam efetivamente na execução de tarefas de responsabilidade de diversos setores técnicos do IBE. Com bôlsas de estudo obtidas através de gestões encaminhadas pela Fundação IBGE, dois elementos recém-formados pela ENCE se encontram no "Bureau of Census", nos Estados Unidos, realizando cursos de aperfeiçoamento em estatísticas agropecuárias Novos estagiários, para integrarem as equipes técnicas do IBE, devem ser recrutados no decorrer dêste mês de março.

Há que registrar, ainda, a efetiva colaboração que a ENCE vem prestando ao sistema estatístico, com a intensificação de cursos de aperfeiçoamento destinados ao seu pessoal Além do curso intermediário, já tradicional, foram promovidos em 1968 outros cursos especiais para elementos do IBE. Com vistas ao aperfeiçoamento do pessoal dos Estados, deu-se início, com o curso que acaba de ser realizado em Belém, um cometimento que deve estender-se a outras Unidades da Federação.

Creio ser oportuno informar, neste ponto das cogitações em tôrno de uma iniciativa que, concretizada, ampliará consideràvelmente o campo de ação da ENCE Trata-se, com interêsse e entusiasmo, da criação, na Escola, de Centros de Pesquisas que inscreverão entre as suas atividades fundamentais: a) o aperfeiçoamento das técnicas de pesquisa, sob critérios científicos de desenvolvimento da teoria estatística; b) o exame dos métodos de análise estatística, no que respeita à sua adequação e eficiência; c) a realização de investigações nos campos da estatística teórica e aplicada, objetivando a evolução da estatística brasileira e o melhor conhecimento da realidade nacional; d) a colaboração efetiva, com os órgãos técnicos do IBE, no planejamento de levantamentos estatísticos, com vistas a criar condições favoráveis à substituição progressiva dos métodos tradicionais

Iniciativa do maior alcance, inédita mesmo em nosso meio, terá influência decisiva no aperfeiçoamento das atividades estatísticas, possibilitando a criação de mais apropriados processos de pesquisa e de interpretação de nossas realidades, segundo as peculiaridades geofísicas, sócio-culturais e econômicas do país. Realizando trabalhos de aplicação prática, com base nas estatísticas existentes, e cooperando com o Instituto Brasileiro de Estatística no planejamento de trabalhos de sua responsabilidade, os Centros de Pesquisas virão colocar a ENCE em relevante situação, não só como núcleo de investigações científicas, mas, também, como órgão de estudos no terreno da análise objetiva dos problemas brasileiros, à luz das informações estatísticas. Ao mesmo tempo, se constituirão em proveitoso núcleo de treinamento dos alunos no setor da estatística aplicada, contribuindo para integrá-los, desde logo, em sua vida profissional.

Cabe também referir, neste passo, que pretende a Fundação IBGE instituir prêmios a serem concedidos aos concluintes que obtiverem mais destacada colocação no Curso de Bacharelado da ENCE. Êsse prêmio, que consistirá em bôlsa de estudos para aperfeiçoamento e treinamento, em órgãos especializados e cursos de avançado nível, no país ou no estrangeiro, deverá ser conferido pela primeira vez, ao que tudo indica, ainda em 1969

Ao mesmo tempo em que essas iniciativas vêm sendo tomadas, a Fundação IBGE, preocupada em corresponder às necessidades dos usuários de informações estatísticas, desenvolve inusitados esforços, no sentido de introduzir novos métodos e processos de trabalho em todos os setores vinculados a produção de estatísticas Permito-me rememorar alguns dos resultados mais expressivos a respeito, pois creio ser grato a quantos estudam nesta Escola verificar como e em que medida se vem procurando aperfeiçoar os métodos de trabalho, com vistas à obtenção de estatísticas seguras e atuais, adequadas ao exame de nossas realidades.

Começarei pelo setor da produção industrial, de relêvo indiscutível para o impulso desenvolvimentista do país Cuidou-se, preliminarmente, de dar nova orientação aos levantamentos do gênero, para o que buscou introduzir, com as necessárias adaptações ao meio a ser investigado, a técnica de amostragem

Para que se possa ter idéia dos sucessos alcançados nesse terreno, basta dizer que os resultados gerais referentes à indústria de transformação, que, em 1965, remontavam a 1958 ou 1959, hoje estão atualizados até o 3º trimestre de 1968

Outras pesquisas, julgadas de todo interêsse nesse mesmo setor, foram planejadas e postas em execução. Dentre elas, a de periodicidade mensal, destinada à obtenção de indicadores da produção industrial, da maior utilidade para os organismos incumbidos do planejamento econômico e financeiro Iniciada em janeiro de 1968, os resultados dêsse levantamento vêm sendo divulgados rigorosamente em dia, já sendo disponiveis os referentes a janeiro de 1969.

Levantamento de grande interêsse, o de preços de gêneros alimentícios e artigos de vestuário vem merecendo atenção especial, cumprindo ressaltar a atualização alcançada em sua divulgação, que também se faz mensalmente, em três volumes um com os preços dos gêneros alimentícios no comércio varejista das Capitais, outro, com os preços nos comércios atacadista e varejista de gêneros alimentícios e artigos de vestuário, nas Capitais, e, o terceiro, com os preços médios dos mesmos artigos nas Unidades da Federação Não posso deixar de encarecer, ainda quanto a essa pesquisa, a atualização de seus resultados, que já atinge o mês de janeiro de 1969

Setor também dos mais importantes na vida do país, o relativo à indústria da construção civil vem sendo igualmente objeto de cuidados especiais por parte da Fundação IBGE Implantado em 1965, o levantamento proporciona informações indispensáveis ao estudo dos problemas vinculados à habitação e ao planejamento de suas soluções O inquérito mensal sôbre edificações, que cobria inicialmente apenas os municípios das Capitais, passou, a partir de julho de 1968, a incluir as cidades com população igual ou superior a 50 000 habitantes Seus resultados já se acham divulgados até novembro de 1968

Falarei, agora, de um empreendimento de grande importância e não menor potencialidade. Refiro-me ao moderno sistema de pesquisa estatística que, com aplicação da técnica de amostragem, permite investigar as características básicas da população e da habitação, proporcionado o conhecimento, em períodos trimestrais ou semestrais, de informações até há pouco só conseguidas através dos Censos decenais Essas investigações, sob a denominação genérica de Pequisa Nacional por Amostra de Domicílios, além daquelas características básicas da população e da habitação, abrangem a mão-de-obra, as migrações internas, o grau de instrução e outros aspectos que tenham no grupo familiar a unidade de informação Seus resultados proporcionam dados da maior importância para o diagnóstico dos problemas sócio-econômicos e o planejamento das soluções reclamadas

Iniciada no segundo semestre de 1967, a Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios foi implantada inicialmente na I Região, compreendendo os Estados da Guanabara e do Rio de Janeiro Logo se estenderam os trabalhos às seguintes Regiões em que se convencionou dividir o país para êsse efeito II Região (São Paulo), III (Paraná, Santa Catarina e Rio Grande do Sul), IV (Minas Gerais e Espírito Santo), V (Nordeste) e VI (Brasília) Os resultados referentes ao segundo trimestre de 1968 foram divulgados em outubro do mesmo ano E os relativos ao terceiro trimestre, já são disponíveis para o Nordeste (V Região) e o Sul do País (III Região), achando-se os concernentes às demais áreas em fase final de sistematização

Ampliando-se periòdicamente o âmbito das pesquisas, irão elas oferecendo trimestralmente informações atuais e seguras, sôbre os mais variados aspectos sócio-econômicos da vida nacional, entre os quais os relativos à saúde, nutrição, renda e despesa da família, composição, comodidades e confôrto do grupo familiar

Quero igualmente focalizar os cuidados de que vem sendo objeto, na Fundação IBGE, o aperfeiçoamento das estatísticas nos setores agropecuário e educacional Nesse sentido, foram criados o Centro Brasileiro de Estatísticas Agropecuárias e o Centro Brasileiro de Estatísticas Educacionais O primeiro já instalou a sua Comissão de Coordenação, integrada por agrônomos e estatísticos, representantes das entidades interessadas nas estatísticas agropecuárias, entre as quais esta Escola Intensificam-se nessa Comissão os estudos para a elaboração de um plano capaz de atender, a curto e médio prazos, as necessidades governamentais e as dos usuários em geral, para o que a Fundação IBGE conta com a cooperação de órgãos especializados dos Ministérios da Agricultura, do Planejamento e Coordenação Geral, e da Fazenda, bem assim com a colaboração de entidades do setor privado

O incremento dos estudos e análises dos fenômenos demográficos inscreve-se, com análogo destaque, entre as iniciativas com que a Fundação IBGE vem expandindo as suas realizações De importância que seria óbvio ressaltar no campo das pesquisas sócio-econômicas, êsses estudos e análises se acham a cargo do Centro Brasileiro de Estudos Demográficos, órgão de recente criação na Fundação IBGE, e que vem sendo orientado, desde o início, pelo Prof João Lyra Madeira, titular da cadeira de Demografia desta Escola.

Todo êsse ingente esfôrço de modernização, aperfeiçoamento e expansão de serviços estatísticos, abrangendo inúmeros inquéritos, pesquisas e levantamentos novos, está sendo levado para diante sem qualquer prejuízo dos trabalhos de preparação do Censo Geral de 1970, cuja execução se encontra confiada à Fundação IBGE E, a propósito das tarefas preparatórias para a realização

dessa importante e complexa operação censitária, desejo fornecer, em breves palavras, algumas informações que presumo sejam do interêsse de todos.

Os planos elaborados para os diversos Censos a serem efetuados em 1970 foram apreciados, debatidos e acolhidos nas Comissões Técnicas da I Conferência Nacional de Estatística, realizada nesta Cidade, em maio do ano passado, quando representantes dos Ministérios, dos Governos Estaduais, e de outras entidades públicas e do setor privado, reunidos com técnicos e especialistas na matéria, discutiram e se pronunciaram sôbre os principais problemas da estatística brasileira. Com base nas sugestões então formuladas, êsses planos vêm sendo revistos pelas equipes técnicas do Departamento de Censos. Extenso e minucioso trabalho de preparação encontra-se em marcha adiantada, incluindo cuidadosa mobilização da rêde-de-coleta estatística em todo o país e sua adequação às tarefas específicas do Censo Geral de 1970, para que o empreendimento censitário seja levado a efeito dentro das previsões estabelecidas, com o máximo rigor.

Ultima-se o preparo da base geográfica para a realização da importante operação, tarefa que conta com a cooperação eficiente do Instituto Brasileiro de Geografia e que inclui a atualização e, em muitos casos, a confecção, de aproximadamente 4 000 mapas municipais, com base nos quais está sendo estudado o território nacional, para efeito de sua repartição em setores censitários. Para que se possa ter idéia da magnitude dos trabalhos de coleta de dados, bastará aludir ao número aproximado dêsses setores, que deverá ascender a cêrca de 90.000

Meus Senhores,

De tudo quanto tive oportunidade de dizer, nesta exposição singela e realista, verifica-se a existência, nos dias atuais, de ambiente e condições favoráveis à integração das atividades da ENCE e do IBE, do que resultarão, sem dúvida, os melhores proveitos para o desenvolvimento da estatística brasileira

Tornava-se imperiosa uma colaboração mais estreita, entre a ENCE, não só como centro de formação profissional, mas também como fonte de elaboração metodológica, e o IBE, órgão coordenador das atividades do sistema estatístico brasileiro.

Verifica-se, agora, que essa integração pode concretizar-se em têrmos da melhor conveniência e adequação, uma vez que o Instituto Brasileiro de Estatística passa por uma fase de intensa renovação de métodos, com vistas ao atendimento das necessidades do país no setor da informação estatística Para que essa renovação se processe em condições ideais, não pode o IBE prescindir da cooperação efetiva dos professôres desta Escola, que, tenho certeza, saberão corresponder à convocação que lhes fôr feita, como não pode deixar de contar com a participação, cada vez maior, dos alunos da ENCE e dos estatísticos aqui diplomados.

O Brasil, país nôvo e em franco processo de desenvolvimento, precisa mais e mais de estatísticas; e, por isso mesmo, carece também, em proporção sempre maior, de Estatísticos de alto nível técnico

Evidencia-se, assim, a importância da ENCE e das novas gerações de estatísticos, para a expansão e o aperfeiçoamento da Estatística nacional, patenteando-se, em face dessas responsabilidades, a imperiosa necessidade de que se intensifique ainda mais a cooperação entre o Instituto Brasileiro de Estatística e a Escola Nacional de Ciências Estatísticas

* * *

Ao dirigir minha saudação a todos, mestres e alunos, formulamos os melhores votos de inteiro êxito nas atividades escolares que ora se reabrem

ADALBERTO SERRA

UM NÔVO MÉTODO DE EXTRAPOLAÇÃO

(Estudo realizado no Conselho Nacional de Pequisas)

O problema fundamental da Meteorologia reside no prognóstico da pressão atmosférica Malgrado o considerável progresso obtido nos últimos anos e o uso de computadores eletrônicos, os resultados continuam precários e limitados a um máximo de 3 dias.

Com o intuito de alongar tal prazo até cinco ou dez dias, alguns pesquisadores empregaram diversos artifícios, mas a aplicação dos seus métodos, por nós tentada, não deu bons resultados Teve porém a vantagem de sugerir uma *técnica original,* que passamos a expor:

— Sejam p_o a pressão de hoje, p_{-1} de ontem, p_{-2} a de ante-ontem, etc Queremos calcular o valor de amanhã p_{+1}, e dos dias seguintes p_{+2}, p_{+3}, etc, ou pelo menos a média de 5 dias, correspondente ao período p_{+1} até p_{+5}, e centrada no dia $+3$. $(\overline{P}^5_{+3})$

Em lugar de uma extrapolação única, no gráfico das médias móveis de 5 dias, e auxiliada pela correlação acentuada entre p_{+3} e P^5_{+3} (como fêz Grappe); ou de atribuir à pressão de amanhã o valor pn (pressão normal), como propõe Namias, pareceu-nos mais lógico estudar o comportamento das curvas obtidas nos *vários períodos.*

Chamaremos assim P^3, P^5, P^{10}, P^{15}, P^{20}, P^{30}, as médias móveis de 3-5-10-15-20-30 dias, dos valôres de pressão observados numa hora fixa (12 h T. C. G, por ex). Tais médias, embora correspondam a datas cada vez mais recuadas (P^3 centrada no dia -1, P^5 no dia -2 etc) serão para facilidade da extrapolação marcadas na vertical correspondente ao *último dia do período.*

Como as médias exigissem número cada vez maior de decimais, para servirem aos nossos cálculos, julgamos preferível marcar nos gráficos as próprias "somas móveis"

Assim Po^3, Po^5, Po^{10}, etc., serão grafados na abcissa $t = O$ (hoje); P^3_{-1}, P^5_{-1} na de ontem, P^{10}_{-2} ante-ontem, etc

As fórmulas serão

$P^3_0 = p_o + p_{-1} + p_{-2}$, soma dos últimos 3 dias

$P^3_{-1} = p_{-1} + p_{-2} + p_{-3}$, total correspondente ao dia de ontem

$P^3_{+1} = p_{-1} + p_o + p_{+1}$, para amanhã (neste caso extrapolado, pois desconhecemos p_{+1})

Também $P^5_0 = p_o + p_{-1} + p_{-2} + p_{-3} + p_{-4}$

$P^5_{-3} = p_{-3} + p_{-4} + p_{-5} + p_{-6} + p_{-7}$

$P^5_3 = p_{+3} + p_{+2} + p_{+1} + p_o + p_{-1}$

R. bras Estat, Rio de Janeiro, 30(117) :8-15, jan /mar 1969

e de um modo geral

$$P_m^n = p_m + p_{m-1} + p_{m-2} + \quad + p_{m-n+1} = \sum_m^{m-n+1} p_m$$

com n = nº de dias do período, e
m a data do último dia abrangido:

m= O (hoje), m=-1 (ontem), m= + 1 (amanhã), etc

Sendo a curva de 3 dias muito irregular, utilizamos numa primeira tentativa os gráficos de 5 — 10 — 15 — 20 — 30 dias, ou seja, respectivamente para hoje e amanhã:

$$P_0^n = p_0 + p_{-1} + p_{-2} + \quad p_{-n+1} = \sum_{m=0}^{-n+1} p_m$$

$$P_{+1}^n = p_{+1} + p_0 + p_{-1} + \quad + p_{-n+2} = \sum_{m=1}^{-n+2} p_m$$

com uma variação, relativamente à anterior, de

$P_{+1}^n - P_0^n = \triangle P_0^n = p_{+1} - p_{-n+1}$, ou com $n = 30$, etc

$$\triangle P_0^{30} = p_{+1} - p_{-29}$$
$$\triangle P_0^{20} = p_{+1} - p_{-19}$$
$$\triangle P_0^{15} = p_{+1} - p_{-14}$$
$$\triangle P_0^{10} = p_{+1} - p_{-9}$$
$$\triangle P_0^{5} = p_{+1} - p_{-4}$$
$$\triangle P_0^{1} = p_{+1} - p_0$$

O cálculo das somas móveis sucessivas será fácil, bastando adicionar o nôvo elemento (final), subtraindo o inicial do período anterior

Assim numa curva de 5 dias teremos:

$$P_{-3}^5 = p_{-3} + p_{-4} + p_{-5} + p_{-6} + p_{-7}$$

correspondente ao período -3 a -7, mas grafada em -3
A soma seguinte

$$P_{-2}^5 = p_{-2} + p_{-3} + p_{-4} + p_{-5} + p_{-6} =$$
$$= p_{-2} + (p_{-3} + p_{-4} + p_{-5} + p_{-6} + p_{-7}) - p_{-7} =$$
$$= p_{-2} + P_{-3}^5 - p_{-7}$$

Portanto, à soma anterior acrescenta-se p_{-2} (nôvo elemento), e subtrai-se p_{-7}

Também, uma vez calculadas as somas de 5 dias, as demais podem ser deduzidas:

$P_0^{10} = p_0 + p_{-1} + p_{-2} + \quad + p_{-9} = (p_0 + p_{-1} + .. + p_{-4}) + (p_{-5} + p_{-6} +$ $+ \quad . p_{-9}) = P_0^5 + P_{-5}^5$, concluindo-se que a soma decadal = soma das duas pentadas; já o total de 20 dias será a adição das duas décadas, etc

Previsão — Calculadas e grafadas as somas móveis das pressões correspondentes aos períodos n= 5, 10, 15, 20, 30, teremos no dia de hoje (0) um conjunto de curvas interrompidas nos últimos totais conhecidos P_0^5, P_0^{10}, P_0^{15}, P_0^{20}, P_0^{30} e que sofrerão amanhã alterações $\triangle P_0^n$, tornando-se P_{+1}^5, P_{+1}^{10}, P_{+1}^{15}, P_{+1}^{20}, P_{+1}^{30}, que terão de ser obtidos por extrapolação gráfica das várias curvas; o que não exclui o emprêgo de métodos mais exatos, como o ajust mento de polinomiais, mediante o uso de computadores.

Pode-se alegar que bastaria extrapolar uma das curvas, e logo teríamos conhecida a pressão de amanhã, p_{+1}. *Assim sempre se fêz,* mas com resultados *precários*

Pelo nosso método, com a extrapolação *simultânea* das várias curvas, teremos outros tantos valôres da pressão p_{+1}, restando escolher o mais provável

Neste ponto cabe dizer que o problema parece insolúvel. Com efeito, a variável é aleatoria, pois a pressão não obedece a uma lei, ou melhor, não pode ser expressa em função do tempo

Dada uma série de valôres p_{-2}, p_{-1}, p_0, sabe-se que p_{+1} poderá se identificar com qualquer das leituras compreendidas entre $p_0 \pm \triangle$ p max, sendo $\triangle$ p max, a maior variação já registrada em 24 horas. E tanto assim é, que o nosso método se enquadra numa "análise indeterminada de 1 º grau". Temos, como foi visto:

$$\triangle P_0^{20} = p_{+1} - p_{-19}$$
$$\triangle P_0^{15} = p_{+1} - p_{-14}$$
$$\triangle P_0^{10} = p_{+1} - p_{-9}$$
$$\triangle P_0^{5} = p_{+1} - p_{-4}$$

No caso, 4 equações a 5 incógnitas:

$$p_{+1}, \qquad \triangle P_0^{20}, \qquad \triangle P_0^{15}, \qquad \triangle P_0^{10}, \qquad \triangle P_0^{5}$$

Se apenas um só dêsses valôres, por ex, $\triangle P_0^{10}$ fôsse conhecido, teríamos

$$p_{+1} = \triangle P_0^{10} + p_{-9}$$

e os demais estariam determinados exatamente, tornando-se aliás supérfluos.

Assim, para solucionar o problema, devemos extrapolar, gráfica (ou algèbricamente) as várias curvas, obtendo as variações:

$$\triangle P_0^{30}, \qquad \triangle P_0^{20}, \qquad \triangle P_0^{5}$$

que darão resultados *diversos,* contudo, para p_{+1}. Como então uniformizá-los num único, o mais próximo possível do real?

Neste ponto, o nosso método permite um artifício curioso. Temos realmente, tomando as diferenças entre *somas* de períodos diversos, n e n'

$$P_{+1}^{n} - P_0^{n} = p_{+1} - p_{-n+1}$$

$$P_{+1}^{n'} - P_0^{n'} = p_{+1} - p_{-n'+1}$$

$$\left(P_{+1}^{n} - P_{+1}^{n'}\right) = \left(P_0^{n} - P_0^{n'}\right) + p_{-n'+1} - p_{-n+1}$$

Em particular, com n = 30, n' = 20, etc :

$$P_{+1}^{30} - P_{+1}^{20} = P_0^{30} - P_0^{20} + p_{-19} - p_{-29}$$

$$P_{+1}^{20} - P_{+1}^{15} = P_0^{20} - P_0^{15} + p_{-14} - p_{-19}$$

$$P_{+1}^{15} - P_{+1}^{10} = P_0^{15} - P_0^{10} + p_{-9} - p_{-14}$$

$$P_{+1}^{10} - P_{+1}^{5} = P_0^{10} - P_0^{5} + p_{-4} - p_{-9}$$

Em geral $\quad \Delta P_0^n - \Delta P_0^{n'} = p_{-n'+1} - p_{-n+1},$

ou $\quad \Delta P_0^{20} - \Delta P_0^{15} = p_{-14} - p_{-19},$ etc.

No sistema acima, os primeiros membros são "diferenças" de valôres desconhecidos, P_{+1}^n e $P_{+1}^{n'}$, e contudo rigorosamente determinadas, como diferenças entre quantidades conhecidas: P_0^n, $P_0^{n'}$, $p_{-n'+1}$, p_{-n+1} valôres da pressão em datas recuadas, e somas no último dia (0).

Assim, conquanto permaneça impossível determinar com exatidão as somas futuras, em seu valor *absoluto,* a posição relativa das curvas, ou seja a *distância vertical* entre uma e outra é rigorosamente determinada, e com *muitos dias* de *antecedência,* uma vez que

$$P_{+m}^n - P_{+m}^{n'} = \left(P_{m-1}^n - P_{m-1}^{n'}\right) + p_{-n'+m} - p_{-n+m} =$$

$$= \left(P_{m-2}^n - P_{m-2}^{n'}\right) + (p_{-n'+m-1} - p_{-n+m-1}) +$$

$$(p_{-n'+m} - p_{-n+m}) =$$

$$= P_0^n - P_0^{n'} + (p_{-n'+1} - p_{-n+1}) + (p_{n'+2} - p_{-n+2}) +$$

$$+ (p_{-n'+3} - p_{-n+3}) + \quad (p_{-n'+m} - p_{-n+m})$$

Sòmente quando $m > n'$ (pois $n' < n$), aparecerá o primeiro valor desconhecido no momento da previsão, ou seja p_{+1}, tornando indeterminadas já agora as próprias *distâncias* entre as curvas.

Em resumo, as várias curvas P_0^{30}, P_0^{20}, P_0^{15}, P_0^{10}, P_0^5, serão extrapoladas de tal forma que suas diferenças obedeçam às equações de condição

A extrapolação *não é pois livre,* e tanto mais determinada, no futuro, quanto maior o índice superior

Assim, se subirmos ou descermos qualquer curva, para melhor extrapolação, *todo o conjunto* subirá ou descerá, uma *distância* idêntica

Uma vez que "em conjunto" possamos extrapolar satisfatòriamente *tôdas* as curvas, darão elas o total mais plausível para P_{+1}^n, P_{+2}^n, $P_{+1}^{n'}$, $P_{+2}^{n'}$, etc.; assim, como as distâncias obedecem às equações de condição anteriores, só um único valor será obtido para p_{+1} pressão de amanhã, o mesmo ocorrendo com p_{+2}, p_{+3}, etc , até p_{+20}; ou mesmo além, se empregarmos somas de 45 ou 60 dias, etc

Torna-se claro que *não* será preciso fazer todos os cálculos das equações de condição, e portanto das distâncias entre as curvas As diferenças entre P^{10} e P^5 para o dia + 3 são com efeito idênticas às de P^{15} e P^{10} para o dia + 8 (= 3 + 5), ou às de P^{20} e P^{15} para o dia + 13 (= 8 + 5), como é fácil verificar. Assim calculadas para os dias + 1 a + 5 as distâncias entre P^5 e P^{10}, servirão para os dias + 6 a + 10, entre P^{10} e P^{15}. Quanto às distâncias entre P^{10} e P^{15}, para os dias + 1 a + 5, serão às de P^5 e P^{10} do dia − 4 a 0, etc

Os resultados do método, quanto à sua aplicação, permanecem precários, pois o autor não dispôs de computadores para a exaustiva interpretação matemática das curvas, extrapoladas apenas gràficamente

Nos desenhos e cálculos anexos segue um exemplo de previsão das pressões para o Rio de Janeiro. A pesquisa se encontra estacionária, à espera de um estudo matemático mais completo, que o autor recomenda fortemente. Isto porque a solução encontrada permite *testar simultâneamente várias hipóteses,* e não se limita apenas à Meteorologia

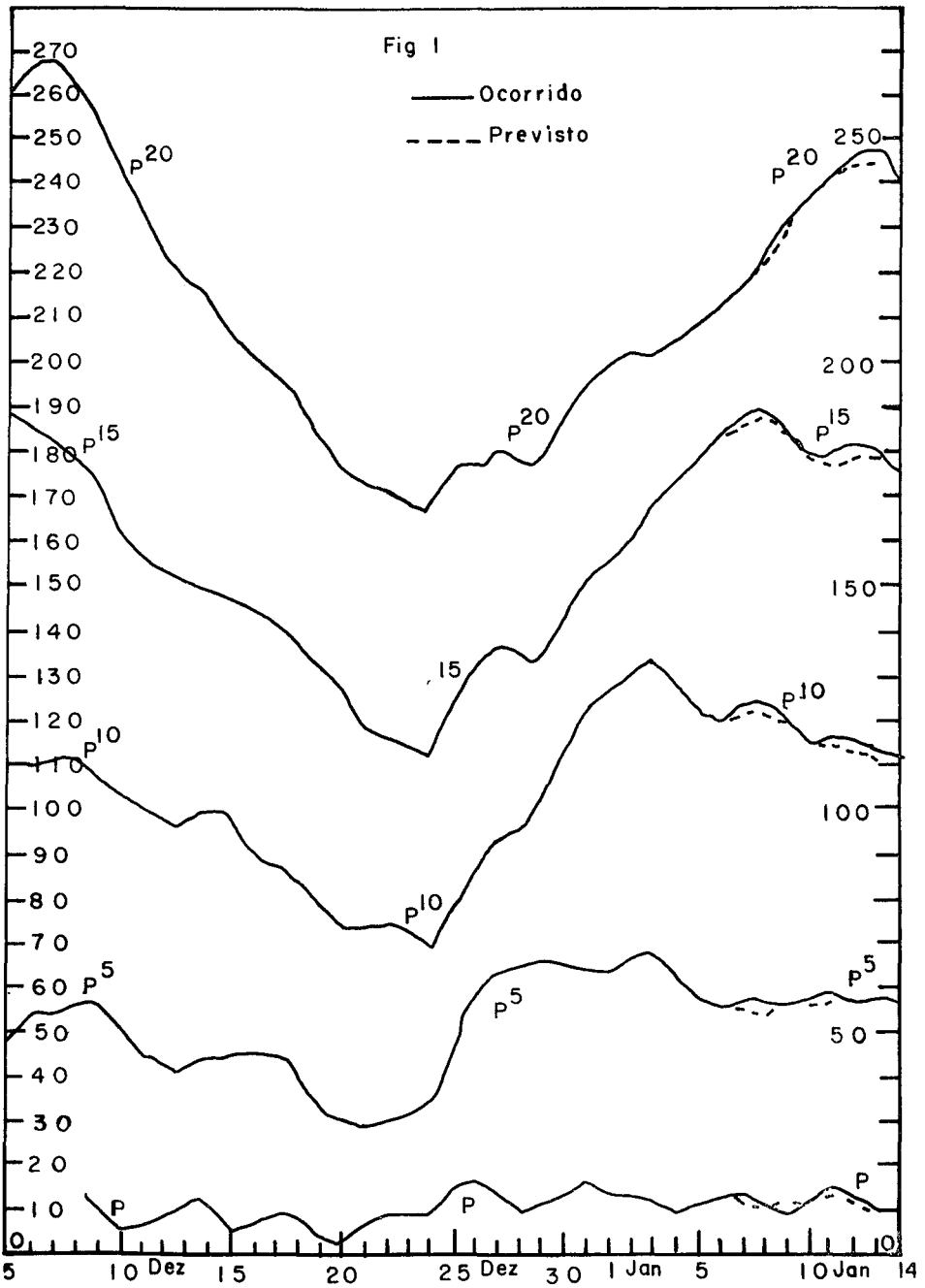
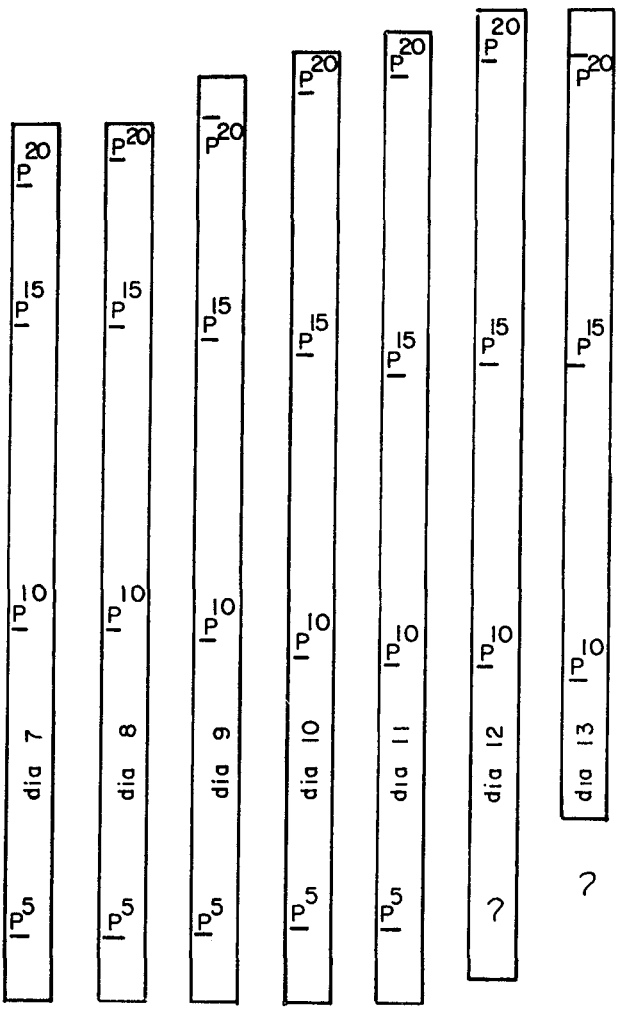


Fig 1
Ocorrido
Previsto
270
260
250
240
230
220
210
200
190
180
170
160
150
140
130
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
P20
P15
P10
P5
P
5
10 Dez
15
20
25 Dez
30
1 Jan
5
10 Jan
14

Fig 2

Réguas auxiliares



Sua aplicação poderá ser estendida às ciências econômicas, sociais e demográficas, onde os constantes erros de extrapolação que desmoralizam prognósticos e planejamentos, poderão ter uma correção adequada. Aguardamos assim a crítica dos que se disponham a estudar o problema

NOTA

Temos realmente:

$$P^{15}_{+8} - P^{10}_{+8} = (p_8 + p_7 + p_6 + \quad p_0 +$$

$$+ p_{-1} + \quad p_{-6}) - (p_8 + p_7 + \quad p_0 + p_{-1}) =$$

$$= p_{-6} + p_{-5} + p_{-4} + p_{-3} + p_{-2}$$

$$P^{10}_{+3} - P^{5}_{+3} = (p_3 + p_2 + p_1 + p_0 + p_{-1} + p_{-1} \quad p_{-6}) -$$

$$- (p_3 + p_2 + \quad p_{-1}) = (p_{-6} + p_{-5} + p_{-4} + p_{-3} + p_{-2}),$$

ou seja $P_s^{15} - P_s^{10} = P_s^{10} - P_s^{5}$

		p	P5	P10	P15	P20	P30			p	P5	P10	P15	P20	P30
Nov	1	17,2						Dez	16	07,2	,	,	,	,	,
	2	17,4							17	08,3	,	,	,	,	,
	3	19,0							18	08,5	41,7	83,2	138,6	193,8	348,1
	4	18,8							19	03,5	,	,	,	,	,
	5	18,2	90,6						20	02,7	,	,	,	,	,
	6	14,9	88,3						21	05,1	,	,	,	,	,
	7	11,0	81,9						22	09,7	,	,	,	,	,
	8	11,7	74,6						23	08,8	29,8	71,5	113,0	168,4	292,1
	9	14,1	69,9						24	08,7	,	,	,	,	,
	10	13,2	64,9	155,5					25	15,5	,	,	,	,	,
	11	,	,	,					26	16,4	,	,	,	,	,
	12	,	,	,					27	14,2	,	,	,	,	,
	,	,	,	,					28	09,8	64,6	94,4	136,1	177,6	288,2
	,	,	,	,					29	10,5	,	,	,	,	,
	,	,	,	,					30	13,6	,	,	,	,	,
Dez	8	12,6	55,4	110,6	179,1	264,9	370,4		31	15,9	,	,	,	,	,
	9	09,3	55,7	107,5	172,0	256,5	365,6	Jan	1	13,1	62,9	126,5	156,0	200,4	297,8
	10	05,2	,	,	,	,	,		2	13,6	66,7	131,3	161,1	202,8	299,7
	11	06,9	,	,	,	,	,		3	11,6	67,8	134,2	169,2	202,6	302,3
	12	08,9	,	,	,	,	,		4	08,7	62,9	127,4	175,2	205,4	303,8
	13	11,2	,	,	,	,	,		5	11,0	58,0	122,0	181,1	209,2	299,6
	14	11,8	,	,	,	,	,		6	12,2	57,1	120,0	183,6	213,1	300,4
	15	05,9	,	,	,	,	,								

Exemplo — Partindo das observações de pressão (12 hs) de 1-11-66 a 6-1-67, as somas na última data constam da linha final 57,1 (P^5) — 120,0 (P^{10}) — 183,6 (P^{15}) — 213,1 (P^{20}) — 300,4 (P^{30}).

Para prever as pressões de 7 a 13 de janeiro, transcreveremos os índices correspondentes a 6 de janeiro (p_0), tomando como

p_{-4} = 13,6 (dia 2 de janeiro, pois 6 − 4 = 2)
p_{-9} = 09,8 (" 28 de dez., pois 6 + 31 − 9 = 28)
p_{-14} = 08,8 (" 23 de dez, pois 6 + 31 − 14 = 23)
p_{-19} = 08,5 (" 18 de dez., pois 6 + 31 − 19 = 18)
p_{-29} = 12,6 (" 8 de dez, pois 6 + 31 − 29 = 8)

Já no dia imediato (7 jan), os índices p_{-4} p_{-20} correspondem a 3 jan, 29 dez., 24 dez, 19 dez., 9 dez, conforme o quadro abaixo·

Dias		p_{-29}	p_{-19}	p_{-14}	p_{-9}	p_{-4}	$P^{30}-P^{20}$	$p_{-19}-p_{-29}$	$P^{20}-P^{15}$	$p_{-14}-p_{-19}$	$P^{15}-P^{10}$	$p_{-9}-p_{-14}$	$P^{10}-P^{5}$	$p_{-4}-p_{-9}$
Jan	6	12,6	8,5	8,8	9,8	13,6	87,3	− 4,1	29,5	+ 0,3	63,6	+ 1,0	62,9	+ 3,8
	7	9,3	3,5	8,7	10,5	11,6	83,2	− 5,8	29,8	+ 5,2	64,6	+ 1,8	66,7	+ 1,1
	8	5,2	2,7	15,5	13,6	8,7	77,4	− 2,5	35,0	+ 12,8	66,4	− 1,9	67,8	− 4,9
	9	6,9	5,1	16,4	15,9	11,0	74,9	− 1,8	47,8	+ 11,3	64,5	− 0,5	62,9	− 4,9
	10	8,9	9,7	14,2	13,1	12,2	73,1	+ 0,8	59,1	+ 4,5	64,0	− 1,1	58,0	− 0,9
	11	11,2	8,8	9,8	13,6	—	73,9	− 2,4	63,6	+ 1,0	62,9	+ 3,8	57,1	—
	12	11,8	8,7	10,5	11,6	—	71,5	− 3,1	64,6	+ 1,8	66,7	+ 1,1	—	—
	13	5,9	15,5	13,6	8,7	—	68,4	+ 9,6	66,4	− 1,9	67,8	− 4,9	—	—

NOTA: $(P^{30}-P^{20})_7 = (P^{30}-P^{20})_6 + (p_{-19} - p_{-29})_6 = 87,3 + (-4,1) = 83,2$, etc

Limitando o prognóstico ao emprêgo das somas P^{20}, P^{15}, P^{10}, P^5, sua extrapolação (curvas tracejadas) resultaria nos seguintes valôres (os de 6 de janeiro já sendo prèviamente conhecidos):

Dia	P20	P15	P10	P5
6	213,1	183,6	120,0	57,1
7	216,5	186,7	122,1	55,4
8	223,0	188,0	121,6	53,8
9	231,5	183,7	119,2	56,3
10	237,5	178,4	114,4	56,4
11	241,0	177,4	114,5	57,4
12	243,5	178,9	112,2	—
13	244,5	178,1	110,3	—

Os traçados previstos são os que nos pareceram mais plausíveis, qualquer modificação numa das curvas logo acarretando um deslocamento idêntico nas demais; e isto por se encontrarem rìgidamente determinadas as diferenças $P^{20} - P^{15}$, $P^{15} - P^{10}$, nos vários dias da previsão.

O emprêgo das fórmulas resultou no seguinte prognóstico, com base em P^{20} (As demais curvas dariam os mesmos resultados, como sabemos)

Dia	P^{20}	$\triangle P^{20}$	p_{-19}	p(previsão)	p(ocorrido)	Êrro
6	213,1	—	08,5	—	—	—
7	216,5	3,4	03,5	11,9	13,6	— 1,7
8	223,0	6,5	02,7	10,0	10,4	— 0,4
9	231,5	8,5	05,1	11,2	08,7	2,5
10	237,5	6,0	09,7	11,1	11,7	— 0,6
11	241,0	3,5	08,8	13,2	14,4	— 1,2
12	243,5	2,5	08,7	11,3	12,6	— 1,3
13	244,5	1,0	15,5	09,7	10,1	— 0,4

Note-se que o valor previsto para o dia 7 é a soma da variação $\triangle P^{20}$ (prevista de 6 para 7), e de p_{-19} correspondente ao dia anterior (6), ou seja $p+1 = \triangle P^{20} + p_{-19} = 3{,}4 + 8{,}5 = 11{,}9$.

HENRIQUE TAFURI MALVAR
Escola Nacional de Ciências Estatísticas

ELEMENTOS DE ESTATÍSTICA

No desejo de divulgar não só as contribuições originais dos estudiosos da Estatística no Brasil, mas também os resultados das atividades dos mesmos no campo do ensino, a RBE empenhou-se no sentido de trazer a seus leitores essas notas de aulas de autoria do Professor Tafuri Malvar, a quem agradecemos por haver autorizado, a nosso pedido, a publicação do presente trabalho

CAPÍTULO 1

NOÇÕES INTRODUTÓRIAS

1.1 — ANÁLISE DE OBSERVAÇÕES — Os fenômenos passíveis de serem estudados pela Estatística podem ser analisados sob dois aspectos distintos:

— *aspecto ESTÁTICO* — quando as observações dos fenômenos se referem a uma mesma época. Em geral, os dados se apresentam condensados em uma *distribuição de freqüência*, isto é, em uma tabela com duas colunas onde se discriminam, na primeira, distribuidos por intervalos de classe, os valôres da variável que traduz o fenômeno em estudo e, na segunda, o número de observações (freqüência) para cada intervalo de classe.
— *aspecto DINAMICO* — quando as observações dos fenômenos se referem a épocas sucessivas; neste caso os dados se apresentam como uma *série temporal*, em uma tabela, também com duas colunas, onde se discriminam, na primeira, as determinações da variável *tempo* (dias, meses, anos) e, na segunda, os valôres, correspondentes a essas determinações, da variável que traduz o fenômeno em estudo.

A distribuição por idades da população brasileira, em *1960*, seria um exemplo de observações a serem analisadas sob o aspecto estático enquanto que a série temporal da população brasileira nos anos de 1900, 1910, 1920, 1930, 1940, 1950 e 1960 pode ser tomada como um exemplo de observações a serem analisadas sob o aspecto dinâmico

A Estatística utiliza dois modêlos para essas análises:

— o *Cálculo de Probabilidades* — quando a análise é feita sob o aspecto estático.
— os *Processos Estocásticos* — quando a análise é feita sob o aspecto dinâmico.

1.2 — *EXPERIÊNCIA ABSTRATA* e *EXPERIÊNCIA ALEATÓRIA* — Denomina-se "experiência abstrata" ao elemento genérico de um conjunto de experiências (realizadas ou a realizar).

Considerando as *experiências abstratas* abaixo:

a) a seleção, ao acaso, de um habitante de uma população com o objetivo de conhecer a sua despesa de consumo, em um determinado período de tempo;
b) o lançamento de um dado, *não tendencioso* (perfeito), sôbre uma superfície qualquer, com o objetivo de verificar o número de pontos que ocorre na face voltada para cima;
c) a observação da temperatura média em um determinado mês de cada ano, em uma certa cidade;

verifica-se:

— a *POSSIBILIDADE* da experiência poder ser repetida indefinidamente, fixando-se as condições iniciais (No 1.º exemplo basta admitir que o indivíduo selecionado volta à população, ao término de cada repetição).

— a *IMPOSSIBILIDADE* de se prever, antecipadamente, o resultado de uma particular repetição da experiência pois, apesar de se procurar manter constantes as condições iniciais, existe um fator intrínseco à experiência que foge ao contrôle — *o acaso.*

Quando uma *"experiência abstrata"* atende a essas condições é considerada como uma *"experiência aleatória"*. Não se define "experiência aleatória" — é um conceito primitivo do Cálculo de Probabilidades Simbolizaremos uma experiência aleatória por "E"

No tópico 1 4 — "Regularidade Estatística" — será estabelecida uma única condição para que uma *"experiência abstrata"* possa ser considerada como *"experiência aleatória"*

1.3 — *EVENTO ELEMENTAR* ou *ACONTECIMENTO ELEMENTAR* — Considere-se uma experiência aleatória E Seja C o conjunto de todos os resultados possíveis dessa experiência

Denomina-se *acontecimento* ou *evento elementar* ao elemento genérico do conjunto C, que simbolizaremos por "e"

Na experiência b, em 1 2, o conjunto C dos resultados possíveis da experiência é o conjunto finito, cujos elementos são os inteiros positivos 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

1 4 — *EVENTO ALEATÓRIO* ou *ACONTECIMENTO ALEATÓRIO* — Denomina-se *acontecimento* ou *evento aleatório* a qualquer subconjunto do conjunto C de resultados possíveis de uma experiência aleatória E Logo, se $A \subset C$ então A é um evento aleatório

Assim

— na experiência b, em 1.2, a ocorrência de um número par é um evento aleatório porque tal proposição é equivalente à proposição $e \in A$, onde A é o subconjunto — A: (2, 4, 6) — do conjunto C de resultados possíveis C: (1, 2, 3, 4, 5 e 6).

— na experiência a, em 1 2, é um evento aleatório que a despesa de consumo do indivíduo selecionado esteja compreendida entre NCr$ 200,00 e NCr$ 500,00.

Um evento aleatório A ocorre se, e sòmente se, o evento elementar *e* ($e \in A$) se transforma em um resultado efetivo, após a realização da experiência

1 5 — *REGULARIDADE ESTATÍSTICA* — Considere-se uma experiência aleatória E Seja C o conjunto de resultados possíveis dessa experiência e C um evento aleatório.

Suponha-se que se realizem n repetições dessa experiência aleatória. O número de vêzes em que A ocorre nas n repetições é a freqüência absoluta do evento aleatório A, que pode ser simbolizado f(A) A freqüência relativa de A nessas n repetições de E será simbolizada por $f_r(A)$ e igual a:

$$f_r(A) = \frac{f(A)}{n}$$

A razão $\frac{f(A)}{n}$, quando o número n de observações é muito pequeno, apresenta oscilações irregulares, porém, à medida que n aumenta, ela tende a apresentar oscilações cada vez menores, em tôrno de um valor fixo ou seja, a se estabilizar em tôrno dêsse valor fixo, denominado *probabilidade do evento aleatório A* e simbolizado por $P(A)$. Tal valor pode ser considerado como uma medida da possibilidade de ocorrência do evento aleatório A. (Deve-se observar, contudo, que o conceito de probabilidade como um limite para o qual tende a freqüência relativa de um evento aleatório não é uma definição rigorosa de "probabilidade de um evento" Essa definição será apresentada posteriormente)

A regularidade que apresentam as freqüências relativas dos acontecimentos definidos por uma experiência aleatória é denominada *"REGULARIDADE ESTATÍSTICA"*.

Pode-se dizer, então, que a condição a ser satisfeita pelas experiências abstratas para serem consideradas experiências aleatórias é a de apresentarem regularidade estatística. Os fenômenos que a apresentam são, pois, os fenômenos passíveis de serem estudados pela Estatística

Como exemplo de regularidade estatística considere-se a experiência que consiste no lançamento de uma moeda *perfeita,* com o objetivo de verificar a ocorrência de "cara" ou "coroa".

Não se pode prever o resultado de qualquer particular lançamento mas, efetuando-se uma longa série de lançamentos, observa-se que o número de vêzes em que ocorre "cara" é aproximadamente igual ao número de vêzes em que ocorre "coroa". Representando-se por n o número de lançamentos efetuados e por f a freqüência absoluta de "cara" então, a freqüência relativa da ocorrência de "cara" é dada por $\frac{f}{n}$ e a freqüência relativa da ocorrência de "coroa" será $\frac{n-f}{n}$. À medida que n cresce, as freqüências relativas $\frac{f}{n}$ e $\frac{n-f}{n}$ se aproximam de $\frac{1}{2}$.

Vários pesquisadores notaram essa regularidade.

Buffon, com 4.040 lançamentos obteve 2.048 "caras" com freqüência relativa igual a 0,50693. Pearson, com 24 000 lançamentos, obteve uma freqüência relativa de "cara" igual a 0,5005. Verifica-se que as freqüências relativas observadas mostram a tendência para o limite 0,5.

1.6 — *AXIOMAS DO CÁLCULO DE PROBABILIDADES* — O cálculo de Probabilidades é um modêlo de que se serve a Estatística para analisar, sob o aspecto estático, dados numéricos dos fenômenos que possuem "regularidade estatística".

Sendo a probabilidade de um evento aleatório, em uma primeira aproximação, a contrapartida teórica da freqüência relativa — empírica — dêsse evento, pode-se estabelecer os *axiomas* do Cálculo de Probabilidades por simples idealização matemática das propriedades das freqüências relativas

Considere-se uma experiência aleatória E e seja $f(A)$ a freqüência absoluta de um evento aleatório A, em uma série de n repetições de E

Como se tem $O \leqslant f(A) \leqslant n$ segue-se, evidentemente, que

$$O \leqslant \frac{f(A)}{n} \leqslant 1$$

Quando n cresce indefinidamente a freqüência relativa $\frac{f(A)}{n}$ tende para probabilidade $P(A)$ É natural, então, impor que essa probabilidade satisfaça à mesma condição: $O \leqslant P(A) \leqslant 1$

Daí resulta o primeiro axioma do Cálculo de Probabilidades

— *AXIOMA 1* — A probabilidade de um evento é um número não negativo que satisfaz a desigualdade de $O \leqslant P(A) \leqslant 1$

Se A é um *evento certo*, ou seja, um evento aleatório que sempre se verifica em cada repetição de E, tem-se $f(A) = n \Longrightarrow \frac{f(A)}{n} = 1$ e, pela idealização matemática surge o segundo axioma.

— *AXIOMA 2* — A probabilidade de um evento certo é igual a unidade

Sejam, agora, A e B dois eventos aleatórios, cada um dos quais poderá ocorrer, ou deixar de ocorrer, em qualquer realização de E Denomina-se *UNIÃO* dos eventos A e B e se representa por $A \cup B$, o evento que consiste na ocorrência de *pelo menos um* dêsses eventos Denomina-se *INTERSEÇÃO* dos eventos A e B e se representa por $A \cap B$, o evento que consiste na ocorrência de *ambos* os eventos (A e B).

Diz-se que dois eventos são *MÚTUAMENTE EXCLUSIVOS* se êsses eventos não podem ocorrer ao mesmo tempo, isto é, o evento $A \cap B$, é um *evento impossível*, simbolizado por ϕ (símbolo idêntico ao do conjunto vazio).

Suponha-se que A e B são dois eventos *mùtuamente exclusivos* Em n repetições de E sejam $f(A)$ e $f(B)$, respectivamente, as freqüências absolutas de A e B. A freqüência absoluta do evento $A \cup B$ será:

$f(A \cup B) = f(A) + f(B)$. Daí resulta:

$$\frac{f(A \cup B)}{n} = \frac{f(A)}{n} + \frac{f(B)}{n}$$

Pode-se então estabelecer o terceiro axioma do Cálculo de Probabilidades, denominado *axioma da adição*.

— *AXIOMA 3* — Se A e B são dois eventos mùtuamente exclusivos, então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Define-se como evento complementar de A e simboliza-se por $\overline{A}$ o evento que ocorre se A deixa de ocorrer. Os dois eventos A e $\overline{A}$ são, portanto, mùtuamente exclusivos e, além disso, $A \cup \overline{A}$ é um evento certo. Logo, pelo AXIOMA 2:

$$\boxed{P(A \cup \overline{A}) = 1}$$

e, pelo AXIOMA 3:

$P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$ donde

$$\boxed{P(A) + P(\overline{A}) = 1}$$

Demonstra-se assim a seguinte propriedade:

"A soma das probabilidades de um evento e de seu complementar é sempre igual à unidade"

Um corolário dessa propriedade é que *"a probabilidade de um evento impossível é igual a zero"*. De fato, designando-se por C o conjunto dos eventos elementares de uma experiência aleatória o seu complementar será o conjunto vazio. Pela propriedade demonstrada tem-se

$P(C \cup \phi) = P(C) + P(\phi) = 1$ donde

$$\boxed{P(\phi) = 1 - 1 = 0}$$

já que pelo AXIOMA 2: $P(C) = 1$.

1 7 — *ACONTECIMENTOS ALEATÓRIOS* de *PROBABILIDADES ZERO* e *UM* — A probabilidade de um evento impossível é zero. No entanto, a recíproca não é verdadeira, isto é, um acontecimento de probabilidade zero poderá não ser um evento impossível. O que se pode garantir é que a freqüência relativa dêsse acontecimento deve tomar valôres muito pequenos, quando o número de repetições n da experiência aleatória a que se refere o evento é muito grande.

De modo análogo, quando a probabilidade de um evento A é igual a *UM* não se pode assegurar que A é um evento certo porque, para que a probabilidade seja igual a um é suficiente que a freqüência relativa dêsse evento seja próxima de *UM* e, tanto mais próxima quanto maior o número de repetições da experiência considerada.

1 8 — *ACONTECIMENTOS ALEATÓRIOS* de *PROBABILIDADES PEQUENAS* — Se a probabilidade de um evento aleatório A é pequena, embora não necessàriamente nula, será evidente concluir que a freqüência relativa de A em uma longa série de repetições da experiência será pequena, de modo que A é um *evento raro* É de se esperar, portanto, que em uma só realização da experiência o evento A não ocorra.

Os eventos raros desempenham um importante papel na Teoria dos Testes Estatísticos

Capítulo 2

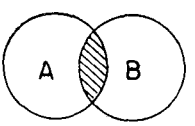
TEOREMAS FUNDAMENTAIS DO CÁLCULO DE PROBABILIDADES

2 1 — *Teorema das probabilidades totais* — "Sendo A e B dois eventos aleatórios quaisquer, tem-se que:

"$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$"

Demonstração — Observe-se que:

$$A \cup B = A \cup (\bar{A} \cap B)$$



onde A e $\bar{A} \cup B$ são mùtuamente exclusivos

Pelo axioma da adição (Axioma 3) ·

$$P(A \cup B) = P[A \cup (\bar{A} \cap B)] = P(A) + P(\bar{A} \cup B) \quad \text{(I)}$$

Por outro lado·

$$B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B), \quad \{(A \cap B) \cap (\bar{A} \cap B) = \phi\}$$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \quad \text{(II)}$$

Subtraindo (II) de (I) vem.

$$P(A \cup B) - P(B) = P(A) + P(\bar{A} \cap B) -$$

$$- P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B)$$

Logo·

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Sejam, agora, três eventos aleatórios quaisquer A, B e C. Ter-se-á:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) -$$

$$- P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) +$$

$$+ P(A \cap B \cap C)$$

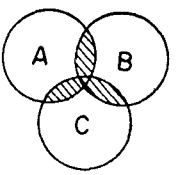
Observe-se que

$$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup B) + P(C) -$$

$$- P\{(A \cup B) \cap C\} = P(A) + P(B) -$$

$$- P(A \cap B) + P(C) - P\{(A \cup B) \cup C\} \quad \text{(III)}$$



Mas·

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$P\{(A \cup B) \cap C\} = P(A \cap C) +$$

$$+ P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)$$

Portanto, em (III), ter-se-á:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) -$$

$$- P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) +$$

$$+ P(A \cap B \cap C)$$

Pode-se estender o teorema para n eventos aleatórios quaisquer:

$$A_i \ (i = 1, 2, \quad , n)$$

a união dêsses eventos será indicada por:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \quad \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

e a interseção por:

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \quad \cap A_n = \bigcap_{u=1}^{n} A_i$$

Nesse caso, generalizando-se a demostração vista para dois e três eventos, ter-se-á:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) -$$

$$- \sum_{i<i=1}^{n} P(A_i \cap A_j) +$$

$$+ \sum_{i<j<k=1}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) +$$

$$+ \quad + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

2 2 — *Teorema das probabilidades compostas.*

2 2 1 — *Freqüência condicional* — Considere-se uma experiência aleatória E e sejam A e B dois eventos aleatórios que podem ocorrer, simultâneamente ou não, quando realiza-se a experiência Sejam:

f_A — *freqüência absoluta do evento A*

f_B = freqüência absoluta do evento B

$f_{A \cap B}$ = freqüência absoluta do evento $A \cap B$.

as freqüências (n.º de vêzes que o evento ocorre) observadas quando a experiência aleatória E é repetida n vêzes.

Observe-se que nas f_A vêzes em que A ocorre, o evento B também ocorre $f_{A \cap B}$ vêzes.

A	A	$\bar{A}$	$\bar{A}$	A	A	A	$\rightarrow f_A$ vêzes
$\bar{B}$	B	B	B	B	$\bar{B}$	B	$\rightarrow f_B$ vêzes
	$A \cap B$			$A \cap B$		$A \cap B$	$\rightarrow f_{A \cap B}$ vêzes

Por conseguinte, a razão $\frac{f_{A \cap B}}{f_A}$ representa a freqüência relativa do evento B quando se considera, apenas, as vêzes em que o evento A ocorreu. Essa freqüência relativa é denominada *freqüência relativa condicional* de B, na hipótese de que o evento A tenha ocorrido Anàlogamente, a razão $\frac{f_{A \cap B}}{f_B}$ será a freqüência relativa condicional de A, na hipótese de que o evento B tenha ocorrido.

EXEMPLO — Observando um grupo de 100 recém-nascidos, a fim de constatar a ocorrência dos eventos:

A — o recém-nascido ser menino
B — ter olhos azuis,

determinam-se as seguintes freqüências:

$$f_A = 51; \quad f_B = 68; \quad f_{A \cap B} = 34$$

SEXO DO RECÉM-NASCIDO	CÔR DOS OLHOS		TOTAL
	Azul	Outra côr	
Masculino	34	17	51
Feminino	34	15	49
TOTAL	68	32	100

Portanto, em 100 observações, tem-se as seguintes freqüências relativas

$$\frac{f_A}{n} = \frac{51}{100} = 0{,}51; \quad \frac{f_B}{n} = \frac{68}{100} = 0{,}68$$

A freqüência relativa condicional do evento A relativa à hipótese de que B tenha ocorrido, será:

$$\frac{f_{A \cap B}}{f_B} = \frac{34}{68} = \frac{1}{2}$$

e a freqüência relativa condicionada do evento B relativa à hipótese de que A tenha ocorrido, será:

$$\frac{f_{A \cap B}}{f_A} = \frac{34}{51} = \frac{2}{3}$$

2 2 2 — *Probabilidade condicional* — A freqüência condicional de um evento A na hipótese de que um evento B tenha ocorrido pode ser expressa do seguinte modo.

$$\frac{f_{A \cap B}}{f_B} = \frac{f_{A \cap B}}{n} \div \frac{f_B}{n}$$

À medida que o n.º de repetições da experiência aleatória — n — cresce, as freqüências relativas que aparecem no 2 º membro, tendem a se estabilizar em tôrno dos valôres $P(A \cap B)$ e $P(B)$.

Assim, desde que $P(B) \neq 0$, pode-se obter *probabilidade condicional* do evento A, relativa à hipótese de que o evento B tenha ocorrido e que será representada pela notação $P(A/B)$

Pela notação $P(A/B)$ simboliza-se então, o valor em tôrno do qual deverá oscilar a freqüência relativa condicional $\frac{f_{A \cup B}}{f_B}$, oscilações que serão cada vez menores, à medida que n cresce.

Da mesma forma, se $P(A) \neq 0$, pode-se definir:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

como a probabilidade condicional do evento B, na hipótese de que A tenha ocorrido

Justifica-se a definição de probabilidade condicional de um evento A, relativa a hipótese de que o evento B tenha ocorrido como sendo o valor $P(A/B)$, uma vez que $P(A/B)$ satisfaz aos axiomas do Cálculo de Probabilidades, o que também se verifica para $P(B/A)$.

2 2 3 — *O teorema* — "A probabilidade de interseção de dois eventos é igual ao produto da probabilidade de um dêles pela probabilidade condicional do outro, na hipótese de que o primeiro tenha ocorrido"

DEMONSTRAÇÃO Por definição

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad (I)$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \qquad (II)$$

Das igualdades (I) e (II) obtém-se

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B/A) = P(B)\ P(A/B)$$

Sejam A_1, A_2 e A_3 três eventos aleatórios Considere-se a expressão $P(A_3/A_1 \cap A_2)$, ou seja a probabilidade condicional de A_3 na hipótese de que $A_1 \cap A_2$ tenha ocorrido

Se $P(A_1 \cap A_2) \neq O$, tem-se

$$P(A_3/A_1 \cap A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)}$$

Logo

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1 \cap A_2)\, P(A_3/A_1 \cap A_2) =$$
$$= P(A_1)\, P(A_2/A_1)\ \ P(A_3/A_1 \cap A_2)$$

Para n eventos, ter-se-á:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)\, P(A_2/A_1)\, P(A_3/A_1 \cap A_2)$$
$$P(A_n/A_1 \cap A_2 \quad \cap A_{n-1})$$

2 3 — *Teorema das probabilidades absolutas* — "Se os eventos aleatórios A_1, A_2, , A_n são, dois a dois, mùtuamente exclusivos e exaurem o conjunto C de eventos elementares e se $P(A_i) > O$, para $i = 1, 2 \quad n$ então, para qualquer evento $B (B \subset C)$ tem-se

"$P(B) = P(A_1)\, P(B/A_1) + P(A_2)\, P(B/A_2) +$
$+ \quad + P(A_n)\, P(B/A_n)$"

Demonstração. O evento B pode ocorrer juntamente com um ou mais dos eventos A_i $(i = 1, 2, \quad n)$. Logo

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B \cup \quad \cup (A_n \cap B)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (A_i \cap B) \cap (A_j \cap B) = \phi \\ i, j = 1, 2, \quad n \end{array} \right\}$$

Portanto

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \quad + P(A_n \cap B)$$

Pelo teorema das probabilidades compostas

$$P(A_i \cap B) = P(A_i)\, P(B/A_i) \quad \{i = 1, 2, \quad n\}$$

Logo

$$P(B) = P(A_1)\, P(B/A_1) + P(A_2)\, P(B/A_2) +$$
$$+ \quad + P(A_n)\, P(B/A_n)$$

2 4 — *Eventos independentes* — Sejam A e B dois eventos aleatórios com probabilidades diferentes de zero. Êsses dois eventos são *independentes* se:

$$P(A/B) = P(A) \text{ ou } P(B/A) = P(B)$$

Se uma dessas relações fôr satisfeita, a outra também se verificará. Basta lembrar, pelo teorema das probabilidades compostas

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B/A) = P(B)\, P(A/B) \qquad (I)$$

Se $P(B/A) = P(B)$, substituindo-se em (I) ter-se-á:

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B) = P(B)\, P(A/B) \rightarrow$$
$$\rightarrow P(A) = P(A/B)$$

Por outro lado, se $P(A/B) = P(A)$, substituindo em (I), vem

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B/A) = P(B)\, P(A) \rightarrow$$
$$\rightarrow P(B) = P(B/A)$$

Verifica-se então, que quando A e B são independentes, tem-se

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$$

Generalizando, sejam n eventos A_i $(i = 1, 2, \quad n)$ tais que $P(A_i) \neq O$, para $i = 1, 2, \quad n$. Diz-se que êsses eventos são independentes se para qualquer conjunto de eventos:

$$A_{\nu_1}, A_{\nu_2}, \quad A_{\nu_k} \quad (k \leq n)$$

Verifica-se.

$$P(A_{\nu_i}/A_{\nu_1} \cap A_{\nu_2} \cap \quad \cap A_{\nu_{i-1}} \cap A_{\nu_{i+1}} \cap$$
$$\cap A_k) = P(A_{\nu_i}) \quad \{i = 1, 2, \quad , k\}$$

Quando os eventos A_1, A_2, A_n são independentes, tem-se:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$$

2 5 — *Teorema de Bayes* — "Se os A_1, A_2, A_n são dois a dois mùtuamente exclusivos e exaurem o conjunto C

dos eventos elementares, então se $P(A_i) > O$, $(i = 1, 2, \quad . \ n)$, tem-se:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i)\,P(B/A_i)}{P(A_1)\,P(B/A_1) + P(A_2)\,P(B/A_2) + \quad + P(A_n)\,P(B/A_n)}$$

$$(i = 1, 2, \quad n)$$

DEMONSTRAÇÃO — Pelo teorema das probabilidades compostas, tem-se:

$$P(A_i \cap B) = P(B)\,P(A_i/B) = P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

$$(i = 1, 2, \quad n) \quad \text{(I)}$$

Por outro lado, pelo teorema das probabilidades absolutas, tem-se·

$$P(B) = P(A_1)\ P(B/A_1) + P(A_2)\ P(B/A_2) + \quad + P(A_n)\,P(B/A_n) \qquad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I) vem:

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_i)\,P(B/A_i)}{P(A_1)\,P(B/A_1) + P(A_2)\,P(B/A_2) + \quad + P(A_n)\,P(B/A_n)}$$

$$(i = 1, 2, \ . \ . \ n)$$

Êste teorema é em geral, aplicado quando se observa a realização de um evento B que só pode ocorrer como *efeito* de uma das *causas* mùtuamente exclusivas A_1, A_2, A_n As probabilidades $P(A_i)$ $\{i = 1, 2 \quad n\}$ de que o evento A_i ocorra, podem ser calculadas *antes* da realização do evento B e são denominadas probabilidades "a priori". O teorema de Bayes fornece a probabilidade de que o "evento A_i tenha ocorrido na hipótese de que o evento B tenha sido observado; essas probabilidades condicionais $P(A_i/B)$ $(i = 1, 2, \ . \ n)$ são denominadas probabilidades "a posteriori".

2 6 — *Experiência aleatória uniforme* — Diz-se que uma experiência E é *uniforme,* quando os eventos elementares são equiprováveis.

Considere-se, pois, uma experiência aleatória uniforme E e seja C seu conjunto, finito, de eventos elementares e_1, e_2, $\ . \ e_n$. Seja:

$$p = P(e_1) = P(e_2) = \quad = P(e_n)$$

Tem-se que:

$$P(C) = P(e_1 \cup e_2 \cup \quad \cup e_n) = P(e_1) + P(e_2) +$$

$$+ \quad + P(e_n) = np = 1 \rightarrow p = \frac{1}{n}$$

já que os eventos elementares são mùtuamente exclusivos e a probabilidade de um evento certo é igual a unidade.

Portanto, a probabilidade de cada evento elementar será igual a $\frac{1}{n}$.

Considere-se, agora, um evento aleatório A, constituído de $K (K \leqslant n)$ eventos elementares de C. O evento A ocorrerá quando algum dêsses K elementos de C fôr o resultado *efetivo* da experiência aleatória E Nesse caso

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{K} e_i\right) = Kp = K\frac{1}{n} = \frac{K}{n}$$

Dêsse modo, chega-se à *definição clássica* de probabilidade dada por Laplace: "a probabilidade da ocorrência de um evento é a razão entre o n.º de casos favoráveis a essa ocorrência e o n º de casos possíveis".

Essa definição só é válida se a experiência aleatória fôr uniforme.

2 7 — *Aplicações*

1 — Tem-se dois baralhos de 52 cartas e extrai-se uma carta de cada um. Qual a probabilidade de que ao menos uma delas seja um ás de "copas"?

A — extrair um ás de copas do 1 º baralho

B — extrair um ás de copas do 2 º baralho

Pelo teorema das probabilidades totais:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{52} + \frac{1}{52} - \frac{1}{52} \cdot \frac{1}{52} = \frac{103}{(52)^2}$$

já que $P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$

2 — Seja E a experiência aleatória que consiste em lançar um dado "não tendencioso" sôbre uma superfície qualquer e observar qual o n.º de pontos que aparece na face voltada para cima Considerando os eventos: $A = (5)$;

$B = (1)$; $C = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$ calcule a probabilidade de que

a) $A \cup B$ ocorra
b) $B \cap C$ ocorra
c) C ocorra
d) $\overline{A}$ ocorra
e) $\overline{C}$ ocorra

a) $A \cup B = (1,5) \rightarrow P(A \cup B) = P(A) +$

$$+ P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

b) $B \cap C = (1) \rightarrow P(B \cap C) = \frac{1}{6}$

c) $P(C) = 1$

d) $\overline{A} = C - A = (1, 2, 3, 4, 5) \rightarrow P(\overline{A}) =$

$$= 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

e) $\overline{C} = C - C = \phi \rightarrow P(\overline{C}) = P(\phi) = 0$

3 — Duas cartas são extraídas simultâneamente de um baralho de 52 cartas. Qual a probabilidade de que ambas sejam de "paus"?

A — 1ª carta ser de paus
B — 2.ª carta ser de paus

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(A/B) =$$

$$= \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} = \frac{12}{204} = \frac{1}{17}$$

4 — Sejam U_1 e U_2 duas urnas iguais Na primeira existem 3 bolas brancas e 2 pretas e na segunda 1 bola branca e 4 pretas De uma urna escolhida ao acaso, seleciona-se, aleatòriamente, uma bola Qual é a probabilidade de se obter uma bola branca?

A_1 — selecionar a urna U_1
A_2 — selecionar a urna U_2
B — selecionar 1 bola branca.

Pelo teorema das probabilidades absolutas:

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) =$$

$$= P(A_1)\,P(B/A_1) + P(A_2)\,P(B/A_2)$$

$$P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

5 — No lançamento de dois dados qual é a probabilidade de se obter 3 pontos no 1º e 4 no segundo?

A — ocorrência de 3 pontos no 1º dado

B — ocorrência de 4 pontos no 2º dado

$A \cap B$ — ocorrência de 3 pontos no 1º e 4 pontos no 2.º dado.

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

já que os eventos são independentes

6 — Sejam U_1 e U_2 duas urnas iguais, com a seguinte composição:

U_1 { 3 bolas brancas, 2 bolas pretas
U_2 { 1 bola branca, 4 bolas pretas

De uma urna selecionada ao acaso extrai-se, também ao acaso, uma bola e verifica-se que é branca. Qual é a probabilidade de que a urna de onde foi extraída a bola tenha sido a urna U_1

A_1 — seleção da 1.ª urna (U_1)
A_2 — seleção da 2ª urna (U_2)
B — ocorrência de bola branca

$$P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$$

$$P(B/A_1) = \frac{3}{5}\,; \quad P(B/A_2) = \frac{1}{5}$$

Aplicando o Teorema de Bayes, tem-se

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1)\,P(B/A_1)}{P(A_1)\,P(B/A_1) + P(A_2)\,P(B/A_2)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{1}{2}\ \frac{3}{5} + \frac{1}{2}\ \frac{1}{5}} = \frac{3}{4}$$

7 — Uma urna contém duas bolas. Sabe-se que ela foi preenchida por lançar uma moeda ao ar duas vêzes e colocar uma bola branca na urna para cada "cara" e uma bola preta para cada "coroa". Uma bola é extraída de uma e verifica-se que é branca. Determine a probabilidade de que a outra bola da urna seja, também, branca.

A_1 — a urna conter duas bolas brancas
A_2 — a urna conter uma bola branca e uma preta
A_3 — a urna conter duas bolas brancas.
B — ocorrência de uma bola branca.

$$P(A_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\,; \quad P(A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,, \quad P(A_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(B/A_1) = 1;\quad P(B/A_2) = \frac{1}{2};\quad P(B/A_3) = 0$$

$$P(A_1/B) = \frac{\frac{1}{4}\cdot 1}{\frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot 0} = \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{2} = \frac{1}{2}$$

8 — Sejam U_1 e U_2 duas urnas iguais. A urna U_1 contém n_1 bolas das quais v_1 são brancas e a Urna U_2 contém n_2 bolas, das quais v_2 são brancas Uma pessoa seleciona, ao acaso, uma urna e extrai dela uma bola Determine a probabilidade de que a bola extraída seja branca.

Os eventos são definidos do mesmo modo que no exercício 4. Logo:

$$P(B) = \frac{1}{2}\,\frac{v_1}{n_1} + \frac{1}{2}\,\frac{v_2}{n_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{v_1}{n_1} + \frac{v_2}{n_2}\right)$$

9 — Em uma fábrica existem duas máquinas M_1 e M_2, destinadas a produção de parafusos. Cada uma delas apresenta uma certa produção diária, onde existe uma determinada proporção de parafusos defeituosos

Estabeleça um modêlo capaz de fornecer a probabilidade de que um parafuso, que foi retirado ao acaso da produção total das máquinas em um dado dia, observando-se que êle era defeituoso, tenha sido produzido pela máquina M_1.

n_1 = produção diária da máquina M_1

n_2 = produção diária da máquina M_2

n_1+n_2 = produção diária total

$p_1\%$ = percentual de parafusos defeituosos na produção da M_1

$p_2\%$ = percentual de parafusos defeituosos na produção da M_2

Far-se-á

$\frac{n_1}{n_1+n_2}$ = probabilidade de que um parafuso proceda de M_1

$\frac{n_2}{n_1+n_2}$ = idem para a máquina M_2

$\frac{p_1}{100}$ = probabilidade de extrair um parafuso defeituoso na produção M_1

$\frac{p_2}{100}$ = idem para a máquina M_2

A probabilidade pedida será, pelo teorema de Bayes·

$$\frac{\frac{n_1}{n_1+n_2}\cdot\frac{p_1}{100}}{\frac{n_1}{n_1+n_2}\cdot\frac{p_1}{100} + \frac{n_2}{n_1+n_2}\cdot\frac{p_2}{100}} = \frac{n_1 p_1}{100(n_1+n_2)}\cdot\frac{100(n_1+n_2)}{n_1 p_1 + n_2 p_2} = \frac{n_1 p_1}{n_1 p_1 + n_2 p_2}$$

10 — *O Problema de "De Moivre"* — Qual é a probabilidade de que lançando-se dois dados se obtenha um total de pontos igual a 5?

Os eventos elementares da experiência considerada são as duplas:

(1,1) (1,2) (1,3) (1,6)
(2,1) (2,2) (2,3) (2,6)
.
(6,1) (6,2) (6,3) (6,6)

em número de 36, onde o primeiro elemento representa um resultado que pode ocorrer no primeiro dado e o segundo elemento representa um resultado possível do 2.º dado Êsses eventos elementares são equiprováveis e, portanto, a experiência aleatória considerada é uniforme

A soma "5" ocorre, se ocorre um dos eventos elementares

(1,4), (4,1), (2,3) e (3,2)

Então a probabilidade será igual a

$$\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Sendo S a soma dos pontos dos dois dados, pode-se determinar a probabilidade da ocorrência de qualquer soma (S = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12) de maneira análoga à que foi adotada na solução do exercício proposto

Capítulo 3

SEQÜÊNCIAS DE PROVAS

Considere-se uma experiência aleatória E e seja C o conjunto de seus eventos elementares

Suponha-se que se realizem n repetições dessa experiência

Seja $A \subset C$ um evento aleatório que pode ocorrer ou não em cada repetição de E.

Cada repetição da experiência pode ser considerada como uma prova sôbre o evento aleatório A (verificação da sua ocorrência ou não). As n repetições constituem uma *seqüência* de n provas sôbre o evento aleatório A Se na i-ési-

ma ($i = 1,2, \quad n$) prova A ocorre, diz-se que nessa prova ocorre um *sucesso;* se $\overline{A}$ ocorre, diz-se que nessa prova ocorre um *insucesso*

Defina-se um *indicador* para a ocorrência ou não de sucesso na i-ésima ($i = 1, 2, \quad n$) prova, através do qual se possa estabelecer o número de sucessos que ocorrem nas n provas

Seja X_i ($i = 1, 2, \quad . \quad n$) êsse indicador; uma variável que assume os valôres:

1 se o evento aleatório A ocorre na i-ésima prova-ocorrência de sucesso.

0 se o evento aleatório $\overline{A}$ ocorre na i-ésima prova-ocorrência de insucesso

Simbolize-se por p_1 a probabilidade de ocorrência de sucesso na 1.ª prova e por q_1 a probabilidade de ocorrência de insucesso nessa prova

Evidentemente

$$p_1 + q_1 = 1 \rightarrow q_1 = 1 - p_1$$

De um modo geral, seja:

p_i ($i = 1, 2, \quad , n$) a probabilidade de ocorrência de sucesso na i-ésima prova
q_i ($i = 1, 2, \quad . \quad , n$) a probabilidade de ocorrência de insucesso na i-ésima prova $= 1 - p_i$

Ter-se-á:

$$\left.\begin{array}{l} p_i = p(X_i = 1) \\ q_i = p(X_i = 0) \end{array}\right\} \quad (i = 1, 2, \quad . \quad , n)$$

A probabilidade p_i, a partir da 2.ª prova, é *genèricamente*, uma probabilidade condicional, já que ela depende dos resultados das *i-1* provas anteriores

Então:

$$p_i = f\ (X_1, X_2, \quad . \quad , X_{i-1})$$

($i = 2, 3, \quad , n$)

No caso particular em que essa probabilidade independe das variáveis X_1, $X_2 \quad , X_{i-1}$, isto é, quando a ocorrência de sucesso na i-ésima prova independa do que ocorreu nas *i-1* provas anteriores, a seqüência de provas é denominada *seqüência de provas independentes.*

Considere-se, por exemplo, uma urna com a seguinte composição:

$$\left\{\begin{array}{l} a \text{ bolas brancas} \\ b \text{ bolas pretas} \end{array}\right. \qquad \{a + b \geqq 3$$

Retiram-se sucessivamente ao acaso três bolas da urna.

1) *sem reposição* da bola extraída em cada retirada

Designando-se por sucesso a ocorrência da bola branca, a probabilidade da ocorrência da bola branca na 3.ª prova será expressa por:

$$p_3 = p\ (X_3 = 1) = \frac{a - X_1 - X_2}{a + b - 2} = f(X_1, X_2)$$

$$\left\{\begin{array}{l} X_1 = 0 \text{ ou } 1 \\ X_2 = 0 \text{ ou } 1 \end{array}\right\}$$

Quando o esquema é *sem reposição*, a probabilidade de ocorrência de sucesso na i-ésima prova ($i = 2, 3$) *depende* dos resultados anteriores

2) *com reposição* da bola extraída em cada retirada

Nesse caso, ter-se-á:

$$p_3 = P\ (X_3 = 1) = \frac{a}{a + b}$$

Quando o esquema é *com reposição*, a probabilidade de ocorrência de sucesso na i-ésima prova ($i = 2, 3$) *independe* dos resultados anteriores

Pesquise-se, agora, a probabilidade da ocorrência de m ($m \leqslant n$) sucessos nas n provas, simbolizando-se por T_m essa probabilidade

Suponha-se, inicialmente, que os m sucessos ocorrem nas m primeiras provas, ocorrendo, necessàriamente, insucesso nas $n - m$ provas restantes.

Ter-se-á

$$T_m = p_1\ p_2 \quad p_m\ q_{m+1}\ q_{m+2} \quad q_n$$

Se a ocorrência dos sucessos se verificar em m provas determinadas das n realizadas, por exemplo·

$$\left\{\begin{array}{l} m = 8 \\ n = 4 \end{array}\right. \quad \frac{A}{1}\ \frac{\overline{A}}{2}\ \frac{\overline{A}}{3}\ \frac{A}{4}\ \frac{\overline{A}}{5}\ \frac{A}{6}\ \frac{A}{7}\ \frac{\overline{A}}{8} \rightarrow$$

$$T_4 = p_1\ q_2\ q_3\ p_4\ q_5\ p_6\ p_7\ q_8 = p_{i_1}\ p_{i_2}\ p_{i_3}\ p_{i_4}\ q_{i_5}\ q_{i_6}\ q_{i_7}\ q_{i_8}$$

$$\left\{\begin{array}{l} i_1 = 1 \\ i_2 = 4 \\ i_3 = 6 \\ i_4 = 7 \\ i_5 = 2 \\ i_6 = 3 \\ i_7 = 5 \\ i_8 = 8 \end{array}\right.$$

Ter-se-á, de um modo geral

$$T_m = p_{i_1}\ p_{i_2} \quad p_{i_m}\ q_{i_{m+1}}\ q_{i_{m+2}} \quad q_{i_n}$$

Considerando-se tôda e qualquer ordem de ocorrências de m sucessos em n provas, obtém-se

$$T_m = \sum p_{i_1}\ p_{i_2} \quad p_{i_m}\ q_{i_{m+1}}\ q_{i_{m+2}} \quad q_{i_n}$$

onde a soma se extende a tôdas as ordenações possíveis. O número de parcelas será expresso por:

$$\binom{n}{m} = C_n^m$$

EXERCÍCIO: Sejam 4 urnas com a seguinte composição:

U_1 { 3 bolas brancas; 4 bolas pretas

U_2 { 1 bola branca; 2 bolas pretas

U_3 { 3 bolas brancas; 3 bolas pretas

U_4 { 2 bolas brancas; 1 bola preta

Defina-se a experiência aleatória que consiste em retirar, ao acaso, uma bola de uma urna e colocá-la na seguinte. Supondo-se as urnas ordenadas de *1* a *4*, a experiência será realizada para cada uma delas, a partir da primeira A bola retirada da 4ª urna é posta de lado, por não existir a urna seguinte. Dentro dêsse raciocínio, a experiência é repetida quatro vêzes.

Considerando-se como "sucesso" a ocorrência da bola branca, qual a probabilidade de se obter três sucessos nas provas realizadas?

$$T_3 = \sum p_{i_1} p_{i_2} p_{i_3} q_{i_4}$$

$$\text{n.º de parcelas} = \binom{4}{3} = \frac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 2} = 4$$

$$\begin{cases} A\ A\ A\ \overline{A} \\ A\ A\ \overline{A}\ A \\ A\ \overline{A}\ A\ A \\ \overline{A}\ A\ A\ A \end{cases} \rightarrow \begin{cases} p_1\ p_2\ p_3\ q_4 \\ p_1\ p_2\ p_4\ q_3 \\ p_1\ p_3\ p_4\ q_2 \\ p_2\ p_3\ p_4\ q_1 \end{cases}$$

Deve-se observar que a variável X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ que indica a ocorrência de sucesso ou insucesso na i-ésima prova nada mais é do que uma *variável aleatória* que assume a determinação *zero*, com probabilidade q_i e a determinação *um*, com probabilidade p_i

Ela é uma função dos eventos elementares de E Se C é formado por K eventos elementares e A é constituído por h $(h \leqslant k)$ dêsses eventos, a ocorrência de um qualquer dos h eventos elementares conduz à ocorrência de sucesso e, portanto, à determinação *Um* para X_i. Os $k - h$ restantes eventos elementares conduzem à determinação $X_i = 0$.

A seguir, serão estudadas as principais seqüências de provas que são as seguintes:

1 — Seqüência de Poisson
2 — Seqüência de Bernoulli
3 — Seqüência de contágio
4 — Seqüência hiper-geométrica

3 1 — *SEQÜÊNCIA DE POISSON*

A seqüência de Poisson é uma seqüência de provas independentes sôbre um evento aleatório A

A probabilidade de ocorrência de sucesso na i-ésima prova, p_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ é independente dos resultados que ocorrem nas $i = 1$ provas anteriores, para $i = 2, 3, \ldots, n$.

A probabilidade da ocorrência de m sucessos nas n provas pode ser obtida do seguinte modo:

Para cada prova, tem-se.

$$P(AU\bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = P(X_i = 1) + p\ (X_i = 0) = p_i + q_i = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Associa-se à probabilidade de suso, p_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ uma variável auxiliar t

$$p_i\ t + q_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Considere-se o produto:

$$(p_1 t + q_1)\ (p_2 t + q_2) \qquad (p_n t + q_n)$$

Êsse produto conduz a um polinômio na variável t onde os coeficientes de t^m $(m = 0, 1, \ldots, n)$ são as probabilidades de se obter m sucessos — T_m

$$T_o\ t^o + T_1\ t^1 + T_2\ t^2 + \qquad + T_n\ t^n$$

Particularizando-se $n = 2$. Ter-se-á

$$(p_1 t + q_1)\ (p_2 t + q_2) = p_1\ p_2\ t^2 + p_1\ q_2\ t + q_1\ p_2\ t + q_1\ q_2 = p_1\ p_2\ t^2 + (p_1\ q_2 + q_1\ p_2)\ t + q_1\ q_2\ t^o$$

$$T_2 = p_1\ p_2 \qquad -\binom{2}{2} \text{ parcelas}$$

$$T_1 = p_1\ q_2 + p_2\ q_1 \qquad -\binom{2}{1} \text{ parcelas}$$

$$T_o = q_1\ q_2 \qquad -\binom{2}{o} \text{ parcelas}$$

Formulou-se assim, um algoritmo que permite a obtenção da probabilidade T_m para $m = 0, 1, 2, \ldots, n$

EXERCÍCIO — Sejam 3 urnas com a seguinte composição:

U_1 { 3 bolas brancas; 2 bolas pretas

U_2 { 2 bolas brancas; 3 bolas pretas

U_3 { 1 bola branca; 3 bolas pretas

Extrai-se, ao acaso, uma bola de cada urna.

Considerando-se como *sucesso* a ocorrência de bola preta, determine a probabilidade de:

— ocorrer três insucessos — pelo menos um sucesso
— " um sucesso — pelo menos dois insucessos
— " dois sucessos
— " três sucessos

$$U_1 \begin{cases} p_1 = 2/5 \\ q_1 = 3/5 \end{cases} \quad U_2 \begin{cases} p_2 = 3/5 \\ q_2 = 2/5 \end{cases} \quad U_3 \begin{cases} p_3 = 3/4 \\ q_3 = 1/4 \end{cases}$$

$$(2/5\,t + 3/5)\ (3/5\,t + 2/5)\ (3/4\,t + 1/4) =$$

$$= \frac{2t+3}{5} \cdot \frac{3t+2}{5} \cdot \frac{3t+1}{4} =$$

$$= \frac{18t^3 + 45t^2 + 31t + 6}{100}$$

$T_0 = 6/100$
$T_1 = 31/100$
$T_2 = 45/100$
$T_3 = 18/100$

$$T_1 + T_2 + T_3 = T_0 = 94/100$$

$$T_0 + T_1 = 1 - (T_2 + T_3) = 37/100$$

3 2 — *SEQÜÊNCIA DE BERNOULLI*

A seqüência de Bernoulli é um caso particular da Seqüência de Poisson onde a probabilidade de ocorrência de sucesso na i-ésima prova é constante, para qualquer $i = 1, 2, \ldots, n$.

Nesse caso, a probabilidade da ocorrência de m sucessos nas n provas é assim obtida

$$T_m = \sum p_{i_1} p_{i_2} \quad p_{i_m} p_{i_{m+1}} q_{i_{m+2}} \quad q_{i_n} =$$

$$= \sum \underbrace{p\,p \quad p}_{m} \ \underbrace{q\,q \quad q}_{n-m} = \sum p^m q^{n-m} =$$

$$= \binom{n}{m} p^m q^{n-m} \rightarrow T_m = \binom{n}{m} p^m q^{n-m}$$

ou, então.

$$\underbrace{(pt+q)\ (pt+q) \quad (pt+q)}_{n} = (pt+q)^n =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} p^m t^m q^{n-m} =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{m} p^m q^{n-m}}_{T_m} t^m = \sum_{m=0}^{n} T_m t^m$$

EXERCÍCIO · De uma urna contendo 20 bolas brancas e 30 bolas pretas são retiradas, *com reposição*, n bolas. Determine as seguintes probabilidades:

1) ocorrência de m bolas brancas — particularize $m = 10$; $n = 20$
2) ocorrência de n bolas pretas — particularize $n = 5$
3) ocorrência de pelo menos uma bola branca
4) ocorrência de pelo menos três bolas brancas — particularize $n = 1$
5) ocorrência de pelo menos duas e não mais de cinco bolas brancas

$$\begin{cases} T_m = \binom{n}{m} p^m q^{n-m} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots, n) \\ p = 20/50 = 2/5 \text{ (sucesso} \longleftrightarrow \text{ocorrência de bola branca)} \\ q = 30/50 = 3/5 \end{cases}$$

1) $T_m = \binom{n}{m} (2/5)^m (3/5)^{n-m}$

$$Se \begin{cases} m = 10 \rightarrow T_{10} = \binom{20}{10} \\ \qquad\qquad (2/5)^{10} (3/5)^{10} = \binom{20}{10} \frac{6^{10}}{5^{20}} \\ n = 20 \end{cases}$$

2) $T_0 = \binom{n}{0} (2/5)^0 (3/5)^n = (3/5)^5 = \frac{3^5}{5^5} \quad (n=5)$

3) $\sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m} (2/5)^m (3/5)^{n-m} =$

$$= \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (2/5)^m (3/5)^{n-m} - T_0 =$$

$$= 1 - T_0 = 1 - \frac{3^n}{5^n}$$

4) $\sum_{m=3}^{n} \binom{n}{m} (2/5)^m (3/5)^{n-m} = 1 - (T_0\, T_1\, T_2) =$

$$= 1 - \left[\left(\frac{3}{5}\right)^n + \binom{n}{1} \left(\frac{2}{5}\right)^1 \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + \right.$$

$$\left. + \binom{n}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{3}{5}\right)^{n-2} \right] =$$

$$= 1 - \left[\left(\frac{3}{5}\right)^n + n\frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + \right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^{n-2}\right]$$

$$Se\ n = 1 \rightarrow p = 0$$

5) $T_2 + T_3 + T_4 + T_5 = \sum_{m=2}^{5}\binom{n}{m} p^m q^{n-m} =$

$$= \sum_{m=2}^{5}\binom{n}{m}\left(\frac{2}{5}\right)^m\left(\frac{3}{5}\right)^{n-m} =$$

$$= \binom{n}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^{n-2} +$$

$$+ \binom{n}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^{n-3} +$$

$$+ \binom{n}{4}\left(\frac{2}{5}\right)^4\left(\frac{3}{5}\right)^{n-4} +$$

$$+ \binom{n}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^5\left(\frac{3}{5}\right)^{n-5}$$

EXERCÍCIO: Resolva o exercício anterior, admitindo que o esquema é *sem reposição.*

3 3 — *SEQÜÊNCIA HIPER-GEOMÉTRICA*

É uma seqüência de n provas sôbre um evento aleatório A, onde a probabilidade da ocorrência de sucesso na i-ésima ($i = 1, 2, \quad , n$) prova depende dos resultados obtidos nas $i - 1$ provas anteriores

Assim, a probabilidade p_i ($i = 1, 2, \quad , n$) é uma probabilidade condicional.

Considere-se a experiência aleatória que consiste em extrair *uma* bola ao acaso, de uma urna contendo N bolas, das quais a são brancas e b são pretas A extração é feita *sem* reposição e repetida n vêzes.

A probabilidade $p_i = P(X_i = 1)$ ($i = 1, 2, \quad , n$) será expressa por:

$$p_i = \frac{a - X^1_{i-1}}{N - (i-1)} \qquad (i = 1, 2, 3, \quad , n)$$

supondo-se como *sucesso* a ocorrência de bola branca e simbolizando-se por X^1_{i-1} o número de determinações $X_i = 1$ nas $i - 1$ provas anteriores. Convenciona-se $X^1_0 = 0$

A probabilidade $q_i = P(X_i = 0)$ ($i = 1, 2, \quad , n$) será assim expressa:

$$q_i = \frac{b - X^0_{i-1}}{N - (i-1)} \qquad (i = 1, 2, \quad , n)$$

onde X^0_{i-1} representa o número de determinações $X_i = 0$ nas $i - 1$ provas anteriores, convencionando-se $X^0_0 = 0$

A probabilidade da ocorrência de m sucessos nas n provas será, então:

$$T_m = \sum p_{i_1} p_{i_2} \quad p_{i_m} q_{i_{m+1}} q_{i_{m+2}} \quad q_{i_n} =$$

$$= \sum \frac{a - X^1_{i_1-1}}{N - i_1 + 1} \cdot \frac{a - X^1_{i_2-1}}{N - i_2 + 1}$$

$$\frac{a - X^1_{i_m-1}}{N - i_m + 1} \cdot \frac{b - X^0_{i_{m+1}-1}}{N - i_{m+2} + 1} \quad \frac{b - X^0_{i_n-1}}{N - i_n + 1}$$

Observe-se que os índices $i_1, i_2, \quad , i_m, i_m + 1, \quad , i_n$ são os inteiros 1, 2, $\quad , n$ dispostos em certa ordem e que

$$\begin{cases} X^1_{ii-1} = j - 1 & (j = 1, 2, \quad , m) \\ X^0_{i_k-1} = K - (m+1)\ (K = m+1, m+2, \quad , n) \end{cases}$$

Logo

$$T_m = \sum \frac{a(a-1)(a-2) \quad (a-m+1)(b-1)(b-2) \quad (b-n+m+1)}{N(N-1)(N-2) \quad (N-n+1)} =$$

$$= \sum \frac{A^m_a A^{n-m}_b}{A^n_N} = \binom{n}{m} \frac{A^m_a A^{n-m}_b}{A^n_N} = \binom{n}{m} \frac{n!}{m!(n-m)!} \frac{\frac{A^m_a}{m!} \frac{A^{n-m}_b}{(n-m)!}}{\frac{A^n_N}{n!}} =$$

$$= \frac{C^m_a C^{n-m}_b}{C^n_N} = \frac{\binom{a}{m}\binom{b}{n-m}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{a}{m}\binom{b}{n-m}}{\binom{a+b}{n}}$$

Ex O exercício proposto seria, assim, resolvido

1) $T_m = \dfrac{\binom{20}{m}\binom{30}{n-m}}{\binom{50}{n}}$ $\qquad Se \begin{cases} m = 10 \\ n = 10 \end{cases} \longrightarrow T_{10} = \dfrac{\binom{20}{10}\binom{30}{10}}{\binom{50}{20}}$

2) $T_o = \dfrac{\binom{20}{o}\binom{30}{n}}{\binom{50}{n}} = \dfrac{\binom{30}{n}}{\binom{50}{n}}$ 3) $1 - T_o = 1 - \dfrac{\binom{30}{n}}{\binom{50}{n}}$

4) $1 - (T_o + T_1 + T_2) = 1 - \left[\dfrac{\binom{30}{n}}{\binom{50}{n}} + \dfrac{\binom{20}{1}\binom{30}{n-1}}{\binom{50}{n}} + \dfrac{\binom{20}{2}\binom{30}{n-2}}{\binom{50}{n}}\right] =$

$$= 1 - \frac{\binom{30}{n} + \binom{20}{1}\binom{30}{n-1} + \binom{20}{2}\binom{30}{n-2}}{\binom{50}{n}} \quad Se\ n = 1 \longrightarrow 1 - \frac{30 + 20}{50} = 0$$

5) $T_2 + T_3 + T_4 + T_5 = \dfrac{\binom{20}{2}\binom{30}{n-2} + \binom{20}{3}\binom{30}{n-3} + \binom{20}{4}\binom{30}{n-4} + \binom{20}{5}\binom{30}{n-5}}{\binom{50}{n}}$

3 4 — *SEQÜÊNCIA DE CONTÁGIO*

É uma seqüência de n provas sôbre um evento aleatório A, onde a probabilidade da ocorrência de sucesso na i-ésima prova ($i = 1, 2, \quad , n$), como na seqüência hiper-geométrica, depende dos resultados obtidos nas $i - 1$ provas anteriores

A probabilidade p_i ($i = 1, 2, \quad , n$), é portanto, uma probabilidade condicional $p_i = f\ (X_1\ X_2, \quad , X_{i-1})$

Considere-se a experiência aleatória que consiste em extrair, ao acaso, uma bola de uma urna contendo N bolas, das quais a são brancas e b são pretas. A bola extraída é devolvida à urna com Δ bolas da mesma côr que a que foi extraída. Realizam-se n provas

Designando-se por sucesso a ocorrência de bola branca, ter-se-á:

$$\left\{\begin{array}{l} p_i = \dfrac{a + X^1_{i-1}\,\Delta}{N + (i-1)\,\Delta} \quad \{i = 1, 2, \quad , n\} \\ q_i = \dfrac{b + X^o_{i-1}\,\Delta}{N + (i-1)\,\Delta} \quad \{X^1_o = X^o_o = 0\} \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} X^1_{i-1} = \text{n° de determinações } X_{i=1} \text{ nas } i-1 \text{ provas anteriores} \\ X^o_{i-1} = \text{n° de determinações } X_{i=0} \text{ nas } i-1 \text{ provas anteriores} \end{array}\right.$$

A probabilidade da ocorrência de m sucessos nas n provas — T_m será expressa por:

$$T_m = \sum p_{i_1}\, p_{i_2} \quad p_{i_m}\, q_{i_{m+1}}\, q_{i_{m+2}} \quad q_{i_n} =$$

$$= \sum \frac{a + X^1_{i_1-1}\,\Delta}{N + (i_1 - 1)\,\Delta} \cdot \frac{a + X^1_{i_m-1}\,\Delta}{N + (i_m - 1)\,\Delta} \cdot \frac{b + X^o_{i_{m+1}-1}\,\Delta}{N + (i_{m+1} - 1)\,\Delta} \quad \frac{b + X^o_{i_n-1}\,\Delta}{N + (i_n - 1)\,\Delta}$$

Raciocínio análogo ao que foi feito para a seqüência hipergeométrica conduz a:

$$T_m = \sum \frac{a\,(a + \Delta) \quad .\ [a + (m-1)\,\Delta]\ b\,(b + \Delta)\ ..\ [b + (n - m - 1)\,\Delta]}{N\,(N + \Delta)\ (N + 2\,\Delta) \qquad [N + (n-1)\,\Delta]} =$$

$$= \frac{\binom{n}{m} \prod_{i=1}^{n} [a + (i-1)\,\Delta] \prod_{i=1}^{n-m} [b + (i-1)\,\Delta]}{\prod_{i=1}^{n} [N + (i-1)\,\Delta]}$$

Observe-se que:

$$1)\ se\ \Delta = 0 \longrightarrow T_m = \binom{n}{m} \frac{\overset{m}{\underset{i=1}{\pi}} a \overset{n-m}{\underset{i=1}{\pi}} b}{\overset{n}{\underset{i=1}{\pi}} N} = \binom{n}{m} \frac{a^m b^{n-m}}{N^n} =$$

$$= \binom{n}{m} \frac{a^m b^{n-m}}{N^m N^{n-m}} = \binom{n}{m} \left(\frac{a}{N}\right)^m \left(\frac{b}{N}\right)^{n-m}$$

Mas:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{N} = p_i & (i = 1, 2, \ , n) = p \\ \dfrac{b}{N} = q_i & (i = 1, 2, \ , n) = q \end{cases} \longrightarrow T_m = \binom{n}{m} p^m q^{n-m}$$

A seqüência de contágio se transforma na seqüência de Bernoulli. As provas passam a ser independentes

2) *Se* $\Delta = -1$

$$T_m = \frac{\binom{m}{n} \overset{m}{\underset{i=1}{\pi}} [a - (i-1)] \overset{n-m}{\underset{i=1}{\pi}} [b - (i-1)]}{\overset{n}{\underset{i=1}{\pi}} N - (i-1)} = \binom{n}{m} \frac{A_a^m A_b^{n-m}}{A_N^n} = \frac{\binom{a}{m}\binom{b}{n-m}}{\binom{a+b}{n}}$$

A seqüência de contágio se transforma na seqüência hipergeométrica, continuando a probabilidade p_i a ser uma função das variáveis $X_1, X_2, \ , X_{i-1}$

Ex . Uma urna tem a seguinte composição:

10 bolas brancas
5 bolas pretas

Retira-se, ao acaso, uma bola dessa urna Em seguida, ela é reposta na urna acompanhada de 7 bolas da mesma côr que a que foi retirada O procedimento é repetido 4 vêzes Determine as probabilidades da ocorrência.

1 — de 3 bolas brancas
2 — de 2 bolas pretas
3 — de pelo menos uma e não mais de três bolas brancas

$$1)\ T_3 = \binom{4}{3} \frac{\overset{3}{\underset{i=1}{\pi}} [10 + (i-1)\,2] \overset{1}{\underset{i=1}{\pi}} [5 + (i-1)\,2]}{\overset{4}{\underset{i=1}{\pi}} [15 + (i-1)\,2]} = \binom{4}{3} \frac{10 \times 12 \times 14 \times 5}{15 \times 17 \times 19 \times 21} =$$

$$= \frac{4 \times 10 \times \overset{4}{12} \times 14 \times 5}{\underset{3}{15} \times 17 \times 19 \times 21} = \frac{16 \times 140}{17 \times 399}$$

$$2)\ T_2 = 1 - \sum_{m=0}^{1} T_m - \sum_{m=3}^{4} T_m = \binom{4}{2} \frac{\overset{2}{\underset{i=1}{\pi}} 10 + (i-1) \overset{2}{\underset{i=1}{\pi}} 5 + (i-1)\,2}{\overset{4}{\underset{i=1}{\pi}} [15 + (i-1)\,2]} =$$

$$= \binom{4}{2} \frac{10 \times 12 \times 5 \times 7}{\underset{3}{15} \times 17 \times 19 \times \underset{3}{21}} = \frac{6 \times 10 \times 12}{9 \times 17 \times 19} = \frac{240}{51 \times 19}$$

$$3)\ \sum_{m=1}^{3} T_m = T_1 + T_2 + T_3 = \left\{ T_1 = \binom{4}{1} \frac{\prod_{i=1}^{1} [10 + (i-1)\,2] \prod_{i=1}^{3} [5 + (i-1)\,2]}{\prod_{i=1}^{4} [15 + (i-1)\,2]} = \right.$$

$$\left. = \frac{10 \times 5 \times 7 \times 9}{\underset{3}{15} \times 17 \times 19 \times \underset{3}{21}} \right\}$$

$$\sum_{m=1}^{3} T_m = \frac{10}{17 \times 19} + \frac{240}{51 \times 19} + \frac{16 \times 140}{17 \times 21 \times 19} =$$

$$= \frac{1}{19} \cdot \frac{10}{17} + \frac{240}{51} + \frac{16 \times 140}{357} = \frac{1}{19} \left[\frac{210 + 1680 + 2240}{357} \right] = \frac{4130}{19 \times 357}$$

Capítulo 4

VARIÁVEL ALEATÓRIA

4 1 — *INTRODUÇÃO*

No item 1 foram apresentadas algumas definições, sem preocupação de rigor, para que o acadêmico pudesse assimilar, gradativamente, a teoria que está sendo exposta.

Os axiomas do Cálculo de Probabilidades, estabelecidos através de uma idealização matemática das propriedades das freqüências relativas, após a introdução de uma medida de possibilidade da ocorrência de um evento aleatório — conceituada como um limite para o qual tende a freqüência relativa de um evento — constituiram a base do estudo realizado até o momento.

Neste item, passa-se a uma rigorização das idéias apresentadas, procurando, através de uma axiomática, definir a *medida de probabilidade*

Considere-se então, uma experiência aleatória E e seja C o conjunto de todos os resultados que podem ocorrer quando a experiência é realizada.

Os elementos de C são os eventos elementares. "O critério pelo qual se possa decidir se um elemento qualquer é ou não um evento elementar é a *norma de definição* do conjunto C".

Suponha-se que a experiência aleatória E consiste em se retirar, ao acaso, um indivíduo de uma população com o objetivo de verificar a sua idade. Os eventos elementares dessa experiência são os números reais compreendidos entre zero (0) e ω, onde ω representa a idade limite da vida humana. O conjunto C será o conjunto de todos êsses eventos elementares. Torna-se, assim, impossível *precisar* o número de eventos elementares de E e, conseqüentemente, o conjunto C Pode-se, porém, afirmar que qualquer resultado possível da experiência é um elemento do intervalo $(0, +\infty)$.

Com o objetivo de uniformizar a teoria, define-se então, como *conjunto possível* de uma experiência aleatória E qualquer conjunto R que contenha todos os eventos elementares.

Dêsse modo, o intervalo R: $(0 + \infty)$ é um conjunto possível da experiência apresentada.

O conjunto C passa a ser, assim, o *menor conjunto possível* da experiência aleatória E, entendendo-se como menor conjunto possível de uma experiência aleatória o conjunto C que satisfaz às seguintes condições:

1 — C é um conjunto possível de E
2 — Para qualquer conjunto possível R de E, tem-se $C \subset R$.

O evento elementar e $(e \in C)$ é um elemento genérico de C. Antes da realização de E, e é um *resultado eventual* de E. Após a realização de E, e se identifica a *um*, e *sòmente um*, elemento de C, que representa o *resultado efetivo* da realização de E

$A \subset C$ é um evento aleatório, um subconjunto de C. A ocorre se, e sòmente se, $e \in A$ ocorre. A proposição $e \in A$ é denominada evento $e \in A$, ou simplesmente, evento A.

A definição de evento pode se tornar mais geral. Seja θ uma proposição que pode ser falsa ou verdadeira. Se, para um subconjunto A do menor conjunto possível C de uma experiência aleatória E, fôr possível estabelecer uma equivalência entre a proposição θ e a proposição $e \in A$ (e pertence ao conjunto A), onde e é o evento elementar, diz-se que a proposição θ é um *evento associado* à experiência aleatória E Pode-se dizer, então que $\theta = e \in A$.

A medida da possibilidade de ocorrência do evento A é, assim, uma medida do "grau de crença" do indivíduo na veracidade da proposição θ

O evento elementar e pode ser considerado como um *ponto do espaço* C (menor conjunto possível de E)

obtendo-se, então, uma "imagem geométrica" das definições apresentadas.

Daqui por diante, o evento elementar passa a ser denominado *ponto-amostra,* simbolizado por *e,* o menor conjunto possível de uma experiência aleatória passa a ser denominado *espaço-amostra,* simbolizado por R e um subconjunto $E \subset R$ passa a ser denominado *evento* O número de pontos amostra em R pode ser finito ou não.

4 2 — *AXIOMÁTICA DO CÁLCULO DE PROBABILIDADES*

4 2 1 — *CORPO DE BOREL SÔBRE R*

Uma classe não vazia, F, de subconjuntos de R (espaço-amostra de uma experiência aleatória) é denominada *CORPO* de *BOREL* sôbre R ou *σ-álgebra* sôbre R se ela satisfaz às seguintes propriedades:

(1) $R \in F$

(2) $E \in F \rightarrow \bar{E} \in F \left\{\bar{E} = R - E\right\}$

(3) $E_1, E_2, \quad E, \quad F = \bigcup_{\alpha} E_\alpha \in F$

No caso particular em que a seqüência de eventos em (3) é finita o *CORPO DE BOREL* se transforma em um *CORPO DE BOOLE* sôbre R

O espaço-amostra R é denominado *espaço-portador* do corpo do Borel F Os corpos de Borel e de Boole são ainda denominados, respectivamente, de *classe completamente aditiva e classe finitamente aditiva* de conjuntos. A 3.ª propriedade justifica, de imediato, essas denominações.

TEOREMA I "Seja ω uma família de σ-álgebras F sôbre R Então: $\mathcal{F} = \bigcap_{F \in \omega}$ é uma σ-álgebra sôbre R"

Demonstração

i) $R \in F \ (F \in \omega) \Longrightarrow R \in \mathcal{F}$

ii) Seja $E_\alpha \subset R$

$E_\alpha \varepsilon \mathcal{F} = E_\alpha \varepsilon F \ (F \varepsilon \omega) =$

$= \cup_\alpha E_\alpha \varepsilon \mathcal{F} \quad (F \varepsilon \omega) = \cup_\alpha E_\alpha \varepsilon \mathcal{F}$

iii) Seja $E \subset R$

$E \in \mathcal{F} = E \in A \ (F \in \omega) =$

$= \bar{E} \in F \ (F \in \omega) = \bar{E} \in \mathcal{F}$

Portanto, $\mathcal{F}$ verifica as propriedades de definição de uma σ-álgebra.

TEOREMA II: "Seja F_0 uma classe de subconjuntos de R. Existe uma σ-álgebra $\mathcal{F}$, que contém F_0 e que está contida em qualquer σ-álgebra sôbre R que contenha F_0"

DEMONSTRAÇÃO

Seja ω a família das σ-álgebra sôbre R que contém F_0

Pelo teorema anterior, $\mathcal{F}$ é uma σ-álgebra sôbre R.
Seja $E \subset C$ um evento no espaço-amostra

$E \in F_0 = E \in F \ (F \in \omega) = E \in \cap \ F = E \in F$

Em conseqüência:

$F_0 \subset \mathcal{F}$ como $\mathcal{F}$ é a interseção das σ-álgebras F, se $F_0 \subset F$.

Então, $\mathcal{F}$ é a *menor σ-álgebra* contendo F_0 Essa σ-álgebra pode ser interpretada como um "Corpo de Borel gerado pela classe F_0"

4 2 2 — *MEDIDA DE PROBABILIDADE*

Considere-se um Corpo de Borel F sôre um espaço-amostra R.

Seja P uma função definida para todos os conjuntos F

Essa função de conjunto é denominada *medida de probabilidade* sôbre o corpo F se ela atende as seguintes propriedades

i) Para todo o evento E, $E \subset R \in F$, está associado um número real não negativo, simbolizado por $P\ (E)$ e denominado *probabilidade* do evento E Pode-se escrever, indiferentemente, P (E) ou $P(e \in E)$

ii) Se $E_1, E_2, \quad , \quad .E\alpha \ .$ é uma seqüência numerável de eventos mùtuamente exclusivos, isto é, uma seqüência numerável de conjuntos disjuntos em F, então

$$P\ (\cup_\alpha E_\alpha) = \sum_\alpha P\ (E_\alpha)$$

iii) $P(R) = 1$

Um conjunto para o qual é definida a medida P recebe o nome de *mensurável — P.*

A tripla (R, F, P) é denominada espaço-probabilístico.

4 3 — *EXPERIÊNCIA ALEATÓRIA REAL*

Considere-se uma experiência aleatória E

Seja (R, F, P) o espaço probabilístico dessa experiência

A experiência aleatória E é denominada *experiência aleatória real* e simbolizada por ε, se:

i) O conjunto dos números reais, R^1: $(-\infty + \infty)$ é um conjunto possível de E $R \subset R^1$

ii) F é o menor Corpo de Borel que contém todos os subconjuntos do espaço-amostra R

Daqui para diante, só se considera a experiência aleatória real ε.

4 4 — *VARIÁVEL ALEATÓRIA REAL*

Denomina-se variável aleatória e se simboliza por X, uma função do resultado eventual de uma experiência aleatória:

$$X = X\ (e)$$

Se ela faz corresponder a cada ponto-amostra e de R, um real x em R^1, é denominada *variável aleatória real.*

Uma variável aleatória real está sempre associada a uma experiência real ε.

Só serão consideradas no curso as variáveis aleatórias reais

4 5 — *PONTO DE PROBABILIDADE POSITIVA*

Seja x um elemento genérico de R^1.

Se, em relação a uma variável aleatória real X, se tem: $P(X = x) \neq 0$, isto é, se fôr diferente de zero a probabilidade da variável aleatória X se identificar a um número real x, diz-se que x é um *ponto de probabilidade positiva.*

4 6 — *VARIÁVEL ALEATÓRIA DE ORDEM ENUMERÁVEL*

Uma variável aleatória real X é de *ordem enumerável* se ela atende as seguintes condições:

i) O conjunto dos pontos de probabilidade positiva em $R^1 - R'$ — é enumerável (finito ou numerável).

ii) $P\ (X = x \in R') = 1$

Para $\chi \in \overline{R}'\ (\overline{R}' = R^1 - R') \Longrightarrow P\ (X = \chi \in \overline{R}') = 0$

4 7 — *FUNÇÃO DE PROBABILIDADE*

Seja X *uma variável aleatória de* ordem enumerável e $X_1, X_2, \ldots, X\alpha \ldots$ os pontos de probabilidade positiva, em relação a X, ou seja:

$$R' = \{x_1, x_2, \ldots, x_\alpha \ldots\}$$

A função que associa a cada ponto x_α a probabilidade $P\ (X = x_\alpha)$ é denominada *função de probabilidade* da variável aleatória de ordem enumerável X e simbolizada por

$$Px = P\ (X = x)$$

Uma condição necessária e suficiente para que uma sucessão de números reais $p_1, p_2, \ldots, p\alpha, \ldots$ possa ser considerada como um *conjunto de valôres* de uma função de probabilidade p_x é que:

$$\text{i)}\quad p_\alpha \geq 0, \forall_\alpha$$

$$\text{ii)}\quad \sum_\alpha p_\alpha = 1$$

4 8 — *FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO*

Seja X uma variável aleatória real

Dado um número x, em R^1, considere-se a probabilidade: $P(X \leqslant x)$

Essa probabilidade pode ser interpretada como a probabilidade de um evento E_x, $E_x \subset R$ (onde R é o espaço-amostra de uma experiência aleatória ε) constituído pelos pontos-amostra e tais que os reais $X(e)$ sejam não superiores ao real x em R^1 Ela é uma função do número real x e pode ser simbolizada por $F(x)$

$$\begin{cases} E_x : \{\forall e \rightarrow X\ (e) \leq x\} \\ E_x \subset R \\ P\ (E_x) = P\ (X \leq x) \\ P\ (X \leq x) = F\ (x)\ \{-\infty < x < +\infty\} \end{cases}$$

Essa função que é definida para todo x, em R, é denominada *função de distribuição* da variável aleatória real X

Tem essa função as seguintes propriedades.

1) $O \leqslant F(x) \leqslant 1$

Conseqüência imediata do axioma 1

$$2)\quad \begin{cases} F\ (+\infty) = 1 \\ F\ (-\infty) = 0 \end{cases}$$

Considerando a *extensão* dos reais tem-se, em decorrência do fato de X ser uma variável aleatória real:

$$F\ (+\infty) = P\ (X \leq +\infty) = P\ (C) = 1$$

(AXIOMA 2)

$$F\ (-\infty) = P\ (X \leq -\infty) = P\ (\phi) = 0$$

(CONSEQÜÊNCIA AXIOMA 3)

3) $F\ (x)$ é uma função monótona não decrescente de x.

Seja h $(h > 0)$ um número real.

Observe-se que:

$$X \leq x + h = (X \leq x) \cup (x < X \leq x + h)$$

$$\{(X \leq x) \cap (x < X \leq x + h) = \phi\}$$

Logo:

$$P(X \leq x+h) = P(X \leq x) + P(X \leq x+h) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow F(x+h) = F(x) + P(x < X \leq x+h) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow F(x+h) - F(x) = P(x < X \leq x+h) \geq 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow F(x+h) - F(x) \geq 0 \Longrightarrow F(x+h) \geq F(x)$$

4) Dados dois números reais, a e b $(b > a)$, tem-se:

$$\begin{cases} P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) \\ P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a - o) \\ P(a < X < b) = F(b - o) - F(a) \\ P(a \leq X < b) = F(b - o) - F(a - o) \end{cases}$$

Demonstrar-se-á, apenas, a 1.ª *probabilidade* do intervalo, ficando as demais demonstrações como exercícios para os acadêmicos.

Observe-se que:

$$(X \leq b) = (X \leq a) \cup (a < X \leq b)$$

onde $\{(X \leq a) \cap (a < X \leq b) = \phi\} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow P(X \leq b) = P(X \leq a) + P(a < X \leq b) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow F(b) = F(a) + P(a < X \leq b) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

Um corolário da 4ª propriedade é que.

$$P(X = x) = F(x) - F(x - 0), \text{ onde}$$

$$F(x - 0) = \lim_{h \to o} F(x - h) \{h > o\} \text{ e } \{a = b = x\}$$

Verifica-se, assim, que se a função de distribuição fôr contínua no ponto x, quando se tem: $F(x) = F(-0) = F(X + 0)$, a probabilidade $P(X = x)$ é NULA Se x fôr um ponto de descontinuidade de $F(x)$ então o valor da probabilidade nesse ponto será o "saltus" da função. Conclui-se que os pontos de probabilidade positiva de uma variável aleatória de ordem enumerável são os pontos de descontinuidade da função de distribuição dessa variável

5) A função de distribuição é contínua à direita

$$F(x) = F(x + o) = \lim_{h \to o} F(x + h) \{h > o\}$$

6) $P(x < x) = F(x - 0)$

7) O número de pontos de descontinuidade da função de distribuição é enumerável.

4 9 — *EXEMPLO DE UMA FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO*

Seja a variável aleatória de ordem enumerável X que representa o número eventual de pontos que se obtém na face voltada para cima de um dado "não tendencioso" quando êste dado é lançado sôbre uma superfície qualquer.

Nessa experiência, dada a definição da variável, aleatória, o espaço-amostra R coincide com o conjunto de números reais

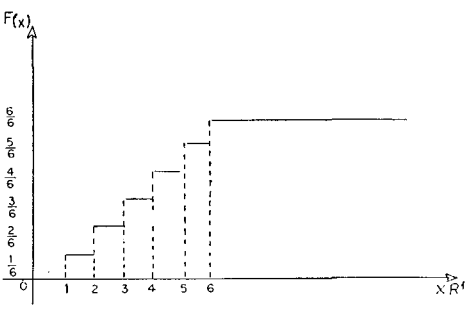
$\{X(e)\}$ que representa o domínio de X.

A função de distribuição dessa variável, definida para todo real x em R^1 será expressa, analiticamente, do seguinte modo:

$$F(x) = o \quad \text{se} \quad x < 1$$

$$F(x) = \frac{[x]}{6} \quad \text{se} \quad 1 \leq x \leq 6$$

$$F(x) = 1 \quad \text{se} \quad x > 6$$



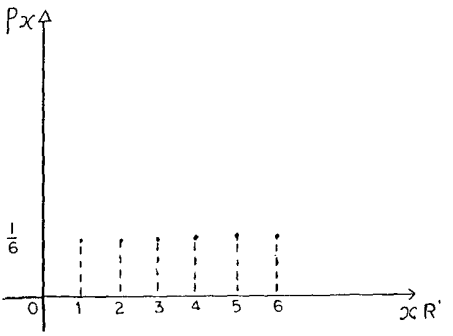
Sempre que a variável aleatória X fôr de ordem enumerável, a função de distribuição é uma função em degrau (step function) apresentando um "saltus" em cada ponto de probabilidade positiva em relação à variável aleatória X. O valor do "saltus" será igual à probabilidade da variável aleatória X se identificar ao real que é um ponto de probabilidade positiva e, portanto, igual ao valor da função de probabilidade nesse ponto. No exemplo, o número de pontos de descontinuidade de $F(x)$ -pontos- de probabilidade positiva — é igual a 6 (seis).

Para a variável aleatória considerada, a expressão analítica da função de probabilidade — P_x — será a seguinte:

$$P_x = \frac{1}{6} \quad \text{se} \quad x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$P_x = 0$ para qualquer outro real.

A representação gráfica da função de probabilidade é, a seguir, apresentada:



Com o auxílio da função de distribuição, pode-se calcular as probabilidades abaixo:

$$P(2 < x \leq 4) = F(4) - F(2) =$$
$$= \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(X = 5) = F(5) - F(5 - 0) =$$
$$= \frac{5}{6} - \frac{4}{6} = \frac{1}{6}$$

$$P(X = 1{,}5) = F(1{,}5) - F(1{,}5 - 0) =$$
$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 0$$

Conhecendo-se a função de distribuição de uma variável aleatória X, pode-se determinar a probabilidade:

$$P(X \leq x) = P(-\infty < X \leq x)$$

para qualquer x, em R^1, e pode-se, em conseqüência, com a utilização da 4.ª propriedade, determinar a probabilidade de qualquer intervalo no domínio de X ou fora dêle.

Conhece-se, então, o modo pelo qual se distribui a probabilidade total (uma massa unitária) pelo domínio de X. Conhece-se a distribuição de probabilidade da variável real X.

CAPÍTULO 5

DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE UNIDIMENSIONAIS E BIDIMENSIONAIS

5 1 — *TIPOS DE DISTRIBUIÇÃO*

As distribuições de probabilidades podem ser classificadas em dois tipos mais comuns:

i) *distribuições do tipo discreto*

ii) *distribuições do tipo contínuo*

5 1 1 — *DISTRIBUIÇÕES DO TIPO DISCRETO*

Seja X uma variável aleatória real Diz-se que a distribuição de probabilidade dessa variável é do tipo discreto, ou simplesmente, que ela é uma *variável aleatória do tipo discreto* se a variável aleatória real X assume, com probabilidade *UM*, os valôres de um conjunto enumerável de números reais. Assim, uma variável aleatória X que pode assumir os valôres $x_1, x_2 \ldots, x_n$ $(x_i \in R^1 \ \forall_i = 1, 2, \ldots, n)$, respectivamente, com as probabilidades $p_1, p_2 \ldots$, $P_n \{p_i = p\ (X = x_i);\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ tais que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ ou assumir os valôres de uma sucessão $x_1, x_2, \ldots, x\alpha, \ldots$, respectivamente, com as probabilidades $p_1, p_2, \ldots, p\alpha, \ldots$, satisfazendo à condição:

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} p_\alpha = 1 \qquad \{p_\alpha = p\ (X = x_\alpha)\}$$

é uma variável aleatória do tipo discreto.

Verifica-se, assim, que tôda variável aleatória real, de ordem enumerável, é uma variável aleatória do tido discreto.

Para essa variável, a função de distribuição é dada pela soma:

$$F(x) = \sum_{x_i \leqq x} p_i \qquad \{p_i = P(X = x_i)\}$$

estendendo-se a somação de todos os valôres de x_i que são menores ou iguais ao real x É, portanto, uma função em degrau. *Os pontos de descontinuidade da função são os pontos de probabilidade positiva* — x_i — e os valôres das descontinuidades nesses pontos são as probabilidades p_i, ou seja, valôres assumidos pela função de probabilidade nesses pontos.

Na experiência aleatória real do lançamento do dado, a variável aleatória real de ordem enumerável, que representa o número eventual de pontos na face voltada para cima e cuja função de distribuição foi apresentada como exemplo no item anterior, é um exemplo de variável aleatória do tipo discreto.

5.1 2 — *DISTRIBUIÇÕES DO TIPO CONTÍNUO*

Uma distribuição é do tipo contínuo quando a função de distribuição é contínua por tôda a parte Nesse caso, diz-se que a variável aleatória é do *tipo contínuo.*

Seja, então, $F(x)$ a função de distribuição de uma variável aleatória do

tipo contínuo Considere-se a relação:

$$\frac{P(x-h<X\leq x+h)}{2h} = \frac{F(x+h)-F(x-h)}{2h} \quad (I)$$

$\{h > 0\}$

Essa relação é denominada densidade média de probabilidade no intervalo $(x - h, x + h)$.

Existindo no ponto x a derivada de $F(x)$ — $F'(x)$ — denomina-se *densidade de probabilidade* no ponto x ao limite da densidade média de probabilidade em $(x - h, x + h)$ quando a amplitude dêsse intervalo tende a zero, isto é·

$$\lim_{h\to o} \frac{F(x+h)-F(x-h)}{2h} = F'(x) = f(x)$$

A correspondência que associa a cada ponto, em que é definida $F'(x)$, a densidade de probabilidade nesse ponto é uma função — $f(x)$ — dêsse ponto, denominada *função de freqüência* ou *densidade de probabilidade* da variável aleatória X Na conceituação da distribuição do tipo contínuo exige-se que $f(x)$ seja contínua em todo o conjunto dos números reais exceto, possìvelmente, em certos pontos de descontinuidade, dos quais haja, *no máximo*, um número finito em um intervalo arbitrário.

Como a função $F(x)$ é monótona, tem-se: $f(x) \geqq o$

Observe-se que a relação (I) pode ser expressa por:

$$\frac{P(x<X\leq x+h)}{h} = \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \lim_{h\to o} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{dF(x)}{dx} =$$

$$= \frac{F(x+dx)-F(x)}{dx} = \frac{P(x<X\leq x+dx)}{dx} =$$

$$= f(x) \Longrightarrow P(x<X\leq x+dx) = f(x)\,dx,$$

quando se considera o intervalo . ... $(x, x + dx]$.

Define-se, assim, a menor fração de probabilidade — infinitesimal — no contínuo A probabilidade de que a variável aleatória X assuma um valor no intervalo infinitesimal $(x, x + dx]$, dada pela diferencial $f(x)\,dx$, dá-se o nome de *elemento de probabilidade.*

Ter-se-á, então.

$$F(x) = P(X\leq x) = P(-\infty < X \leq x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{x} f(t)\quad dt,$$

introduzindo-se a variável real t para que x possa representar um real fixado em R^1.

Se a variável aleatória real X fôr do tipo contínuo:

$$F(x - o) = F(x) = F(x + o)$$

Logo:

$$P(a\leq X\leq b) = (P\,a < X \leq b) =$$

$$= P(a\leq X < b) = P(a < X < b) =$$

$$= F(b) - F(a)$$

Mas

$$F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= \int_{a}^{b} f(x)\,dx \begin{Bmatrix} (b > a) \\ (a,\ b \in R^1) \end{Bmatrix}$$

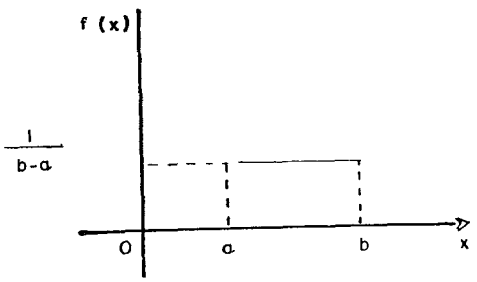
Um exemplo de variável aleatória do tipo contínuo é o da variável aleatória X, cuja função de freqüência tem a seguinte expressão analítica

$$f(x) = 0 \quad se \quad x \leq a$$

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad se \quad a < x < b \quad \{a, b \in R^1;\ a < b\}$$

$$f(x) = 0 \quad se \quad x \geq b$$

sendo a sua representação gráfica



A expressão analítica da função de distribuição é a seguinte:

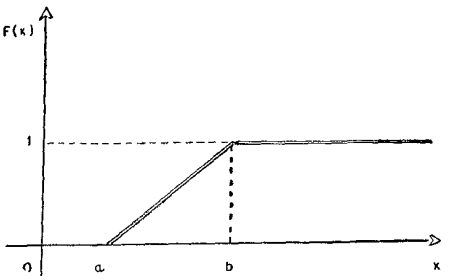
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{b-a}\,dt = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{x} dt =$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[t\right]_a^x = \frac{x-a}{b-a} \quad se \quad a < x < b.$$

$$F(x) = 0 \qquad se \quad x \leq a$$

$$F(x) = 1 \qquad se \quad x \geq b$$

A representação gráfica da função $F(x)$ é:



Quando uma variável aleatória X tem função de distribuição igual à função considerada neste exemplo, diz-se que X *tem distribuição retangular* no intervalo (a, b).

Se X é uma variável do tipo discreto, assumindo os valôres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de um conjunto finito de números reais, com probabilidades $P_1, P_2, \ldots, P_n$ onde $P_i = P(X = x_i)$; $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ter-se-á

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1 \qquad (I)$$

Anàlogamente, se os pontos de probabilidade positiva pertencem a um conjunto numerável de números reais, sendo

$p_\alpha = P(X = x_\alpha)$; $\alpha = 1, 2, 3, \ldots$ ter-se-á

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} p_\alpha = 1 \qquad (II)$$

Se X é do tipo contínuo:

$$F(+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \qquad (III)$$

Essas 3 igualdades permitem verificar se uma função pode ser considerada como uma função de probabilidade ou uma função de freqüência. É o que se verá a seguir.

EXERCÍCIO 1 — Verifique se para uma variável aleatória X do tipo discreto que assume os valôres 0, 1, 2, , x, , respectivamente, com probabilidades

$$e^{-m},\ e^{-m}m,\ \frac{e^{-m}m^2}{2!},\ \ ,\ \frac{e^{-m}m^x}{x!},$$

a função cuja expressão analítica é:

$$\begin{cases} P_x = P(X = x) = \dfrac{e^{-m}m^x}{x!} \rightarrow se\ x = 0, 1, 2, \\ P_x = P(X = x) = 0 \rightarrow \text{ para qualquer} \end{cases}$$

outro x é uma função de probabilidade

A condição é que.

$$\sum_{x=0}^{\infty} p_x = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-m}m^x}{x!} = 1$$

Tem-se:

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-m}m^x}{x!} = e^{-m} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{m^x}{x!} = e^{-m}\left(1 + m + \right.$$

$$\left. + \frac{m^2}{2!} + \frac{m^3}{3!} + \quad \right) = e^{-m}e^{m} = e^{0} = 1$$

Logo, a função considerada é uma função de probabilidade. Uma variável aleatória X que tenha essa distribuição é denominada *Variável de Poisson.*

EXERCÍCIO 2 — Verifique se a função cuja expressão analítica é.

$$f(x) = 0 \rightarrow se\ x < 1$$

$$f(x) = \alpha x^{-\alpha-1} \rightarrow se\ x \geq 1$$

sendo $\alpha > 0$, é uma função de freqüência de uma variável aleatória real X. Se fôr, determine a expressão analítica da função de distribuição

A condição é que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

Ora:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{1}^{+\infty} \alpha x^{-\alpha-1}\,dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{x^\alpha}\right]_1^\infty = 0 - (-1) = 1$$

É uma função de freqüência

A expressão analítica da função de distribuição será·

$$F(x) = 0 \ se\ x < 1$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} \alpha t^{-\alpha-1}\,dt =$$

$$= \int_{1}^{x} \alpha t^{-\alpha-1}\,dt = \left[-\frac{1}{t^\alpha}\right]_1^x =$$

$$= -\frac{1}{x^\alpha} - (-1) = 1 - \frac{1}{x} \ se\ x \geq 1$$

Essa função é a função de distribuição da *renda*

5 2 — *VARIÁVEIS ALEATÓRIAS BIDIMENSIONAIS*

5 2 1 — *INTRODUÇÃO*

No item 4 definiu-se como variável aleatória real X uma função que faz corresponder a cada ponto-amostra e

do espaço-amostra R de uma experiência aleatória real ε um real X (e), em R^1 Uma variável aleatória real é, assim, uma função do resultado eventual de uma experiência aleatória real, representando, em um caso particular, o próprio resultado eventual da experiência. O contradomínio da função X, o conjunto $\{X(e)\}$, é um conjunto de pontos ou um intervalo em R^1, conforme a variável aleatória real seja do tipo discreto ou do tipo contínuo Observa-se, então, que para a representação do contradomínio da função X há necessidade, apenas, de *uma dimensão,* sendo a variável aleatória real X denominada *variável aleatória unidimensional.*

5 2 2 — *EXPERIÊNCIA ALEATÓRIA INDUZIDA*

Considere-se a variável aleatória real unidimensional: $X = e^2$ onde e é um ponto-amostra de um espaço-amostra: $R = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ de uma experiência aleatória real ε — a experiência do lançamento de um dado. O contradomínio da função X ficará assim, definido.

$$\{X(e)\} = Xe = \{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$$

Existe uma correspondência completa e unívoca entre o campo de definição da função — R e o seu contradomínio — X_e

Pode-se, então, definir uma experiência aleatória εx, induzida por X, a partir da experiência ε e que tem como espaço-amostra — seu menor conjunto possível — o conjunto Xe, em R^1 Essa experiência aleatória é denominada experiência aleatória induzida

Deve-se observar que, em uma extensão da definição, é sempre possível considerar uma experiência aleatória real ε como uma experiência aleatória induzida dela própria, onde o espaço-amostra R e o contradomínio da função $X = e$ são os mesmos. Dentro dessas idéias, a variável aleatória unidimensional passa a ser definida como o resultado eventual de uma experiência aleatória, ficando subentendido que a experiência aleatória é real e induzida, dela própria ou de uma outra experiência aleatória real.

5 2.3 — *EXPERIÊNCIA ALEATÓRIA COMPOSTA*

Algumas experiências aleatórias reais apresentam como resultados *pares* (x, y) de números reais; assim, por exemplo, selecionando-se, ao acaso, uma pessoa de uma população humana, poder-se-ia obter como resultado de uma experiência aleatória, prèviamente estabelecida, um par de números reais (x, y), que representariam informações sôbre o indivíduo selecionado. Se a experiência aleatória consiste em selecionar, ao acaso um indivíduo de uma população humana com o objetivo de verificar a sua renda e a sua despesa de consumo, mensais, o resultado eventual dessa experiência será um par de números reais (x, y).

Seja, então, ε, uma experiência aleatória real de espaço-amostra R, formado por pontos-amostra: $e = (x, y)$. *O conjunto R, em* R^2, é, agora *um conjunto em um espaço bidimensional.*

Sejam X e Y duas funções que fazem corresponder a cada ponto-amostra e de R, respectivamente, o real x e o real y, ambos em R^1 e que são o primeiro e o segundo elementos do par (x, y), que define o ponto-amostra e de R. Sejam εx e εy as experiências induzidas, a partir de ε, pelas funções X e Y

A experiência aleatória ε é denominada *experiência composta* pelas experiências εx e εy, que são denominadas *experiências marginais* da experiência composta ε Os pontos-amostra das esperiências marginais εx e εy são, respectivamente:

$$\begin{cases} ex = X(e) = X(x, y) = x \\ ey = Y(e) = Y(x, y) = y \end{cases}$$

e seus espaços-amostra ficam definidos pelos contradomínios das funções X e Y, respectivamente

$$\begin{cases} Xe = \{X(e)\} = \{x\} \\ Ye = \{Y(e)\} = \{y\} \end{cases}$$

Amplia-se a definição considerando-se uma experiência aleatória real ε, antriormente definida (item 4), como uma experiência aleatória composta e marginal de si mesma

5 2 4 — *VARIÁVEL ALEATÓRIA BIDIMENSIONAL*

Seja ε uma experincia aleatória real composta pelas experiências marginais εx e εy, de espaço-amostra

$$R = \{e = (x, y)\}$$

O resultado eventual da experiência marginal εx é uma variável aleatória real unidimensional X, cujo domínio é o conjunto $\{x\}$, em R^1. Anàlogamente, o resultado eventual da experiência marginal εy é uma variável aleatória real unidimensional Y, cujo domínio é o conjunto $\{y\}$, em R^1. O resultado eventual da experincia composta ε é, também, uma variável aleatória real,

denominada *variável aleatória bidimensional*, simbolizada por (X, Y), cujo domínio é o conjunto de pares $\{(x, y)\}$ em R^2.

As variáveis aleatórias X e Y que compõem a variável aleatória bidimensional (X, Y) são denominadas *marginais* e suas distribuições de probabilidades são chamadas *distribuições marginais*

5 2.5 — *VARIÁVEL ALEATÓRIA BIDIMENSIONAL DE ORDEM ENUMERÁVEL*

Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional.

Se as variáveis marginais X e Y forem variáveis aleatórias unidimencionais de ordem enumerável, diz-se que a variável aleatória (X, Y) é uma *variável aleatória bidimensional de ordem enumerável.*

5 2 6 — *FUNÇÃO DE PROBABILIDADE DE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA BIDIMENSIONAL*

Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional de ordem enumerável e $R'x$ e $R'y$ os conjuntos de pontos de probabilidade positiva das variáveis aleatórias marginais X e Y, respectivamente Êsses conjuntos são finitos ou numeráveis Suponha-se, na situação mais geral, que êles são numeráveis

$$R'x = \{x_1, x_2, \quad , x_n, \quad \}$$

$$R'y = \{Y_1, Y_2, \quad , Y_m, \quad \}$$

À função que faz corresponder a cada par (xn, ym) a probabilidade da interseção $\{(X = xn) \cap (Y = ym)\}$, simbolizada por pnm, dá-se o nome de *função de probabilidade* da variável aleatória bidimensional (X, Y):

$$pnm = P\{(X = xn) \cap (Y = ym)\} =$$

$$= P(X = xn; y = ym)$$

5 2 7 — *FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO DE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA BIDIMENSIONAL*

Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional Sua *função de distribuição*, simbolizada por $F(x, y)$, é definida por:

$$F(x, y) = P\{(X \leq x) \cap (Y \leq y)\} =$$

$$= P(X \leq x; Y \leq y)$$

$$\text{se} \begin{cases} -\infty < x < +\infty \\ -\infty < y < +\infty \end{cases}$$

Em particular, quando admitindo-se a extensão do real, se tem $y = +\infty$:

$$F(x, +\infty) = P(X \leq x; Y \leq +\infty) = F_1(x)$$

onde $F_1(x)$ é a função de distribuição da marginal X, *já que* $Y \leqslant +\infty$ é um evento certo

Da mesma forma, se $x = +\infty$, tem-se:

$$F(+\infty, y) = P(X \leq +\infty; Y \leq y) =$$

$$= P(Y \leq y) = F_2(y)$$

onde $F_2(y)$ é a função de distribuição da variável aleatória Y.

No caso em que $x = y = +\infty$, como os eventos $(X \leqslant +\infty)$ e $(Y \leqslant +\infty)$ são certos, tem-se: $F(+\infty, +\infty) = 1$.

Entretanto, para que a função de distribuição de uma variável aleatória bidimensional (X, Y) se anule, basta que se tenha $x = -\infty$ ou $Y = -\infty$, já que:

$$F(x, -\infty) = P(X \leq x; Y \leq -\infty) =$$

$$= P\{(X \leq x) \cap (Y \leq -\infty)\} = P(\phi) = 0$$

porque $Y \leqslant -\infty$ é um evento impossível Da mesma forma:

$$F(-\infty, y) = P(X \leq -\infty; Y \leq y) = P(\phi) = 0$$

Demonstra-se, ainda, para a função de distribuição $F(x, y)$ que ela é *não decrescente* e *contínua à direita* em relação a cada uma das variáveis.

5 2.8 — *TIPOS DE DISTRIBUIÇÃO BIDIMENSIONAL*

Serão considerados dois tipos de distribuição bidimensional: o discreto e o contínuo

Diz-se que a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória bidimensional é do *tipo discreto*, ou simplesmente que a variável aleatória bidimensional é do tipo discreto, quando ela é uma variável aleatória bidimensional de ordem enumerável.

Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional que assume a determinação (x_i, y_j), $(i, j = 1, 2, 3, \ldots)$, com probabilidade

$$P_{ij} = P\{(X = x_i) \cap (Y = y_j)\}$$

Essa variável aleatória é de ordem enumerável e, portanto do tipo discreto, desde que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = \sum_{i,j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$$

ou, se o número de pontos de probabilidade positiva das marginais X, Y é finito:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} P_{ij} = \sum_{i,j=1}^{m} P_{ij} = 1$$

Representando, agora, por p_i a probabilidade de que a marginal X assuma o valor x_i, qualquer que seja o valor assumido por Y, tem-se

$$pi = \sum_{j} pij = \sum_{j} P(x=xi;\ Y=yi) = P(X=xi)$$

Portanto, a marginal X é uma variável aleatória do tipo discreto, com a seguinte distribuição de probabilidade

$$\begin{cases} X: x_1,\ x_2,\ x_3, \\ P\ \ p_1!\ p_2!\ p_3! \end{cases}$$

De modo análogo, pode-se obter a distribuição da marginal Y: designando por $p.j$ a probabilidade de que essa variável assuma o valor y_j, independentemente do valor que X possa assumir, tem-se:

$$p\ \ j = \sum_{i} pij = \sum_{i} P(X=xi,\ Y=yj) = P(Y=yj)$$

Nesse caso, a distribuição de probabilidade de Y será:

$$\begin{cases} Y = y_1,\ y_2,\ y_3, \\ P = p\ 1,\ p\ 2,\ p\ 3, \end{cases}$$

Para uma melhor visualização das distribuições de probabilidade das variáveis aleatórias (X, Y), X e Y, pode-se construir a seguinte tabela de dupla entrada:

x \ y	y1	y2	. .	yj	.	TOTAL
x1	P11	P12		P1j	.	P1
x2	P21	P22	.	P2j		P2
.						
xi	Pi1	Pi2	.	Pij		Pi
TOTAL	P 1	P 2		P j		1

onde o elemento de i-ésima linha e j-ésima coluna é a probabilidade da variável aleatória (X, Y) assumir o valor (x_i, y_j). Somando os elementos da i-ésima linha, obtém-se a probabilidade $p_i = P(X = x_i)$ e somando os elementos da j-ésima coluna, obtém-se a probabilidade $p_{.j} = P(X = x_j)$.

Para uma variável aleatória bidimensional do tipo discreto, a função de distribuição fica definida do seguinte modo:

$$F(x, y) = \sum_{xi \leq x} \sum_{yi \leq y} pij = \sum_{\substack{xi \\ yi}} \sum_{\substack{\leq x; \\ \leq y}} pij$$

estendendo-se a somação a todos os pontos de probabilidade positiva x_i e y_j das marginais X e Y que sejam não superiores aos reais x e y.

Diz-se que uma distribuição de probabilidade de uma variável aleatória bidimensional é do tipo contínuo, ou, apenas, que essa variável é do tipo contínuo quando a função de distribuição é contínua

A derivada mista:

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\,(\partial y)} = f(x, y)$$

dá-se o nome de *densidade de probabidade ou função de freqüência* da variável aleatória bidimensional (x, y)

A probabilidade da variável aleatória (X, Y) pertencer a um intervalo infinitesimal retangular $(x, y;\ x + dz,\ y + dy]$, ou seja:

$$P\left\{(X, Y) \in (x, y;\ x + dx,\ y + dy)\right\} =$$

$$= P\left\{(x < X \leq x + dx) \cap (y < Y \leq y + dy)\right\}$$

$$= f(x, y)\ dx\ dy$$

dá-se o nome de *elemento de probabilidade* da variável aleatória bidimensional (X, Y)

Para uma variável aleatória bidimensional do tipo contínuo, a função de distribuição é, assim, definida:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, t)\ du\ dt$$

Ter-se-á, evidentemente

$$F(\infty, \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\ dx\ dy = 1$$

A probabilidade de que (X, Y) pertença a um intervalo retangular (a1, a2, b1, b2], sendo $a_1 < b_1$ e $a_2 < b_2$ será dada pela integral dupla·

$$P\left\{(a_1 < X \leq b_1) \cap (a_2 < Y \leq b_2)\right\} =$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x, y)\ dx\ dy$$

As funções de distribuição $F_1(x)$ e $F_2(y)$ das variáveis marginais X e Y serão, assim, obtidas

$$F_1(x) = P(X \leq x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} f(u, y)\, du\, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{x} du \int_{-\infty}^{\infty} f(u, y)\, dy$$

$$F_2(y) = P(Y \leq y) =$$

$$= \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t)\, dx\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{y} dt \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t)\, dx$$

e as expressões das densidades de probabilidades das marginais X e Y serão as seguintes:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy,$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx$$

EXERCÍCIO: Considere-se a variável aleatória bidimensional (X, Y) que pode assumir os valôres (0, 0), (0, 1), (1, 0) e (1,1), respectivamente, com as probabilidades $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{6}$

Determine as distribuições das marginais X e Y

SOLUÇÃO

$$\begin{cases} (X, Y): \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\} = \{(xi, yj)\} \\ p_{ij} : 1/6,\ 1/3,\ 1/3,\ 1/6 \end{cases}$$

Para a marginal X ter-se-á:

$$\begin{cases} X: \{x_i\} \quad \{0,1\} \\ p_i = \sum_j p_{ij} \end{cases}$$

e para a marginal Y:

$$\begin{cases} Y = \{y_j\} \\ p_{\cdot j} = \sum_i p_{ij} \end{cases}$$

Represente-se a distribuição da bidimensional (X, Y) numa tabela de dupla entrada As distribuições das marginais serão obtidas somando-se as probabilidades

$$p_{ij} = P\{(X = x_i) \cap (Y = y_j)\}$$

por linhas e colunas

x \ y	0	1	TOTAL
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
TOTAL	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

As distribuições marginais serão, então:

$$\begin{cases} X: \{x_i\} = \{0,1\} \\ p_i = P(X = x_i) = \frac{1}{2} \text{ se } x = 0,1 \\ p_i = P(X = x_1) = 0 \text{ para qualquer outro } x \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y = \{y_j\} = \{0,1\} \\ p_{\cdot j} = P(Y = y_j) = \frac{1}{2} \text{ se } y = 0,1 \\ p_{\cdot j} = P(Y = y_j) = 0 \text{ para qualquer outro } y \end{cases}$$

Observe-se que, efetivamente:

$$\begin{cases} \sum_{i,j} p_{ij} = \sum_{i=0}^{1} \sum_{j=0}^{1} p_{ij} = \\ \qquad = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1 \\ \sum_i p_i = \sum_{i=0}^{1} p_{i\cdot} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\ \sum_j p_{\cdot j} = \sum_{j=0}^{1} p_{\cdot j} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{cases}$$

condição para que essas funções possam ser consideradas como funções de probabilidade

EXERCÍCIO Considere-se uma variável aleatória bidimensional do tipo contínuo (X, Y) que tem *distribuição retangular* no intervalo $(a_1\ a_2,\ b_1,\ b_2)$, ou seja uma variável aleatória bidimensional (X, Y) cuja função de freqüência é:

$$f(x, y) = \frac{1}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)} \text{ se } \begin{cases} a_1 < x < b_1 \\ a_2 < y < b_2 \end{cases}$$

$$f(x, y) = 0 \qquad \begin{cases} x \notin (a_1, b_1) \\ y \notin (a_2, b_2) \end{cases}$$

Determine as funções de freqüência, e, conseqüentemente, as distribuições, das marginais X e Y.

SOLUÇÃO Para obter a função de freqüência de X basta integrar, em todo o campo real, a função de freqüência $f(x, y)$ em relação a y Logo·

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dy =$$

$$= \int_{a_2}^{b_2} \frac{1}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)}\, dy \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)} \Big[y \Big]_{a_2}^{b_2} = \frac{1}{b_1 - a_1}$$

Anàlogamente, para a marginal Y, ter-se-á.

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx =$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} \frac{1}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)}\, dx =$$

$$= \frac{1}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)} \Big[x \Big]_{a_1}^{b_1} = \frac{1}{b_2 - a_2}$$

Portanto, as funções de freqüência das marginais X e Y são, respectivamente:

$$\begin{cases} f_1(x) = 0 & \text{se } x \notin (a_1, b_1) \\ f_1(x) = \dfrac{1}{b_1 - a_1} & \text{se } x \in (a_1, b_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_2(y) = 0 & \text{se } y \notin (a_2, b_2) \\ f_2(y) = \dfrac{1}{b_2 - a_2} & \text{se } y \in (a_2, b_2) \end{cases}$$

ADENDO AO ITEM 5

I — *QUESTÕES PRÁTICAS — RESOLUÇÕES*

1) Em três Divisões do Departamento Econômico de uma autarquia estão lotados os seguintes funcionários:

Divisão I — 1 (um) estatístico
— 2 (dois) engenheiros
— 3 (três) economistas

Divisão II — 2 (dois) estatísticos
— 1 (um) engenheiro
— 1 (um) economista

Divisão III — 4 (quatro) estatísticos
— 5 (cinco) engenheiros
— 3 (três) economistas

Surgindo a oportunidade de enviar 2 (dois) técnicos ao exterior, o Chefe do Departamento resolve selecionar, ao acaso, uma Divisão e, dessa Divisão, retirar também ao acaso, 2 (dois) técnicos Um *estatístico* e um *economista* são enviados ao exterior Qual é a probabilidade de que

a) os técnicos que viajaram prestam serviços nas Divisões II ou III

b) os referidos técnicos estejam lotados na Divisão I

SOLUÇÃO: Sejam os eventos:

A_i $(i = \text{I, II, III})$ = a Divisão selecionada foi a Divisão i

B = um estatístico e um economista foram selecionados

As probabilidades, "a priori", dos eventos A_i são:

$$P(A_i) = \frac{1}{3} \quad (i = \text{I, II, III})$$

As probabilidades condicionais $P(B/Ai)$ $\{i = \text{I, II, III}\}$ são, dadas as composições das divisões, as seguintes

$$P(B/A1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3+3}{30} = \frac{1}{5}$$

$$P(B/A2) = \frac{2}{4} \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2+2}{12} = \frac{1}{3}$$

$$P(B/A3) = \frac{4}{12} \quad \frac{3}{11} + \frac{3}{12} \quad \frac{4}{11} = \frac{12 \times 2}{12 \times 11} = \frac{2}{11}$$

As probabilidades pedidas serão, então

a) $P(A_2/B) + P(A_3/B)$

$$P(A_2/B) = \frac{P(A_2)\, P(B/A_2)}{P(B)} = \frac{P(A_2)\, P(B/A_2)}{P(A_1)\, P(B/A_1) + P(A_2)\, P(B/A_2) + P(A_3)\, P(B/A_3)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{11}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{33 + 55 + 30}{165}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{165}{118} = \frac{55}{118}$$

$$P(A_3/B) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{11}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{118}{165}} = \frac{2}{11} \cdot \frac{165}{118} = \frac{2 \times 15}{118} = \frac{30}{118} = \frac{15}{59}$$

Logo:

$$P\,(A_2/B) + P\,(A_3/B) = \frac{55+30}{118} = \frac{85}{118}$$

$$b)\quad P\,(A_1/B) = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{118}{165}} = \frac{1}{5}\cdot\frac{165}{118} = \frac{33}{118}$$

ou

$$P\,(A_1/B) = 1 - [P\,(A_2/B) + P\,(A_3/B)] =$$

$$= 1 - \frac{85}{118} = \frac{33}{118}$$

2) Dois jogadores A e B possuem, respectivamente, 4 e 5 moedas iguais Cada jogador lança suas moedas e vence aquêle que obtiver maior número de "coroas".

Determine as seguintes probabilidades

a) A ganhar de B

b) B ganhar de A

c) o jôgo termina empatado

A tem 4 moedas e B tem 5 moedas.

Para cada jogador pode-se definir uma seqüência de provas de Bernoulli onde a probabilidade da ocorrência de m sucessos em 4 provas ($m = 0, 1, 2, 3, 4$), para A, e a da ocorrência de r sucessos em 5 provas ($r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$), para B serão, respectivamente:

$$Tm = \binom{4}{m}\left(\frac{1}{2}\right)^m\left(\frac{1}{2}\right)^{4-m}$$

$(m = 0, 1, 2, 3, 4)$

$$T_r' = \binom{5}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^r\left(\frac{1}{2}\right)^{5-r}$$

$(r = 0, 1, 2, 3, 4)$

A ganha de B se $m > r$

B ganha de A se $m < r$

O jôgo empata se $m = r$

As probabilidades pedidas serão, então:

a) A probabilidade de A vencer o jôgo é a probabilidade de A obter m sucessos ($m = 0, 1, 2, 3, 4$) e B obter r sucessos ($r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$), sendo $m > r$ Logo, designando-se por P_1 essa probabilidade, ter-se-á:

$$P_1 = T_1 T'_0 + T_2 \sum_{r=0}^{1} T'_r +$$

$$+ T_3 \sum_{r=0}^{2} T'_r + T_4 \sum_{r=0}^{3} T'_r$$

Ora:

$$\begin{cases} T_1 = \binom{4}{1}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{4}{24} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} & T'_0 = \binom{5}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32} \\ T_2 = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{24} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} & T'_1 = \binom{5}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{2^5} = \frac{5}{32} \\ T_3 = \binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{4}{24} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} & T'_2 = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{10}{32} = \frac{5}{16} \\ T_4 = \binom{4}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{24} = \frac{1}{16} & T'_3 = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{32} = \frac{5}{16} \end{cases}$$

Então:

$$P_1 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{32} + \frac{3}{8}\cdot\frac{6}{32} + \frac{1}{4}\cdot\frac{16}{32} + \frac{1}{16}\cdot\frac{26}{32} = \frac{1}{128} + \frac{9}{128} + \frac{16}{128} + \frac{13}{256} = \frac{65}{256}$$

a) A probabilidade do jôgo terminar empatado é a probabilidade de A obter m sucessos e B obter r sucessos sendo $m = r$ ($m = 0, 1, 2, 3, 4$; $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$). Designando-se por P_2 essa probabilidade, ter-se-á

$$P_2 = T_0 T'_0 + T_1 T'_3 + T_2 T'_2 + T_3 T'_3 + T_4 T'_4$$

Portanto:

$$P_2 = \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{32} + \frac{1}{4}\cdot\frac{5}{32} + \frac{3}{8}\cdot\frac{5}{16} + \frac{1}{4}\cdot\frac{5}{16} + \frac{1}{16}\cdot\frac{5}{32} =$$

$$= \frac{1+20+60+40+5}{16\times 32} = \frac{126}{16\times 32} = \frac{63}{256}$$

b) B vence o jôgo se A não ganha, nem o jôgo termina empatado Então, se P_3 representa a probabilidade de B ganhar de A, vem:

$$P_3 = 1 - (P_1 + P_2) = 1 - \frac{65 + 63}{256} = 1 - \frac{128}{256} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

———x———

3) Da equipe médica de uma clínica composta de 8 membros, sendo 3 médicas e 5 médicos, são retirados, ao acaso, 4 membros para constituírem a equipe médica da enfermaria I. Posteriormente, também ao acaso, dois membros da equipe da enfermaria são transferidos para a enfermaria II, recém-inaugurada, que passa a dispor de duas médicas No futuro, essas médicas poderão voltar ou não a enfermaria I. Se, também no futuro, fôr necessário transferir mais um membro da enfermaria I para a enfermaria II, qual é a probabilidade de que êsse membro seja uma médica?

SOLUÇÃO

Se a enfermaria II passar a dispor de duas médicas, após a transferência, só existem duas hipóteses possíveis para a composição da equipe da enfermaria I:

A_1 — dois médicos e duas médicas
A_2 — um médico e três médicas

Essas hipóteses constituem eventos que têm as seguintes probabilidades:

$$P(A_1) = \frac{C_3^2 \times C_5^2}{C_8^4} = \frac{24}{56} = \frac{3}{7}$$

———x———

$$P(A_2) = \frac{C_3^3 \times C_5^1}{C_8^4} = \frac{5 \times 24}{56 \times 30} = \frac{1}{14}$$

Representa-se por B o evento os dois membros transferidos da enfermaria I para enfermaria II são médicas Ter-se-á:

$$P(B/A_1) = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$P(B/A_2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Seja C o evento-futuro-que consiste em retirar mais uma médica da enfermaria I e transferi-la para a enfermaria II É necessário fazer duas hipóteses:

1 — Se as duas médicas voltam à enfermaria I:

$$P(C/B \cap A_1) = P(C/A_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(C/B \cap A_2) = P(C/A_2) = \frac{3}{4}$$

Então:

$$P(C/B) = \frac{P(A1)\,P(B/A1)\,P(C/B \cap A1) + P(A2)\,P(B/A2)\,P(C/B \cap A2)}{P(A1)\,P(B/A1) + P(A2)\,P(B/A2)} =$$

$$= \frac{\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{14} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{14} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{84} + \frac{3}{112}}{\frac{3}{42} + \frac{1}{28}} = \frac{21}{336} \times \frac{84}{9} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

2 — Se as duas médicas não voltam à enfermaria I:

$$P(C/B \cap A_1) = 0$$

$$P(C/B \cap A_2) = \frac{1}{2}$$

$$P(C/B) = \frac{\frac{1}{14} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{14} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{56}}{\frac{3}{42} + \frac{1}{28}} =$$

$$= \frac{1}{56} \times \frac{84}{9} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$$

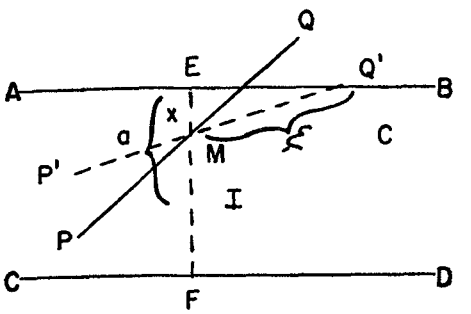
II — *O PROBLEMA DA AGULHA*

O "problema da agulha" é um problema clássico do Cálculo de Probabilidades e foi proposto por George-Louis Leclerc, conde de Buffon, naturalista francês em seu "Essai d'Arithmétique Morale" e pode ser, assim, enunciado

— Traçam-se sôbre uma fôlha de papel horizontal segmentos de reta paralelas e eqüidistantes Deixa-se cair, aleatòriamente, uma agulha de forma cilíndrica sôbre a fôlha de papel Qual é a probabilidade de que a agulha corte um dos segmentos de reta?

Designe-se por $2a$ a eqüidistância entre as paralelas e por $2l$ o comprimento da agulha Para que a agulha não possa cortar mais de uma paralela, faça-se:

$1 < a$



Sejam $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ dois dos segmentos paralelos e eqüidistantes traçados na fôlha de papel A reta $\overline{EF}$, que passa pelo ponto médio M da agulha é perpendicular às paralelas consideradas Simbolize-se por x a distância $\overline{EM}$ I é o ponto médio de $\overline{EF}$ O segmento $\overline{PQ}$ é a agulha na situação extrema em que se verifica o corte do segmento $\overline{AB}$

A probabilidade de que a agulha corte uma das paralelas depende da posição de seu ponto médio e da direção da agulha.

A probabilidade de que o ponto médio M pertença ao intervalo $(x, x + dx)$ será, uma vez que $EI = a$. $\dfrac{dx}{a}$

Fixado o ponto M, é necessário que o ângulo agudo $\widehat{EMO}$ seja não superior ao ângulo agudo $\widehat{EMO'}$ para que a agulha corte a paralela $\overline{AB}$ Observe-se que: $\widehat{EMO'} = arc\ cos\ \dfrac{x}{1}$

A probabilidade de que o ângulo agudo $\widehat{EMO}$ não supere o ângulo agudo $\widehat{EMO'}$ será o quociente entre arc cos $\dfrac{x}{1}$ (casos favoráveis) e $\dfrac{\pi}{2}$ (casos possíveis, uma vez que o ângulo é agudo) : $\dfrac{2}{\pi}$ arc cos $\dfrac{x}{1}$

Portanto, a probabilidade de que a agulha corte o segmento $\overline{AB}$, será, pelo teorema das probabilidades compostas:

$$\frac{2}{\pi} \cdot \text{arc cos} \frac{x}{1} \cdot \frac{dx}{a}$$

E, como $x \in [0, 1]$, quando a agulha corta o segmento, tem-se, simbolizando por P a probabilidade pedida:

$$P = \int_0^1 \frac{2}{\pi} \text{ arc cos} \frac{x}{1} \cdot \frac{dx}{a}$$

Ou seja

$$P = \frac{2}{\pi a} \int_0^1 \text{arc cos} \frac{x}{1}\, dx = \frac{2}{\pi a} = I$$

Mas:

$$I = \int_0^1 \text{arc cos} \frac{x}{1}\, dx \left[x \text{ arc cos} \frac{x}{1} \right]_0^1 +$$

$$+ \int_0^1 \frac{x}{1} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{1^2}}}\, dx =$$

$$= \left[x \text{ arc cos} \frac{x}{1} \right]_0^1 - 1 \int_0^1 -$$

$$- \frac{x}{1^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{1^2}}}\, dx =$$

$$= -1 \left[\sqrt{1 - \frac{x^2}{1^2}} \right]_0^1 = -1\,(-1) = 1$$

Então

$$P = \frac{2l}{\pi a} \qquad (I)$$

Suponha-se, agora, que se realize um certo número de vêzes a experiência aleatória que consiste em deixar cair a agulha verticalmente, para que não haja uma direção deliberada, sôbre a fôlha de papel onde estão traçados os segmentos de reta eqüidistantes e paralelas. Seja o evento E: agulha corta uma das paralelas. A freqüência relativa dêsse evento é a razão entre o número de vêzes em que a agulha cortou uma das paralelas nas realizações consideradas e o número de vêzes que a experiência foi realizada. À medida que o número de realizações da experiência aumenta, a freqüência relativa de E tende a oscilar cada vez menos em tôrno da probabilidade dêsse evento. Portanto, substituindo-se, em (I), P pelo valor encontrado para a freqüência relativa pode-se *estimar*, ou seja, obter um valor aproximado de π através da razão:

$$\pi = \frac{2l}{Pa}$$

A *estimativa* (valor obtido para π) será tão mais precisa quanto maior o n.º de realizações da experiência

CAPÍTULO 6

CARACTERÍSTICAS DAS DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADES

6 1 — *Variáveis aleatórias independentes*

Seja (X, Y) uma variável bidimensional.

Em relação às marginais X e Y, consideram-se os eventos definidos pelas relações:

$$\begin{matrix} a_1 < X \leq b_1 \\ a_2 < Y \leq b_2 \end{matrix} \left\{ a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2 \in R^1 \right\}$$

Se, para todos os valôres de a_1, a_2, b_1 e b_2 êsses eventos são independentes, diz-se que as variáveis aleatórias X e Y são *independentes*. Pelo teorema das probabilidades compostas ter-se-á

$$P\left\{(a_1 < X \leq b_1) \cap (a_2 < Y \leq b_2)\right\} =$$
$$= P\ (a_1 < X \leq b_1)\ P\ (a_2 < Y \leq b_2)$$

e, em particular:

$$P\left\{(X \leq x) \cap (Y \leq y)\right\} =$$
$$= P\left\{(-\infty < X \leq x) \cap (-\infty < Y \leq y)\right\} =$$
$$= P\ (X \leq x)\ P\ (Y \leq y)$$

ou seja

$$F\ (x,\ y) = F_1\ (x)\ F_2\ (y) \qquad (I)$$

onde $F(x,y)$ é a função de distribuição da variável aleatória bidimensional (X, Y) e $F_1(x)$ $F_2(y)$ são as funções de distribuição das marginais X e Y

Para as distribuições do tipo discreto, é imediato que

$$P_{ij} = P_{i\bullet}\ p_{\bullet j} \qquad (II)$$

e para as distribuições do tipo contínuo, ter-se-á, por derivação parcial de (I):

$$\frac{\partial^2 F\ (x,\ y)}{\partial x\ \partial y} = F'_1\ (x)\ F'_2\ (y) \Longrightarrow f\ (x,\ y) =$$
$$= f_1\ (x)\ f_2\ (y) \qquad (III)$$

onde:

P_{ij} = função de probabilidade de (X, Y)
P_i = " " " " X
$P_{\bullet j}$ = " " " " Y
$f\ (x, y)$ = função de freqüência de (X, Y)
$f_1\ (x)$ = " " " " X
$f_2\ (y)$ = " " " " Y

Pode-se demonstrar, que, recìprocamente, quando uma das relações I, II, III se verifica, para todos os valôres de x e de y (ou i e j), as variáveis aleatórias X e Y são independentes.

Pode-se afirmar, então, que:

Uma condição necessária e suficiente para que duas variáveis aleatórias X e Y sejam independentes é que, a sua função de distribuição conjunta $F(x,y)$, admita a decomposição $F(x,y) = F_1(x)\ F_2(y)$, para quaisquer reais x e y.

Quando a variável (X, Y) é do tipo discreto, ter-se-á a seguinte decomposição: $P_{ij} = P_{i\bullet}\ P_{\bullet j}$, sejam quais forem os valôres dos índices i e j e quando ela é do tipo contínuo, verificar-se-á $f(x,y) = f_1(x)\ f_2(y)$, para quaisquer reais x e y, se as variáveis marginais forem independentes

EXERCÍCIO: Verifique se as variáveis marginais das variáveis aleatórias bidimensionais que possuem as distribuições:

i) $(X,\ Y)$: $\left\{(x_i,\ y_i)\right\} = \left\{(0,0)\ ;\ (0,1)\ ;\ (1,0)\ ,\ ;\ (1,1)\right\}$

$$P\ :\ \left\{P_{ij}\right\} = \left\{1/6\ ;\ 1/3\ ;\ 1/3\ ;\ 1/6\right\}$$

ii) $(X,\ Y)$

$$f\ (x,\ y) = \frac{1}{(b_1 - a_1)\ (b_2 - a_2)} \quad se \quad \begin{cases} a_1 < x < b_1 \\ a_2 < y < b_2 \end{cases}$$

$= 0$ para quaisquer outros,

são independentes.

SOLUÇÃO: i) Como se tem:

$$I) \begin{cases} P\left\{(X,Y) = (0,0)\right\} = \frac{1}{6} \\ P\ (X=0)\ P\ (Y=0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$II) \begin{cases} P\left\{(X,Y) = (0,1)\right\} = \frac{1}{3} \\ P\ (X=0)\ P\ (Y=1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$III) \begin{cases} P\left\{(X,Y) = (1,0)\right\} = \frac{1}{3} \\ P\ (X=1)\ \ P(Y=0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$IV) \begin{cases} P\left\{(X,\ Y) = (1,\ 1)\right\} = \frac{1}{6} \\ P\ (X=1)\ P\ (Y=1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

conclui-se que X e Y são *dependentes*, pois bastaria a verificação de uma qualquer das desigualdades indicadas por I, II, III ou IV $\left(\frac{1}{6} \neq \frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{3} \neq \frac{1}{4}\right)$ para que a independência não se verificasse.

ii) Nesse caso se verifica: $f(x,y) = f_1(x)\ f_2(y)$ porque:

$$\frac{1}{(b_1 - a_1)\ (b_2 - a_2)} = \frac{1}{(b_1 - a_1)} \cdot \frac{1}{(b_2 - a_2)}$$

$$se \begin{cases} a_1 < x < b_1 \\ a_2 < y < b_2 \end{cases}$$

———x— —

6 2 — *ESPERANÇA MATEMÁTICA OU ALEATÓRIA UNIDIMENSIONAL MÉDIA DE UMA VARIÁVEL*

Seja X uma variável aleatória real unidimensional e considere-se uma função $g\ (X)$ dessa variável.

Suponha-se, inicialmente, que a variável aleatória X é do tipo discreto e que assume os valôres de um conjunto finito de reais $\{x_1, x_2\ .\ ,\ x_n\}$, respectivamente, com as probabilidades $P_1\ p_2,\quad ,\ p_n$ sendo $p_i = P\ (X = x_i)$ $\{i = 1, 2,\quad , n\}$. Neste caso, a *média ou esperança matemática* (ou, ainda, *expectância*) da função $g(X)$, que é indicada pela notação $E\ \{g(X)\}$, é definida pela soma:

$$E\ \{g\ (X)\} = \sum_{i\ =\ 1}^{n} g\ (x_i)\ p_i$$

já que quando $X = x_i$ se tem $g\ (X) = g\ (x_i)$ e, portanto:

$$P_i = P\ (X = x_i) = P\ \{g\ (X) = g\ (x_i)\}$$

Quando a variável aleatória X, também do tipo discreto, assume os valôres de uma sucessão $x_i = x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$, respectivamente, com as probabilidades

$$\{p_i\} = \{p_1,\ p_2,\quad ,\ p_i\quad ,\},$$

a média de g (X) será definida por:

$$E\ \{g\ (X)\} = \sum_{i=1}^{\infty} g\ (x_i)\ p_i$$

Essa média existirá se a série do segundo membro fôr uma série absolutamente convergente

Se a variável X fôr do tipo contínuo, com função de freqüência $f(x)$, a média de $g(X)$ será definida pela integral:

$$E\ \{g\ (X)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g\ (x)\ f\ (x)\ dx$$

desde que a integral do segundo membro seja absolutamente convergente.

Particularizando-se $g(X) = X$, as expressões da esperança matemática já vistas se transformam nas seguintes, que fornecem a média da variável aleatória, simbolizada, também, por m.

i) se X é do tipo discreto

$$E\ \{X\} = m = \sum_{i=1}^{n} x_i\ p_i$$

(se o domínio de X é um conjunto finito de pontos)

$$E\ \{X\} = m = \sum_{i=1}^{\infty} x_i\ p_i$$

(se o domínio de X é um conjunto numerável de pontos)

ii) se X é do tipo contínuo

$$E\ \{X\} = m = \int_{-\infty}^{+\infty} x\ f\ (x)\ dx$$

EXERCÍCIO: Determine a esperança matemática das variáveis aleatórias:

i) X, que representa o resultado eventual da experiência aleatória que consiste no arremêsso de um dado "não tendencioso" sôbre uma superfície qualquer, com o objetivo de verificar o n.º de pontos que ocorre na face voltada para cima.

ii) X, que assume os valôres 0, 1, 2, $, j,\quad$, respectivamente, com as probabilidades:

$$e^{-m}, e^{-m}m, e^{-m}\frac{m^2}{2!}, e^{-m}\frac{m^3}{3!}, \quad , e^{-m}\frac{m^j}{j!},$$

iii) X, do tipo contínuo, com função de freqüência

$$f\ (x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{x^2}{2}} \quad se\ -\infty < x < +\infty$$

SOLUÇÃO: i) A média da variável aleatória X será

$$E\ \{X\} = \sum_{i=1}^{n} x_i\ p_i = \sum_{i=1}^{6} x_i\ \frac{1}{6} = \frac{1}{6}(1 +$$

$$+2 +3 +4 +5 +6) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

ii) Nesse caso, ter-se-á

$$E\{X\} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i\, p_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i\, p_i =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} j\, e^{-m}\, \frac{m^j}{j!} = e^{-m} \sum_{i=0}^{\infty} j\, \frac{m^j}{j!} =$$

$$= e^{-m} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{m^j}{(j-1)!}$$ (já que, para j = 0, a parcela é nula)

$$E\{X\} = e^{-m}\,(m + m^2 + \frac{m^3}{2!} + \quad +$$

$$+ \frac{m^j}{(j-1)!} + \quad) = e^{-m}\, m\,(1 + m + \frac{m^2}{2!} +$$

$$+ \quad + \frac{m^j}{j!} + \quad)\, E\{X\} = e^{-m} m\, e^m =$$

$$= e^0\, m = 1m \rightarrow E\{X\} = m$$

Observe-se, assim, que o parâmetro m que aparece na expressão analítica da função de probabilidade é a média da distribuição de probabilidade. Essa distribuição é a distribuição de Poisson.

iii) Para essa variável aleatória a média será

$$E\{X\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, 0 = 0$$

A variável aleatória X tem média nula É nula, portanto, a média de sua distribuição de probabilidade, que é denominada *distribuição normal* padrão.

OBSERVAÇÃO: A função

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

é uma função par definida para $-\infty < x < +\infty$, tendo para assíntota o eixo dos x

Demonstra-se, no Cálculo Integral, que.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \sqrt{2\pi}$$

6 3 — *PROPRIEDADE DA MÉDIA*

i) Se X é uma variável aleatória e a e b são dois números reais, então, a média da variável aleatória

$Y = aX + b$ é: $E\{Y\} = a\, E\{X\} + b$

A demonstração será feita, apenas, para o caso em que X é uma variável aleatória do tipo discreto, já que ela é análoga para uma variável aleatória do tipo contínuo.

$$E\{Y\} = E\{a\, X + b\} = \sum_i (a\, xi + b)\, p_i =$$

$$= a \sum_i x_i\, p_i + b \sum_i p_i = a\, E\{X\} + b$$ já que

$$\begin{cases} \sum_i x_i\, p_i = E\{X\} \\ \sum_i p_i = 1 \end{cases}$$

ii) A esperança matemática da soma de duas variáveis aleatórias é igual a soma das esperanças matemáticas de cada variável:

$$E\{X + Y\} = E\{X\} + E\{Y\}$$

Supondo-se que X e Y são variáveis aleatórias do tipo discreto, ter-se-á:

$$E\{X + Y\} = \sum_i \sum_j (x_i\, y_i)\, P_{ij} = \sum_i \sum_j (x_i\, p_{ij} +$$

$$+ Y_j\, p_{ij})$$

já que quando a variável aleatória bidimensional (X, Y) se identifica ao par (x_i, y_j), com probabilidade p_{ij}, tem-se a soma de $X + Y$ identificando-se ao real $x_i + y_j$.

$$E\{X + Y\} = \sum_i x_i \sum_j p_{ij} + \sum y_j \sum_i p_{ij}$$

observando-se que:

$$\begin{cases} \sum_j p_{ij} = p_i \\ \sum_i p_{ij} = p_j \end{cases}$$

onde $\begin{cases} p_{ij} = P\{(X = x_i) \cap (Y = y_j)\} \\ p_i = P(X = x_i) \\ p_j = P(Y = y_j) \end{cases}$

vem

$$E\{X + Y\} + \sum_i x_i\, p_i + \sum_j y_j\, p_j = E\{X\} +$$

$$+ E\{Y\}$$

Essa propriedade estende-se, fàcilmente, a um número finito qualquer de variáveis aleatórias, escrevendo-se:

$$E\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i\right\} = \sum_{i=1}^{n} E\{X_i\}$$

iii) "A esperança matemática do produto de duas variáveis aleatórias independentes é igual ao produto das esperanças matemáticas de cada uma delas"

Sejam X e Y variáveis aleatórias do tipo discreto. A esperança matemática do produto dessas variáveis aleatórias será expressa por

$$E\{XY\} = \sum_i \sum_j (x_i\, y_j)\, p_{ij} = \sum_i x_i \sum_j y_j\, p_{ij}$$

Uma vez que $(X, Y) = (x_i\ y_j) \rightarrow XY = x_i y_j$, com probabilidade P_{ij}.

Se as variáveis aleatórias X e Y são independentes, tem-se por 6 1.

$$p_{ij} = p_i\ p_j$$

Nesse caso

$$E\{XY\} = \sum_i \sum_j x_i\, p_i\ p_j = \sum_i x_i\, p_i \sum_j y_i\, p_j =$$

$$= E\{X\}\, E\{Y\}$$

Pelo método de indução completa, estende-se essa propriedade a um n° finito de variáveis aleatórias, mediante a relação:

$$E\left\{\prod_{i=1}^{n} X_i\right\} = \prod_{i=1}^{n} E\{X_i\}$$

6 4 — *MOMENTOS DE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA*

Seja X uma variável aleatória real e c um número real qualquer Considere-se um inteiro não negativo s.

Denomina-se *momento de ordem S* da variável aleatória X, com origem em c, à esperança matemática de $(X - c)^s$, isto é

$$E\{X - C\}^s \qquad (I)$$

O momento de ordem s de uma variável aleatória real é, assim, a média das potências de ordem s dos afastamentos das determinações da variável aleatória em relação a uma origem c.

Na Estatística, são importantes os seguintes momentos

i) *momento ordinário de ordem S*

Faça-se em (I), $c = O$ Ter-se-á o momento ordinário de ordem s da variável aleatória X $\quad E\{X^s\} = \alpha_s$

ii) *momento central de ordem S*

Se, em (I), $c = E\{X\} = m$, define-se o momento central de ordem s da variável aleatória X:

$$E\left\{X - E\{X\}\right\}^s = E\{X - m\}^s = \mu_s$$

Em particular, tem-se:

$$\alpha_o = E\{X\}_1^o = E\{1\} = 1$$

$$\alpha_1 = E\{X\} = E\{X\} = m$$

$$\mu_o = E\{X - m\}^o = E\{1\} = 1$$

$$\mu_1 = E\{X - m\} = E\{X\} - m = m - m = 0$$

Os momentos centrais de ordem 2, 3 e 4 são utilizados como *características* das distribuições de probabilidade, enquanto que momentos ordinários de mesma ordem são utilizados como *momentos auxiliares* no cálculo dos momentos centrais como se verá no tópico 6 6 O único momento ordinário empregado como característica de uma distribuição é o de primeira ordem, que representa a média da distribuição

O momento central de segunda ordem, μ_2, é denominado *variância* da variável aleatória ou da sua distribuição É simbolizalo, também, por σ^2 A raiz quadrada positiva da variência é denominada *desvio-padrão,* cujo símbolo é σ.

Observe-se que:

$$\mu_2 = \sigma^2 = E\{X - m\}^2 \rightarrow \sigma = +\sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\mu_2}$$

A variância é, assim, uma média dos quadrados dos afastamentos das determinações da variável aleatória em relação a sua média É uma medida da *dispersão* dos valôres em tôrno da média, uma medida da dispersão da distribuição de probabilidade da variável aleatória. A potência dois, utilizada para que os afastamentos independam de sentido, faz com que a variância seja expressa em uma unidade de medida que é igual ao quadrado da unidade de medida em que vêm expressas os valôres que a variável aleatória pode assumir. Por êste motivo, utiliza-se o *desvio-padrão* como uma medida característica da dispersão da distribuição

Diz-se que uma distribuição tem pequena dispersão quando os valôres da variável aleatória a que ela se refere são muito próximos da média, ou seja, quando êles tendem a se concentrar em tôrno da média À medida que êsses valôres se afastam da média, o desvio-padrão da distribuição cresce

Só poderá ter dispersão nula e, conseqüentemente, $\sigma = O$, a variável aleatória cujo domínio é constituído por um único elemento Essa variável aleatória se identificará a êsse elemento com probabilidade *UM* e será uma *variável*

aleatória quase certamente igual a uma constante

O momento central de terceira ordem:

$$\mu_3 = E\left\{X - m\right\}^3$$

permite medir a *assimetria* de uma distribuição de probabilidade. Se uma distribuição é simétrica, os afastamentos à direita da média coincidem com os afastamentos à esquerda. Logo: $\mu_3 = 0$. Se a distribuição é assimétrica $\mu_3 \neq 0$. Se os afastamentos positivos da média predominam em relação aos negativos, isto é, se a distribuição é assimétrica à direita $\mu_3 > 0$ e, no caso contrário, quando a distribuição é assimétrica à esquerda $\mu_3 < 0$.

Sendo o momento central de terceira ordem expresso no cubo da unidade de medida dos valôres eventuais da variável aleatória, convém definir uma grandeza para caracterizar a assimetria que independa da unidade mencionada, o que se obtém definindo um *coeficiente de assimetria*, γ_1, pela relação

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

O momento central de 4ª ordem:

$$\mu_4 = E\left\{X - m\right\}^4$$

permite medir o *achatamento* de uma distribuição de probabilidade, característica também denominada *curtose*, e que será melhor compreendida após o estudo da *distribuição normal*, já que o maior ou menor achatamento de uma distribuição é dado em relação ao achatamento dessa distribuição, tomada como padrão

O *coeficiente de achatamento* γ_2 é definido pela razão

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

Como na distribuição normal $\gamma_2 = 3$, define-se o *coeficiente de excesso* do seguinte modo:

$$\gamma_2^* = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

Êsse coeficiente permite classificar as distribuições de probabilidade em três tipos·

Leptocúrticas, quando $\gamma_2^* < 0$
Mesocúrticas, quando $\gamma_2^* = 0$
Platicúrticas, quando $\gamma_2^* > 0$

OBS. Apenas como primeira informação ao acadêmico define-se a *distribuição normal*, como sendo a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória X do tipo contínuo com função de freqüência

$$\left\{ f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \right.$$

se $-\infty < x < +\infty$ onde m é a média da distribuição e σ é o seu desvio-padrão. A distribuição normal depende, assim, de dois parâmetros m e σ. Por isso, se X é uma variável aleatória com distribuição aleatória normal, indica-se êsse fato, assim: X é $N\ (m, \sigma)$. No caso particular, em que a média é nula e o desvio-padrão é igual a unidade, isto é, se X é $N\ (0,1)$, tem-se a distribuição normal padrão, a distribuição de uma variável aleatória do tipo contínuo com função de freqüência:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad se\ -\infty < x < +\infty$$

Essa distribuição é a que se encontra *tabelada*

6 5 — *VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CENTRADA E REDUZIDA*

Seja X uma variável aleatória, m a sua média e σ o seu desvio-padrão.

Denomina-se *variável aleatória centrada* de uma variável aleatória X àquela que é definida pela relação:

$$X' = X - m$$

Para essa variável aleatória tem-se:

$$E\left\{X'\right\} = E\left\{X - m\right\} = E\left\{X\right\} - m = m - m = 0$$

$$\mu_2\left\{X'\right\} = E\left\{X' - E\left\{X'\right\}\right\}^2 = E\left\{X'\right\}^2 =$$

$$= E\left\{X - m\right\}^2 = \mu_2\left\{X\right\} = \sigma^2$$

Assim, uma variável aleatória centrada X' tem média nula e sua variância é igual à variância de variável aleatória X.

Denomina-se *variável aleatória reduzida* de uma variável aleatória X àquela que é definida pela relação:

$$T = \frac{X'}{\sigma} = \frac{X - m}{\sigma}$$

Para essa variável aleatória tem-se:

$$E\left\{T\right\} = E\left\{\frac{X'}{\sigma}\right\} = \frac{E\left\{X'\right\}}{\sigma} = 0$$

$$\mu_2\left\{T\right\} = E\left\{T - E\left\{T\right\}\right\}^2 = E\left\{T\right\}^2 =$$

$$= E\left\{\frac{X-m}{\sigma}\right\}^2 = \frac{E\left\{X-m\right\}^2}{\sigma_2} = \frac{\sigma 2}{\sigma 2} = 1$$

Uma variável aleatória reduzida tem média nula e variância unitária.

6.6 — *RELAÇÕES ENTRE OS MOMENTOS CENTRAIS E ORDINÁRIOS*

O momento central de ordem S de uma variável aleatória X é definido por

$$\mu_s = E\left\{X - m\right\}^s \qquad (S \geq 0)$$

Pela fórmula do binômico de Newton, tem-se

$$(X-m)^s = \sum_{i=0}^{s} (-1)^i \binom{S}{i} X^{s-i}\, m^i$$

Logo:

$$\mu_s = E\left\{X - m\right\}^s =$$

$$= \sum_{i=0}^{s} (-1)^i \binom{S}{i} m^i\, E\left\{X\right\}^{s-i}$$

tendo em vista as propriedades da esperança matemática

Como: $\begin{cases} m = E\left\{X\right\} = \alpha_1 \\ \alpha_{s-i} = E\left\{X\right\}^{s-i} \end{cases}$

tem-se:

$$\mu_s = \sum_{i=0}^{s} (-1)^i \binom{S}{i} \alpha_{s-i}\, \alpha_1^i$$

Fazendo-se, sucessivamente, $S = 0$, 1, 2, 3, 4, obtém-se:

$$\mu_0 = 1$$

$$\mu_1 = \alpha_1 - \alpha_1 = 0$$

$$\mu_2 = \alpha_2 - 2\alpha_1^2 + \alpha_1^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$$

$$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 3\alpha_1^3 - \alpha_1^3 = \alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1^3$$

$$\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_3\alpha_1 + 6\alpha_2\alpha_1^2 - 4\alpha_1\alpha_1^3 + \alpha_1^4 =$$

$$= \alpha_4 - 4\alpha_3\alpha_1 + 6\alpha_2\alpha_1^2 - 3\alpha_1^4$$

EXERCÍCIO: Uma variável aleatória X, do tipo contínuo, tem para função de freqüência

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ f(x) = e^{-x} & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Determine os momentos ordinários e centrais e os coeficientes de assimetria e de excesso da distribuição de probabilidade dessa variável.

SOLUÇÃO: Verifique-se, inicialmente, se $f(x)$ é, efetivamente, uma função de freqüência:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, d_x = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, d_x = -\int_0^{+\infty} e^{-x}\,(-d_x) =$$

$$= -\left[e^{-x}\right]_0^{-\infty} = -\left(e^{-\infty} - e^{-0}\right) =$$

$$= -\left(e^{-\infty} - 1\right) = -\frac{1}{e^{\infty}} + 1 = 1$$

Os momentos ordinários serão, assim, obtidos:

$$\alpha_s = \int_{-\infty}^{+\infty} x^s\, f(x)\, d_x = E\left\{X\right\}^s$$

$$\alpha_s = \int_D^{+\infty} x^s\, e^{-x}\, d_x = -\int_0^{+\infty} x^s\, e^{-x}\,(-d_x) =$$

$$= \left[x^s\, e^{-x}\right]_0^{+} + \int_0^{+\infty} s\, x^{s-1}\, e^{-x}\, d_x =$$

$$= -\left[\frac{x^s}{e^x}\right]_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} x^{s-1}\, e^{-x}\, d_x =$$

$$= S\,\alpha_{s-1} \longrightarrow \alpha_s = S\,\alpha_{s-1}$$

Então:

$$\alpha_0 = 1$$
$$\alpha_1 = 1\,1 = 1$$
$$\alpha_2 = 2\,1 = 2$$
$$\alpha_3 = 3\,2 = 6$$
$$\alpha_4 = 4.6 = 24$$

Logo:

$$\mu_0 = 1$$

$$\mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = 2 - 1 = 1 = \sigma^2 \longrightarrow \sigma = 1$$

$$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1^3 = 6 - 3\,2\,1 + 2.1 = 2$$

$$\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_3\alpha_1 + 6\alpha_2\alpha_1^2 - 3\alpha_1^4 = 24 - 4\,6\,1 +$$

$$+ 6\,2\,1 - 3\,1 = 9$$

Portanto.

$$\gamma_1 = \frac{\mu^3}{\sigma^3} = \frac{2}{1} = 2 \text{ (assimetria à direita)}$$

$$\gamma_2^* = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{9}{1} - 3 = 6 \text{ (platicúrtica)}$$

OBS Uma solução mais imediata para a integral que define α_s seria a seguinte

$$\alpha_s = \int_o^{+\infty} x^s\, e^{-x}\, dx = \Gamma(s+1) = S! \text{ (função gama)}$$

6 7 — *COVARIÂNCIA ENTRE DUAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS*

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias reais unidimensionais.

A covariância entre essas duas variáveis é definida do seguinte modo·

$$\text{cov}\,(X, Y) = \lambda =$$

$$= E\left\{\left[X - E\left\{X\right\}\right]\left[Y - E\left\{Y\right\}\right]\right\} =$$

$$= E\left\{(X - m_1)\,(Y - m_2)\right\} \qquad (I)$$

onde:

$$m_1 = E\{X\}$$
$$m_2 = E\{Y\}$$

Efetuando-se o produto indicado (I) obtém-se:

$$\lambda = E\{XY - m_2 X - m_1 Y + m_1 m_2\} =$$

$$= E\{XY\} - m_2 E\{X\} - m_1 E\{Y\} + m_1 m_2$$

pelas propriedades da média

Então

$$\lambda = E\{XY\} - m_1 m_2 = E\{XY\} -$$

$$- E\{X\} E\{Y\} \qquad (II)$$

Se as variáveis aleatórias X e Y são independentes, (II) se transforma em:

$$\lambda = E\{X\} E\{Y\} - E\{X\} E\{Y\} = 0$$

já que, nessas condições,

$$E\{XY\} = E\{X\} E\{Y\}$$

Verifica-se, assim, que a covariância pode ser interpretada como uma medida do grau de dependência entre duas variáveis aleatórias Essa medida apresentaria o inconveniente da "unidade de medida" Êsse problema será contornado com a definição de coeficiente de correlação, que será vista no tópico 6 9

Deve-se observar que se duas variáveis X e Y são independentes, sua covariância é nula, mas *a recíproca não é verdadeira*, já que existem variáveis com covariância nula (ditas "não correlacionadas") mas que não são independentes

6 8 — *VARIÂNCIA DA SOMA DE DUAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS*

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias reais unidimensionais

Considere-se a variável aleatória S assim definida:

$$S = X + Y$$

A esperança matemática de S será expressa por uma combinação limar das esperanças matemáticas de X e de Y:

$$E\{X\} = E\{X\} + E\{Y\}$$

A variância de S é o segundo momento central dessa variável aleatória. Logo:

$$\mu_2\{S\} = E\left\{S - E\{S\}\right\}^2 =$$

$$= E\left\{X + Y - E\{X\} - E\{Y\}\right\}^2 \qquad (I)$$

Faça-se:

$$E\{X\} = m_1$$

$$E\{Y\} = m_2$$

Pode-se, agora, resolver (I) do seguinte modo:

$$\mu_2\{S\} = E\{(X - m_1) + (Y - m_2)\}^2$$

Desenvolvendo-se êsse quadrado, obtém-se:

$$\mu_2\{S\} = E\left\{(X - m_1)^2 + (Y - m_2)^2 + \right.$$

$$\left. + 2\,(X - m_1)\,(Y - m_2)\right\}$$

Pelas propriedades da esperança matemática, ter-se-á:

$$\mu_2\{S\} = E\{X - m_1\}^2 + E\{Y - m_2\}^2 +$$

$$+ 2E\{(X - m_1)\,(Y - m_2)\}$$

Observando-se que:

$$\begin{cases} E\{X - m_1\}^2 = \mu_2\{X\} = \sigma_x^2 \\ E\{Y - m_2\}^2 = \mu_2\{Y\} = \sigma_y^2 \\ E\{(X - m_1)\,(Y - m_2)\} = \operatorname{cov}(X, Y) = \lambda \end{cases}$$

Ter-se-á:

$$\mu_2\{S\} = \sigma_s^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2\lambda$$

A variância da soma de duas variáveis aleatórias é igual à soma das variâncias dessas variáveis mais o dôbro da covariância entre elas.

No caso particular em que X e Y são independentes, ter-se-á.

$$\sigma_s^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \qquad \text{já que } \lambda = 0$$

6 9 — *COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO*

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias reais unidimensionais e λ a covariância entre elas.

Define-se como *coeficiente de correlação* entre essas variáveis a razão:

$$\rho\ (X,Y) = \frac{\lambda}{\sigma_x\ \sigma_y} = \frac{\text{cov}\ (X,Y)}{\sigma_x\ \sigma_y} =$$

$$= \frac{E\ (X - m_1)\ (Y - m_2)}{\sigma_x\ \sigma_y} \qquad (I)$$

onde:

$$\begin{cases} m_1 = E\ \{X\} \\ m_2 = E\ \{Y\} \\ \sigma_x = + \sqrt{\sigma_x^2} \\ \sigma_y = + \sqrt{\sigma_y^2} \end{cases}$$

Êsse coeficiente assume valôres no intervalo [— 1,1], o que pode ser, assim demonstrado:

Introduzindo-se uma variável real t, considere-se o quadrado:

$$\left[t\ (X - m_1) + (Y - m_2)\right]^2 \geq 0 =$$

$$= E\left[t\ (X - m_1) + (Y - m_2)\right]^2 \geq 0$$

Desenvolvendo-se o quadrado do 1.º membro da desigualdade, vem:

$$E\left[t^2\ (X-m_1)^2 + (Y-m_2)^2 + 2t\ (X-m_1)\ (Y - m_2)\right] \geq 0$$

E, pelas propriedades da esperança matemática

$$t^2\ E\ (X-m_1)^2 + E\ (Y-m_2)^2 +$$

$$+ 2t\ E\left\{(X - m_1)\ (Y - m_2)\right\} \geq 0$$

Como:

$$\begin{cases} E\ (X - m_1)^2 = \sigma_x^2 \\ E\ (Y - m_2)^2 = \sigma_y^2 \\ E\ (X - m_1)\ (Y - m_2) = \lambda = \text{cov}\ (X,Y) \end{cases}$$

Tem-se:

$$t^2\ \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2t\lambda \geq 0 \qquad (II)$$

De (I), obtém-se:

$$\lambda = \rho\ (X,Y)\ \sigma_x\ \sigma_y$$

Então, em II:

$$t^2\ \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2t\ \rho\ (X,Y)\ \sigma_x\ \sigma_y \geq 0 \qquad (III)$$

Um trinômio do 2.º grau em t, cujo discriminante deverá ser negativo ou nulo para que se verifique (III)

Portanto:

$$\Delta = 4\rho^2\ (X,Y)\ \sigma_x^2\ \sigma_y^2 - \sigma_x^2\ \sigma_y^2 \leq 0 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow 4\rho^2\ (X,Y)\ \sigma_x^2\ \sigma_y^2 \leq 4\ \sigma_x^2\ \sigma_y^2$$

Simplificando

$$\rho^2\ (X,Y) \leq 1$$

O que acarreta: $-1 \leq (X,Y) \leq 1$

c q d.

Capítulo 7

DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE FUNDAMENTAIS

7 1 — *Principais distribuições unidimensionais do tipo discreto.* Para uma variável aleatória real unidimensional do tipo discreto, X, serão estudadas, a seguir, as principais distribuições de probabilidade.

7.1 1 — *Distribuição de uma variável aleatória quase certamente igual a uma constante* Essa é a distribuição mais simples que se pode conceber

A variável aleatória X se identifica a um unico real c, com probabilidade um

$$X\ \ c\ \{c \in R^1\}$$

A expressão analítica da função de probabilidade será então:

$$P_x = 1 \quad \text{se} \quad x = c$$
$$= 0 \quad \text{se} \quad x \neq c$$

Existe um único ponto de probabilidade positiva A função de distribuição será expressa por:

$$F(x) = 0 \quad \text{se} \quad x < c$$
$$= 1 \quad \text{se} \quad x \geq c$$

Os momentos ordinários da distribuição são:

$$\begin{cases} \alpha_1 = E\ \{X\} = c \cdot 1 = c & \text{(média)} \\ \alpha_2 = E\ \{X\}^2 = c^2 \cdot 1 = c^2 \\ \alpha_3 = E\ \{X\}^3 = c^3 \cdot 1 = c^3 \\ \alpha_4 = E\ \{X\}^4 = c^4 \cdot 1 = c^4 \end{cases}$$

e, em geral:

$$\alpha_s = E\ X^s = \sum_i x_i^s\ p_i \longrightarrow \alpha_s = c^s \cdot 1 = c^s$$

A média de distribuição é: $\alpha_1 = m = c$, o que já era esperado, uma vez que no domínio de X só existe um elemento: c.

Os momentos centrais são:

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0$$

porque:

$$\mu_s = E\left\{X - m\right\}^s = \sum_i (x_i - m)^s \; p_i =$$

$$= (c - c)^s \; p_i = 0$$

Êste resultado também era esperado, porque se X se identifica a um único valor não existe dispersão, assimetria ou achatamento É de se notar que *sòmente* esta distribuição tem variância (μ_2) *nula.*

A distribuição de X é, também, denominada *distribuição de Dirac ou distribuição de um ponto.*

7.1.2 — *Distribuição de Bernoulli.* Seja X uma v a que assume os valores *0* e *1*, respectivamente, com probabilidades q e p, sendo p + q = 1.

$$\begin{cases} X: 0, 1 \\ P: q, p \end{cases} \qquad \begin{cases} q = P\ (X=0) \\ p = P\ (X=1) \end{cases} \qquad \{p + q =$$

$$= 1 \longrightarrow q = 1 - p$$

As expressões analíticas das funções de probabilidade e de distribuição serão as seguintes

$$\begin{cases} p_x = q & \text{se } x = 0 \\ \quad = p & \text{se } x = 1 \\ \quad = 0 & \text{se } x \neq 0,1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 && \text{se } x < 0 \\ &= q && \text{se } 0 \leq x < 1 \\ &= q + p = 1 && \text{se } x \geq 1 \end{aligned}$$

A partir dessa distribuição serão calculados, apenas, os momentos que servem de características das distribuições

média

$$m = \alpha_1 = E\left\{X\right\} = \sum_i x_i \; p_i = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$$

variância

$$\sigma^2 = \mu_2 = E\left\{X - m\right\}^2 = \sum_i (x_i - m)^2 \; p_i =$$

$$= (0 - p)^2 \; q + (1 - p)^2 \; p = p^2 q + q^2 p =$$

$$= pq\ (p + q) = pq$$

Momento central de 3.ª ordem

$$\mu_3 = E\left\{X - m\right\}^3 = \sum_i (x_i - m)^3 \; p_i =$$

$$= (0 - p)^3 \; q + (1 - p)^3 \; p = -\, p^3 q + q^3 p =$$

$$= pq\ (q^2 - p^2) = pq\left[(q + p)\ \ (q - p)\right] =$$

$$= pq\ (q - p)$$

Momento central de 4.ª ordem

$$\mu_4 = E\left\{X - m\right\}^4 = \sum_i (x_i - m)^4 \; p_i =$$

$$= (0 - p)^4 \; q + (1 - p)^4 \; p = p^4 \; q + q^4 p =$$

$$= pq\ (p^3 + q^3) = pq\left[(1 - q)^3 + q^3\right] =$$

$$= pq\ (1 - 3q + 3q^2 - q^3 + q^3 =$$

$$= pq\left[(1 - 3q)\ \ (1 - q)\right] = pq\ (1 - 3pq)$$

O desvio-padrão da distribuição, sendo a raiz quadrada positiva da variância será expresso por:

$$\sigma = + \sqrt{\sigma^2} = + \sqrt{pq}$$

e os coeficientes de assimetria e de excesso serão, assim, definidos

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{pq\ (q-p)}{pq\ \sqrt{pq}} = \frac{q - p}{\sqrt{pq}}$$

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{pq\ (1-3\,pq)}{p^2\ q^2} - 3 =$$

$$= \frac{1-3pq}{pq} - 3 = \frac{1-3pq-3pq}{pq} = \frac{1-6pq}{pq}$$

Esta distribuição é, também, conhecida como *distribuição de dois pontos,* sendo que alguns autores reservam a denominação de distribuição de Bernoulli para a distribuição binomial que, posteriormente, será estudada

A distribuição de dois pontos foi estabelecida por Bernoulli. Preferimos, então, manter a denominação dada, considerando a distribuição binomial como uma simples extensão da distribuição de Bernoulli

7 1 3 — *Função geratriz.* Com o objetivo de facilitar o cálculo das características das distribuições de probabilidade, passa-se às definições de funções geratrizes de probabilidade e de momentos.

7 1 3 1 — *Definição geral* Seja

$$\left\{a_i\right\} = a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ \ , \ a_i,$$

uma sucessão de números reais Considere-se a função $f(t)$, onde t é uma variável real, assim expressa.

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \; t^i = a_o + a_1 \; t + a_2 \; t^2 + \qquad +$$

$$+ a_i \; t^i +$$

Se essa função converge em algum intervalo $-T < t < T$ ela é denominada *função geratriz* de sucessão $\left\{a_i\right\}$.

Desde que $\left\{a_i\right\}$ seja limitada, isto é, se a partir de um certo índice i, se tem

$$| \; a_i \; | \leq a$$

$f(t)$ é absolutamente convergente, *pelo menos,* no intervalo $-1 < t < 1$ De fato:

$$\begin{cases} | a_i t^i | \leq a | t |^i \\ \sum_{i=0}^{\infty} a | t |^i = a \sum_{i=0}^{\infty} | t |^i \end{cases}$$

Mas $\sum_{i=0}^{\infty} | t |^i$ é a série geométrica (em módulo) que é convergente para $-1 < t < 1$ *Logo* $\sum_{i=0}^{\infty} | a_i t^i |$ é convergente, pelo menos, nesse intervalo e, conseqüentemente, $f(t)$ é absolutamente convergente, pelo menos, para $-1 < t < 1$

7 1 3 2 — *Função geratriz de probabilidade.* Quando o conjunto de pontos de probabilidade positiva de uma variável aleatória real de ordem enumerável, X, é o conjunto dos inteiros não negativos $\{0,1,2, \}$ essa v a é denominada *v a. inteira.* Uma *v.a.* inteira é, assim, uma situação particular de uma v a de ordem enumerável

Seja $P_i = P(X = x_i)$ a função de probabilidade de uma v a de ordem enumerável X, onde x_i é um ponto de probabilidade positiva em relação a essa variável

Considere-se a sucessão

$$p_0, p_1, p_2, \quad , p_i,$$

formada pelos valôres da função de probabilidade nos pontos de probabilidade positiva

$$x_0, x_1, x_2, \quad , x_i,$$

de uma v a. de ordem enumerável X.

A função geratriz de sucessão p_i é denominada *função geratriz de probabilidade da* v a X.

$$f_x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i t^i$$

Uma vez que $|p_i| \leqslant 1$, $f_x(t)$ converge, pelo menos, no intervalo $-1 < t < 1$.

Observando-se que:

$$f_x(1) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$$

e que $f_x(-1)$ é absolutamente convergente, conclui-se que $f_x(t)$ é absolutamente convergente, pelo menos, no intervalo $-1 \leqslant t \leqslant 1$

Entre a média e a variância e a função geratriz de probabilidade de uma v.a. inteira X existem as seguintes relações:

$$f_x^{(t)} = \sum_{i=0}^{\infty} p_i t^i$$

$$\frac{df_x^{(t)}}{dt} = \sum_{i=0}^{\infty} i\, p_i\, t^{i-1} = f'_{x(t)}$$

$$f'_{x(1)} = \sum_{i=0}^{\infty} i\, p_i = E\{X\} = \boxed{E\{X\} = f'_{x(t)}}$$

$$f''_{x(t)} = \frac{d^2 f_x^{(t)}}{dt} = \sum_{i=0}^{\infty} i\,(i-1)\, p_i\, t^{i-2}$$

$$f''_{x(1)} = \sum_{i=0}^{\infty} i\,(i-1)\, p_i = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 p_i - \sum_{i=0}^{\infty} i\, p_i = \alpha_2 - \alpha_1$$

$$\sigma_x^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = f''_{x(1)} + f'_{x(1)} - \left[f'_{x(1)}\right]^2$$

$$\boxed{\sigma_x^2 = f''_{x(1)} + f'_{x(1)} - \left[f'_{x(1)}\right]^2}$$

A função de probabilidade de uma v a X pode ser obtida através da função geratriz, do seguinte modo:

$$f_x^{(t)} = \sum_{i=0}^{\infty} p_i t^i \Longrightarrow f_X(0) = p_0 = 0!\, p_0$$

$$f_X^{(1)}(t) = f'^{(t)}_x = \sum_{i=0}^{\infty} i\, p_i\, t^{i-1} \Longrightarrow f_X^{(1)}(0) = p_1 = 1!\, p_1$$

$$f_X^{(2)}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} i\,(i-1)\, p_i\, t^{i-2} \Longrightarrow f_X^{(2)}(0) = 2\, p_2 = 2!\, p_2$$

$$f_X^{(3)}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} i\,(i-1)\,(i-2)\, p_i\, t^{i-3} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f_X^{(3)}(0) = 6\, p_3 = 3!\, p_3$$

$$f_X^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} i\,(i-1) \quad (i-n+1)\, p_i\, t^{i-n} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f_X^{(n)}(0) = n!\, p_n$$

ou seja:

$$P_n = \frac{1}{n!} \quad f_X^{(n)}(0)$$

7 1 3 3 — *Função geratriz de momentos.* Seja X uma v.a real do tipo discreto ou do tipo contínuo. À esperança matemática da função exponencial $g(X) = e^{tx}$ dá-se o nome de *função geratriz de momentos* da distribuição de probabilidade da v.a. X, ou simplesmente, função geratriz de momentos da v a X. Essa função é simbolizada por $\psi_x^{(t)}$ Assim:

— se X é do tipo discreto:

$$\psi_x^{(t)} = E\left\{e^{tX}\right\} = \sum_i e^{tx_i} p_i$$

$$\left\{p^i = P\ (X = x_i) = P\ (e^{tX} = e^{tx_i})\right\}$$

se X é do tipo contínuo:

$$\psi_x^{(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f\ (x)\ dx$$

A função geratriz de momentos estará definida quando existir a esperança matemática de e^{tX} Uma vez que, para um t fixado, e^{tX} é uma função positiva de x, e que $\Psi_x^{(t)}$ é finita ou não, diz-se que a v a X possui uma função geratriz de momentos se existe um número positivo T tal que $\Psi_x^{(t)}$ é finita para $|t| \leqslant T$ Nesse caso, existem todos os momentos de X e podem ser expressos através das derivadas sucessivas de $\Psi_x^{(t)}$ no ponto $t = O$, como se verá

Existem distribuições que não possuem função geratriz de momentos. Para tôda distribuição de probabilidade pode-se definir uma função, chamada *função característica* (esperança matemática de e^{itX}, onde i é a unidade imaginária), que *sempre* existe, e que pode ser usada como função geratriz de momentos no cálculo dos momentos que existam.

Se a função geratriz de momentos $\Psi_x^{(t)}$ existe para $|t| \leqslant T (T > O)$, tem-se:

$$\psi_x'^{(t)} = \frac{d\psi_x^{(t)}}{dt} = \sum_i x_i\, e^{tx_i} p_i \text{ ou } \psi_X''\ (t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{tx} f\ (x)\ dx$$

$$\psi_X''\ (t) = \frac{d^2 \psi_x^{(t)}}{dt} = \sum_i x_i^2\, e^{tx_i} p_i \text{ ou } \psi_X''\ (t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, e^{tx} f\ (x)\ dx$$

$$\psi_x'''\ (t) = \frac{d^3 \psi_x^{(t)}}{dt} = \sum_i x_i^3\, e^{tx_i} p_i \text{ ou } \psi_X'''\ (t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^3\, e^{tx} f\ (x)\ dx$$

$$\psi_X^{IV}\ (t) = \frac{d^4 \psi_x^{(t)}}{dt} = \sum_i x_i^4 e^{tx_i} p_i \text{ ou } \psi_X^{VI}\ (t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^4\ e^{tx} f\ (x)\ dx$$

E, fazendo-se $t = o$:

$$\psi_X'\ (0) = E\left\{X\right\} = \alpha_1 = m$$

$$\psi_X''\ (0) = E\left\{X\right\}^2 = \alpha_2$$

$$\psi_X'''\ (0) = E\left\{X\right\}^3 = \alpha_3$$

$$\psi_X^{IV}\ (0) = E\left\{X\right\}^4 = \alpha_4$$

Observando-se que:

$$e^{tx} = 1 + tx + \frac{t^2}{2!} x^2 + \quad + \frac{t^i}{i!} x^i +$$

pode-se desenvolver em série a função $\Psi_x^{(t)}$:

$$\psi_X\ (t) = 1 + t\, E\left\{X\right\} + \frac{t^2}{2!} E\left\{X\right\}^2 + \quad +$$

$$+ \frac{t^i}{i!} E\left\{X\right\}^i +$$

onde o coeficiente de $\frac{t^i}{i!}$ é o momento ordinário de ordem i da v.a X. Se $\Psi_x^{(t)}$ é finita para $|t| \leqslant T (T > O)$, então, o desenvolvimento é válido para $|t| < T$

De fato:

$$\psi_X\ (t) = \sum_i e^{tx_i} p^i = \sum_i \left(1 + tx_i + \frac{t^2}{2!} x_i^2 + \right.$$

$$\left. + \quad \right) p_i = \sum_i p_i + t \sum_i x_i\, p_i +$$

$$+ \frac{t^2}{2!} \sum_i x_i^2\, p_i + \quad = 1 + t \left\{ E\left\{X\right\} + \right.$$

$$+ \frac{t^2}{2!} E\left\{X\right\}^2 + \quad + \frac{t^i}{i!} E\left\{X\right\}^i +$$

procedendo-se de modo análogo quando a v a é do tipo contínuo

7.1 4 — *Distribuição binomial.* Considere-se um evento E que pode ocorrer ou não em cada uma das n repetições independentes de uma experiência aleatória real ε. A probabilidade de ocorrência de E, em cada prova, é p, enquanto que a probabilidade da não ocorrência de E, ou seja, a probabilidade do evento complementar $\overline{E}$, é q, sendo $p + q = 1$

Seja X, a v a que representa o número eventual de "sucessos" (ocorrências de E) nas n provas. Represente-se por i a determinação genérica dessa variável, onde i é um inteiro no intervalo [0, n]. A probabilidade de que ocorram i sucessos nas n provas, fixando-se a ordem de ocorrência, é, como se viu no

item 3 — Seqüências de provas — $p^i q^{n-i}$, pelo teorema das probabilidades compostas.

Como os i (i = 0, 1, .., n) sucessos podem ocorrer em qualquer ordem, então, ter-se-á, pelo teorema das probabilidades totais

$$p_i = P(X = i) = \frac{n!}{i!\ (n-i)!}\ p^i\ q^{n-i} =$$

$$= \binom{n}{i}\ p^i\ q^{n-i}$$

uma vez que $\frac{n!}{i!\ (n-i)!}$ representa o número de permutações com repetição de n *elementos* dos quais i são iguais a E e $n-i$ são iguais a $\overline{E}$.

As expressões analíticas das funções de probabilidade e de distribuição serão as seguintes:

$$p_i = \binom{n}{i}\ p^i\ q^{n-i} \quad \text{se } i = 0, 1, 2, \quad n$$

$p_i = 0$ para qualquer outro real

$$F(x) = \sum_{i=0}^{[x]} p^i = \sum_{i=0}^{[x]} \binom{n}{i}\ p^i\ q^{n-i} \text{ se } x \in [0, n]$$

$$= 0 \qquad \text{se } x < 0$$

$$= 1 \qquad \text{se } x > n$$

A função geratriz de momentos dessa distribuição será, assim, expressa:

$$\psi_X(t) = E\left\{e^{tx}\right\} = \sum_{i=0}^{n} e^{ti}\ p_i = \sum_{i=0}^{n} e^{ti} \binom{n}{i}$$

$$p^i\ q^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\ (pe^t)^i\ q^{n-i} = (pe^t + q)^n$$

Em conseqüência:

$$\psi'_X(t) = n\ (pe^t + q)^{n-1}\ pe^t = np\ (pe^t + q)^{n-1}\ e^t$$

$$\psi''_X(t) = np\ [(n-1)\ (pe^t + q)^{n-2}\ pe^t\ e^t +$$

$$+\ (pe^t + q)^{n-1}\ e^t]$$

$$\psi'_X(0) = \alpha_1 = m = np$$

$$\psi''_X(0) = \alpha_2 = np\ [(n-1)\ p + 1] = np\ (np -$$

$$-\ p + 1) = n^2\ p^2 + npq$$

$$\mu_2(X) = \sigma^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = n^2\ p^2 + npq -$$

$$-\ n^2\ p^2 = npq$$

A média da distribuição é np e a variância npq. *O desvio-padrão é* $\sqrt{npq}$

De modo análogo, obtém-se (o acadêmico deverá efetuar os cálculos, como exercício).

$$\mu_3(X) = npq\ (q - p)$$

$$\mu_4(X) = 3n^2\ p^2\ q^2 + npq\ (1 - 6pq)$$

o que acarreta

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3(X)}{\sigma_X^3} = \frac{npq\ (q-p)}{npq\ \sqrt{npq}} = \frac{q-p}{\sqrt{npq}}$$

$$\gamma_2^* = \frac{\mu_4(X)}{\sigma_X^4} - 3 = \frac{3\ n^2\ p^2\ q^2 + npq\ (1 - 6pq)}{n^2\ p^2\ q^2} -$$

$$-\ 3 = 3 + \frac{(1 - 6pq)}{npq} - 3 = \frac{1 - 6pq}{npq}$$

EXERCÍCIOS

1) Determine a função geratriz de momentos da distribuição de Bernoulli

$$\psi_X(t) = E\left\{e^{tX}\right\} = \sum_{i=0}^{1} e^{ti}\ p_i = e^{t\,0}\ q + e^{t\,1}\ p =$$

$$= pe^t + q$$

2) Um dado é lançado quatro vêzes Determine a distribuição de probabilidade do número eventual de cincos que aparecem nesses 4 lances

$$\begin{cases} n = 4 \\ p = 1/6 \\ q = 1 - 1/6 = 5/6 \\ p_i = \binom{4}{i}\ (1/6)^i\ (5/6)^{4-i} = \binom{4}{i}\ \frac{5^{4-i}}{6^4} \end{cases}$$

onde i é o número eventual de cincos.

Fazendo-se, sucessivamente, $i = 0$, 1, 2, 3, 4, obtém-se

i	pi
0	625/1296
1	500/1296
2	150/1296
3	20/1296
4	1/1296
Σ	1

A média e o desvio-padrão dessa distribuição são:

$$\alpha_1 = m = np = 4\,\frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\sigma = +\sqrt{\sigma^2} = +\sqrt{npq} = +\sqrt{4\,\frac{1}{6}\,\frac{5}{6}} =$$

$$= +\sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Os coeficientes de assimetria e de excesso assumem os valôres:

$$\gamma_1 = \frac{q-p}{\sqrt{npq}} = \frac{\frac{5}{6}-\frac{1}{6}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\gamma_2^* = \frac{1-6pq}{npq} = \frac{1-\frac{5}{6}}{\frac{5}{9}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{9}} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$$

Deve-se observar que, associando à i-ésima repetição da experiência — uma variável aleatória X_i (i = 1, 2, ., n) com distribuição de Bernoulli:

$$\begin{cases} X_i = 0 \text{ se } \overline{E} \text{ ocorre} & q = P(X_i = 0) \\ X_i = 1 \text{ se } E \text{ ocorre} & p = P(X_i = 1) \end{cases}$$

$$\{i = 1, 2, , n\}$$

a v a. X com distribuição binomial que representa o número eventual de sucessos é expressa pela soma:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

sendo X_1, X_2, , X_n v a. independentes.

Logo:

$$m = E\{X\} = E\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i\right\} = \sum_{i=1}^{n} E\{X_i\} = np$$

$$\sigma^2 = E\{X-m\}^2 = \mu_2\{X\} = \mu_2\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i\right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mu_2\{X_i\} \Longrightarrow \sigma^2 = npq \Longrightarrow \sigma = +\sqrt{npq}$$

A média e a variância são obtidas mais ràpidamente quando se considera a distriuição binomial como uma extensão da distribuição de Bernoulli.

7 1 5 — *Distribuição de Poisson* A distribuição binomial é a distribuição de probabilidade de uma v a X que assume os valôres 0, 1, 2, , n, respectivamente, com as probabilidades:

$$P_i = \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \quad \{i = 0, 1, 2, , n\}$$

Pesquise-se, agora, o limite dessa probabilidade quando $n \to \infty$ e o produto $np = m$, que define a média de X, permanece constante. Nesse caso, tem-se:

$$\lim_{n\to\infty} p_i = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{i!\,(n-i)!} \left(\frac{m}{n}\right)^i \left(1-\frac{m}{n}\right)^{n-i} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{i!} \frac{m^i}{n^i} \frac{\left(1-\frac{m}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{m}{n}\right)^i} =$$

$$= \frac{m^i}{i!} \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{n\,n\quad n} \frac{\left(1-\frac{m}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{m}{n}\right)^i} =$$

$$= \frac{m^i}{i!} \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) \left(1-\frac{i+1}{n}\right) \frac{\left(1-\frac{m}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{m}{n}\right)^i} =$$

$$= \frac{m^i}{i!} \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{m}{n}\right)^n$$

Já que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) \left(1-\frac{i+1}{n}\right)}{\left(1-\frac{m}{n}\right)^i} = 1$$

Mas

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{m}{n}\right)^n = e^{-m}$$

Logo:

$$\lim_{n\to\infty} p_i = \frac{m^i}{i!} e^{-m}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{m^i}{i!} e^{-m} = e^{-m} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{m^i}{i!} = e^{-m} e^m = e^0 = 1$$

A distribuição de Poisson é, assim, a distribuição de probabilidade de uma v.a. X que assume os valôres do conjunto numerável 0, 1, 2, . , com a seguinte função de probabilidade:

$$p_i = \frac{m^i}{i!} e^{-m} \quad \text{se } i = 0, 1, 2,$$

$$= 0 \quad \text{para qualquer outro real}$$

A função geratriz de momentos será expressa por:

$$\psi_X(t) = E\{e^{tX}\} = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ti} \frac{m^i}{i!} e^{-m} =$$

$$= e^{-m} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(me^t)^i}{i!} = e^{-m} e^{me^t} =$$

$$= e^{m(e^t-1)} \Longrightarrow \psi_X(t) = e^{m(e^t-1)}$$

Em conseqüência:

$$\psi_X^{(1)}(t) = \psi_X(t)\, me^t \Longrightarrow \psi_X^{(1)}(0) =$$

$$= \psi_X^{(0)}\, m = m \Longrightarrow \alpha_1 = m$$

$$\psi_X^{(2)}(t) = \psi_X^{(1)}(t)\, me^t + \psi_X^{(1)}(t) =$$

$$= \psi_X^{(1)}(t)\,(me^t + 1) \Longrightarrow \psi_X^{(2)}(0) = m^2 + m \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \alpha_2 = m^2 + m$$

$$\psi_X^{(3)}(t) = \psi_X^{(2)}(me^t + 1) = \psi_X^{(1)}(t)\, me^t \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \psi_X^{(3)}(0) = m^3 + 3m^2 + m$$

$$\Longrightarrow \alpha_3 = m^3 + 3m^2 + m$$

$$\psi_X^{(4)}(t) = \psi_X^{(3)}(t)\,(me^t + 1) + \psi_X^{(2)}(t)\, me^t +$$

$$+ \psi_X^{(2)}(t)\, me^t + \psi_X^{(1)}(t)\, me^t = \psi_X^{(3)}(t)\,(me^t + 1) +$$

$$+ 2\,\psi_X^{(2)}(t)\, me^t + \psi_X^{(1)}(t)\, me^t$$

$$\psi_X^{(4)}(t) = \psi_X^{(3)}(t)\,(me^t + 1) + me^t\left[2\,\psi_X^{(2)}(t) + \right.$$

$$\left. + \psi_X^{(1)}(t)\right] \Longrightarrow \psi_X^{(4)}(0) = \psi_X^{(3)}(0)\,(m + 1) +$$

$$+ m\left[2\,\psi_X^{(2)}(0) + \psi_X^{(1)}(0)\right]$$

$$\psi_X^{(4)}(0) = (m^3 + 3m^2 + m)(m + 1) =$$

$$= m\,[2\,(m^2 + m) + m] = m^4 + 3m^3 + m^2 +$$

$$+ m^3 + 3m^2 + m + 2m^3 + 2m^2 + m^2 =$$

$$= m^4 + 6m^3 + 7m^2 + m$$

Logo:

$$\sigma^2 = \mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = m^2 + m - m^2 = m$$

$$\sigma = +\sqrt{m}$$

$$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1^3 = m^3 + 3m^2 + m -$$

$$- 3m\,(m^2 + m) + 2m^3 = m \Longrightarrow \gamma_1 = \frac{\sqrt{m}}{m}$$

$$\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_3\,\alpha_1 + 6\alpha_2\,\alpha_1^2 - 3\alpha_1^4 =$$

$$= m^4 + 6m^3 + 7m^2 + m - 4m\,(m^3 + 3m^2 +$$

$$+ m) + 6m^2\,(m^2 + m) - 3m^4 = m^4 + 6m^3 +$$

$$+ 7m^2 + m - 4m^4 - 12m^3 - 4m^2 + 6m^4 +$$

$$+ 6m^3 - 3m^4 = 3m^2 + m$$

$$\Longrightarrow \gamma_2 = \frac{3m^2 + m}{m^2} = 3 + \frac{1}{m}$$

Nessa distribuição, o parâmetro m representa a média, a variância e o 3º momento central Apenas o 4º momento central difere de m Ao estudar *semi-invariantes* o acadêmico compreenderá a razão da diferença de comportamento de $o\mu 4$.

Observando-se que, se $n \to \infty$, $p = \frac{m}{n} \to$ O, pode-se concluir que a distribuição de Poisson é aplicável no estudo dos eventos de probabilidades pequenas de ocorrência, como suicídios, atropelamentos, partos triplos. A distribuição é também utilizada para o estudo de acontecimentos que são, aleatòriamente, distribuídos no tempo, como desintegração de átomos de substâncias radioativas, chamadas telefônicas, compromissos de companhias de seguro, etc

A distribuição binomial pode ser substituída pela distribuição de Poisson, que se encontra tabelada para diversos valôres de m, com um bom grau de aproximação quando a probabilidade de ocorrência de sucesso, em cada repetição da experiência, não supera 0,1

Exercício:

Sabe-se que a probabilidade de que uma peça produzida por uma certa máquina seja defeituosa é igual a 0,2 Determine a probabilidade de que, em um lote de 10 peças relacionadas ao acaso na produção diária, não exista mais do que uma peça defeituosa.

Solução:

Seja X a v a que representa o nº eventual de peças defeituosas no lote. Tem-se uma distribuição binomial, onde:

$$n = 10$$

$$p = 1/10$$

e o domínio de X é o conjunto finito: 0, 1, 2, ., 10

A probabilidade pedida será.

$$p_0 + p_1 = \binom{10}{0}(1/10)^0\,(9/10)^{10} +$$

$$+ \binom{10}{1}(1/10)^1\,(9/10)^9 = 0{,}7361$$

Utilizando-se a aproximação dada pela distribuição de Poisson, ter-se-á

$$np = 10\,\frac{1}{10} = 1 = m$$

$$p_0 + p_1 = \frac{m^0}{0!}\,e^{-m} + \frac{m^1}{1!}\,e^{-m} = 2e^{-m} =$$

$$= 2e^{-1} = \frac{2}{e} = 0{,}7358$$

Antes de prosseguir no estudo das principais distribuições unidimensionais do tipo discreto, passa-se a definição de *convergência em probabilidade.*

7 1 6 — *Convergência em probabilidade*

7 1 6 1 — *A desigualdade de Tchebychef* — Considere-se o seguinte teorema, devido a Tchebychef:

"Seja X uma v a. de média m, e variância σ^2 e K um número positivo

arbitrário A probabilidade de que a v.a X assuma um valor que satisfaça à desigualdade $|X - m| > K\,\sigma$ é menor ou igual a $\frac{1}{K^2}$".

A demonstração será feita considerando-se uma v a do tipo contínuo O acadêmico poderá fazê-la, a título de exercício, para o tipo discreto.

A variância de X será expressa por

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 f(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{m-K\sigma} (x-m)^2 f(x)\,dx +$$

$$+ \int_{m-K\sigma}^{m+K\sigma} (x-m)^2 f(x)\,dx +$$

$$+ \int_{m+K\sigma}^{\infty} (x-m)^2 f(x)\,dx$$

Como:

$$\int_{m-K\sigma}^{m+K\sigma} (x-m)^2 f(x)\,dx \geq 0$$

Tem-se:

$$\sigma^2 \geq \int_{-\infty}^{m-K\sigma} (x-m)^2 f(x)\,dx +$$

$$+ \int_{m+K\sigma}^{\infty} (x-m)^2 f(x)\,dx$$

Observe-se que:

$$\left.\begin{array}{l} x \in (-\infty, m-K\sigma) \\ x \in [m+K\sigma, +\infty) \end{array}\right\} \Longrightarrow (x-m)^2 \geq K^2\sigma^2$$

Portanto

$$\sigma^2 \geq \int_{-\infty}^{m-K\sigma} K^2\sigma^2 f(x)\,dx +$$

$$+ \int_{m+K\sigma}^{\infty} K^2\sigma^2 f(x)\,dx \Longrightarrow$$

$$= \sigma^2 \geq K^2\sigma_2 \left[\int_{-\infty}^{m-K\sigma} f(x)\,dx + \right.$$

$$\left. + \int_{m+K\sigma}^{\infty} f(x)\,dx\right]$$

Mas,

$$\int_{-\infty}^{m-K\sigma} f(x)\,dx + \int_{m+K\sigma}^{\infty} f(x)\,dx =$$

$$= P\left\{|X-m| > K\sigma\right\}$$

Então:

$$\sigma^2 \geq K^2\sigma^2 P\left\{|X-m| > K\sigma\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow P\left\{|X-m| > K\sigma\right\} \leq \frac{\sigma^2}{K^2\sigma^2}$$

$$P\left\{|X-m| > K\sigma\right\} \leq \frac{1}{K^2} \qquad \text{c q d}$$

Êste teorema estabelece, com precisão, o significado da variância de uma v a

7 1 6.2 — *A lei dos grandes números* Deve-se a Bernoulli um teorema, que pode ser, assim, enunciado:

"Para qualquer número positivo ε, a probabilidade de que o valor absoluto do afastamento da freqüência relativa f/n de um evento E, em uma seqüência de n repetições independentes de uma experiência real, para a probabilidade correspondente p, exceda ξ tende a zero, quando n cresce indefinidamente".

Para demonstrar o teorema, deve-se observar, inicialmente, que sendo f a freqüência absoluta de um evento E em uma seqüência de n repetições independentes de uma experiência aleatória, f representa o número eventual de "'sucessos" (ocorrências de E) nas n provas. Então, f é uma v a. real unidimensional do tipo discreto com distribuição binomial.

Assim:

$$E\left\{\frac{f}{n}\right\} = \frac{E\{f\}}{n} = \frac{np}{n} = p$$

$$\sigma^2\left\{\frac{f}{n}\right\} = \frac{\sigma^2\{f\}}{n^2} = \frac{npq}{n^2} =$$

$$= \frac{pq}{n} \Longrightarrow \sigma\left\{\frac{f}{n}\right\} = \sqrt{\frac{pq}{n}} \quad \{q = 1-p\}$$

Pela desigualdade de Tchebychef, tem-se:

$$P\left\{|X-m| > K\sigma\right\} \leq \frac{1}{K^2}$$

Aplicando-se o teorema à variável aleatória f/n obtém-se:

$$P\left\{\left|\frac{f}{n} - p\right| > K\sqrt{\frac{pq}{n}}\right\} \leq \frac{1}{K^2} \qquad (I)$$

Faça-se, agora o positivo arbitrário K igual a $\epsilon\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{pq}}$, sendo $\epsilon > 0$. Substituindo em (I) K por êsse valor, resulta.

$$P\left\{\left|\frac{f}{n} - p\right| > \epsilon\right\} \leq \frac{pq}{\epsilon^2 n} \qquad (II)$$

O *valor máximo* do produto $pq = p(1-p)$ é obtido para $p = \frac{1}{2}$, isto é, $pq = \frac{1}{4}$, já que:

$$\frac{d\ p\ (1-p)}{dp} = (1-p) - p = 1 - 2p \Longrightarrow 1 - 2p = 0 \Longrightarrow p = \frac{1}{2}$$

$$\frac{d^2\ p\ (1-p)}{dp} = -2 = MÁXIMO$$

Então, em (II), ter-se-á:

$$P\left\{\left|\frac{f}{n} - p\right| > \epsilon\right\} \leq \frac{1}{4_n \epsilon^2}$$

De onde se conclui que

$$\lim_{n \to \infty} P\left\{\left|\frac{f}{n} - p\right| < \epsilon\right\} = 0 \qquad \text{c q d.}$$

7 1 6 3 — *O conceito de convergência em probabilidade.* Considere-se uma sucessão de variáveis aleatórias reais unidimensionais:

$$\{X_n\} = X_1, X_2, X_3, \quad , X_n$$

Diz-se que essa sucessão *converge em probabilidade* para uma constante c ($c \in R^1$) se, para um número positivo e arbitrário ε, tem-se:

$$\lim_{n \to \infty} P\left\{|X_n - c| > \epsilon\right\} = 0$$

o que se simboliza por $X_n \xrightarrow{p} c$

O teorema de Bernoulli pode ser enumerado, então, do seguinte modo:

Em uma seqüência de n repetições independentes de uma experiência aleatória, a freqüência relativa $\frac{f}{n}$ de um evento E, que ocorre ou não em cada uma das repetições, converge em probabilidade para a probabilidade p dêsse evento, isto é:

$$\frac{f}{n} \xrightarrow{p} p$$

7 1 7 — *Distribuição geométrica* Considere-se uma seqüência de n repetições independentes de uma experiência aleatória e seja E um evento que pode ocorrer, com probabilidade p, ou deixar de ocorrer, com probabilidade q, em cada uma das repetições (provas sôbre E)

Seja X uma v a real unidimensional que representa o número eventual de provas necessário à 1.ª ocorrência do evento E (ocorrência do 1.º "Sucesso"). O domínio dessa v a. é o conjunto $\{i\} = \{1, 2, 3, \quad\}$

X é, assim, uma v.a do tipo discreto. A expressão analítica da função de probabilidade é a seguinte.

$$p_i = P(X = i) = p\ q^{i-1} \qquad \text{se } i = 1, 2, 3, \quad .$$
$$= 0 \qquad \text{para qualquer outro real}$$

já que se o 1º "sucesso" ocorre na i-ésimo prova ($i = 1, 2, 3, \quad$) nas $i-1$ provas anteriores ocorrerem "insucessos"

Observe-se que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} pq^{i-1} = p \sum_{i=1}^{\infty} q^{i-1} = p\ (1 + q + q^2 + + q^3 + \ .\ ) = p\ \frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1$$

A expressão analítica da função de distribuição será a seguinte:

$$F(x) = 0 \qquad \text{se } x < 1$$
$$= \sum_{i=1}^{[x]} p\ q^{i-1} \qquad \text{se } x \geq 1$$

A função geratriz de momentos pode ser obtida do seguinte modo:

$$\psi_X^{(t)} = E\left\{e^{tX}\right\} = \sum_{i=1}^{\infty} e^{t_i} p\ q^{i-1} =$$

$$= p \sum_{i=1}^{\infty} e^{t_i} q^{i-1} =$$

$$= p\ (e^t + e^{2t} q = e^{3t} q^2 + \quad) = \frac{pe^t}{1 - qe^t}$$

considerando-se o limite da soma dos têrmos de uma $p\,g.$ com razão qe^t (< 1).

É imediato o cálculo das características:

média

$$\psi_X^{(1)}(t) = p\ \frac{(1 - qe^t)\ e^t + e^t\ qe^t}{(1 - qe^t)^2} =$$

$$= p\ \frac{e^t - qe^{2t} + qe^{2t}}{(1 - qe^t)^2} = p\ \frac{e^t}{(1 - qe^t)^2}$$

$$\psi_X^{(1)}(0) = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p} \Longrightarrow E\left\{X\right\} = m = \frac{1}{p}$$

Variância

$$\psi_X^{(2)}(t) = p\ \frac{(1 - qe^t)^2\ e^t + 2e^t\ (1 - qe^t)\ qe^t}{(1 - qe^t)^4} =$$

$$= p\ (1 - qe^t)\ \frac{e^t\ (1 - qe^t) + 2qe^{2t}}{(1 - qe^t)^4} =$$

$$= p\ \frac{e^t - qe^{2t} + 2qe^{2t}}{(1 - qe^t)^3} = p\ \frac{e^t + qe^{2t}}{(1 - qe^t)^3} =$$

$$= pe^t\ \frac{1 + qe^t}{(1 - qe^t)^3}$$

$$\psi_X^{(2)}(0) = p\,\frac{1+q}{(1-q)^3} = \frac{1+q}{p^2} = \alpha_2$$

$$\sigma^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1+q-1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

Exercício — Demonstre que para uma distribuição geométrica

$$\mu_3 = \frac{q}{p^2}\left(1 + \frac{2q}{p}\right)$$

$$\mu_4 = \frac{q}{p^2}\left(1 + \frac{9q}{p^2}\right)$$

7 1 8 — *Distribuição binomial negativa* Seja E um evento que pode ocorrer ou não em cada uma das n repetições de uma experiência aleatória, respectivamente, com probabilidades p e q, sendo $p + q = 1$. Designando-se por "sucesso" a ocorrência de E, considere-se uma v a. real unidimensional X que representa o número eventual de provas necessário à ocorrência de r sucessos, sendo r um inteiro positivo. O dominio de X será o conjunto: $\{r+i\} = \{r, r+1, r+2, \ldots\}$. A probabilidade de que o r-ésimo sucesso ocorre na (r+i)-ésima prova ($i = 0, 1, 2, \ldots$) é igual a probabilidade de que i insucessos precedam o r-ésimo sucesso. Para que isso aconteça é necessário que nas $r+i-1$ provas anteriores àquela em que ocorre o r-ésimo sucesso existem i insucessos e, na seguinte (prova $r+i$) ocorra sucesso As probabilidades correspondentes são

$$\binom{r+i-1}{i} p^{n-1} q^i$$

e p. A expressão analítica da função de probabilidade é:

$$\begin{cases} p_i = \binom{1+i-1}{i} p^r q^i & \text{se } i = 0, 1, 2, \ldots \\ = 0 & \text{para qualquer outro real} \end{cases}$$

Utilizando-se a igualdade:

$$\binom{-a}{K} = (-1)^K \binom{a+K-1}{K} \quad \{a > 0\}$$

tem-se:

$$\begin{cases} p^i = \binom{-1}{i} p^r (-q)^i & \text{se } i = 0, 1, 2, \ldots \\ = 0 & \text{para qualquer outro real} \end{cases}$$

E, conseqüentemente

$$F(x) = 0 \qquad \text{se } x < 0$$

$$F(x) = \sum_{i=0}^{[x]} \binom{-r}{i} p^r (-q)^i \qquad \text{se } x \geq 0$$

A função geratriz de momentos pode ser obtida do seguinte modo:

$$\psi_X^{(t)} = E\left\{e^{tX}\right\} = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ti} \binom{-1}{i} p^r (-q)^i =$$

$$= p^r \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-1}{i} (-qe^t)\, i = \left(\frac{p}{1-qe^t}\right)^r$$

o que acarreta:

$$E\left\{X\right\} = \psi_X^{(1)}(0) = p^r (-1)\, p^{-r-1} (-q) =$$

$$= rq\, p^{-1} = \frac{1q}{p}$$

Deixa-se, como exercício, ao acadêmico a tarefa de obter as características da distribuição. As expressões finais dos momentos centrais de 2.ª, 3.ª e 4.ª ordens são as seguintes:

$$\sigma^2 = \mu_2 = \frac{rq}{p^2}$$

$$\mu_3 = \frac{rq}{p^2}\left(1 + 2\frac{q}{p}\right)$$

$$\mu_4 = \frac{1q}{p^2}\left[1 + (6 + 31)\frac{q}{p^2}\right]$$

Deve-se observar que:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{-r}{i} p^r (-q)^i = p^r \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-r}{i} (-q)^i =$$

$$= p^r (1-q)^{-r} = p^r p^{-r} = p^0 = 1$$

Estabeleceu-se a distribuição binomial negativa para um inteiro positivo r. Na realidade ela é mais geral, sendo válida para qualquer real $r > 0$. Sòmente neste caso mais geral alguns autores dão a essa distribuição a denominação de binomial negativa, preferindo a designação de *distribuição de Pascal,* quando r é um inteiro positivo.

Para $r = 1$ a distribuição binomial negativa se transforma na distribuição geométrica já estudada.

Capítulo 8

ALGUMAS DISTRIBUIÇÕES DO TIPO CONTÍNUO

8 1 — *A DISTRIBUIÇÃO NORMAL*

8.1 1 — *DSTRIBUIÇÃO NORMAL PADRÃO*

Seja X uma variável aleatória real unidimensional do tipo contínuo, cuja função de freqüência tem a seguinte expressão analítica:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \text{se } -\infty < x < +\infty$$

Observe-se que, de fato:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx =$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} = 1$$

Estudar-se-á, a seguir, a variação da função de freqüência

1 — Ela é uma função contínua no intervalo $(-\infty\ +\infty)$ e que apresenta a sua curva representativa simétrica em relação ao eixo das ordenadas e tendo para assíntota o eixo dos abcissas, já que

i) $f(x)$ é uma função par

ii) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

2 — A função de freqüência apresenta um *máximo* para $x = 0$, porque

i) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \; x \; (-x) = -xf(x)$

ii) $f'(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$

iii) $f'(x) > 0$ se $x < 0$ $\quad \{f(x)$ é crescente$\}$

$f'(x) < 0$ se $x > 0$ $\quad \{f(x)$ é decrescente$\}$

3 — A curva representativa da função de freqüência tem dois pontos de inflexão, para $x = -1$ e para $x = +1$ É côncava para cima se $x < -1$ e se $x > 1$ e côncava para baixo se $-1 < x < 1$, uma vez que

i) $f''(x) = -[xf'(x) + f(x)] =$

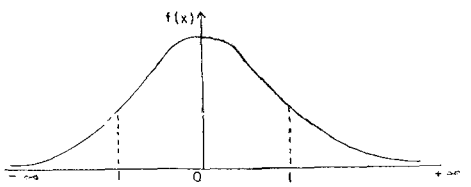
$= -[-x^2 f(x) + f(x)] = (x^2 - 1) f(x)$

ii) $f''(x) = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$

iii) $f''(x) < 0$ se $|x| < 1$

$f''(x) > 0$ se $|x| > 1$

A representação gráfica da função de freqüência será, então, a seguinte



A função de distribuição dessa variável aleatória terá a seguinte expressão analítica

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \quad \text{se} \quad -\infty < x < +\infty$$

Tanto a função de freqüência como a função de distribuição estão tabeladas Para a função de distribuição, encontra-se, em geral, nas tabelas, o valor da integral:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

para $0 < x < +\infty$

observando-se que

$$F(x) = 0{,}5 - \phi(x) \quad \text{se} \quad x < 0$$
$$= 0{,}5 \quad \text{se} \quad x = 0$$
$$= 0{,}5 + \phi(x) \quad \text{se} \quad x > 0$$

As características dessa distribuição serão, a seguir, determinadas:

Média:

$$E\{X\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x\, e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 0$$

Sendo a média nula, os momentos ordinários transformam-se em momentos centrais Por outro lado, como a função $e^{-\frac{x^2}{2}}$ é par, os momentos de ordem impar são nulos.

Variância

$$\mu_2\{X\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx =$$

$$= 1 \Longrightarrow \sigma\{X\} = 1$$

Quarto momento central

$$\mu_4\{X\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^4\, e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 3$$

Coeficiente de assimetria

$$\gamma_1\{X\} = \frac{\mu_3\{X\}}{\sigma^3\{X\}} = 0$$

Coeficiente de excesso

$$\gamma_2^*\{X\} = \gamma_2\{X\} - 3 = \frac{\mu_4\{X\}}{\mu_2^2\{X\}} - 3 =$$

$$= 3 - 3 = 0$$

Uma variável aleatória que tenha a distribuição de probabilidade apresentada é denominada *normal padrão* ou *normal (0,1)* Simplificadamente, diz-se que X é $N(0,1)$

Exercícios

1) Sendo X uma variável aleatória com distribuição normal padrão, determine as probabilidades dos seguintes intervalos

i) $X \geq 1$

ii) $2 < X < 4$

iii) $-1{,}5 < X \leq 3{,}5$

Solução:

i) $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - F(1 - 0) = 1 - F(1)$

$F(1) = 0{,}5 + \phi(1) = 0{,}5 + 0{,}3413 = 0{,}8413$

$P(X \geq 1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$

ii) $P(2 < X < 4) = F(4 - 0) - F(2) = F(4) - F(2)$

$F(2) = 0{,}5 + \phi(2) = 0{,}5 + 0{,}4773 = 0{,}9773$

$F(4) = 0{,}5 + \phi(4) = 0{,}5 + 0{,}4999 = 0{,}9999$

$P(2 < X < 4) = 0{,}9999 - 0{,}9773 = 0{,}0226$

iii) $P(-1{,}5 < X \leq 3{,}5) = F(3{,}5) - F(-1{,}5)$

$F(3{,}5) = 0{,}5 + \phi(3{,}5) = 0{,}5 + 0{,}4997 = 0{,}9997$

$F(-1{,}5) = 0{,}5 - \phi(1{,}5) = 0{,}5 - 0{,}4332 = 0{,}0668$

$P(-1{,}5 < X \leq 3{,}5) = 0{,}9997 - 0{,}0668 = 0{,}9329$

2) Considerando a mesma variável aleatória, determine os valôres de x para os quais:

i) $P(|X| \geq x) = 0{,}05$

ii) $P(|X| \geq x) = 0{,}01$

Solução:

i) $P(|X| \geq x) = P(-\infty < X \leq -x) + P(x \leq X < +\infty) = 2P(x \leq X < +\infty) = 0{,}05$

$P(x \leq X < +\infty) = 0{,}025 \Rightarrow 1 - F(x) = 0{,}025 \Rightarrow F(x) = 0{,}9750 \Rightarrow$

$0{,}5 + \phi(x) = 0{,}9750 \Rightarrow \phi(x) = 0{,}4750 \Rightarrow x = 1{,}96$

ii) $P(|X| \geq x) = 0{,}01 \Rightarrow P(x \leq X < +\infty) = 0{,}005 \Rightarrow F(x) = 0{,}9950 \Rightarrow$

$0{,}5 + \phi(x) = 0{,}9950 \Rightarrow \phi(x) = 0{,}4950 \Rightarrow x = 2{,}65$

8 1.2 — *DISTRIBUIÇÃO NORMAL COM A MÉDIA m E DESVIO-PADRÃO σ*

Seja X uma variável aleatória real unidimensional Essa variável tem distribuição normal com média m ($m \in R^1$) e desvio-padrão σ ($\sigma > 0$), ou, simplificadamente X é $N(m, \sigma)$ se a variável reduzida de x:

$$T = \frac{x - m}{\sigma}$$

tem distribuição normal padrão
Observe-se que:

$$F_x(x) = P(X \leq x) = P(m + \sigma T \leq x) =$$

$$= P\left(T \leq \frac{x - m}{\sigma}\right) = F_t\left(\frac{x - m}{\sigma}\right)$$

$$\boxed{F_x(x) = F_t\left(\frac{x - m}{\sigma}\right)}$$

Derivando-se ambos os membros da igualdade, em relação a x, obtém-se:

$$f_x(x) = f_t\left(\frac{x - m}{\sigma}\right) \cdot \frac{1}{\sigma} =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \text{ se } -\infty < x < +\infty$$

De posse da expressão analítica da função de freqüência da variável aleatória X que é $N(m, \sigma)$, passa-se ao cálculo das características da distribuição:

Média:

$$E\{X\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Sendo $t = \frac{x - m}{\sigma}$, tem-se:

$$E\{X\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (m + \sigma t)\, e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma dt =$$

$$= \frac{m}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt +$$

$$+ \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t\, e^{-\frac{t^2}{2}} dt = m$$

Momentos centrais

$$\mu_s\{X\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^s f(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^s\, e^{\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Mas:

$$t = \frac{x - m}{\sigma}$$

Logo:

$$\mu_s\{X\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^s t^s\, e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma\, dt =$$

$$= \frac{\sigma^s}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^s\, e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sigma^s \mu_s\{T\}$$

Mas:

$$\mu_s\{T\} = 0 \quad \text{se } s \text{ é ímpar}$$

$$\mu_2\{T\} = 1$$

$$\mu_4\{T\} = 3$$

Em conseqüência

$$\mu_2\{X\} = \sigma^2 \Rightarrow \sigma\{X\} = \sigma$$

$$\mu_4\{X\} = 3(\sigma^2)^2$$

$$\gamma_1\{X\} = 0$$

$$\gamma_2^*\{X\} = \gamma_2\{X\} - 3 = 3 - 3 = 0$$

Assim, os parâmetros m e σ dos quais depende a distribuição são, respectivamente, a *média* e o *desvio-padrão*

Exercício:

Sabendo-se que X é $N(6,5)$, determinar as seguintes probabilidades

i) $P(7 \leq X < 12)$
ii) $P(X > 0)$

Solução:

i) $P(7 \leq X < 12) = F(12) - F(7)$

$$F_x(12) = F_t\frac{(12-6)}{5} = F_t\frac{(6)}{5} =$$

$$= F_t(1{,}2) = 0{,}5 + \phi(1{,}2) = 0{,}8849$$

$$F_x(7) = Ft\left(\frac{7-6}{5}\right) = Ft\left(\frac{1}{5}\right) =$$

$$= Ft(0{,}2) = 0{,}5 + \phi(0{,}2) = 0{,}5793$$

$$P(7 \leq X < 12) = 0{,}8849 - 0{,}5793 = 0{,}3056$$

ii) $P(X > 0) = 1 - F(0)$

$$F_x(0) = F_t\left(\frac{0-6}{5}\right) = F_t\left(-\frac{6}{5}\right) =$$

$$= F_t(-1{,}2) = 0{,}5 - \phi(1{,}2) = 0{,}5 -$$

$$- 0{,}3849 = 0{,}1151$$

$$P(X > 0) = 1 - 0{,}1151 = 0{,}8849$$

8 1 3 — *PROPRIEDADES DAS DISTRIBUIÇÕES NORMAIS*

As distribuições normais gosam das seguintes propriedades

1) Se X é uma variável aleatória $N(m, \sigma)$ e se a e b são duas constantes reais, então, a variável aleatória $Y = aX + b$ é $N(am + b, a\sigma)$
2) Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes $N(m_i, \sigma_i)$ $\{i = 1, 2, \ldots n\}$, a variável aleatória $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ tem distribuição $N(m, \sigma)$, sendo

$$\begin{cases} m = \sum_{i=1}^{n} m_i \\ \sigma = +\sqrt{\sigma^2} = +\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2} \end{cases}$$

8 1 4 — *VARIÁVEIS ALEATÓRIAS ASSINTÒTICAMENTE NORMAIS*

Considere-se a sucessão de variáveis aleatórias

$X1, X2, \ldots, Xn,$

com médias:

$m1, m2, \ldots, mn,$

e variâncias

$\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2$

Se a distribuição de probabilidades da variável reduzida

$$Tn = \frac{Xn - mn}{\sigma n}$$

tende para a distribuição $N(0,1)$, quando $n \to \infty$, diz-se que a variável aleatória X_n é assintòticamente normal com média mn e desvio padrão σ_n, ou simplificadamente

$$Xn \text{ é} \sim N(mn, \sigma n)$$

Pode-se demonstrar o seguinte teorema, conhecido como *teorema do limite central*:

A soma de n variáveis aleatórias

$$Sn = \sum_{i=1}^{n} Xi$$

onde

$$E\{Xi\} = m_i$$

$$\sigma^2\{Xi\} = \sigma_i^2 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

é assintòticamente normal com média m e variância σ^2, sendo

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$$

Em particular, se as variáveis aleatórias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ têm distribuição de Bernoulli, sendo p a probabilidade de

sucesso, a variável aleatória Sn tem distribuição binomial e:

$$m = np$$
$$\sigma^2 = npq$$

A variável aleatória reduzida:

$$\frac{Sn - np}{\sqrt{npq}}$$

tende para a distribuição $N(0,1)$, quando $n \to \infty$. Pelo teorema do limite central

$$S \sim N(np, \sqrt{npq})$$

Assim, se n é grande, com a utilização do teorema, pode-se aproximar a distribuição binomial à distribuição normal.

Exercício:

Realizando-se 1 000 repetições de uma experiência aleatória a qual se associa um evento com probabilidade de ocorrência igual a 0,5 em cada prova, qual é aprobabilidade de que êsse evento ocorra não menos do que 500 vêzes e não mais de que 750 vêzes?

Solução:

$$\begin{cases} m = np = 1\,000 \times 0{,}5 = 500 \\ \sigma^2 = npq = 1\,000 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 250 \\ T = \dfrac{X - 500}{\sqrt{250}} \sim N(0,1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} P(500 \leq X \leq 750) \sim P\left(\dfrac{500 - 500}{\sqrt{250}} \leq \right. \\ \left. \leq T \leq \dfrac{750 - 500}{\sqrt{250}}\right) = P(0 \leq T \leq 15{,}81) = \\ = F(15{,}81) - F(0) \\ F(15{,}81) = 1 \\ F(0) = 0{,}5 \end{cases}$$

$$P(500 \leq X \leq 750) = 0{,}5$$

8.2 — *DISTRIBUIÇÃO LOGARÍTMO NORMAL*

Seja X uma variável aleatória real unidimensional e a uma constante. Se a variável aleatória:

$$Y = log_e (X - a) = lg (X - a)$$

tem distribuição $N(m, \sigma)$, diz-se que a variável aleatória X tem distribuição logarítmo-normal.

Sejam $f_y^{(x)}$ e $F_y^{(x)}$ as funções de freqüência e de distribuição da variável aleatória Y. Observando-se que:

$$X - a = ey \Longrightarrow X = ey + a$$

tem-se:

$$F_x(x) = P(X \leq x) = P(ey + a \leq x) =$$
$$= P(ey \leq x - a) = P(Y \leq lg(x - a) =$$
$$= Fy(lg(x - a))$$

$\{x > a\}$

$$F_x(x) = 0 \quad \text{se } x \leq a$$

e, por derivação:

$$f_x(x) = f_y(lg(x - a)) \cdot \frac{1}{x - a} \quad \text{se } x > a$$

$$f_x(x) = 0 \qquad \text{se } x \leq a$$

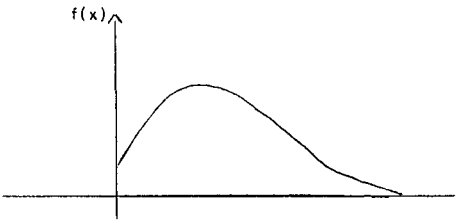
Então, a expressão analítica da função de freqüência da variável aleatória X será a seguinte.

$$f_x(x) = \frac{1}{\sigma(x - a)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[lg(x-a) - m]^2}{2\sigma^2}}$$

se $x > a$

$$f_x(x) = 0 \qquad \text{se } x \leq a$$

A distribuição logaritmo-normal é de grande uso na Economia (distribuição de rendas) e a função de freqüência tem a seguinte representação gráfica:



quando se particulariza: $a = 0$, $m = 0{,}5$, $\sigma = 1$

8.3 — *DISTRIBUIÇÃO QUI-QUADRADO* (χ^2)

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n variáveis aleatórias independentes e $N(0,1)$. Considere-se a variável aleatória:

$$\chi_n^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

Essa variável aleatória tem distribuição qui-quadrado, com n *graus* de liberdade.

Particularizando-se $n = 1$, tem-se:

$$\chi_1^2 = X^2$$

Seja $F_n(x)$ a função de distribuição da variável aleatória χ_n^2 Ter-se-á, evidentemente:

$$F_1(x) = P(\chi^2 \leq x) = P(X^2 \leq x) = 0 \text{ se } x < 0$$

$$= P(-\sqrt{x} \leq X \leq x) = F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x}) \quad \text{se } x \geq 0$$

e, por derivação:

$$f_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} f_x(\sqrt{x}) + \frac{1}{2\sqrt{x}} f_x(-\sqrt{x}) = f x \frac{(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \quad \text{se } x \geq 0$$

$$\left\{ f_x(\sqrt{x}) = f_\iota(-\sqrt{x}) \right\}$$

Logo

$$f_1(x) = 0 \quad \text{se } x < 0$$

$$f_1(x) = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}} \quad \text{se } x \geq 0$$

Pode-se demonstrar que, para χ_n^2, tem-se $f_n(x) = 0$ se $x < 0$

$$_n(x) = \frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} \quad \text{se } x \geq 0$$

onde

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \int_0^\infty x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x}\, dx \left\{ \textit{função gama} \right\}$$

A distribuição χ^2, de grande importância na Teoria dos Testes Estatísticos, está tabelada para diversos graus de liberdade

---

8 4 — *DISTRIBUIÇÃO DE "STUDENT"*

Seja Y uma variável aleatória real unidimensional $N(0,1)$ e Z uma variável aleatória real unidimensional x_n^2. Sendo essas variáveis independentes, denomina-se distribuição de Student com n graus de liberdade à distribuição de probabilidade variável aleatória:

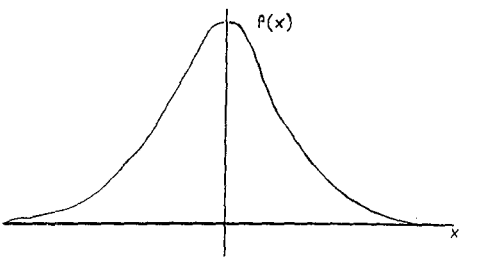
$$T = \frac{Y}{\sqrt{\frac{Z}{n}}} = \frac{Y\sqrt{n}}{\sqrt{Z}}$$

A expressão da função de freqüência de T é a seguinte:

$$f(x) = \frac{1}{(n\pi)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

se $-\infty < x < +\infty$

tendo a seguinte representação gráfica.



Esta distribuição que, também, é comumente usada em testes estatísticos, encontra-se tabelada e é denominada Distribuição T por alguns autores.

8 5 — *DISTRIBUIÇÃO DE SNEDECOR*

Denomina-se distribuição de Snedecor ou Distribuição F com m e n graus de liberdade à distribuição de probabilidade da variável aleatória

$$F = \frac{\frac{Y}{m}}{\frac{Z}{n}} = \frac{n}{m}\frac{Y}{Z}$$

onde Y e Z são duas variáveis aleatórias reais unidimensionais, independentes, com distribuição χ^2 tendo, respectivamente, m e n graus de liberdade

A função de freqüência de F tem para expressão analítica:

$$f(x) = C \frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{(m\,x+n)^{\frac{m+n}{2}}} \quad \text{se} \quad x \geq 0$$

$$= 0 \quad \text{se} \quad x < 0$$

sendo C uma constante que depende, apenas, dos parâmetros m e n

A distribuição de Snedecor está tabelada para diversos valôres de m e n

DECRETOS FEDERAIS

DECRETO-LEI N.º 428, DE 22 DE JANEIRO DE 1969

Dispõe sôbre operação externa de financiamento do VIII Censo Geral do Brasil.

O Presidente da República, usando da atribuição que lhe confere o § 1.º do artigo 2º do Ato Institucional nº 5, de 13 de dezembro de 1968 decreta:

Art. 1.º Fica o Ministro da Fazenda autorizado a contratar, em nome da União, empréstimo externo no valor de US$ 5,800,000 00 (cinco milhões e oitocentos mil dólares) com a USAID, para o financiamento das despesas com material e assistência técnica para a realização do VIII Censo Geral do Brasil.

Art. 2º À Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística caberá aplicar os recursos obtidos com a presente operação, na qualidade de órgão executor do VIII Censo Geral do Brasil.

Art. 3.º O Ministério do Planejamento e Coordenação Geral incluirá no orçamento Plurianual de Investimentos da União e da Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, para o triênio 1969-71 tôdas as parcelas relativas a Receita e Despesa decorrentes de utilização do empréstimo de que trata o presente Decreto-lei

Art 4º Êste Decreto-lei entrará em vigor na data de sua publicação, revogadas as disposições em contrário

Brasília, 22 de janeiro de 1969; 148º da Independência e 81º da República.

A. COSTA E SILVA
Antônio Delfim Netto
Hélio Beltrão

Diário Oficial, Brasília, Seção 1 — Parte 1, 23 de janeiro 1969, p 793-4

RESOLUÇÕES DO CONSELHO DIRETOR

RESOLUÇÃO COD-80, DE 8 DE JANEIRO DE 1969

Cria, no Instituto Brasileiro de Estatística, o Departamento de Divulgação Estatística — DEDIVE.

O CONSELHO DIRETOR da FUNDAÇÃO IBGE, no uso das atribuições que lhe confere o artigo 16, alínea *e* do Estatuto, e

considerando a necessidade de ser alcançada melhor coordenação, sistematização e atualização dos trabalhos de divulgação estatística a cargo do IBE, sobretudo visando a atender a demanda da produção estatística, resultante principalmente de reestruturação que se processa na organização técnica da entidade;

considerando que, como contingência do papel relevante que cada vez mais vem desempenhando a Estatística no campo do planejamento e análise dos fatos econômicos e sociais, impõe-se, além da divulgação tabular, propiciar também o estudo e a interpretação dos fenômenos por ela pesquisados e levantados, apresentando-se em publicações especializadas,

RESOLVE:

Art. 1º — Fica criado, no Instituto Brasileiro de Estatística, o *Departamento de Divulgação Estatística* —

DEDIVE, diretamente subordinado ao Diretor Superintendente.

Art. 2º — No cumprimento das suas finalidades, compete precìpuamente ao DEDIVE:

a) planejar, coordenar e sistematizar a edição dos trabalhos de divulgação estatística;

b) promover a realização de trabalhos de interpretação dos dados estatísticos com a colaboração de técnicos de setores especializados, com vistas a sua ampla divulgação;

c) prestar assistência técnica aos órgãos do sistema estatístico nacional, visando à coordenação e sistematização dos trabalhos de divulgação estatística

Art 3º — A estrutura geral do DEDIVE será a seguinte:

I — DIREÇÃO

a) Assessoria Técnica.

II — DIVISÃO DO ANUÁRIO ESTATÍSTICO DO BRASIL

a) Setor de Coordenação;

b) Setor de Estatísticas Demográficas, Sociais e Culturais,

c) Setor de Estatísticas Econômimas e Financeiras

III — DIVISÃO EDITORIAL

a) Secretaria do "Boletim Estatístico";

b) Secretaria da "Revista Brasileira de Estatística";

c) Setor de Publicações Estatísticas Regionais;

d) Setor de Publicações Especiais e Metodológicas

IV — SERVIÇOS AUXILIARES

a) Setor de Representação Gráfica;

b) Setor de Distribuição;

c) Seção de Mecanografia

Art. 4.º — Sob a direção imediata do Diretor do DEDIVE, a competência precípua de cada um dos seguintes órgãos será:

a) da *Assessoria Técnica*: prestar assistência à direção; elaborar comentários e pequenos estudos técnicos; planejar e executar trabalhos especiais que não sejam da competência específica de qualquer das Divisões que compõem o Departamento, promover a divulgação das obras editadas; coordenar e promover regularmente a realização de exposições, simpósios, conferências, debates sôbre assuntos estatísticos, em complementação da divulgação periódica feita através de publicações editadas, realizando, assim, a difusão intensiva dos resultados da pesquisa estatística; preparar e publicar, periòdicamente, comunicados à imprensa;

b) da *Divisão do Anuário Estatístico*: planejar, preparar e editar o "Anuário Estatístico do Brasil", a "Atualidade Estatística do Brasil", "O Brasil em Números", "O Mundo em Números" e outras publicações tabulares, apresentando séries estatísticas nacionais e confrontos internacionais, diligenciando para que êsses trabalhos sejam editados, em prazos ideais à sua utilização; proceder a revisões sistemáticas nos processos e normas para divulgação de resultados estatísticos, considerando os métodos e padrões em vigor nos organismos internacionais; realizar estudos com vistas à atualização e ao aperfeiçoamento da apresentação das publicações; sugerir, a órgãos do IBE e do Sistema Estatístico, adaptações e complementações de estatísticas de responsabilidade dos mesmos;

c) da *Divisão Editorial*: planejar, preparar e editar a "Revista Brasileira de Estatística" e o "Boletim Estatístico", buscando a progressiva melhoria técnica e noticiosa da matéria especializada de cada uma dessas publicações; elaborar e editar sinopses regionais, estaduais e municipais abrangendo resultados estatísticos e comentários analíticos sôbre a realidade social, cultural e econômica da região; promover a sistematização e o lançamento, com a presteza necessária, dos trabalhos originários de outros órgãos do IBE; planejar, preparar e editar publicações especiais e promover a divulgação de trabalhos sôbre metodologia estatística,

d) dos *Serviços Auxiliares*: controlar e guardar o estoque das publicações elaboradas nos órgãos do IBE, bem como proceder a sua distribuição, respeitadas as prioridades e condições específicas a cada uma, preparar os originais datilografados de trabalho cuja publicação esteja a cargo do órgão, confeccionar os gráficos para as publicações, como também colaborar na montagem das exposições que o IBE venha a promover ou de que venha a participar

Art 5º — Obedecidas as normas gerais da Fundação, o DEDIVE poderá utilizar pessoal temporário para o atendimento de seus encargos específicos

Art 6º — O DEDIVE manterá estreito e permanente entendimento com o Serviço Gráfico da Fundação, no sentido de serem atendidos os prazos, as prioridades e os planos fixados para o lançamento das publicações

Art 7º — Os órgãos técnicos e administrativos do IBE assegurarão ao DEDIVE tôda a colaboração que seja necessária ao cumprimento de suas atribuições

Art. 8º — Esta Resolução entra em vigor a partir desta data

RESOLUÇÃO COD-81, DE 15 DE JANEIRO DE 1969

Extingue, no Instituto Brasileiro de Estatística, os órgãos que menciona.

O CONSELHO DIRETOR da FUNDAÇÃO IBGE, no uso de suas atribuições, tendo em vista o disposto no artigo 70, letra *a*, do Estatuto da Fundação, e

considerando que até ulterior deliberação dêste Conselho os serviços e órgãos da Secretaria-Geral do Conselho Nacional de Estatística foram distribuídos ao Instituto Brasileiro de Estatística (artigo 6 º, item II, letra *a*, do Decreto n º 61 127, de 2 de agôsto de 1967);

considerando que o GEPD, o DEICOM, o SEPEX e a COGERE, criados, respectivamente, pelas Resoluções COD/6, de 1967, COD/25, COD/31 e COD/40, de 1968, absorveram os encargos e atribuições de órgãos e serviços da Secretaria-Geral do Conselho Nacional de Estatística,

RESOLVE:

Art. 1.º — Ficam extintos, na estrutura do Instituto Brasileiro de Estatística, os seguintes órgãos do antigo Conselho Nacional de Estatística (Secretaria-Geral), que, nos têrmos do artigo 70, letra *a*, do Estatuto da Fundação, e do artigo 6 º, item II, letra *a*, do Decreto n º 61 127, de 2 de agôsto de 1967, foram distribuídos ao citado Instituto, a saber:

1 *Órgãos da Diretoria de Levantamentos Estatísticos*:

1.1 — Direção

1 2 — Serviço de Inquéritos

1.2 1 — Seção de Campanhas Estatísticas

1.2 2 — Seção de Comércio Interestadual

1.2.3 — Seção de Inquéritos Especiais

1 3 — Agências Distritais de Estatística (em número de 14), do Serviço de Coleta do Distrito Federal

2 *Seção de Classificação de Cargos, do Serviço de Pessoal da Diretoria de Administração*

3 *Inspetoria Técnica.*

Art. 2.º — O Serviço de Coleta do Distrito Federal e o Serviço de Apuração Mecânica, ambos integrantes da antiga Diretoria de Levantamentos Estatísticos, continuam a subordinar-se, até ulterior deliberação, ao Diretor-Superintendente do IBE e ao Diretor do DEICOM do mesmo Instituto, respectivamente, como estabelecido nas Portarias IBE n.º 38, de 21 de outubro de 1968, e n º 35, de 9 de outubro de 1968.

Art 3 º — Esta Resolução entra em vigor a partir desta data

RESOLUÇÃO COD-82, DE 15 DE JANEIRO DE 1969

Extingue, no Instituto Brasileiro de Geografia, os órgãos que menciona.

O CONSELHO DIRETOR da FUNDAÇÃO IBGE, no uso de suas atribuições, tendo em vista o disposto no artigo 70, letra *a*, do Estatuto da Fundação, e

considerando que até ulterior deliberação dêste Conselho os serviços e órgãos da Secretaria-Geral do Conselho Nacional de Geografia foram distribuídos ao Instituto Brasileiro de Geografia (artigo 6 º, item II, letra *b*, do Decreto n.º 61 127, de 2 de agôsto de 1967);

considerando que o SEPEX e o DEGEO, criados, respectivamente, pelas Resoluções COD/31 e COD/35, de 1968, absorveram os encargos e atribuições de órgãos distribuídos ao Instituto Brasileiro de Geografia,

RESOLVE:

Art. 1 º — Ficam extintos, na estrutura do Instituto Brasileiro de Geografia, os seguintes órgãos da antiga Secretaria-Geral do Conselho Nacional de Geografia, que, nos têrmos do artigo 70, letra *b*, do Estatuto da Fundação, e do artigo 6.º, item II, letra *b* do Decreto n º 61 127, de 2 de agôsto de 1967, foram distribuídos ao citado Instituto, a saber:

I — *Divisão de Geografia*, com a seguinte organização:

1 Gabinete da Direção da Divisão
2 Secretaria da Divisão
3 Seção Regional Norte
4. Seção Regional Nordeste
5 Seção Regional Leste
6 Seção Regional Sul
7 Seção Regional Centro-Oeste
8 Seção de Estudos Sistemáticos

8.1 — Setor de Geomorfologia
8 2 — Setor de Climatologia
8 3 — Setor de Biogeografia
8 4 — Setor de Geografia Humana
8 5 — Setor de Geografia Política
8 6 — Setor de Geografia Econômica .

9 Seção de Cálculos
10. Seção de Atlas e Ilustrações
10 1 — Setor de Atlas

II — *Setor de Classificação de Cargos, da Seção de Pessoal da Divisão de Administração*

Art. 2.º — O Setor de Fotografia e Cinema e o Setor de Ilustrações Geográficas, ambos integrantes da antiga

Divisão de Geografia, continuam a subordinar-se, até ulterior deliberação, ao Diretor da Divisão Cultural do IBG, como estabelecido na Portaria IBG nº 49-A, de 5 de novembro de 1968.

Art 3º — Esta Resolução entra em vigor a partir desta data.

RESOLUÇÃO COD-83, DE 15 DE JANEIRO DE 1969

Extingue, no Instituto Brasileiro de Estatística, os órgãos que menciona.

O CONSELHO DIRETOR da FUNDAÇÃO IBGE, no uso de suas atribuições, tendo em vista o disposto no artigo 70, letra *a*, do Estatuto da Fundação, e

considerando que até ulterior deliberação dêste Conselho os serviços e órgãos do Serviço Nacional de Recenseamento foram distribuídos ao Instituto Brasileiro de Estatística (artigo 6.º, item II, letra *a*, do Decreto n.º 61.127, de 2 de agôsto de 1967);

considerando que o DECEN e o CENPRO, criados, respectivamente, pelas Resoluções COD/41 e COD/43, de 1968, absorveram os encargos e atribuições do Serviço Nacional de Recenseamento,

RESOLVE:

Art. 1.º — Ficam extintos, na estrutura do Instituto Brasileiro de Estatística, todos os órgãos do Serviço Nacional de Recenseamento, que, nos têrmos do artigo 70, letra *a*, do Estatuto da Fundação, e do artigo 6º, letra *a*, do Decreto nº 61 127, de 2 de agôsto de 1967, foram distribuídos ao citado Instituto, a saber:

1 *Gabinete do Diretor-Geral*

2 *Diretoria Técnica*

2 1 — *Divisão de Processamento de Dados*

2 1 1 — *Serviço de Programação*

2 1 1 1 — Seção de Análise de Processamento de Dados
2 1 1 2 — Seção de Análise Técnico-Científica
2 1 1 3 — Setor de Programação e Codificação

2 1 2 — *Serviço de Operação de Computadores Eletrônicos*

2 1 2 1 — Seção de "Univac 1 105"
2 1 2 2 — Seção de "Univac Solid State 80"
2 1 2 3 — Setor de Equipamento Periférico

2 1 3 — *Seção de Contrôle e Arquivo*

2 1 4 — *Serviço de Operação de Equipamento Convencional*

2 1 4 1 — Seção de Perfuração
2 1 4 1.1 — Setor de Perfuração do Censo Demográfico
2 1 4 1 2 — Setor de Perfuração dos Censos Econômicos

2 1 4 2 — Seção de Apuração
2 1 4 2 1 — Setor de Classificação
2 1 4 2 2 — Setor de Tabulação

2 1 4 3 — Setor de Cadastro

2 1 5 — *Serviços de Manutenção*

2 1 5 1 — Seção de Equipamento Eletrônico
2 1 5 2 — Seção de Equipamento Convencional
2 1 5 3 — Seção de Infraestrutura
2 1 5 4 — Seção de Formação e Aperfeiçoamento

2 2 — *Divisão de Levantamentos Censitários*

2 2 1 — *Serviço de Inquéritos Censitários*

2 2 1 1 — Seção do Censo Demográfico
2 2 1 2 — Seção do Censo Agrícola
2 2 1 3 — Seção do Censo Industrial
2 2 1 4 — Seção dos Censos Comercial e dos Serviços
2 2 1 5 — Seção de Movimentação e Arquivo

2 2 2 — *Serviço de Documentação e Divulgação*

2 2 2 1 — Seção de Documentação e Intercâmbio
2 2 2 2 — Seção de Divulgação
2 2 2 3 — Seção de Mecanografia
2 2.2 4 — Seção de Sistematização

2 2 3 — *Serviço de Planejamento e Análise*

2 2 3 1 — Seção de Amostragem

2 2 3 1 1 — Setor de Amostragem para Inquéritos Econômicos

2 2 3 1 2 — Setor de Amostragem para Inquéritos Demográficos

2 2 3 2 — Seção de Planos Gerais
2 2 3 3 — Seção de Análise
2 2 3 4 — Seção de Base Geográfica

3. *Divisão de Administração*

3 1 — *Serviço Econômico e Financeiro*

3 1 1 — Seção de Orçamento
3.1 2 — Seção de Contabilidade

3 2 — *Serviço de Pessoal, Material e Comunicações*

3 2.1 — Seção de Pessoal
3.2 2 — Pôsto Médico
3 2 3 — Seção de Comunicações

3 2 3 1 — Setor de Protocolo e Arquivo
3 2 3 2 — Setor de Datilografia

3 2 4 — Seção de Administração do Edifício-sede
3 2 5 — Seção de Material

3 2 5 1 — Setor de Almoxarifado
3 2 5 2 — Setor de Instalações e Reparos

3 3 — *Pagadoria*

Art 2.º — Esta Resolução entra em vigor na partir desta data

RESOLUÇÃO COD-84, DE 21 DE JANEIRO DE 1969

Dispõe sôbre a aplicação do Regime de Tempo Integral e Dedicação Exclusiva prevista no § 1º do art. 67 do Estatuto da Fundação.

O CONSELHO DIRETOR da FUNDAÇÃO IBGE, no uso das atribuições que lhe confere o artigo 16, alíneas *f* e *g* do Estatuto, e

considerando que, por despacho de 13 do corrente no processo MINIPLAN n.º 5.236/67, o Senhor Ministro do Planejamento e Coordenação Geral autorizou a execução do disposto no § 1º do artigo 67 do Estatuto da Fundação IBGE;

considerando a experiência já adquirida na aplicação do regime de tempo integral e dedicação exclusiva no serviço público;

considerando, ainda, que a natureza jurídica da Fundação e dos cargos abrangidos exigem normas disciplinares próprias,

RESOLVE:

Art. 1.º — A ajuda de custo prevista no § 1.º do artigo 67 do Estatuto será paga ao dirigente compreendido nesse dispositivo estatutário que optar pelo regime de tempo integral e dedicação exclusiva, observadas as normas estabelecidas nesta Resolução.

Art. 2.º — O dirigente que optar pelo regime de tempo integral e dedicação exclusiva estará proibido de exercer cumulativamente outro cargo, função ou atividade, remunerada ou não, pública ou particular, de qualquer natureza.

§ 1º — Não se compreendem na proibição dêste artigo:

I — a participação em órgão de deliberação coletiva, desde que decorrente do cargo ou do interêsse da Fundação, a critério do Conselho Diretor;

II — a prestação eventual de assistência não remunerada a outros órgãos do serviço público, visando à aplicação de conhecimentos técnicos ou científicos, quando solicitada oficialmente à Fundação e que, a critério do Conselho Diretor, não prejudique o pleno exercício do cargo em regime de tempo integral.

§ 2º — O dirigente que estiver legalmente acumulando cargos públicos, ou prestando quaisquer serviços a terceiros, ficará obrigado a, pela forma legal cabível, afastar-se do exercício do cargo ou atividade incompatível com o regime, durante todo o período em que a êle estiver subordinado.

Art. 3.º — O regime de tempo integral e dedicação exclusiva obrigará o dirigente optante ao cumprimento do disposto no artigo 6º do Decreto número 60 091, de 18 de janeiro de 1967, bem como à sua presença nos dois turnos normais de trabalho.

Art 4.º — O dirigente no regime de tempo integral e dedicação exclusiva que se afastar do exercício do cargo deixará de fazer jus à ajuda de custo prevista no § 1.º do art 67, salvo nos casos de afastamento previstos no art. 14 do Decreto n.º 60 091, de 18-1-67, no que couber

Art 5.º — A opção pelo regime de tempo integral e dedicação exclusiva far-se-á mediante assinatura de têrmo de compromisso em três (3) vias, no qual o optante declarará vincular-se ao regime e dispor-se a cumprir rigorosamente tôdas as obrigações que lhe forem inerentes.

Parágrafo único — A primeira via do têrmo será arquivada na Secretaria-Geral da Fundação, a segunda na ASPES e, a terceira, no órgão de pessoal subordinado ao dirigente optante

Art. 6.º — Cessará o regime de tempo integral e dedicação exclusiva:

a) automàticamente, na data de cessação do mandato do dirigente optante;
b) por decisão do Presidente da Fundação, quando, a seu juízo, deixar de corresponder às necessidades do serviço;
c) a pedido do próprio dirigente optante.

Art. 7.º — Esta Resolução entra em vigor a partir desta data.

RESOLUÇÃO COD-85, DE 29 DE JANEIRO DE 1969

Aprova o Regimento Interno da Comissão Nacional de Planejamento e Normas Estatísticas (CONPLANE).

O CONSELHO DIRETOR da FUNDAÇÃO IBGE, no uso das atribuições que lhe confere a alínea *p* do art 16 do Estatuto,

RESOLVE:

Art 1.º — Fica aprovado, na forma do Anexo, o Regimento Interno da Comissão Nacional de Planejamento e Normas Estatísticas (CONPLANE)

Art. 2.º — Esta Resolução entra em vigor a partir desta data.

COMISSÃO NACIONAL DE PLANEJAMENTO E NORMAS ESTATÍSTICAS

REGIMENTO INTERNO

CAPÍTULO I

Da finalidade e competência

Art 1.º — A Comissão Nacional de Planejamento e Normas Estatísticas (CONPLANE é o órgão do Instituto Brasileiro de Estatística (IBE) incumbido de proceder à coordenação de tôdas as atvidades técnicas da entidade (Estatuto da Fundação IBGE, artigo 28).

Parágrafo único — Compete prioritàriamente à CONPLANE pronunciar-se sôbre os programas e planos de trabalho dos órgãos integrantes do sistema estatístico nacional, sempre que se deseje assegurar a obrigatoriedade legal da informação estatístca (Estatuto da Fundação, art 29).

CAPÍTULO II

Da composição e coordenação dos trabalhos

Art. 2º — A CONPLANE é constituída pelos seguintes membros (Estatuto da Fundação IBGE, art 28):

I — Diretor-Superintendente do IBE;

II — Titulares dos órgãos de mais alta hierarquia do IBE, designados pelo Conselho Diretor;

III — Representantes do Instituto Brasileiro de Geografia e da Escola Nacional de Ciências Estatísticas, designados pelos Diretore-Superintendentes respectivos,

IV — Representantes dos Estados-Maiores do Exército, da Armada e da Aeronáutica, designados pelos respectivos Ministros de Estado ;

V — Representantes das entidades usuárias de estatística, nas esferas pública e privada, nacional e regional, em número estabelecido trienalmente pelo Conselho Diretor, metade designada por êsse Conselho e metade indicada pela Conferência Nacional de Estatística.

§ 1.º — O Diretor-Superintendente do IBE será o Coordenador dos trabalhos da Comissão.

§ 2º — Os membros da CONPLANE serão substituídos, em suas faltas e impedimentos eventuais, da seguinte forma:

a) Os referidos nos incisos I e II dêste Artigo pelos seus substitutos legais;

b) Os referidos nos incisos II, IV e V por suplentes indicados pelas mesmas autoridades que os designaram.

Art. 3.º — As reuniões plenárias serão presididas pelo Coordenador e secretariadas por servidor do IBE pelo mesmo designado.

Art. 4.º — Compete ao Coordenador:

I — abrir as sessões, presidi-las e suspendê-las, cumprindo e fazendo cumprir êste Regimento;

II — convocar as reuniões extraordinárias, plenárias ou não, e especiais;

III — Determinar e anunciar a Ordem do Dia;

IV — determinar o destino do expediente lido e distribuir as matérias às subcomissões referidas no Capítulo III;

V — decidir as questões de ordem;

VI — orientar e disciplinar as discussões;

VII — exercer, quando couber, o voto de qualidade além do voto simples, e anunciar o resultado das votações;

VIII — efetuar as designações referidas nos arts. 3.º, 6.º, 12 e 14 dêste Regimento;

IX — promover as medidas necessárias ao bom funcionamento da CONPLANE e o fiel cumprimento de suas decisões.

Art. 5 º — Compete ao Secretário:

I — elaborar as atas das reuniões plenárias;

II — preparar a matéria e providenciar os elementos a serem submetidos à apreciação da CONPLANE, de acôrdo com o que ficar estabelecido;

III — acompanhar os trabalhos de secretaria das Subcomissões, tendo em vista o necessário entrosamento entre as mesmas e o Coordenador;

IV — exercer tôdas as demais atribuições inerentes ao cargo e as decorrentes de determinação do Coordenador.

CAPÍTULO III

Das Subcomissões Técnicas

Art. 6.º — A CONPLANE organizará Subcomissões Técnicas, Permanentes ou Especiais, estas para o estudo de assuntos específicos.

§ 1.º — Os membros das Subcomissões Permanentes serão designados pelo Coordenador na primeira reunião de cada ano

§ 2.º — As Subcomissões Especiais, de caráter temporário, serão constituídas, por designação do Coordenador, sempre que convenientes ao encaminhamento dos estudos de responsabilidade da CONPLANE.

Art 7 º — Cada Subcomissão terá, no mínimo, três membros, que serão substituídos, em seus impedimentos, pelos respectivos suplentes

Art 8 º — São as seguintes as Subcomissões Permanentes:

I — Subcomissão de Normas Estatísticas;

II — Subcomissão de Coordenação Técnica;

III — Subcomissão do Plano Nacional de Estatísticas Básicas.

Art. 9.º — Compete à Subcomissão de Normas Estatísticas:

I — estabelecer as normas e princípios a serem observados pelos levantamentos a cargo do sistema estatístico nacional e revê-lo, sempre que necessário, com vistas a mantê-los permanentemente atualizados;

II — acompanhar a aplicação dos princípios normativos que devem prevalecer nos levantamentos constantes do Plano Nacional de Estatística, a fim de certificar-se da sua fiel observância;

III — pronunciar-se, do ponto de vista das normas e princípios aprovados, sôbre os planos de levantamentos estatísticos que sejam submetidos a sua consideração.

Art 10 — Compete à Subcomissão de Coordenação Técnica:

I — opinar sôbre o plano anual das atividades técnicas do IBE;

II — pronunciar-se, prioritàriamente, sôbre os planos dos levantamentos estatísticos dos órgãos do sistema estatístico nacional, a serem integrados no Plano Nacional de Estatísticas e aos quais se deseje assegurar a obrigatoriedade legal da informação estatística;

III — coordenar os programas e planos de trabalho dos órgãos integrantes do sistema estatístico nacional;

IV — acompanhar, através de relatórios numéricos e descritivos, a execução dos levantamentos de responsabilidade do IBE.

Art 11 — Compete à Subcomissão do Plano Nacional de Estatísticas Básicas:

I — supervisionar a execução do Plano Nacional de Estatísticas Básicas e sugerir medidas à CONPLANE sempre que necessárias a seu fiel cumprimento.

II — estudar e propor a revisão do Plano, visando a ajustá-lo às diretrizes da política de desenvolvimento nacional e regional do Govêrno.

Art. 12 — Os trabalhos das Subcomissões Técnicas serão coordenados por um de seus membros, de livre escolha do Coordenador da CONPLANE

Parágrafo único — Ao Coordenador da Subcomissão compete dirigir seus trabalhos, cumprindo e fazendo cumprir, no que couber, o presente Regimento.

Art. 13 — Os membros de cada Subcomissão Técnica, exceto o seu Coordenador, funcionarão como Relatores, em rodízio trimestral.

Parágrafo único — Ao membro Relator, que será designado pelo Coordenador da Subcomissão, compete dar parecer por escrito nos processos que lhe forem distribuídos.

Art. 14 — As reuniões das Subcomissões Técnicas serão secretariadas por servidor do IBE designado pelo Coordenador da CONPLANE

Art. 15 — As deliberações aprovadas pelas Subcomissões Técnicas terão apenas fôrça opinativa e seus pareceres serão submetidos ao plenário da CONPLANE.

Art. 16 — As Subcomissões Técnicas terão o prazo de trinta dias para emitir parecer.

Parágrafo único — Quando necessária a dilatação de prazo, o Coordenador da Subcomissão deverá solicitá-la ao Coordenador da CONPLANE, mediante pedido fundamentado, feito até 5 dias antes do término do prazo regimental de 30 dias.

CAPÍTULO IV

Das Sessões

Art 17 — A CONPLANE reunir-se-á normalmente na sede do IBE, podendo entretanto fazê-lo em outro local, por decisão de seu Coordenador

§ 1.º — As sessões plenárias serão:

a) ordinária — uma em cada trimestre, realizada em dia pré-fixado pelo Coordenador.

b) extraordinárias — tôdas as demais realizadas no trimestre por convocação do Coordenador, ou da maioria dos membros da Comissão

§ 2.º — Além dos membros da Comissão, poderão comparecer às reuniões técnicos convidados pelo Coordenador.

Art. 18 — À hora do nício da sessão, achando-se presente a maioria dos membros da CONPLANE, nela incluídos pelo menos dois representantes dos órgãos técnicos do IBE, um representante das entidades usuárias de estatísticas e um representante militar, o Coordenador declarará abertos os trabalhos.

Parágrafo único — Não se realizará sessão quando não houver o "quorum" previsto neste artigo, até 30 minutos após a hora marcada para o seu início.

Art. 19 — Os membros da . . . CONPLANE poderão usar da palavra para:

I — apresentar proposição,
II — debater matéria em discussão;
III — apresentar questão de ordem;
IV — encaminhar votação;
V — justificar voto;
VI — comunicações.

Art. 20 — Sôbre cada proposição, o membro da CONPLANE poderá usar da palavra durante quinze minutos, salvo permissão expressa do Coordenador

Parágrafo único — O orador deverá ater-se ao assunto da proposição

Art 21 — Para assegurar a ordem nos trabalhos, serão observadas as seguintes normas:

I — o uso da palavra será dado pelo Coordenador;
II — os apartes só serão tolerados quando permitidos pelo orador.

Art. 22 — As Subcomissões Técnicas reunir-se-ão quando convocadas pelos respectivos Coordenadores

CAPÍTULO V

Da ordem dos trabalhos

Art. 23 — A ordem dos trabalhos será a seguinte:

I — discussão, votação e assinatura da ata da sessão anterior;
II — expediente;
III — comunicações do Coordenador;
IV — apresentação de proposições,
V — ordem do dia, que compreenderá a discussão e votação de proposições e pareceres;
VI — palavra livre.

§ 1.º — O Secretário fará distribuir, com antecedência mínima de trinta e seis horas à realização das sessões plenárias, cópia da ata a ser discutida e a relação da matéria incluída na Ordem do Dia da comissão

§ 2.º — A ordem dos trabalhos poderá ser alterada pelo plenário, a requerimento de qualquer membro.

§ 3.º — Só poderá ser discutida e votada matéria não incluída prèviamente na Ordem do Dia, quando fôr votada urgência pelo plenário

§ 4.º — O Coordenador poderá, em qualquer momento, fazer ao plenário comunicações que possam interessar à Comissão.

CAPÍTULO VI

Das proposições

Art. 24 — As proposições consistirão em projetos de resolução, emendas, indicações, requerimentos e relatórios.

Art. 25 — Os projetos de resolução tratarão exclusivamente de matéria técnica e serão apresentados pelas Subcomissões.

Art. 26 — Os requerimentos, as indicações e as emendas serão apresentados por escrito.

Parágrafo único — O Coordenador dará conhecimento ao plenário dos têrmos dessas proposições e, quando couber, as encaminhará às correspondentes subcomissões.

CAPÍTULO VII

Das discussões

Art 27 — As emendas e indicações serão discutidas e votadas na sessão em que forem apresentadas, salvo deliberação em contrário do plenário ou do Coordenador.

Art 28 — Os requerimentos poderão ser discutidos e votados na mesma sessão de sua apresentação, desde que estejam em condições de serem apreciados pelo plenário, a critério do Coordenador.

Art 29 — Os projetos de Resolução sòmente serão discutidos e votados com o parecer da Subcomissão Técnica a que a matéria esteja afeta.

Parágrafo único — Concedida urgência pelo plenário, o parecer da Subcomissão poderá ser verbal.

CAPÍTULO VIII

Da votação

Art 30 — Encerradas as discussões, a matéria será submetida à votação.

§ 1.º — A votação será sempre nominal, e poderá ser global ou por destaque, conforme deliberar o plenário.

§ 2.º — Não haverá voto por delegação

Atr. 31 — A chamada para a votação será feita na ordem da lista de presença, sendo os votos anotados pelo Secretário da Comissão

§ 1º — Finda a votação, o Coordenador determinará ao Secretário que leia o nome dos membros que votaram a favor e contra e anunciará o resultado

§ 2.º — Facultar-se-á aos membros da Comissão, ao votar ou depois de concluída a votação, fazer declaração de voto, a qual constará da ata.

Art. 32 — As deliberações serão tomadas por maioria simples.

CAPÍTULO IX

Da redação final

Art 33 — A redação final dos projetos de Resolução será discutida e votada na sessão seguinte à da sua aprovação.

§ 1º — A votação da redação final do projeto poderá processar-se na mesma sessão em que tenha sido aprovado, se concedido regime de urgência.

§ 2º — Na discussão e votação da redação final só serão admitidas emendas que visem a evitar incorreção de linguagem, imprecisão de sentido ou incoerência notória.

Art 34 — O projeto sòmente se transformará em Resolução quando aprovado em redação final.

Art. 35 — As resoluções serão conferidas e numeradas pelo Secretário da Comissão, visadas e rubricadas pelo Diretor Superintendente do IBE e publicadas no Boletim de Serviço da Fundação IBGE.

CAPÍTULO X

Das disposições especiais

Art 36 — Os casos omissos neste Regimento serão resolvidos pelo Coordenador, de acôrdo com a legislação vigente.

RESOLUÇÃO COD-86, DE 29 DE JANEIRO DE 1969

Dispõe sôbre a estrutura do Serviço Gráfico da Fundação IBGE (SERGRAF) e estabelece normas para seu funcionamento

O CONSELHO DIRETOR DA FUNDAÇÃO IBGE, no uso das atribuições que lhe confere o artigo 16, alínea *e* do Estatuto, e

considerando a necessidade de serem definidas as linhas gerais de competência e de funcionamento dos órgãos administrativos e de produção do Serviço Gráfico da Fundação IBGE, em face da nova organização jurídica da Entidade, que o situou no âmbito da Administração Central da Fundação;

considerando que a organização do Serviço Gráfico deve ter em vista o de-

senvolvimento das suas atividades com as características de emprêsa de prestação de serviços,

RESOLVE:

Art. 1.º — O Serviço Gráfico da Fundação IBGE — SERGRAF — órgão de natureza industrial, diretamente subordinado à Presidência, gozará de autonomia técnica, administrativa e financeira, observadas as normas gerais da Fundação e as Resoluções baixadas pelo Conselho Diretor

Art. 2º — No comprimento das suas finalidades, o SERGRAF prestará serviços no campo da indústria gráfica, prioritàiramente, aos órgãos da Fundação IBGE, podendo, ainda, executar trabalhos para órgãos públicos, entidades do setor privado e particulares

Art 3.º — A estrutura do Serviço Gráfico será a seguinte:

I — SUPERINTENDÊNCIA

a) Grupo de Coordenação
b) Setor de Orçamentos de Custos
c) Serviços Gerais
   c — 1. Carpintaria
   c — 2. Pintura
d) Garagem

II — DIVISÃO DE PRODUÇÃO

a) Setor de Programação
b) Seção de Contrôle da Produção
c) Seção de Revisão de Provas Tipográficas
d) Unidade de Manutenção
e) Subdivisão das Oficinas
   e — 1. Setor de Composição Manual
   e — 2. Setor de Composição Linotípica
   e — 3 Setor de Composição Monotípica
   e — 4. Setor de Fotolito e Clicheria
   e — 5 Setor de Impressão Tipográfica
   e — 6. Setor de Impressão Off-set
   e — 7. Setor de Acabamento

III — DIVISÃO ADMINISTRATIVA

a) Setor de Pessoal
b) Setor de Compras
c) Setor de Contabilidade
d) Tesouraria
e) Seção Patrimonial
f) Almoxarifado
g) Seção de Expedição.

Art. 4.º — A direção técnica e administrativa do Serviço Gráfico será exercida por um Superintendente, coadjuvado por um Superintendente-Adjunto, ambos de livre designação do Presidente da Fundação.

Art. 5º — O Grupo de Coordenação, sob a supervisão do Superintendente, será integrado pelos seguintes membros: a) Superintendente-Adjunto; b) Chefe da Divisão Administrativa; c) Chefe da Divisão de Produção; d) Chefe da Subdivisão das Oficinas; e) um elemento da Administração Central, designado pelo Presidente da Fundação.

§ 1º — O Superintendente-Adjunto exercerá as funções de Secretário-Executivo do Grupo de Coordenação

§ 2.º — O Grupo de Coordenação se reunirá, obrigatòriamente, uma vez por mês, ou sempre que convocado pelo Superintendente

Art 6.º — Sob a direção imediata do Superintendente do Serviço Gráfico, compete precìpuamente a cada um dos órgãos:

a) Ao *Grupo de Coordenação*: elaborar anualmente a proposta orçamentária do Serviço Gráfico; assessorar a Superintendência nos casos de licitação pública ou de contratos de obras oriundas da área privada; colaborar na programação de execução dos serviços industriais; acompanhar a execução orçamentária e a arrecadação da receita; examinar, prèviamente, os balanços e balancetes que devam ser submetidos à Presidência, bem como as propostas de alterações orçamentárias; desincumbir-se das tarefas que lhe forem atribuídas pela Superintendência;

b) Ao *Setor de Orçamentos de Custos*: obter os elementos necessários à fixação dos padrões de custos; preparar os orçamentos dos serviços com base nas instruções fornecidas pela Superintendência; aferir os custos reais dos serviços realizados;

c) Aos *Serviços Gerais*: as tarefas auxiliares de portaria, vigilância, limpeza, conservação, carpintaria, pintura e outros encargos que lhe forem atribuídos pela Superintendência;

d) A *Divisão de Produção*: coordenação todos os trabalhos das oficinas gráficas e da unidade de manutenção; realizar os encargos pertinentes ao planejamento

(lay-out), à execução das atividades industriais, à programação e ao contrôle das obras durante tôdas as fases de trabalho; pesquisar e desenvolver métodos aplicáveis à indústria gráfica, acompanhando a evolução técnica, sempre visando manter o Serviço Gráfico em condições de competir no mercado;

e) A *Divisão Administrativa*: planejar, coordenar, controlar e executar os encargos administrativos do Serviço Gráfico; apreciar questões relativas a direitos, vantagens e deveres do pessoal, preparar fôlha de pagamento do pessoal, controlar a execução orçamentária, contabilizar os documentos relativos aos fatos administrativos e escriturar o movimento patrimonial e financeiro; organizar balancetes mensais e balanços anuais, arrecadar a receita e pagar as despesas regularmente processadas, coordenanar e executar os serviços inerentes à administração de material e de expedição

Art 7 º — Até ulterior deliberação, serão observadas pelo SERGRAF as normas estabelecidas pela Resolução COD/29/68, de 6 de março de 1968

Art 8 º — Os recursos financeiros de que disporá o SERGRAF advirão de suas próprias atividades, como resultado dos serviços prestados.

Art 9 º — Além dos recursos financeiros previstos no artigo anterior, poderá o SERGRAF, por fôrça de convênios, contar com outras receitas, receber auxílios e obter financiamentos, obedecidas as normas traçadas pelo Conselho Diretor

Art 10 — A execução de obra tipográfica, correlata ou congênere, fica subordinada às seguintes condições:

a) apresentação do conhecimento de empenho de verba específica, ou de documento que ateste a existência de recursos financeiros disponíveis, quando se tratar de órgãos da Fundação IBGE,

b) apresentação do conhecimento de empenho de verbas específicas, quando se tratar de órgão do Serviço Público;

c) pagamento antecipado de 50% do valor orçado, na autorização de execução, ou fornecimento do papel a ser utilizado, e observância das normas comerciais vigentes no mercado da indústria gráfica, nos demais casos.

§ 1.º — Em se tratando do documento que ateste a existência de recursos financeiros, referido na letra *a* dêste artigo, o Superintedente do SERGRAF receberá autorização do Secretário-Geral da Fundação.

§ 2 º — Nos casos da letra *b*, o Serviço Gráfico poderá exigir, quando julgar conveniente, o fornecimento do papel, facultado ao cliente o recolhimento da importância correspondente, no ato de autorização da encomenda

§ 3 º — Os casos especiais, aos quais não possam ser aplicadas as disposições dêste artigo, serão submetidos ao Secretário-Geral da Fundação.

Art. 11 — Aplicam-se ao Serviço Gráfico, no que couber, tôdas as Resoluções do Conselho Diretor e Normas de Trabalho adotadas pela Fundação.

Art 12 — Atendidas as peculiaridades do regime industrial do Serviço Gráfico, a organização do seu quadro de pessoal será levada a efeito consoante dispõe o parágrafo único do artigo 1 º da Resolução COD/24/68, de 24 de janeiro de 1968

Art 13 — O pessoal contratado do Serviço Gráfico que fôr designado para exercer cargos de confiança continuará percebendo a sua remuneração normal e, como gratificação pelo exercício do cargo de confiança, o valor correspondente ao padrão de função gratificada, no caso de designação para exercer cargo em comissão, o empregado contratado receberá a diferença entre o padrão dêsse cargo e o seu salário normal, como gratificação pelo exercício do cargo de confiança.

Art. 14 — Obedecidas as normas gerais da Fundação, o Serviço Gráfico poderá utilizar pessoal temporário, remunerado à base de tarefa, para o atendimento de encargos específicos

Art 15 — Pela execução dos encargos especiais, não previstos nos contratos de trabalho, poderá ser arbitrada, pelo Presidente da Fundação, aos empregados do SERGRAF, a gratificação prevista no artigo 14 da Resolução COD/24/68, de 24 de janeiro de 1968.

Art 16 — Os órgãos técnicos e administrativos da Fundação assegurarão ao Serviço Gráfico, na medida de suas possibilidades, colaboração em pessoal, serviços e material

Art. 17 — A implantação da estrutura prevista nesta Resolução dar-se-á a partir da data de aprovação do seu quadro de lotação de cargos de confiança.

RESOLUÇÃO COD-87, DE 13 DE FEVEREIRO DE 1969

Aprova, em caráter provisório, o Quadro de Lotação de Pessoal do Departamento de Divulgação Estatística — *DEDIVE, do Instituto Brasileiro de Estatística*

O CONSELHO DIRETOR da FUNDAÇÃO IBGE, no uso das atribuições que lhe conferem as alíneas *f*, *g* e *h* do artigo 16 do Estatuto e com base no artigo 11 da Resolução COD/24/68, de 24 de janeiro de 1968, e

considerando o que dispõe a Resolução COD/80-69, de 8 de janeiro de 1969, que criou o Departamento de Divulgação Estatística do Instituto Brasileiro de Estatística, e a necessidade de dotar o órgão de pessoal indispensável à realização das tarefas de sua competência;

considerando que a lotação definitiva do órgão sòmente poderá ser estabelecida após a efetivação de estudo específico a ser levado a efeito pela ASPES;

considerando que foi prèviamente cumprido o disposto no § 1º do artigo 50 do Estatuto,

RESOLVE:

Art 1º — Fica aprovado, em caráter provisório, na forma do anexo, o Quadro de Lotação de Pessoal (QLP 309) do Departamento de Divulgação Estatística — DEDIVE, do Instituto Brasileiro de Estatística.

Art. 2º — Dentro do prazo de 90 (noventa) dias, a ASPES apresentará estudo de lotação do mencionado órgão

Art 3.º — No interêsse dos trabalhos do órgão, o Presidente poderá, independentemente de assinatura de contrato de trabalho, designar servidores dos quadros em extinção do IBGE para terem exercício no DEDIVE, sem prejuízo dos respectivos vencimentos e vantagens.

Art 4º — Esta Resolução entra em vigor a partir desta data

FUNDAÇÃO IBGE

Quadro de Lotação de Pessoal

ÓRGÃO:	REFERÊNCIA	IBE
DEDIVE Departamento de Divulgação Estatística Resolução COD/80/69	Res COD/87/69 de 13-2-1969	QLP 309 DATA

I — CARGOS E LOTAÇÃO

CÓDIGO					N.º DE CARGOS	DENOMINAÇÃO DO CARGO	OBSERVAÇÕES
QGP	QLP	Nível	Carreira	Padrão			
1	309	1	0	3	(1)	Diretor	CC
1	309	1	0	5	(2)	Chefe de Divisão (Anuário Estatístico do Brasil e Editorial)	CC
1	309	1	0	6	(1)	Chefe dos Serviços Auxiliares	CC
1	309	1	0	7	(6)	Chefe de Setor (Coordenação, Estatísticas Demográficas, Sociais e Culturais; Estatísticas Econômicas e Financeiras; Publicações Estatísticas Regionais; Publicações Especiais e Metodológicas; Representação Gráfica). . .	CC
1	309	1	0	7	(2)	Chefe de Secretaria (Boletim Estatístico e Revista Brasileira de Estatística)	CC
1	309	1	0	8	(2)	Chefe de Seção (Distribuição e Mecanografia)	CC
1	309	2	0	2	(3)	Assessor	GF
1	309	2	0	6	(1)	Secretária	GF

RESOLUÇÃO COD-88, DE 13 DE FEVEREIRO DE 1969

Cria, no Estado de São Paulo, a Delegacia de Estatística do *IBE* ..... *(DELEST—SP) e a respectiva Comissão de Coordenação.*

O CONSELHO DIRETOR da FUNDAÇÃO IBGE, no uso das atribuições que lhe confere o artigo 16, alínea *e* do Estatuto, e

considerando a necessidade de proceder a uma reformulação estrutural da Rêde-de-Coleta Estatística com vistas a dar-lhe melhores condições para a execução das suas tarefas específicas;

considerando que os estudos realizados apontaram como meio eficiente de dinamizar a coleta estatística, na área estadual, o grupamento de municípios, levando em conta principalmente fatôres geo-econômicos das regiões onde se encontram;

considerando que se torna necessários objetivar, no âmbito regional, a intercooperação técnica entre a Fundação e órgãos e instituições do setor público e privado, tendo em vista principalmente o melhor atendimento, pela Rêde-de-Coleta, dos trabalhos de levantamentos estatísticos de interêsse nacional e estadual

RESOLVE:

Art 1 º — Ficam criadas no Estado de São Paulo, a *Delegacia de Estatística do IBE* (DELEST—SP), diretamente subordinada ao Diretor-Superintendente, e a respectiva *Comissão de Coordenação.*

Art 2 º — No cumprimento de suas finalidades compete precìpuamente à DELEST realizar, em sintonia com os órgãos técnicos centrais do IBE, os trabalhos de pesquisa estatística, principalmente os de coleta de dados, bem como, em casos especiais, os de apuração, sistematização e divulgação estatística, e promover a intercooperação técnica entre a entidade e os órgãos estaduais e municipais de estatística.

Art 3.º — A Comissão de Coordenação terá como atribuição principal estabelecer a mais conveniente programação dos trabalhos estatísticos, no âmbito estadual, visando ao aproveitamento da Rêde-de-Coleta sempre nas melhores condições e à conciliação técnica entre as programações de pesquisas estatísticas federais e regionais.

Art. 4.º — A Comissão de Coordenação constituir-se-á dos seguintes membros: a) Delegado de Estatística do IBE—SP, que será seu Coordenador; b) Delegado-Adjunto; c) Chefes de Divisão da DELEST—SP; d) Dirigente do Órgão Estadual de Estatística; e) Dirigente dos Órgãos de Estatística da Prefeitura da Capital; f) Representante da Secretaria de Planejamento do Govêrno do Estado; g) Representante das Fôrças Armadas; h) Dois membros designados pelo Presidente da Fundação, preferentemente escolhidos entre técnicos vinculados à entidade usuária de dados estatísticos.

Parágrafo único — A indicação dos Representantes previstos nas letras *f* e *g* será solicitada, respectivamente, aos Senhores Governador do Estado e Chefe do Estado-Maior das Fôrças Armadas.

Art. 5 º — A Comissão de Coordenação se reunirá ordinàriamente uma vez por mês e, extraordinàriamente, por convocação do seu Coordenador.

Art. 6.º — A estrutura geral da DELEST—SP será a seguinte:

I — DIREÇÃO

a) Setor de Documentação

a 1 — Biblioteca

b) Setor de Divulgação
c) Equipe de Supervisores de Coleta Estatística

II — DIVISÃO DE COLETA

a) Setor de Cadastro e Contrôle
b) Setor de Orientação da Coleta
c) Setor de Coleta da Capital
d) Agências de Estatística

III — DIVISÃO TÉCNICA

a) Setor de Estatísticas Industriais, Comerciais e de Serviços
b) Setor de Estatísticas Agropecuárias
c) Setor de Estatísticas Vitais, Sociais e Culturais
d) Setor de Pesquisas Sócio-Econômicas

IV — DIVISÃO ADMINISTRATIVA

a) Setor de Pessoal

a 1 — Seção de Registros e Contrôle
a 2 — Seção de Direitos e Vantagens
a.3 — Seção de Assistência Médica e Social

b) Setor de Orçamento e Contabilidade

b 1 — Seção de Orçamento
b 2 — Seção de Contabilidade

c) Setor de Comunicações

c 1 — Arquivo e Correspondência
c 2 — Radiocomunicações

d) Setor de Encargos Gerais

d 1 — Seção de Material

d.1 1 — Almoxarifado
d 1 2 — Oficina de Manutenção e Reparos
d.2 — Administração da Sede
d 2.1 — Portaria

e) Pagadoria.

Art 7 º — A direção técnica e administrativa da DELEST—SP será exercida por um Delegado de Estatística, coadjuvado por um Delegado-Adjunto, que será seu substituto eventual, sendo ambos designados pelo Presidente da Fundação

Parágrafo único — O Delegado-Adjunto, além de outras atribuições que lhe forem cometidas pelo Delegado de Estatística, será o Coordenador direto das atividades da Equipe de Supervisores de Coleta Estatística

Art 8 º — Sob a direção imediata do Delegado de Estatística, a competência precípua de cada um dos seguintes órgãos será:

a) do *Setor de Documentação*, pesquisar, sistematizar e arquivar a documentação técnica de interêsse dos trabalhos estatísticos, coligir, catalogar e arquivar os elementos informativos referentes à evolução econômica, social e político-administrativa do País, dos Estados e dos Municípios, e manter biblioteca especializada

b) do *Setor de Divulgação*, colhêr elementos informativos, reunir os resultados dos levantamentos estatísticos em publicações tabulares e manter organizado um serviço de informações com base nos resultados das pesquisas estatísticas;

c) da *Equipe de Supervisores de Coleta Estatística*, orientar e coordenar os trabalhos técnicos e administrativos das Agências de Estatística, tendo em vista a realização das respectivas tarefas nas melhores condições de qualidade, segurança e rapidez; verificar, em inspeções periódicas, se os cronogramas as instruções e as normas de serviço estão sendo obedecidas; promover as medidas necessárias a fim de conseguir que o material de coleta seja sempre expedido pela Agência de Estatística em condições satisfatórias de correção; comunicar ao Delegado ou aos Chefes de Divisão da DELEST, as anormalidades que observar em seus trabalhos de inspeção, bem como orientá-los sôbre modificações aconselháveis a serem introduzidas nas normas, rotinas, instruções e instrumentos de coleta; tomar as providências necessárias, em sua área de ação, para obter o indispensável regime de mútua cooperação entre as Agências de Estatística.

d) da *Divisão de Coleta*, coordenar e controlar as atividades dos órgãos que lhe são subordinados, de forma a assegurar uniformidade dos levantamentos; providenciar, nos prazos legais e regulamentares, quanto à execução, contrôle e coordenação da coleta estatística, visando à atualização dos levantamentos, organizar e manter atualizado o cadastro de informantes dos diversos inquéritos, de modo a permitir imediato conhecimento da situação de todos os aspectos investigados; diligenciar no sentido de que sejam organizados e mantidos atualizados os cadastros municipais de informantes;

e) da *Divisão Técnica*, planejar, executar e coordenar, isoladamente ou em cooperação com outros órgãos, os levantamentos e pesquisas realizados sob a orientação do respectivo órgão técnico especializado do IBE; proceder à crítica de consistência de questionários e de apurações que efetuar; proceder à apuração de determinados inquéritos de interêsse regional preparar publicações tabulares especiais, tendo em vista a divulgação de estatísticas de interêsse regional

f) da *Divisão Administrativa*, planejar, controlar e executar os encargos administrativos da DELEST; apreciar questões relativas a direitos, vantagens e deveres do pessoal; orientar e fiscalizar a aplicação da legislação respectiva, preparar fôlhas de pagamento do pessoal; elaborar anualmente a proposta orçamentária e controlar a sua execução; contabilizar os documentos relativos aos fatos administrativos e escriturar o movimento patrimonial e financeiro; organizar balancetes mensais e anuais, bem como manter atualizados os documentos demonstrativos da situação econômica e financeira da DELEST; arrecadar a receita e pagar as despesas regularmente processadas; receber, registrar, distribuir, numerar, expedir e arquivar a correspondência relativa às atividades da DELEST; coordenar e executar os serviços inerentes à administração do material; receber, conferir e guardar os materiais adquiridos; zelar pelas condições de conservação dos prédios, bem como manter em perfeitas condições de funcionamento tôdas as instalações.

Art. 9.º — Para efeito dos trabalhos de levantamentos estatísticos, a área de jurisdição de uma Agência de Estatística poderá abranger mais de um Município.

§ 1.º — A área de jurisdição de cada Agência de Estatística será fixada pelo Diretor-Superintendente, por proposta do Delegado de Estatística, considerados, entre outros aspectos, fatôres geo-econômicos da região, tais como a extensão territorial, a população, o número de informantes cadastrados, os meios de comunicação e a centralidade da cidade-sede.

§ 2.º — É da competência do Presidente a aprovação da classificação das Agências e a autorização para sua transferência de um nível para outro.

§ 3º — Dentro do prazo de 30 dias, a COGERE elaborará, com a colaboração dos órgãos técnicos da DELEST—SP, estudo visando à classificação das Agências de Estatística em diferentes categorias, tendo em vista os aspectos geo-econômicos da região, o número de informantes cadastrados, o volume dos encargos e o grau de dificuldade para cumpri-los e outros fatôres que poderão contribuir para estabelecer uma classificação das Agências.

Art 10 —Atendendo às condições de localização geográfica de determinada região, o Diretor-Superintendente poderá autorizar a instalação de Postos de Coleta Estatística, diretamente subordinados a uma Agência de Estatística

Parágrafo único — Ao Encarregado do Pôsto de Coleta poderá ser arbitrada. pelo Presidente da Fundação, a gratificação por encargos especiais prevista no art. 14 da Resolução COD/24/68.

Art. 11 — Quando sediado em Município do interior do Estado, o Supervisor de Coleta Estatística poderá ter um Assistente, ao qual será atribuída, pelo Presidente, a gratificação por encargos especiais, prevista no art 14 da Resolução COD/24/68

Art 12 — Para atender à necessidade de coordenação de pesquisas especiais no âmbito regional, o Presidente poderá autorizar o pagamento de gratificação de encargos especiais, prevista no artigo 14 da Resolução COD/24/68, ao servidor designado Supervisor da pesquisa.

Art. 13 — Obedecidas as normas da Fundação, a DELEST—SP poderá utilizar pessoal temporário, técnicos e pesquisadores eventuais, remunerados à base de tarefa, para a realização de trabalhos específicos

Art 14 — Os órgãos técnicos e administrativos do IBE assegurarão à DELEST, na medida das suas possibilidades, a colaboração necessária para cumprimento pelo órgão das suas atribuições.

Art. 15 — Enquanto não fôr aprovado o grupamento das Agências de Estatística previsto no artigo 9.º, será mantida a atual organização das Agências Municipais de Estatística e das Agências Distritais de Estatística.

Art 16 — A implantação da estrutura prevista nesta Resolução dar-se-á a partir da data de aprovação do seu quadro de lotação de cargos de confiança

RESOLUÇÃO COD-89, DE 13 DE FEVEREIRO DE 1969

Cria, no Estado de Pernambuco, a Delegacia de Estatística do *IBE (DELEST—PE) e a respectiva* Comissão de Coordenação.

O CONSELHO DIRETOR da FUNDAÇÃO IBGE, no uso das atribuições que lhe confere o artigo 16, alínea *e*, do Estatuto e,

considerando a necessidade de proceder a uma reformulação estrutural da Rêde-de-Coleta Estatística com vistas a dar-lhe melhores condições para a execução das suas tarefas específicas;

considerando que os estudos realizados apontaram como meio eficiente de dinamizar a coleta estatística, na área estadual, o grupamento de municípios, levando em conta principalmente fatores geo-econômicos das regiões onde se encontram;

considerando que se torna necessário objetivar, no âmbito regional, a intercooperação técnica entre a Fundação e órgãos e instituições do setor público e privado, tendo em vista principalmente o melhor atendimento, pela Rêde-de-Coleta, dos trabalhos de levantamentos estatísticos de interêsse nacional e estadual.

RESOLVE:

Art 1º — Ficam criadas, no Estado de Pernambuco, a *Delegacia de Estatística* do IBE (DELEST—PE), diretamente subordinada ao Diretor-Superintendente ,e a respectiva *Comissão de Coordenação*

Art. 2º — No cumprimento de suas finalidades compete, precìpuamente à DELEST realizar, em sintonia com os órgãos técnicos centrais do IBE, os trabalhos de pesquisa estatística, principalmente os de coleta de dados, bem como, em casos especiais, os de apuração, sistematização e divulgação estatística, e promover a intercooperação

técnica entre a entidade e os órgãos estaduais e municipais de estatística

Art 3.º — A Comissão de Coordenação terá como atribuição principal estabelecer a mais conveniente programação dos trabalhos estatísticos, no âmbito estadual, visando ao aproveitamento da Rêde-de-Coleta sempre nas melhores condições e à conciliação técnica entre as programações de pesquisas estatísticas federais e regionais

Art. 4.º — A Comissão de Coordenação constituir-se-á dos seguintes membros: a) Delegado de Estatística do IBE-PE, que será seu Coordenador; b) Delegado-Adjunto; c) Chefes de Serviço da DELEST-PE; d) Dirigente do Órgão Estadual de Estatística; e) Dirigente do Órgão de Estatística da Prefeitura da Capital; f) Representante do Órgão de Planejamento do Govêrno do Estado; g) Representante das Fôrças Armadas; h) Dois membros designados pelo Presidente da Fundação, preferentemente escolhidos entre técnicos vinculados à entidade usuária de dados estatísticos.

Parágrafo único — A indicação dos Representantes previstos nas letras *f* e *g* será solicitada, respectivamente, aos Senhores Governador do Estado e Chefe do Estado-Maior das Fôrças Armadas.

Art 5.º — A Comissão de Coordenação se reunirá ordinàriamente uma vez por mês e, extraordinàriamente, por convocação do seu Coordenador.

Art. 6.º — A estrutura geral da DELEST—PE será a seguinte:

I — DIREÇÃO

a) Seção de Documentação
b) Seção de Divulgação
c) Equipe de Supervisores de Coleta Estatística

II — SERVIÇO DE COLETA

a) Setor de Cadastro e Contrôle
b) Setor de Orientação da Coleta
c) Setor de Coleta da Capital
d) Agências de Estatística

III — SERVIÇO TÉCNICO

a) Setor de Estatísticas Industriais, Comerciais e de Serviço
b) Setor de Estatísticas Agropecuárias
c) Setor de Estatísticas Vitais, Sociais e Culturais
d) Setor de Pesquisas Sócio-econômicas

IV — SERVIÇO ADMINISTRATIVO

a) Setor de Pessoal

a 1 — Seção de Direitos e Vantagens

b) Setor de Orçamento e Contabilidade

b 1 — Seção de Contabilidade

c) Seção de Comunicações
d) Seção de Material

d 1 — Almoxarifado

e) Pagadoria
f) Portaria

Art 7.º — A direção técnica e administrativa da DELEST — PE será exercida por um Delegado de Estatística coadjuvado por um Delegado-Adjunto, que será seu substituto eventual, sendo ambos designados pelo Presidente da Fundação.

Parágrafo único — O Delegado-Adjunto, além de outras atribuições que lhe forem cometidas pelo Delegado de Estatística, será o Coordenador direto das atividades da Equipe de Supervisores de Coleta Estatística

Art. 8º — Sob a direção imediata do Delegado de Estatística, a competência, precípua de cada um dos seguintes órgãos será:

a) da *Seção de Documentação,* pesquisar, sistematizar e arquivar a documentação técnica de interêsse dos trabalhos estatísticos; coligir, catalogar e arquivar os elementos informativos referentes à evolução econômica, social e político-administrativa do País, dos Estados e dos Municípios, e manter biblioteca especializada;

b) da *Seção de Divulgação,* colhêr elementos informativos, reunir os resultados dos levantamentos estatísticos em publicações tabulares, e manter organizado um serviço de informações com base nos resultados das pesquisas estatísticas;

c) da *Equipe de Supervisores de Coleta Estatística,* orientar e coordenar os trabalhos técnicos e administrativos das Agências de Estatística, tendo em vista a realização das respectivas tarefas nas melhores condições de qualidade, segurança e rapidez; verificar, em inspeções periódicas, se os cronogramas, as instruções e as normas de serviço estão sendo obedecidos; promover as medidas necessárias a fim de conseguir que o material de coleta seja sempre expedido pela Agência de Estatística em condições satisfatórias de correção; comunicar ao Delegado ou

aos Chefes de Serviço da DELEST, as anormalidades que observar em seus trabalhos de inspeção, bem como orientá-los sôbre modificações aconselháveis a serem introduzidas nas normas, rotinas, instruções e instrumentos de coleta; tomar as providências necessárias, em sua área de ação, para obter o indispensável regime de mútua cooperação entre as Agências de Estatística;

d) do *Serviço de Coleta,* coordenar e controlar as atividades dos órgãos que lhe são subordinados, de forma a assegurar uniformidade dos levantamentos; providenciar, nos prazos legais e regulamentares, quanto à execução, contrôle e coordenação da coleta estatística visando à atualização dos levantamentos; organizar e manter atualizado o cadastro de informantes dos diversos inquéritos, de modo a permitir imediato conhecimento da situação de todos os aspectos investigados; diligenciar no sentido de que sejam organizados e mantidos atualizados os cadastros municipais de informantes;

e) do *Serviço Técnico,* planejar, executar e coordenar, isoladamente ou em cooperação com outros órgãos, os levantamentos e pesquisas realizados sob a orientação do respectivo órgão técnico especializado do IBE; proceder à crítica de consistência de questionários e de apurações que efetuar; proceder a apurações de determinados inquéritos de interêsse regional; preparar publicações tabulares especiais, tendo em vista a divulgação de estatísticas de interêsse regional;

f) do *Serviço Administrativo,* planejar, controlar e executar os encargos administrativos da DELEST; apreciar questões relativas a direitos, vantagens e deveres do pessoal; orientar e fiscalizar a aplicação da legislação respectiva; preparar fôlhas de pagamento do pessoal; elaborar anualmente a proposta orçamentária e controlar a sua execução; contabilizar os documentos relativos aos fatos administrativos e escriturar o movimento patrimonial e financeiro; organizar balancetes mensais e anuais, bem como manter atualizados os documentos demonstrativos da situação econômica e financeira da DELEST; arrecadar a receita e pagar as despesas regularmente processadas, receber, registrar, distribuir, numerar, expedir e arquivar a correspondência relativa às atividades da DELEST; coordenar e executar os serviços inerentes à administração do material; receber, conferir e guardar os materiais adquiridos, zelar pelas condições de conservação dos prédios, bem como manter em perfeitas condições de funcionamento tôdas as instalações.

Art. 9.º — Para efeito dos trabalhos de levantamentos estatísticos, a área de jurisdição de uma Agência de Estatística poderá abranger mais de um município.

§ 1º — A área de jurisdição de cada Agência de Estatística será fixada pelo Diretor-Superintendente, por proposta do Delegado de Estatística, considerados, entre outros aspectos, fatôres geo-econômicos da região, tais como a extensão territorial, a população, o número de informantes cadastrados, os meios de comunicação e a centralidade da cidade-sede

§ 2.º — É da competência do Presidente a aprovação da classificação das Agências e a autorização para sua transferência de um nível para outro.

§ 3º — Dentro do prazo de 30 dias, a COGERE elaborará, com a colaboração dos órgãos técnicos da DELEST—PE, estudo visando à classificação das Agências de Estatística em diferentes categorias, tendo em vista os aspectos geo-econômicos da região, o número de informantes cadastrados, o volume dos encargos e o grau de dificuldade para cumpri-los e outros fatôres que poderão contribuir para estabelecer uma classificação das Agências

Art. 10 — Atendendo às condições de localização geográfica de determinada região, o Diretor-Superintendente poderá autorizar a instalação de Postos de Coleta Estatística, diretamente subordinados a uma Agência de Estatística.

Parágrafo único — Ao Encarregado do Pôsto de Coleta poderá ser arbitrada pelo Presidente da Fundação, a gratificação por encargos especiais prevista no artigo 14 da Resolução COD/24/68

Art 11 — Quando sediado em Município do interior do Estado, o Supervisor de Coleta Estatística poderá ter um Assistente, ao qual, será atribuída pelo Presidente, a gratificação por encargos especiais, revista no artigo 14 da Resolução COD/24/68

Art. 12 — Para atender à necessidade de coordenação de pesquisas especiais no âmbito regional, o Presidente poderá autorizar o pagamento de gratificação de encargos especiais, prevista no artigo 14 da Resolução COD/24/68, ao servidor designado Supervisor da pesquisa.

Art. 13 — Obedecidas as normas da Fundação, a DELEST—PE poderá utilizar pessoal temporário, técnicos e pesquisadores eventuais, remunerados à base de tarefa, para a realização de trabalhos específicos

Art. 14 — Os Órgãos técnicos e administrativos do IBE assegurarão à DELEST, na medida das suas possibili-

dades, a colaboração necessária para cumprimento pelo órgão das suas atribuições

Art 15 — Enquanto não fôr aprovado o grupamento das Agências de Estatística previsto no artigo 9.º será mantida a atual organização das Agências Municipais de Estatística.

Art 16 — A implantação de estrutura prevista nesta Resolução dar-se-á a partir da data da aprovação do seu quadro de lotação de cargos de confiança

RESOLUÇÃO COD-90, DE 28 DE FEVEREIRO DE 1969

Cria, no Estado do Rio de Janeiro, a Delegacia de Estatística do IBE (DELEST—RJ) e a respectiva Comissão de Coordenação.

O CONSELHO DIRETOR DA FUNDAÇÃO IBGE, no uso das atribuições que lhe confere o artigo 16, alínea *e*, do Estatuto, e

considerando a necessidade de proceder a uma reformulação estrutural da Rêde-de-Coleta Estatística com vistas a dar-lhe melhores condições para a execução das suas tarefas específicas;

considerando que os estudos realizados apontaram como meio eficiente de dinamizar a coleta estatística, na área estadual, o grupamento de municípios, levando em conta principalmente fatôres geo-econômicos das regiões onde se encontram;

considerando que se torna necessário objetivar, no âmbito regional, a intercooperação técnica entre a Fundação e órgãos e instituições do setor público e privado, tendo em vista principalmente o melhor atendimento, pela Rêde-de-Coleta, dos trabalhos de levantamentos estatísticos de interêsse nacional e estadual,

RESOLVE:

Art 1.º — Ficam criadas, no Estado do Rio de Janeiro, a *Delegacia de Estatística* do IBE (DELEST—RJ), diretamente subordinada ao Diretor-Superintendente, e a respectiva Comissão de Coordenação

Art 2º — No cumprimento de suas finalidades, compete precìpuamente à DELEST realizar, em sintonia com os órgãos técnicos centrais do IBE, os trabalhos de pesquisa estatística, principalmente os de coleta de dados, bem como, em casos especiais, os de apuração, sistematização e divulgação estatística, e promover a intercooperação técnica entre a entidade e os órgãos estaduais e municipais de estatística.

Art 3º — A Comissão de Coordenação terá como atribuição principal estabelecer a mais conveniente programação dos trabalhos estatísticos, no âmbito estadual, visando ao aproveitamento da rêde-de-coleta sempre nas melhores condições e à conciliação técnica entre as programações de pesquisas estatísticas federais e regionais.

Art. 4.º — A Comissão de Coordenação constituir-se-á dos seguintes membros: a) Delegado de Estatística do IBE-RJ, que será seu Coordenador; b) Um Supervisor de Coleta indicado pelo Diretor-Superintendente do IBE; c) Chefes de Setor da DELEST—RJ; d) Dirigente do Órgão Estadual de Estatística; e) Dirigente do Órgão de Estatística da Prefeitura da Capital; f) Representante do Órgão de Planejamento do Govêrno do Estado; g) Representante das Fôrças Armadas; h) Dois membros designados pelo Presidente da Fundação, preferentemente escolhidos entre técnicos vinculados à entidade usuária de dados estatísticos.

Parágrafo único — A indicação dos Representantes previstos nas letras *f* e *g* será solicitada, respectivamente, aos Senhores Governadores do Estado e Chefe do Estado-Maior das Fôrças Armadas.

Art 5º — A Comissão de Coordenação se reunirá ordinàriamente uma vez por mês e, extraordinàriamente, por convocação do seu Coordenador.

Art. 6º — A estrutura geral da DELEST—RJ será a seguinte:

I — DIREÇÃO

a) Seção de Documentação e Divulgação
b) Equipe de Supervisores de Coleta Estatística

II — SETOR DE COLETA

a) Seção de Cadastro e Contrôle
b) Seção de Coleta da Capital
c) Agências de Estatística

III — SETOR TÉCNICO

a) Seção de Estatísticas Básicas
b) Seção de Pesquisas Especiais

IV — SETOR ADMINISTRATIVO

a) Seção de Pessoal
b) Seção de Orçamento e Contabilidade
c) Seção de Encargos Gerais
d) Pagadoria

Art. 7º — A direção técnica e administrativa da DELEST—RJ será exercida por um Delegado de Estatística designado pelo Presidente da Fundação.

Parágrafo único — O Delegado de Estatística será substituído, em seus impedimentos eventuais, por um dos Chefes de Setor ou por um dos Supervisores de Coleta, que será designado pelo Presidente da Fundação e exercerá a substituição sem prejuízo de suas funções.

Art. 8.º — Sob a direção imediata do Delegado de Estatística, a competência precípua de cada um dos seguintes órgãos será:

a) da *Seção de Documentação e Divulgação* pesquisar, sistematizar e arquivar a documentação técnica de interêsse dos trabalhos estatísticos, coligir, catalogar e arquivar os elementos informativos referentes à evolução econômica, social e político-administrativa do País, dos Estados e dos Municípios, e manter biblioteca especializada; colhêr elementos informativos, reunir os resultados dos levantamentos estatísticos em publicações tabulares, e manter organizado um serviço de informações com base nos resultados das pesquisas estatísticas;

b) da *Equipe de Supervisores de Coleta Estatística,* orientar e coordenar os trabalhos técnicos e administrativos das Agências de Estatística, tendo em vista a realização das respectivas tarefas nas melhores condições de qualidade, segurança e rapidez; verificar, em inspeções periódicas, se os cronogramas, as instruções e as normas de serviço estão sendo obedecidas; promover as medidas necessárias a fim de conseguir que o material de coleta seja sempre expedido pela Agência de Estatística em condições satisfatórias de correção; comunicar ao Delegado, ou aos Chefes de Setor da DELEST, as anormalidades que observar em seus trabalhos de inspeção, bem como orientá-los sôbre modificações aconselháveis a serem introduzidas nas normas, rotinas, instruções e instrumentos de coleta; tomar as providências necessárias, em sua área de ação, para obter o indispensável regime de mútua cooperação entre as Agências de Estatística;

c) do *Setor de Coleta,* coordenar e controlar as atividades dos órgãos que lhe são subordinados, de forma a assegurar uniformidade dos levantamentos; providenciar, nos prazos legais e regulamentares, quanto à execução, contrôle e coordenação da coleta estatística, visando à atualização dos levantamentos; organizar e manter atualizado o cadastro de informantes dos diversos inquéritos, de modo a permitir imediato conhecimento da situação de todos os aspectos investigados; diligenciar no sentido de que sejam organizados e mantidos atualizados os cadastros municipais de informantes;

d) do *Setor Técnico,* planejar, executar e coordenar, isoladamente ou em cooperação com outros órgãos, os levantamentos e pesquisas realizados sob a orientação do respectivo órgão técnico especializado do IBE; proceder à crítica de consistência de questionários e de apurações que efetuar; proceder a apurações de determinados inquéritos de interêsse regional; preparar publicações tabulares especiais, tendo em vista a divulgação de estatística de interêsse regional;

e) do *Setor Administrativo,* planejar, controlar e executar os encargos administrativos da DELEST; apreciar questões relativas a direitos, vantagens e deveres do pessoal; orientar e fiscalizar a aplicação da legislação respectiva; preparar fôlhas de pagamento do pessoal; elaborar anualmente a proposta orçamentária e controlar a sua execução; contabilizar os documentos relativos aos fatos administrativos e escriturar o movimento patrimonial e financeiro; organizar balancetes mensais e anuais, bem como manter atualizados os documentos demonstrativos da situação econômica e financeira da DELEST; arrecadar a receita e pagar as despesas regularmente processadas; receber, registrar, distribuir, numerar, expedir e arquivar a correspondência relativa às atividades da DELEST; coordenar e executar os serviços inerentes à administração do material; receber, conferir e guardar os materiais adquiridos; zelar pelas condições de conservação dos prédios, bem como manter em perfeitas condições de funcionamento tôdas as instalações.

Art. 9.º — Para efeito dos trabalhos de levantamentos estatísticos, a área da jurisdição de uma Agência de Estatística poderá abranger mais de um município.

§ 1.º — A área de jurisdição de cada Agência de Estatística será fixada pelo Diretor-Superintendente, por proposta do Delegado de Estatística, considerados, entre outros aspectos, fatôres geo-econômicos da região, tais como a extensão territorial, a população, o número de informantes cadastrados, os meios de comunicação e a centralidade da cidade-sede.

§ 2º — É da competência do Presidente a aprovação da classificação das Agências e a autorização para sua transferência de um nível para outro.

§ 3º — Dentro do prazo de 30 dias, a COGERE elaborará, com a colaboração dos órgãos técnicos da DELEST—RJ, estudo visando à classificação das Agências de Estatística em diferentes categorias, tendo em vista os aspectos geo-econômicos da região, o número de informantes cadastrados, o volume

dos encargos e o grau de dificuldade para cumpri-los e outros fatôres que poderão contribuir para estabelecer uma classificação das Agências.

Art. 10 — Atendendo às condições de localização geográfica de determinada região, o Diretor-Superintendente poderá autorizar a instalação de Postos de Coleta de Estatística, diretamente subordinados a uma Agência de Estatística.

Parágrafo único — Ao Encarregado do Pôsto de Coleta poderá ser arbitrada, pelo Presidente da Fundação, a gratificação por encargos especiais prevista no art 14 da Resolução COD/ /24/68.

Art 11 — Quando sediado em Município do interior do Estado, o Supervisor da Coleta Estatística poderá ter um Assistente, ao qual será atribuída, pelo Presidente, a gratificação por encargos especiais, prevista no art 14 da Resolução COD/24/68

Art 12 — Para atender à necessidade de coordenação de pesquisas especiais no âmbito regional, o Presidente poderá autorizar o pagamento de gratificação de encargos especiais, prevista no artigo 14 da Resolução COD/ /24/68, ao servidor designado Supervisor da pesquisa.

Art. 13 — Obedecidas as normas da Fundação, a DELEST—RJ poderá utilizar pessoal temporário, técnicos e pesquisadores eventuais, remunerados à base de tarefa, para a realização de trabalhos específicos

Art. 14 — Os órgãos técnicos e administrativos do IBE assegurarão à DELEST, na medida das suas possibilidades, a colaboração necessária para cumprimento pelo órgão das suas atribuições.

Art. 15 — Enquanto não fôr aprovado o grupamento das Agências de Estatística previsto no art 9 º, será mantida a atual organização das Agências Municipais de Estatística.

Art. 16 — A implantação da estrutura prevista nesta Resolução dar-se-á a partir da data da aprovação do seu quadro de lotação de cargos de confiança.

RESOLUÇÃO COD-91, DE 28 DE FEVEREIRO DE 1969

Cria, no Estado de Sergipe, a Delegacia de Estatística do IBE (DELEST—SE) e a respectiva Comissão de Coordenação.

O CONSELHO DIRETOR da FUNDAÇÃO IBGE, no uso das atribuições que lhe confere o artigo 16, alínea *e*, do Estatuto, e

considerando a necessidade de proceder a uma reformulação estrutural da Rêde-de-Colêta Estatística com vistas a dar-lhe melhores condições para a execução das suas tarefas específicas;

considerando que os estudos realizados apontaram como meio eficiente de dinamizar a coleta estatística, na área estadual, o grupamento de municípios, levando em conta principalmente fatôres geo-econômicos das regiões onde se encontram;

considerando que se torna necessário objetivar no âmbito regional, a intercooperação técnica entre a Fundação e órgãos e instituições do setor público e privado, tendo em vista principalmente o melhor atendimento, pela Rêde-de-Coleta, dos trabalhos de levantamentos estatísticos de interêsse nacional e estadual,

RESOLVE:

Art 1 º — Ficam criadas, no Estado de Sergipe, a *Delegacia de Estatística* do IBE (DELEST—SE), diretamente subordinada ao Diretor-Superintendente, e a respectiva *Comissão de Coordenação.*

Art 2 º — No cumprimento de suas finalidades, compete precìpuamente à DELEST realizar, em sintonia com os órgãos técnicos centrais do IBE, os trabalhos de pesquisa estatística, principalmente os de coleta de dados, bem como, em casos especiais, os de apuração, sistematização e divulgação estatística, e promover a intercooperação técnica entre a entidade e os órgãos estaduais e municipais de estatística.

Art. 3 º — A Comissão de Coordenação terá como atribuição principal estabelecer a mais conveniente programação dos trabalhos estatísticos, no âmbito estadual, visando ao aproveitamento da Rêde-de-Coleta sempre nas melhores condições e à conciliação técnica entre as programações de pesquisas estatísticas federais e regionais.

Art. 4.º — A Comissão de Coordenação constituir-se-á dos seguintes membros: a) Delegado de Estatística do IBE — SE, que será seu Coordenador; b) Um Supervisor de Coleta indicado pelo Diretor-Superintendente do IBE; c) Chefes do Setor da DELEST— SE; d) Dirigente do Órgão Estadual de Estatística; e) Dirigente do Órgão de Estatística da Prefeitura da Capital; f) Representante do Órgão de Planejamento do Govêrno do Estado; g) Representante das Fôrças Armadas; h) Dois membros designados pelo Presidente da Fundação, preferentemente escolhidos entre técnicos vinculados à entidade usuária de dados estatísticos.

Parágrafo único — A indicação dos Representantes previstos nas letras *f* e *g* será solicitada, respectivamente, aos Senhores Governador do Estado e Chefe do Estado-Maior das Fôrças Armadas.

Art 5 º — A Comissão de Coordenação se reunirá ordinàriamente uma vez por mês e, extraordinàriamente, por convocação do seu Coordenador.

Art 6.º — A estrutura geral da DELEST—SE será a seguinte:

I — DIREÇÃO

a) Seção de Documentação e Divulgação
b) Equipe de Supervisores de Coleta Estatística

II — SETOR DE COLETA

a) Seção de Cadastro e Contrôle
b) Seção de Coleta da Capital
c) Agências de Estatística

III — SETOR TÉCNICO

a) Seção de Pesquisas Especiais

IV — SETOR ADMINISTRATIVO

a) Seção de Pessoal
b) Seção de Orçamento e Contabilidade
c) Seção de Encargos Gerais
d) Pagadoria

Art 7.º — A direção técnica e administrativa da DELEST—SE será exercida por um Delegado de Estatística, designado pelo Presidente da Fundação.

Parágrafo único — O Delegado de Estatística será substituído, em seus impedimentos eventuais por um dos Chefes de Setor ou por um dos Supervisores de Coleta, que será designado pelo Presidente da Fundação e exercerá a substituição sem prejuízo de suas funções.

Art. 8.º — Sob a direção imediata do Delegado de Estatística, a competência precípua de cada um dos seguintes órgãos será:

a) da *Seção de Documentação e Divulgação,* pesquisar, sistematizar e arquivar a documentação técnica de interêsse dos trabalhos estatísticos, coligir, catalogar e arquivar os elementos informativos referentes à evolução econômica, social e político-administrativa do País, dos Estados e dos Municípios, e manter biblioteca especializada; cohêr elementos informativos, reunir os resultados dos levantamentos estatísticos em publicações tabulares, e manter organizado um serviço de informações com base nos resultados das pesquisas estatísticas;

b) da *Equipe de Supervisores de Coleta Estatística,* orientar e coordenar os trabalhos técnicos e administrativos das Agências de Estatística, tendo em vista a realização das respectivas tarefas nas melhores condições de qualidade, segurança e rapidez; verificar, em inspeções periódicas, se os cronogramas, as instruções e as normas de serviço estão sendo obedecidas; promover as medidas necessárias a fim de conseguir que o material de coleta seja sempre expedido pela Agência de Estatística em condições satisfatórias de correção; comunicar ao Delegado ou aos Chefes de Setor da DELEST, as anormalidades que observar em seus trabalhos de inspeção, bem como orientá-los sôbre modificações aconselháveis a serem introduzidas nas normas, rotinas, instruções e instrumentos de coleta; tomar as providências necessárias, em sua área de ação, para obter o indispensável regime de mútua cooperação entre as Agências de Estatística;

c) do *Setor de Coleta,* coordenar e controlar as atividades dos órgãos que lhe são subordinados, de forma a assegurar uniformidade dos levantamentos; providenciar, nos prazos legais e regulamentares, quanto à execução, contrôle e coordenação da coleta estatística, visando à atualização dos levantamentos, organizar e manter atualizado o cadastro de informantes dos diversos inquéritos, de modo a permitir imediato conhecimento da situação de todos os aspectos investigados; diligenciar no sentido de que sejam organizados e mantidos atualizados os cadastros municipais de informantes;

d) do *Setor Técnico,* planejar, executar e coordenar, isoladamente ou em cooperação com outros órgãos, os levantamentos e pesquisas realizados sob a orientação do respectivo órgão técnico especializado do IBE; proceder à crítica de consistência de questionários e das apurações que efetuar; proceder a apuração de determinados inquéritos de interêsse regional; preparar publicações tabulares especiais, tendo em vista a divulgação de estatísticas de interêsse regional;

e) do *Setor Administrativo,* planejar, controlar e executar os encargos administrativos da DELEST; apreciar questões relativas a direitos, vantagens e deveres do pessoal; orientar e fiscalizar a aplicação da legislação respectiva; preparar fôlhas de pagamento do pessoal; elaborar anualmente a proposta orçamentária e controlar a sua execução; contabilizar os documentos relativos aos fatos administrativos e escriturar o movimento patrimonial e fi-

nanceiro; organizar balancetes mensais e anuais, bem como manter atualizados os documentos demonstrativos da situação econômica e financeira da DELEST; arrecadar a receita e pagar as despesas regularmente processadas; receber, registrar, distribuir, numerar, expedir e arquivar a correspondência relativa às atividades da DELEST, coordenar e executar os serviços inerentes à administração do material; receber, conferir e guardar os materiais adquiridos; zelar pelas condições de conservação dos prédios, bem como manter em perfeitas condições de funcionamento tôdas as instalações.

Art. 9 º — Para efeito dos trabalhos de levantamentos estatísticos, a área de jurisdição de uma Agência de Estatística poderá abranger mais de um Município.

§ 1 º — A área de jurisdição de cada Agência de Estatística será fixada pelo Diretor-Superintendente, por proposta do Delegado de Estatística, considerados, entre outros aspectos, fatôres geo-econômicos da região, tais como a extensão territorial, a população, o número de informantes cadastrados, os meios de comunicação e a centralidade da cidade-sede.

§ 2 º — É da competência do Presidente a aprovação da classificação das Agências e a autorização para sua transferência de um nível para outro.

§ 3.º — Dentro do prazo de 30 dias, a COGERE elaborará, com a colaboração dos órgãos técnicos da DELEST — SE, estudo visando à classificação das Agências de Estatística em diferentes categorias, tendo em vista os aspectos geo-econômicos da região, o número de informantes cadastrados, o volume dos encargos e o grau de dificuldade para cumpri-los, e outros fatôres que poderão contribuir para estabelecer uma classificação das Agências

Art. 10 — Atendendo às condições de localização geográfica de determinada região, o Diretor-Superintendente poderá autorizar a instalação de Postos de Coleta Estatística, diretamente subordinados a uma Agência de Estatística

Parágrafo único — Ao Encarregado do Pôsto de Coleta poderá ser arbitrada pelo Presidente da Fundação, a gratificação por encargos especiais prevista no art. 14 da Resolução COD/24/68.

Art. 11 — Quando sediado em Município do interior do Estado, o Supervisor de Coleta Estatística poderá ter um Assistente, ao qual será atribuída, pelo Presidente, a gratificação por encargos especiais, prevista no art. 14 da Resolução COD/24/68.

Art. 12 — Para atender à necessidade de coordenação de pesquisas especiais no âmbito regional, o Presidente poderá autorizar o pagamento de gratificação de encargos especiais, prevista no art. 14 da Resolução COD/24/ /68, ao servidor designado Supervisor da pesquisa.

Art. 13 — Obedecidas as normas da Fundação, a DELEST—SE poderá utilizar pessoal temporário, técnicos e pesquisadores eventuais, remunerados à base de tarefa, para a realização de trabalhos específicos

Art. 14 — Os órgãos técnicos e administrativos do IBE assegurarão à DELEST, na medida das suas possibilidades, a colaboração necessária para cumprimento pelo órgão das suas atribuições.

Art. 15 — Enquanto não fôr aprovado o grupamento das Agências de Estatística previsto no art. 9 º, será mantida a atual organização das Agências Municipais de Estatística.

Art. 16 — A implantação da estrutura prevista nesta Resolução dar-se-á a partir da data da aprovação do seu quadro de lotação de cargos de confiança.

RESOLUÇÃO COD-92, DE 28 DE FEVEREIRO DE 1969

Dispõe sôbre a reorganização da Comissão Nacional de Planejamento e Normas Estatísticas (CONPLANE) do IBE

O CONSELHO DIRETOR da FUNDAÇÃO IBGE, no uso das atribuições que lhe confere a alínea *b*, do artigo 28 do Estatuto, e

considerando que, em face da reestruturação orgânica do Instituto Brasileiro de Estatística, processada desde a organização da CONPLANE pela Resolução COD/4/67, de 1.º de novembro de 1967, impõe-se proceder à atualização da representação dos órgãos de maior hierarquia do IBE, junto ao referido colegiado, consoante o disposto na alínea *b*, do artigo 28 do Estatuto,

RESOLVE:

Art. 1 º — Alínea *b*, do artigo 3 º da Resolução COD/4/67, de 1 º de novembro de 1967, passa a ter a seguinte redação:

"b) titulares dos seguintes órgãos de maior hierarquia do IBE (Estatuto,

art 28, alínea *b*): Laboratório de Estatística (LE), Grupo Executivo de Pesquisas Domiciliares (GEPD), Centro Brasileiro de Estudos Demográficos (CBED), Departamento de Estatísticas Industriais, Comerciais e de Serviços (DEICOM), Centro Brasileiro de Estatísticas Agropecuárias (CBEA), Coordenação Geral da Rêde-de-Coleta (COGERE), Departamento de Censos (DECEM), Centro de Processamesto de Dados (CENPRO), Centro Brasileiro de Estatísticas Educacionais (CBESE) e Departamento de Divulgação Estatística (DEDIVE)".

Art 2.º — Esta Resolução entra em vigor a partir desta data

RESOLUÇÃO COD-93, DE 5 DE MARÇO DE 1969

Reajusta percentualmente os salários previstos pela Resolução COD/24/68, em bases idênticas às fixadas pela Lei nº 5 552

O CONSELHO DIRETOR da FUNDAÇÃO IBGE, no uso da competência outorgada pelo artigo 16, alínea *f*, do Estatuto, e

considerando que a remuneração do pessoal da Fundação foi fixada em caráter provisório pela Resolução COD/24/68, de 24 de janeiro de 1968;

considerando que os estudos destinados ao estabelecimento de padrões definitivos, que guardem proporção com os salários vigentes no mercado de trabalho, ainda não foram ultimados;

considerando, porém, que se impõe, como medida de emergência, e até que sejam aprovadas as conclusões dos referidos estudos, o reajustamento percentual das retribuições pecuniárias previstas na citada Resolução COD/24/68, em bases idênticas às fixadas pela Lei nº 5.552, de 4-12-68, para os servidores federais;

considerando que foi prèviamente cumprido o disposto no § 1º do artigo 50 do Estatuto,

RESOLVE:

Art 1.º — ficam elevadas em 20% (vinte por cento), a partir de 1.º de janeiro de 1969, as retribuições pecuniárias previstas na Resolução COD/24/68, de 24 de janeiro de 1968

Art. 2º — Fica fixado o prazo de noventa dias para a Assessoria de Pessoal concluir os estudos destinados à avaliação dos cargos e funções do Quadro Geral de Pessoal da Fundação, observada a orientação da política salarial do Govêrno.

RESOLUÇÃO COD-94, DE 5 DE MARÇO DE 1969

Cria, no Estado de Santa Catarina, a Delegacia de Estatística do IBE (DELEST—SC) e a respectiva Comissão de Coordenação.

O CONSELHO DIRETOR da FUNDAÇÃO IBGE, no uso das atribuições que lhe confere o art 16, alínea *e*, do Estatuto, e

considerando a necessidade de proceder a uma reformulação estrutural da Rêde-de-Coleta Estatística com vistas a dar-lhe melhores condições para a execução das suas tarefas específicas;

considerando que os estudos realizados apontaram como meio eficiente de dinamizar a coleta estatística, na área estadual, o grupamento de municípios, levando em conta principalmente fatôres geo-econômicos das regiões onde se encontram;

considerando que se torna necessário objetivar, no âmbito regional, a intercooperação técnica entre a Fundação e órgãos e instituições dos setores público e privado, tendo em vista principalmente o melhor atendimento, pela Rêde-de-Coleta, dos trabalhos de levantamentos estatísticos de interêsse nacional e estadual,

RESOLVE:

Art. 1º — Ficam criadas, no Estado de Santa Catarina, a *Delegacia de Estatística do IBE (DELEST—SC)*, diretamente subordinada ao Diretor-Superintendente, e a respectiva Comissão de Coordenação.

Art. 2.º — No cumprimento de suas finalidades, compete precìpuamente à DELEST realizar, em sintonia com os órgãos técnicos centrais do IBE, os trabalhos de pesquisa estatística, principalmente os de coleta de dados, bem como, em casos especiais, os de apuração, sistematização e divulgação estatística, e promover a intercooperação técnica entre a entidade e os órgãos estaduais e municipais de estatística.

Art. 3.º — A Comissão de Coordenação terá como atribuição principal estabelecer a mais conveniente programação dos trabalhos estatísticos, no âmbito estadual, visando ao aproveitamento da Rêde-de-Coleta sempre nas melhores condições e à conciliação técnica entre as programações e pesquisas estatísticas federais e regionais

Art 4º — A Comissão de Coordenação constituir-se-á dos seguintes membros: a) Delegado de Estatística do IBE—SC, que será seu Coordenador, b) Um supervisor de coleta indicado pelo Diretor-Superintendente do IBE;

c) Chefes de Setor da DELEST—SC; d) Dirigente do Órgão Estadual de Estatística; e) Dirigente do Órgão de Estatística da Prefeitura da Capital; f) Representante do Órgão de Planejamento do Govêrno do Estado; g) Representante das Fôrças Armadas; h) Dois membros designados pelo Presidente da Fundação, preferentemente escolhidos entre técnicos vinculados à entidade usuária de dados estatísticos.

Parágrafo Único — A indicação dos Representantes previstos nas letras *f* e *g* será solicitada, respectivamente, aos Senhores Governador do Estado e Chefe do Estado-Maior das Fôrças Armadas.

Art. 5.º — A Comissão de Coordenação se reunirá ordinàriamente uma vez por mês e, extraordinàriamente, por convocação do seu Coordenador.

Art. 6.º — A estrutura geral da DELEST—SC será a seguinte:

I — DIREÇÃO

a) Seção de Documentação e Divulgação
b) Equipe de Supervisores de Coleta Estatística

II — SETOR DE COLETA

a) Seção de Cadastro e Contrôle
b) Seção de Coleta da Capital
c) Agências de Estatística

III — SETOR TÉCNICO

a) Seção de Estatísticas Básicas
b) Seção de Pesquisas Especiais

IV — SETOR ADMINISTRATIVO

a) Seção de Pessoal
b) Seção de Orçamento e Contabilidade
c) Seção de Encargos Gerais
d) Pagadoria

Art. 7.º — A direção técnica e administrativa da DELEST—SC será exercida por um Delegado de Estatística designado pelo Presidente da Fundação.

Parágrafo Único — O Delegado de Estatística será substituído, em seus impedimentos eventuais, por um dos Chefes de Setor ou por um dos Supervisores de Coleta, que será designado pelo Presidente da Fundação e exercerá a substituição sem prejuízo de suas funções.

Art. 8.º — Sob a direção imediata do Delegado de Estatística, a competência precípua de cada um dos seguintes órgãos será:

a) da *Seção de Documentação e Divulgação* — pesquisar, sistematizar e arquivar a documentação técnica de interêsse dos trabalhos estatísticos, coligir, catalogar e arquivar os elementos informativos referentes à evolução econômica, social e político-administrativa do País, dos Estados e dos Municípios e manter biblioteca especializada; colhêr elementos informativos, reunir os resultados dos levantamentos estatísticos em publicações tabulares, e manter organizado um serviço de informações com base nos resultados das pesquisas estatísticas;

b) da *Equipe de Supervisores de Coleta Estatística* — orientar e coordenar os trabalhos técnicos e administrativos das Agências de Estatística, tendo em vista a realizacão das respectivas tarefas nas melhores condições de qualidade, segurança e rapidez; verificar, em inspeções periódicas, se os cronogramas, as instruções e as normas de serviço estão sendo obedecidas; promover as medidas necessárias a fim de conseguir que o material de coleta seja sempre expedido pela Agência de Estatística em condições satisfatórias de correção, comunicar ao Delegado, ou aos Chefes de Setor da DELEST, as anormalidades que observar em seus trabalhos de inspeção, bem como orientá-los sôbre modificações aconselháveis a serem introduzidas nas normas, rotinas, instruções e instrumentos de coleta; tomar as providências necessárias, em sua área de ação, para obter o indispensável regime de mútua cooperação entre as Agências de Estatística;

c) do *Setor de Coleta* — coordenar e controlar as atividades dos órgãos que lhe são subordinados, de forma a assegurar uniformidade dos levantamentos; providenciar, nos prazos legais e regulamentares, quanto à execução, contrôle e coordenação da coleta estatística, visando à atualização dos levantamentos, organizar e manter atualizado o cadastro de informantes dos diversos inquéritos, de modo a permitir imediato conhecimento da situação de todos os aspectos investigados; diligenciar no sentido de que sejam organizados e mantidos atualizados os cadastros municipais de informantes,

d) do *Setor Técnico* — planejar, executar e coordenar, isoladamente ou em cooperação com outros órgãos, os levantamentos e pesquisas realizados sob a orientação do respectivo órgão técnico es-

pecializado do IBE; proceder à crítica de consistência de questionários e de apurações que efetuar; proceder a apurações de determinados inquéritos de interêsse regional; preparar publicações tabulares especiais, tendo em vista a divulgação de estatística de interêsse regional;

e) do *Setor Administrativo* — planejar, controlar e executar os encargos administrativos da ... DELEST; apreciar questões relativas a direitos, vantagens e deveres do pessoal; orientar e fiscalizar a aplicação da legislação respectiva; preparar fôlhas de pagamento do pessoal; elaborar anualmente a proposta orçamentária e controlar a sua execução; contabilizar os documentos relativos aos fatos administrativos e escriturar o movimento patrimonial e financeiro, organizar balancetes mensais e anuais, bem como manter atualizados os documentos demonstrativos da situação econômica e financeira da DELEST; arrecadar a receita e pagar as despesas regularmente processadas; receber, registrar, distribuir, numerar, expedir e arquivar a correspondência relativa a atividades da DELEST; coordenar e executar os serviços inerentes à administração do material; receber, conferir e guardar os materiais adquiridos, zelar pelas condições de conservação dos prédios, bem como manter em perfeitas condições de funcionamento tôdas as instalações

Art. 9.º — Para efeito dos trabalhos de levantamentos estatísticos, a área de jurisdição de uma Agência de Estatística poderá abranger mais de um município

§ 1.º — A área de jurisdição de cada Agência de Estatística será fixada pelo Diretor-Superintendente, por proposta do Delegado de Estatística, considerados, entre outros aspectos, fatôres geo-econômicos da região, tais como, a extensão territorial, a população, o número de informantes cadastrados, os meios de comunicação e a centralidade da cidade-sede

§ 2.º — É da competência do Presidente a aprovação da classificação das Agências e a autorização para sua transferência de um nível para outro

§ 3.º — Dentro do prazo de 30 dias, a COGERE elaborará, com a colaboração dos órgãos técnicos da DELEST—SC, estudo visando à classificação das Agências de Estatística em diferentes categorias, tendo em vista os aspectos geo-econômicos da região, o número de informantes cadastrados, o volume dos encargos e o grau de dificuldade para cumpri-los e outros fatôres que poderão contribuir para estabelecer uma classificação das Agências.

Art. 10 — Atendendo às condições de localização geográfica de determinada região, o Diretor-Superintendente poderá autorizar a instalação de Postos de Coleta Estatística, diretamente subordinados a uma Agência de Estatística

Parágrafo Único — Ao Encarregado do Pôsto de Coleta poderá ser arbitrada, pelo Presidente da Fundação, a gratificação por encargos especiais prevista no art. 14 da Resolução COD/24/68.

Art 11 — Quando sediado em Município do interior do Estado, o Supervisor de Coleta Estatística poderá ter um Assistente, ao qual será atribuída, pelo Presidente, a gratificação por encargos especiais, prevista no art. 14 da Resolução COD/24/68

Art. 12 — Para atender à necessidade de coordenação de pesquisas especiais no âmbito regional, o Presidente poderá autorizar o pagamento de gratificação de encargos especiais, prevista no artigo 14 da Resolução COD/24/68, ao servidor designado Supervisor da pesquisa.

Art 13 — Obedecidas as normas da Fundação, a DELEST—SC poderá utilizar pessoal temporário, técnicos e pesquisadores eventuais, remunerados à base de tarefa, para a realização de trabalhos específicos

Art 14 — Os órgãos técnicos e administrativos do IBE assegurarão à DELEST, na medida das suas possibilidades, a colaboração necessária para cumprimento pelo órgão das suas atribuições.

Art. 15 — Enquanto não fôr aprovado o grupamento das Agências de Estatística previsto no art. 9º, será mantida a atual organização das Agências Municipaias de Estatística.

Art. 16 — A implantação da estrutura prevista nesta Resolução dar-se-á a partir da data da aprovação do seu quadro de lotação de cargos de confiança.

RESOLUÇÃO COD-95, DE 5 DE MARÇO DE 1969

Cria no Estado da Paraíba a Delegacia de Estatística do IBE (DELEST—PB) e a respectiva Comissão de Coordenação.

O CONSELHO DIRETOR da FUNDAÇÃO IBGE, no uso das atribuições que lhe confere o artigo 16, alínea *e*, do Estatuto, e

considerando a necessidade de proceder a uma reformulação estrutu-

ral da Rêde-de-Coleta Estatística com vistas a dar-lhe melhores condições para a execução das suas tarefas específicas;

considerando que os estudos realizados apontaram como meio eficiente de dinamizar a coleta estatística, na área estadual, o grupamento de municípios, levando em conta principalmente fatôres geo-econômicos das regiões onde se encontram;

considerando que se torna necessário objetivar, no âmbito regional, a intercooperação técnica entre a Fundação e órgãos e instituições dos setores público e privado, tendo em vista principalmente o melhor atendimento, pela Rêde-de-Coleta dos trabalhos de levantamentos estatísticos de interêsse nacional e estadual,

RESOLVE:

Art 1º — Ficam criadas, no Estado da Paraíba, a *Delegacia de Estatística* do IBE (DELEST—PB), diretamente subordinada ao Diretor-Superintendente, e a respectiva Comissão de Coordenação.

Art 2º — No cumprimento de suas finalidades, compete precìpuamente à DELEST, realizar, em sintonia com os órgãos técnicos centrais do IBE, os trabalhos de pesquisa estatística, principalmente os de coleta de dados, bem como, em casos especiais, os de apuração, sistematização e divulgação estatística, e promover a intercooperação técnica entre a entidade e os órgãos estaduais e municipais de estatística

Art. 3º — A Comissão de Coordenação terá como atribuição principal estabelecer a mais conveniente programação dos trabalhos estatísticos, no âmbito estadual, visando ao aproveitamento da Rêde-de-Coleta sempre nas melhores condições e à conciliação técnica entre as programações e pesquisas estatísticas federais e regionais

Art. 4º — A Comissão de Coordenação constituir-se-á dos seguintes membros: a) Delegado de Estatística do IBE—PB, que será seu Coordenador; b) Um supervisor de coleta indicado pelo Diretor--Superintendente do IBE; c) Chefes de Setor da DELEST—PB; d) Dirigente do Órgão Estadual de Estatística; e) Dirigente do Órgão de Estatística da Prefeitura da Capital; f) Representante do Órgão de Planejamento do Govêrno do Estado; g) Representante das Fôrças Armadas; h) Dois membros designados pelo Presidente da Fundação, preferentemente escolhidos entre técnicos vinculados à entidade usuária de dados estatísticos

Parágrafo Único — A indicação dos Representantes previstos nas letras *f* e *g* será solicitada respectivamente, aos Senhores Governador do Estado e Chefe do Estado-Maior das Fôrças Armadas.

Art 5.º — A Comisão de Coordenação se reunirá ordinàriamente uma vez por mês e, extraordinàriamente, por convocação do seu Coordenador.

Art 6º — A estrutura geral da DELEST—PB será a seguinte:

I — DIREÇÃO

a) Seção de Documentação e Divulgação
b) Equipe de Supervisores de Coleta Estatística

II — SETOR DE COLETA

a) Seção de Cadastro e Contrôle
b) Seção de Coleta da Capital
c) Agência de Estatística

III — SETOR TÉCNICO

a) Seção de Estatísticas Básicas
b) Seção de Pesquisas Especiais

IV — SETOR ADMINISTRATIVO

a) Seção de Pessoal
b) Seção de Orçamento e Contabilidade
c) Seção de Encargos Gerais
d) Pagadoria

Art 7º — A direção técnica e administrativa da DELEST—PB, será exercida por um Delegado de Estatística designado pelo Presidente da Fundação

Parágrafo único — O Delegado de Estatística será substituído, em seus impedimentos eventuais, por um dos Chefes de Setor ou por um dos Supervisores de Coleta, que será designado pelo Presidente da Fundação e exercerá a substituição sem prejuízo de suas funções.

Art 8.º — Sob a direção imediata do Delegado de Estatística, a competência precípua de cada um dos seguintes órgãos será:

a) da *Seção de Documentação e Divulgação* — pesquisar, sistematizar e arquivar a documentação técnica de interêsse dos trabalhos estatísticos, coligir, catalogar e arquivar os elementos informativos referentes à evolução econômica, social e político-administrativa do País, dos Estados e dos Municípios e manter biblioteca especializada; colhêr elementos informativos, reunir os resultados dos levantamentos estatísticos em publicações tabulares, e manter organizado um serviço de infor-

mações com base nos resultados das pesquisas estatísticas,

b) da *Equipe de Supervisores de Coleta Estatística* — orientar e coordenar os trabalhos técnicos e administrativos das Agências de Estatística, tendo em vista a realização das respectivas tarefas nas melhores condições de qualidade, segurança e rapidez; verificar, em inspeções periódicas, se os cronogramas, as instruções e as normas de serviço estão sendo obedecidas; promover as medidas necessárias a fim de conseguir que o material de coleta seja sempre expedido pela Agência de Estatística em condições satisfatórias de correção; comunicar ao Delegado, ou aos Chefes de Setor da DELEST, as anormalidades que observar em seus trabalhos de inspecão, bem como orientá-los sôbre modificações aconselháveis a serem introduzidas nas normas, rotinas, intruções e instrumentos de coleta; tomar as providências necessárias, em sua área de ação, para obter o indispensável regime de mútua cooperação entre as Agências de Estatística;

c) do *Setor de Coleta* — coordenar e controlar as atividades dos órgãos que lhe são subordinados, de forma a assegurar uniformidade dos levantamentos; providenciar, nos prazos legais e regulamentares, quanto à execução, contrôle e coordenação da coleta estatística, visando à atualização dos levantamentos, organizar e manter atualizado o cadastro de informantes dos diversos inquéritos, de modo a permitir imediato conhecimento da situação de todos os aspectos investigados; diligenciar no sentido de que sejam organizados e mantidos atualizados os cadastros municipais de informantes,

d) do *Setor Técnico* — planejar, executar e coordenar, isoladamente ou em cooperação com outros órgãos, os levantamentos e pesquisas realizados sob a orientação do respectivo órgão técnico especializado do IBE; proceder à crítica de consistência de questionários e de apurações que efetuar; proceder a apurações de determinados inquéritos de interêsse regional; preparar publicações tabulares especiais, tendo em vista a divulgação de estatística de interêsse regional;

e) do *Setor Administrativo* — planejar, controlar e executar os encargos administrativos da DELEST; apreciar questões relativas a direitos, vantagens e deveres do pessoal; orientar e fiscalizar a aplicação da legislação respectiva; preparar fôlhas de pagamento do pessoal; elaborar anualmente a proposta orçamentária e controlar a sua execução; contabilizar os documentos relativos aos fatos administrativos e escriturar o movimento patrimonial e financeiro; organizar balancetes mensais e anuais, bem como manter atualizados os documentos demonstrativos da situação econômica e finanecira da DELEST; arrecadar a receita e pagar as despesas regularmente processadas; receber, registrar, distribuir, numerar, expedir e arquivar a correspondência relativa às atividades da DELEST; coordenar e executar os serviços inerentes à administração do material; receber, conferir e guardar os materiais adquiridos; zelar pelas condições de conservação dos prédios, bem como manter em perfeitas condições de funcionamento tôdas as instalações.

Art 9º — Para efeito dos trabalhos de levantamentos estatísticos, a área de jurisdição de uma Agência de Estatística poderá abranger mais de um município.

§ 1.º — A área de jurisdição de cada Agência de Estatística será fixada pelo Diretor-Superintendente, por proposta do Delegado de Estatística, considerados, entre outros aspectos, fatôres geo-econômicos da região, tais como a extensão territorial, a população, o número de informantes cadastrados, os meios de comunicação e a centralidade da cidade-sede.

§ 2.º — É da competência do Presidente a aprovação das Agências e a autorização para sua transferência de um nível para outro.

§ 3.º — Dentro do prazo de 30 dias, a COGERE elaborará, com a colaboração dos órgãos técnicos da DELEST—PB, estudo visando à classificação das Agências de Estatística em diferentes categorias, tendo em vista os aspectos geo-econômicos da região, o número de cadastros, o volume dos encargos e o grau de dificuldade para cumpri-los e outros fatôres que poderão contribuir para estabelecer uma classificação das Agências

Art. 10 — Atendendo às condições de localização geográfica de determinada região, o Diretor-Superintendente poderá autorizar a instalação de Postos de Coleta Estatística, diretamente subordinados a uma Agência de Estatística.

Parágrafo Único — Ao Encarregado do Pôsto de Coleta poderá ser arbitrado, pelo Presidente da Fundação, a gratificação por encargos especiais prevista no art 14 da Resolução COD/24/68.

Art. 11 — Quando sediado em Município do interior do Estado, o Supervisor de Coleta Estatística poderá ter um Assistente, ao qual será atribuída, pelo Presidente, a gratificação por encargos especiais, prevista no Artigo 14 da Resolução COD/24/68.

Art. 12 — Para atender a necessidade de coordenação de pesquisas especiais no âmbito regional, o Presidente poderá autorizar o pagamento de gratificação de encargos especiais, prevista no artigo 14 da Resolução COD/24/68, ao servidor designado Supervisor de pesquisa.

Art 13 — Obedecidas as normas da Fundação, a DELEST—PB poderá utilizar pessoal temporário, técnicos e pesquisadores eventuais, remunerados à base de tarefa, para a realização de trabalhos específicos.

Art 14 — Os órgãos técnicos e administrativos do IBE assegurarão à DELEST, na medida das suas posibilidades, a colaboração necessária para cumprimento pelo órgão das suas atribuições.

Art. 15 — Enquanto não for aprovado o grupamento das Agências de Estatística previsto no art. 9.º, será mantida a atual organização das Agências Municipais de Estatística

Art. 16 — A implantação da estrutura prevista nesta Resolução dar-se-á a partir da data da aprovação do seu quadro de lotação de cargos de confiança

RESOLUÇÃO COD-96, DE 14 DE MARÇO DE 1969

Cria, no Estado do Rio Grande do Norte, a Delegacia de Estatística do IBE (DELEST—RN) e a respectiva Comissão de Coordenação.

O CONSELHO DIRETOR da FUNDAÇÃO IBGE, no uso das atribuições que lhe confere o art. 16, alínea *e*, do Estatuto, e

considerando a necessidade de proceder a uma reformulação estrutural da Rêde-de-Coleta Estatística com vistas a dar-lhe melhores condições para a execução das suas tarefas específicas,

considerando que os estudos realizados apontaram como meio eficiente de dinamizar a coleta estatística, na área estadual, o grupamento de municípios, levando em conta principalmente fatôres geo-econômicos das regiões onde se encontram;

considerando que se torna necessário objetivar no âmbito regional, a intercooperação técnica entre a Fundação e órgãos e instituições do setor público e privado, tendo em vista principalmente o melhor atendimento, pela Rêde-de-Coleta, dos trabalhos de levantamentos estatísticos de intersse nacional e estadual,

RESOLVE:

Art 1.º — Ficam criadas, no Rio Grande do Norte, a *Delegacia de Estatística* do IBE (DELEST—RN), diretamente subordinada ao Diretor-Superintendente, e a respectiva *Comissão de Coordenação.*

Art 2º — No cumprimento de suas finalidades, compete precìpuamente à DELEST realizar, em sintonia com os órgãos técnicos centrais do IBE, os trabalhos de pesquisa estatística, principalmente os de coleta de dados, bem como, em casos especiais, os de apuração, sistematização e divulgação estatística, e promover a intercooperação técnica entre a entidade e os órgãos estaduais e municipais de estatística

Art 3º — A Comissão de Coordenação terá como atribuição principal estabelecer a mais conveniente programação dos trabalhos estatísticos, no âmbito estadual, visando ao aproveitamento da Rêde-de-Coleta, sempre nas melhores condições e à conciliação técnica entre as programações de pesquisas estatísticas federais e regionais

Art 4.º — A Comissão de Coordenação constituir-se-á dos seguintes membros: a) Delegado de Estatística do IBE—RN, que será seu Coordenador; b) Um Supervisor de Coleta indicado pelo Diretor-Superintendente do IBE, c) Chefes de Setor da DELEST—RN, d) Dirigente de Órgão Estadual de Estatística, e) Dirigente do Órgão de Estatística da Prefeitura da Capital, f) Representante do órgão de Planejamento do Govêrno do Estado, g) Representante das Fôrças Armadas; h) Dois membros designados pelo Presidente da Fundação, preferentemente escolhidos entre técnicos vinculados a entidade usuária de dados estatísticos

Parágrafo único — A indicação dos representantes previstos nas letras *f* e *g* será solicitada, respectivamente, aos Senhores Governador do Estado e Chefe do Estado-Maior das Fôrças Armadas.

Art 5º — A Comissão de Coordenação se reunirá ordinàriamente uma vez por mês e, extraordinàriamente, por convocação do seu Coordenador

Art. 6º — A estrutura geral da DELEST—RN, será a seguinte·

I — DIREÇÃO

a) Seção de Documentação e Divulgação
b) Equipe de Supervisores de Coleta Estatística

II — SETOR DE COLETA

a) Seção de Cadastro e Contrôle
b) Seção de Coleta da Capital
c) Agência de Estatística

III — SETOR TÉCNICO

a) Seção de Pesquisas Especiais

IV — SETOR ADMINISTRATIVO

a) Seção de Pessoal
b) Seção de Orçamento e Contabilidade
c) Seção de Encargos Gerais
d) Pagadoria

Art 7º — A direção técnica e administrativa da DELEST—RN será exercida por um Delegado de Estatística, designado pelo Presidente da Fundação

Parágrafo único — O Delegado de Estatística será substituído, em seus impedimentos eventuais por um dos Chefes de Setor ou por um dos Supervisores de Coleta, que será designado pelo Presidente da Fundação e exercerá a substituição sem prejuízo de suas funções.

Art 8º — Sob a direção imediata do Delegado de Estatística, a competência precípua de cada um dos seguintes órgãos será:

a) da *Seção de Documentação e Divulgação,* pesquisar, sistematizar e arquivar a documentação técnica de interêsse dos trabalhos estatísticos, coligir, catalogar e arquivar os elementos informativos referentes à evolução econômica, social e político-administrativa do País, dos Estados e dos Municípios, e manter biblioteca especializada, colhêr elementos informativos, reunir os resultados dos levantamentos estatísticos em representações tabulares, e manter organizado um servico de informações com base nos resultados das pesquisas estatísticas;

b) da *Equipe de Supervisores de Coleta Estatística,* orientar e coordenar os trabalhos técnicos e administrativos das Agências de Estatística, tendo em vista a realização das respectivas tarefas nas melhores condições de qualidade, segurança e rapidez; verificar, em inspeções periódicas, se os cronogramas, as instruções e as normas de serviço estão sendo obedecidos, promover as medidas necessárias a fim de conseguir que o material de coleta seja sempre expedido pela Agência de Estatística em condições satisfatórias de correção; comunicar ao Delegado ou aos Chefes de Setor da DELEST as anormalidades que observar em seus trabalhos de inspeção, bem como orientá-los sôbre modificações aconselháveis a serem introduzidas nas normas, rotinas, instruções e instrumentos de coleta, tomar as providências necessárias, em sua área de ação, para obter o indispensável regime de mútua cooperação entre as Agências de Estatística;

c) do *Setor de Coleta,* coordenar e controlar as atividades dos órgãos que lhe são subordinados, de forma a assegurar uniformidade dos levantamentos, providenciar, nos prazos legais e regulamentares, quanto à execução, contrôle e coordenação da coleta estatística, visando à atualização dos levantamentos; organizar e manter atualizado o cadastro de informantes dos diversos inquéritos, de modo a permitir imediato conhecimento da situação de todos os aspectos investigados; diligenciar no sentido de que sejam organizados e mantidos atualizados os cadastros municipais de informantes;

d) do *Setor Técnico,* planejar executar e coordenar, isoladamente ou em cooperação com outros órgãos, os levantamentos e pesquisas realizados sob a orientação do respectivo órgão técnico especializado do IBE; proceder à crítica de consistência de questionários e das apurações que efetuar; proceder a apurações de determinados inquéritos de interêsse regional; preparar publicacões especiais, tendo em vista a divulgação de estatística e de interêsse regional;

e) do *Setor Administrativo,* planejar, controlar e executar os encargos administrativos da DELEST, apreciar questões relativas a direitos, vantagens e deveres do pessoal; orientar e fiscalizar a aplicação da legislação respectiva, preparar fôlhas de pagamento do pessoal; elaborar anualmente a proposta orçamentária e controlar a sua execução; contabilizar os documentos relativos aos fatos administrativos e escriturar o movimento patrimonial e financeiro; organizar balancetes mensais e anuais, bem como manter atualizados os documentos demonstrativos da situação econômica e financeira da DELEST, arrecadar a receita e pagar as depesas regularmente processadas; receber, registrar, distribuir, numerar, expedir e arquivar a correspondência relativa às atividades da DELEST, coordenar e executar os serviços inerentes à administração do material; receber, conferir e guardar os materiais adquiridos; zelar pelas condições de conservação dos prédios, bem como manter em perfeitas condições de funcionamento tôdas as instalações

Art 9º — Para efeito dos trabalhos de levantamentos estatísticos, a área de jurisdição de uma Agência de Estatística poderá abranger mais de um município

§ 1.º — A área de jurisdição de cada Agência de Estatística será fixada pelo Diretor-Superintendente, por proposta do Delegado de Estatística, considerados, entre outros aspectos, fatôres geo-econômicos da região, tais como a extensão territorial, a população, o número de informantes cadastrais, os meios de comunicação e a centralidade da cidade-sede

§ 2º — É da competência do Presidente a aprovação da classificação das Agências e a autorização para sua transferência de um nível para outro.

§ 3.º — Dentro do prazo de 30 dias, a COGERE elaborará, com a colaboração dos órgãos técnicos da DELEST—RN, estudo visando à classificação das Agências de Estatística em diferentes categorias, tendo em vista os aspectos geo-econômicos da região, o número de informantes cadastrados, o volume dos encargos e o grau de dificuldade para cumpri-los, e outros fatôres que poderão contribuir para estabelecer uma classificação das Agências.

Art. 10 — Atendendo às condições de localização geográfica de determinada região, o Diretor-Superintendente poderá autorizar a instalação de Postos de Coleta Estatística, diretamente subordinados a uma Agência de Estatística

Parágrafo único — Ao Encargo do Pôsto de Coleta poderá ser arbitrada pelo Presidente da Fundação, a gratificação por encargos especiais prevista no art. 14 da Resolução COD/24/68

Art 11 — Quando sediado em Município do interior do Estado, o Supervisor de Coleta Estatística poderá ter um Assistente, ao qual será atribuída, pelo Presidente, a gratificação por encargos especiais, prevista no art 14 da Resolução COD/24/68

Art 12 — Para atender à necessidade de coordenação de pesquisas especiais no âmbito regional, o Presidente poderá autorizar o pagamento de gratificação de encargos especiais, prevista no artigo 14 da Resolução COD/24/68, ao servidor designado Supervisor da pesquisa.

Art 13 — Obedecidas as normas da Fundação, a DELEST—RN, poderá utilizar pessoal temporário, técnicos e pesquisadores eventuais, remunerados à base de tarefa, para a realização de trabalhos específicos

Art 14 — Os órgãos técnicos e administrativos do IBE assegurarão à DELEST, na medida das suas possibilidades, a colaboração necessária para cumprimento pelo órgão das suas atribuições.

Art. 15 — Enquanto não fôr aprovado o grupamento das Agências de Estatística previsto no artigo 9.º, será mantida a atual organização das Agências Municipais de Estatística.

Art. 16 — A implantação da estrutura prevista nesta Resolução dar-se-á a partir da data da aprovação do seu quadro de lotação de cargos de confiança.

RESOLUÇÃO COD-97, DE 14 DE MARÇO DE 1969

Cria, no Estado de Alagoas, a Delegacia de Estatística do IBE (DELEST—AL) e a respectiva Comissão de Coordenação.

O CONSELHO DIRETOR DA FUNDAÇÃO IBGE, no uso das atribuições que lhe confere o art. 16, alínea *e*, do Estatuto, e

considerando a necessidade de proceder a uma reformulacão estrutural da Rêde-de-Coleta Estatística com vistas a dar-lhe melhores condições para a execução das suas tarefas específicas;

considerando que os estudos realizados apontaram como meio eficiente de dinamizar a coleta estatística, na área estadual, o grupamento de municípios, levando em conta principalmente fatôres geo-econômicos das regiões onde se encontram;

considerando que se torna necessário objetivar no âmbito regional, a intercooperação técnica entre a Fundação e órgãos de instituições do setor público e privado, tendo em vista principalmente o melhor atendimento, pela Rêde-de-Coleta, dos trabalhos de levantamentos estatísticos de interêsse nacional e estadual,

RESOLVE:

Art 1.º — Ficam criadas, no Estado de Alagoas, a *Delegacia de Estatística* do IBE (DELEST—AL), diretamente subordinada ao Diretor-Superintendente, e a respectiva *Comissão de Coordenação.*

Art 2º — No cumprimento de suas finalidades, compete precìpuamente à DELEST realizar, em sintonia com os órgãos técnicos centrais do IBE, os trabalhos de pesquisa estatística, principalmente o de coleta de dados, bem como, em casos especiais, os de apuração, sistematização e divulgação estatística, e promover a intercooperação técnica entre a entidade e os órgãos estaduais e municipais de estatística

Art. 3º — A Comissão de Coordenação terá como atribuição principal estabelecer a mais conveniente programação dos trabalhos estatísticos, no âmbito estadual, visando ao aproveitamento da Rêde-de-Coleta sempre nas melhores condições e à conciliação téc-

nica entre as programações de pesquisas estatísticas federais e regionais

Art. 4.º — A Comissão de Coordenação constituir-se-á dos seguintes membros: a) Delegado de Estatística do IBE—AL, que será seu Coordenador; b) Um Supervisor de Coleta indicado pelo Diretor-Superintendente do IBE; c) Chefes de Setor da DELEST—AL, d) Dirigente do Órgão Estadual de Estatística; e) Dirigente do Órgão de Estatística da Prefeitura da Capital, f) Representante do Órgão de Planejamento do Govêrno do Estado; g) Representante das Fôrças Armadas; h) Dois membros designados pelo Presidente da Fundação, preferentemente escolhidos entre técnicos vinculados a entidade usuária de dados estatísticos

Parágrafo único — A indicação dos Representantes previstos nas letras *f* e *g* será solicitada, respectivamente, aos Senhores Governador do Estado e Chefe do Estado-Maior das Fôrças Armadas

Art 5 º — A Comissão de Coordenação se reunirá ordinàriamente uma vez por mês e, extraordinàriamente, por convocação do seu Coordenador.

Art 6 º — A estrutura geral da DELEST—AL será a seguinte:

I — DIREÇÃO

a) Seção de Documentação e Divulgação
b) Equipe de Supervisores de Coleta Estatística

II — SETOR DE COLETA

a) Seção de Cadastro e Contrôle
b) Seção de Coleta da Capital
c) Agências de Estatística

III — SETOR TÉCNICO

a) Seção de Pesquisas Especiais

IV — SETOR ADMINISTRATIVO

a) Seção de Pessoal
b) Seção de Orçamento e Contabilidade
c) Seção de Encargos Gerais
d) Pagadoria

Art. 7.º — A direção técnica e administrativa da DELEST—AL será exercida por um Delegado de Estatística, designado pelo Presidente da Fundação

Parágrafo único — O Delegado de Estatística será substituído, em seus impedimentos eventuais por um dos Chefes de Setor ou por um dos Supervisores de Coleta, que será designado pelo Presidente da Fundação e exercerá a substituição sem prejuízo de suas funções

Art 8 º — Sob a direção imediata do Delegado de Estatística, a competência precípua de cada um dos seguintes órgãos será:

a) da *Seção de Documentação e Divulgação,* pesquisar, sistematizar e arquivar a documentação técnica de interêsse dos trabalhos estatísticos, coligir, catalogar e arquivar os elementos informativos referentes à evolução econômica, social e político-administrativa do País, dos Estados e dos Municípios, e manter biblioteca especializada; colhêr elementos informativos, reunir os resultados dos levantamentos estatísticos em representações tabulares, e manter organizado um serviço de informações com base nos resultados das pesquisas estatísticas;

b) da *Equipe de Supervisores de Coleta Estatística,* orientar e coordenar os trabalhos técnicos e administrativos das Agências de Estatística, tendo em vista a realização das respectivas tarefas nas melhores condições de qualidade, segurança e rapidez; verificar, em inspeções periódicas, se os cronogramas, as instruções e as normas de serviço estão sendo obedecidas, promover as medidas necessárias a fim de conseguir que o material de coleta seja sempre expedido pela Agência de Estatística em condições satisfatórias de correção; comunicar ao Delegado ou aos Chefes de Setor da DELEST, as anormalidades que observar em seus trabalhos de inspeção, bem como orientá-los sôbre modificações aconselháveis a serem introduzidas nas normas, rotinas, instruções e instrumentos de coleta, tomar as providências necessárias, em sua área de ação, para obter o indispensável regime de mútua cooperação entre as Agências de Estatística;

c) do *Setor de Coleta,* coordenar e controlar as atividades dos órgãos que lhe são subordinados, de forma a assegurar uniformidade dos levantamentos; providenciar, nos prazos legais e regulamentares, quanto à execução, contrôle e coordenação da coleta estatística, visando à atualização dos levantamentos; organizar e manter atualizado o cadastro de informantes dos diversos inquéritos, de modo a permitir imediato conhecimento da situação de todos os aspectos investigados; diligenciar no sentido de que sejam organizados e mantidos atualizados os cadastros municipais de informantes,

d) do *Setor Técnico,* planejar, executar e coordenar, isoladamente ou em cooperação com outros órgãos, os levantamentos e pesquisas realizados sob a orientação do respectivo órgão técnico especializado do IBE, proceder à crítica de consistência de questionários e das apurações que efetuar; proceder a apurações de determinados inquéritos de interêsse regional; preparar publicações especiais, tendo em vista a

divulgação de estatística de interêsse regional,

e) do *Setor Administrativo,* planejar, controlar e executar os encargos administrativos da DELEST, apreciar questões relativas a direitos, vantagens e deveres do pessoal; orientar e fiscalizar a aplicação da legislação respectiva; preparar fôlhas de pagamento do pessoal; elaborar anualmente a proposta orçamentária e controlar a sua execução; contabilizar os documentos relativos aos fatos administrativos e escriturar os movimentos patrimonial e financeiro; organizar balancetes mensais e anuais, bem como manter atualizados os documentos demonstrativos da situação econômica e financeira da DELEST, arrecadar a receita e pagar as despesas regularmente processadas, receber, registrar, distribuir, numerar, expedir e arquivar a correspondência relativa às atividades da DELEST; coordenar e executar os serviços inerentes à administração do material; receber, conferir e guardar os materiais adquiridos, zelar pelas condições de conservação dos prédios, bem como manter em perfeitas condições de funcionamento tôdas as instalações

Art 9 º — Para efeito dos trabalhos de levantamentos estatísticos, a área de jurisdição de uma Agência de Estatística poderá abranger mais de um Município

§ 1 º — A área de jurisdição de cada Agência de Estatística será fixada pelo Diretor-Superintendente, por proposta do Delegado de Estatística, considerado, entre outros aspectos, fatôres geo-econômicos da região, tais como a extensão territorial , a população, o número de informantes cadastrados, os meios de comunicação e a centralidade da cidade-sede

§ 2 º — É da competência do Presidente a aprovação da classificação das Agências e a autorização para sua transferência de um nível para outro

§ 3 º — Dentro do prazo de 30 dias, a COGERE eleborará, com a colaboração dos órgãos técnicos da DELEST—AL estudo visando à classificação das Agências de Estatística em diferentes categorias, tendo em vista os aspectos geo-econômicos da região, o número de informantes cadastrados o volume dos encargos e o grau de dificuldade para cumpri-los, e outros fatôres que poderão contribuir para estabelecer uma classificação das Agências

Art 10 — Atendendo às condições de localização geográfica de determinada região, o Diretor-Superintendente poderá autorizar a instalação de Postos de Coleta de Estatística, diretamente subordinados a uma Agência de Estatística

Parágrafo único — Ao Encarregado do Pôsto de Coleta poderá ser arbitrada pelo Presidente da Fundação, a gratificação por encargos especiais prevista no artigo 14 da Resolução COD/24/68

Art 11 — Quando sediado em Município do interior do Estado, o Supervisor de Coleta Estatística poderá ter um Assistente, ao qual será atribuída, pelo Presidente, a gratificação por encargos especiais, prevista no artigo 14 da Resolução COD/24/68

Art 12 — Para atender à necessidade de coordenação de pesquisas especiais no âmbito regional, o Presidente poderá autorizar o pagamento de gratificação de encargos epeciais, prevista no artigo 14 da Resolução COD/24/68, ao servidor designado Supervisor da pesquisa

Art 13 — Obedecidas as normas da Fundação, a DELEST—AL poderá utilizar pessoal temporário, técnicos e pesquisadores eventuais, remunerados à base de tarefa para a realização de trabalhos específicos

Art 14 — Os órgãos técnicos e administrativos do IBE assegurarão à DELEST, na medida das suas possibilidades, a colaboração necessária para cumprimento pelo órgão das suas atribuições

Art 15 — Enquanto não fôr aprovado o grupamento das Agências de Estatística previsto no artigo 9 º, será mantida a atual organização das Agências Municipais de Estatística

Art. 16 — A implantação da estrutura prevista nesta Resolução dar-se-á a partir da data da aprovação do seu quadro de lotação de cargos de confiança.

RESOLUÇÃO COD-98, DE 14 DE MARÇO DE 1969

Cria, no Estado do Espírito Santo, a Delegacia de Estatística do IBE (DELEST—ES) e a respectiva Comissão de Coordenação

O CONSELHO DIRETOR DA FUNDAÇÃO IBGE, no uso das atribuições que lhe confere o art 16, alínea *e,* do Estatuto, e

considerando a necessidade de proceder a uma reformulação estrutural da Rêde-de-Coleta Estatística com vistas a dar-lhe melhores condições para a execução das suas tarefas específicas;

considerando que os estudos realizados apontaram como meio eficiente de dinamizar a coleta estatística, na cípios, levando em conta principalmenárea estadual, o grupamento de munite fatôres geo-econômicos das regiões onde se encontram;

considerando que se torna necessário objetivar no âmbito regional, a intercooperação técnica entre a Funda-

ção e órgãos e instituições do setor público e privado, tendo em vista principalmente o melhor atendimento, pela Rêde-de-Coleta, dos trabalhos de levantamentos estatísticos de interêsse nacional e estadual,

RESOLVE:

Art. 1.º — Ficam criadas, no Espírito Santo, a *Delegacia de Estatística* do IBE (DELEST—ES), diretamente subordinada ao Diretor-Superintendente, e a respectiva *Comissão de Coordenação.*

Art. 2º — No cumprimento de suas finalidades, compete precìpuamente à DELEST realizar, em sintonia com os órgãos técnicos centrais do IBE, os trabalhos de pequisa estatística, principalmente os de coleta de dados, bem como, em casos especiais, os de apuração, sistematização e divulgação estatística, e promover a intercooperação técnica entre a entidade e os órgãos estaduais e municipais de estatística

Art 3º — A Comissão de Coordenação terá como atribuicão principal estabelecer a mais conveniente programacão dos trabalhos estatísticos, no âmbito estadual, visando ao aproveitamento da Rêde-de-Coleta sempre nas melhores condicões e à conciliação técnica entre as programações de pesquisas estatísticas federais e regionais

Art 4º — A Comissão de Coordenação constituir-se-á dos seguintes membros: a) Delegado de Estatística do IBE—ES, que será seu Coordenador, b) Um Supervisor de Coleta indicado pelo Diretor-Superintendente do IBE; c) Chefes de Setor da DELEST—ES, d) Dirigente do Órgão Estadual de Estatística; e) Dirigente do Órgão de Estatística da Prefeitura da Capital; f) Representante do Órgão de Planejamento do Govêrno do Estado; g) Representante das Fôrças Armadas; h) Dois membros designados pelo Presidente da Fundacão, preferentemente escolhidos entre técnicos vinculados a entidade usuária de dados estatísticos

Parágrafo único — A indicação dos Representantes previstos nas letras *f* e *g* será solicitada, respectivamente, aos Senhores Governador do Estado e Chefe do Estado-Maior das Fôrças Armadas.

Art 5º — A Comissão de Coordenação se reunirá ordinàriamente uma vez por mês e, extraordinàriamente, por convocação do seu Coordenador

Art 6º — A estrutura geral da DELEST—ES será a seguinte:

I — DIREÇÃO

a) Seção de Documentação e Divulgação
b) Equipe de Supervisores de Coleta Estatística

II — SETOR DE COLETA

a) Seção de Cadastro e Contrôle
b) Seção de Coleta da Capital
c) Agências de Estatística

III — SETOR TÉCNICO

a) Seção de Pesquisas Especiais

IV — SETOR ADMINISTRATIVO

a) Seção de Pessoal
b) Seção de Orçamento e Contabilidade
c) Seção de Encargos Gerais
d) Pagadoria

Art. 7.º — A direção técnica e administrativa da DELEST—ES será exercida por um Delegado de Estatística, designado pelo Presidente da Fundação

Parágrafo único — O Delegado de Estatística será substituído, em seus impedimentos eventuais por um dos Chefes de Setor ou por um dos Supervisores de Coleta, que será designado pelo Presidente da Fundação e exercerá a substituição sem prejuízo de suas funções.

Art 8º — Sob a direção imediata do Delegado de Estatística, a competência precípua de cada um dos seguintes órgãos será:

a) da *Seção de Documentação e Divulgação,* pesquisar, sistematizar e arquivar a documentação técnica de interêsse dos trabalhos estatísticos, coligir, catalogar e arquivar os elementos informativos referentes à evolução econômica, social e político-administrativa do País, dos Estados e dos Municípios, e manter biblioteca especializada; colhêr elementos informativos, reunir os resultados dos levantamentos estatísticos em representações tabulares, e manter organizado um serviço de informações com base nos resultados das pesquisas estatísticas;

b) da *Equipe de Supervisores de Coleta Estatística,* orientar e coordenar os trabalhos técnicos e administrativos das Agências de Estatística, tendo em vista a realização das respectivas tarefas nas melhores condições de qualidade, segurança e rapidez, verificar, em inspeções periódicas, se os cronogramas, as instruções e as normas de serviço estão sendo obedecidas, promover as medidas necessárias a fim de conseguir que o material de coleta seja sempre expedido pela Agência de Estatística em condições satisfatórias de correção, comunicar ao Delegado ou aos Chefes de Setor da DELEST, as anormalidades que observar em seus trabalhos de inspecão, bem como orientá-los sôbre modificações aconselháveis a serem introduzidas nas normas, rotinas, instruções e instrumentos de coleta; tomar as providências necessárias, em sua área de ação, para obter o indispensável

regime de mútua cooperação entre as Agências de Estatística;

c) do *Setor de Coleta,* coordenar e controlar as atividades dos órgãos que lhe são subordinados, de forma a assegurar uniformidade dos levantamentos; providenciar, nos prazos legais e regulamentares, quanto à execução, contrôle e coordenação da coleta estatística, visando à atualização dos levantamentos; organizar e manter atualizado o cadastro de informantes dos diversos inquéritos, de modo a permitir imediato conhecimento da situação de todos os aspectos investigados; diligenciar no sentido de que sejam organizados e mantidos atualizados os cadastros municipais de informantes;

d) do *Setor Técnico,* planejar, executar e coordenar, isoladamente ou em cooperação com outros órgãos, os levantamentos e pesquisas realizados sob a orientação do respectivo órgão técnico especializado do IBE; proceder à crítica de consistência de questionários e das apurações que efetuar; proceder a apurações de determinados inquéritos de interêsse regional; preparar publicações especiais, tendo em vista a divulgação de estatísticas de interêsse regional;

e) do *Setor Administrativo,* planejar, controlar e executar os encargos administrativos da DELEST; apreciar questões relativas a direitos, vantagens e deveres do pessoal; orientar e fiscalizar a aplicação da legislação respectiva, preparar fôlhas de pagamento do pessoal; elaborar anualmente a proposta orçamentária e controlar a sua execução; contabilizar os documentos relativos aos fatos administrativos e escriturar o movimento patrimonial e financeiro; organizar balancetes mensais e anuais, bem como manter atualizados os documentos demonstrativos da situação econômica e financeira da DELEST; arrecadar a receita e pagar as despesas regularmente, expedir e arquivar a correspondência relativa às atividades da DELEST; coordenar e executar os serviços inerentes à administração do material; receber, conferir e guardar os materiais adquiridos, zelar pelas condições de conservação dos prédios, bem como manter em perfeitas condições de funcionamento tôdas as instalações

Art 9 º — Para efeito dos trabalhos de levantamentos estatísticos, a área de jurisdição de uma Agência de Estatística poderá abranger mais de um Município

§ 1.º — A área de jurisdição de cada Agência de Estatística será fixada pelo Diretor-Superintendente, por proposta do Delegado de Estatística, considerados, entre outros aspectos, fatôres geo-econômicos da região, tais como a extensão territorial, a população, o número de informantes cadastrados, os meios de comunicação e a centralidade da cidade-sede.

§ 2.º — É da competência do Presidente a aprovação da classificação das Agências e a autorização para sua transferência de um nível para outro.

§ 3 º — Dentro do prazo de 30 dias, a COGERE elaborará, com a colaboração dos órgãos técnicos da DELEST—ES, estudo visando à classificação das Agências de Estatística em diferentes categorias, tendo em vista os aspectos geo-econômicos da região, o número de informantes cadastrados, o volume dos encargos e o grau de dificuldades para cumpri-los, e outros fatôres que poderão contribuir para estabelecer uma classificação das Agências

Art. 10 — Atendendo às condições de localização geográfica de determinada região, o Diretor-Superintendente poderá autorizar a instalação de Postos de Coleta Estatística, diretamente subordinados a uma Agência de Estatística.

Parágrafo único — Ao Encarregado do Pôsto de Coleta poderá ser arbitrada pelo Presidente da Fundação, a gratificação por encargos especiais prevista no artigo 14 da Resolução COD/24/68

Art 11 — Quando sediado em Município do interior do Estado, o Supervisor de Coleta Estatística poderá ter um Assistente, ao qual será atribuída, pelo Presidente, a gratificação por encargos especiais, prevista no artigo 14 da Resolução COD/24/68

Art 12 — Para atender à necessidade de coordenação de pesquisas especiais no âmbito regional, o Presidente poderá autorizar o pagamento de gratificação de encargos especiais, prevista no artigo 14 da Resolução COD/24/68, ao servidor designado Supervisor da pesquisa.

Art 13 — Obedecidas as normas da Fundação, a DELEST—ES poderá utilizar pessoal temporário, técnicos e pesquisadores eventuais, remunerados, à base de tarefa, para a realização de trabalhos específicos

Art. 14 — Os órgãos técnicos e administrativos do IBE assegurarão à DELEST, na medida das suas possibilidades, a colaboração necessária para cumprimento pelo órgão das suas atribuições

Art 15 — Enquanto não fôr aprovado o grupamento das Agências de Estatística previsto no art. 9 º, será mantida a atual organização das Agências Municipais de Estatística.

Art. 16 — A implantação da estrutura prevista nesta Resolução dar-se-á a partir da data da aprovação do seu quadro de lotação de cargos de confiança.

PUBLICAÇÕES EDITADAS PELO INSTITUTO BRASILEIRO DE ESTATÍSTICA NO TRIMESTRE JANEIRO-MARÇO DE 1969

DEPARTAMENTO DE DIVULGAÇÃO ESTATÍSTICA (DEDIVE)

Periódicos

31(81)(05)

BOLETIM ESTATÍSTICO Rio de Janeiro ano 26, n 103-104, jul/set — out/dez 1968 Trimestral

911 6(81)(05)

FLAGRANTES BRASILEIROS, 37 Rio de Janeiro, 1968 56 p Irregular

911 6(81)(05)

FLAGRANTES BRASILEIROS Índice ns 16 a 30 Rio de Janeiro, 1969 48 p Irregular

311(81)(05)

REVISTA BRASILEIRA DE ESTATÍSTICA Rio de Janeiro, ano 29, n 114-115, abr/jun-jul/set 1968 Trimestral

352(81)(05)

REVISTA BRASILEIRA DOS MUNICÍPIOS Rio de Janeiro, ano 21, n 81/82, jan/jun 1968 Trimestral

Séries

911 6(815 11)

Belo Horizonte, Minas Gerais Texto de Aldalita de Lima Medeiros [Rio de Janeiro Serv. Gráf Fundação IBGE, 1969] 49 p il (Coleção de Monografias Série A, 424)

911 6(813 52 VIÇ)

Viçosa, Alagoas Texto de Pedro Baltazar de Almeida [Rio de Janeiro, Serv. Gráf Fundação IBGE, 1969] 19 p il (Coleção de Monografias Série A, 425)

911 6(813 42 CAR)

Caruaru, Pernambuco Texto de Daisy Costa Lima [Rio de Janeiro, Serv Gráf Fundação IBGE, 1969] 23 p. il (Coleção de Monografias Série A, 426)

911 6(816 12 MAR)

Marília, São Paulo Texto de Guilherme Camarinha Martins [Rio de Janeiro, Serv Gráf Fundação IBGE, 1969] 26 p il (Coleção de Monografias Série A, 427)

911 6(815 32 SÃO SEB)

São Sebastião do Alto, Rio de Janeiro Texto de Daisy Costa Lima [Rio de Janeiro, Serv Gráf da Fundação IBGE, 1969] 15 p il (Coleção de Monografias Série A, 428)

911 6(816 52 SÃO LEO)

São Leopoldo, Rio Grande do Sul Texto de Paul Schnetzer [Rio de Janeiro, Serv Gráf da Fundação IBGE, 1969] 15 p il (Coleção de Monografias Série A, 429)

911 6(816 42 ILH)

Ilhéus, Bahia Texto de Guilherme Camarinha Martins [Rio de Janeiro, Serv Gráf da Fundação IBGE, 1969] 22 p il (Coleção de Monografias Série A, 430)

911 6(815 12 BAR)

Barbacena, Minas Gerais Texto de Rilza Ferreira Saldanha [Rio de Janeiro, Serv Gráf Fundação IBGE, 1969] 34 p il (Coleção de Monografias Série A, 432)

911 6(816 22 PON GRO)

Ponta Grossa, Paraná Texto de Pedro Baltazar de Almeida [Rio de Janeiro, Serv Gráf Fundação IBGE, 1969] 30 p il (Coleção de Monografias Série A, 433)

DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICAS INDUSTRIAIS, COMERCIAIS E DE SERVIÇOS (DEICOM)

31:66/68(81)

Indústrias de transformação — 1968 jan /set — Dados mensais [Rio de neiro, Serv. Gráf. Fundação IBGE, 1969] 134 p tab. gráf.

Indústrias de transformação — Pesquisa mensal jan /dez. 1968 [Rio de Janeiro, 1969] 39 p tab. Mimeografado

— *Pesquisa mensal jan 1969* [Rio de Janeiro, 1969] 42 p. tab Mimeografado.

— *Pesquisa mensal jan./fev. 1969* [Rio de Janeiro, 1969] 11 p tab. Mimeografado.

31 69(81)

Indústria da construção. Inquérito mensal sôbre edificações, outubro de 1968 [Rio de Janeiro, Serv. Gráf Fundação IBGE, 1969] 143 p tab

—, *novembro de 1968* [Rio de Janeiro, Serv. Gráf Fundação IBGE, 1969] 141 p tab

381(813 1)

Comércio por vias internas Exportação do Ceará, 1965 [Rio de Janeiro, 1969] 50 p tab Mimeografado.

381(811 2)

Exportação do Acre. Comércio por vias internas, 1967 [Rio de Janeiro, 1969] 4 p tab Mimeografado

31:338 5(81)

Inquérito nacional de preços Gêneros alimentícios Comércio varejista das capitais — 1967 a dezembro de 1968 [Rio de Janeiro, 1969] 112 p. tab. Mimeografado

— — *1967 a janeiro de 1969* [Rio de Janeiro, 1969] 112 p tab Mimeografado.

— — *1967 a fevereiro de 1969* [Rio de Janeiro, 1969] 112 p tab. Mimeografado.

— *Gêneros alimentícios e artigos do vestuário Comércio atacadista e varejista nas Unidades da Federação, dezembro de 1968* [Rio de Janeiro, 1969] 49 p tab Mimeografado

—, *janeiro de 1969* [Rio de Janeiro, 1969] 49 p tab Mimeografado.

— *nas capitais, dezembro de 1968* [Rio de Janeiro, 1969] 37 p tab. Mimeografado.

— *nas capitais, janeiro de 1969* [Rio de Janeiro, 1969] 37 p. tab. Mimeografado.

— *nas capitais, fevereiro de 1969* [Rio de Janeiro, 1969] 37 p. tab Mimeografado

— *Preços de material de construção no comércio atacadista e salários na indústria da construção Novembro de 1968/janeiro de 1969* [Rio de Janeiro, Serv. Gráf Fundação IBGE, 1969] 142 p tab

GRUPO EXECUTIVO DE PESQUISAS DOMICILIARES (GEPED)

311 213 2:312 5(816 2 + 816 4/ 5)

Pesquisa nacional por amostra de domicílios Dados gerais. 3º trimestre de 1968 Região III — Estados do Paraná, Santa Catarina e Rio Grande do Sul [Rio de Janeiro, Serv. Gráf. Fundação IBGE, 1969] 34 p. tab gráf. (Doc GEPD, 13)

311 213 2 312 5 (815 3/ 4)

— *Região I — Estados da Guanabara e Rio de Janeiro* [Rio de Janeiro, Serv Gráf. Fundação IBGE, 1969] 40 p tab gráf (Doc. GEPD, 14)

EM CURITIBA, O PRESIDENTE DA FUNDAÇÃO IBGE

Assinatura de Convênio, para fins de Mapeamento Regional.

O Presidente da Fundação IBGE, Professor Sebastião Aguiar Ayres, viajou para Curitiba, a 22 de janeiro, onde, em solenidade realizada no Palácio do Govêrno, assinou, juntamente com o Governador Paulo Pimentel, Têrmo aditivo a Convênio antes firmado com o Estado do Paraná, para a realização de trabalhos cartográficos e de mapeamento regional.

O ato teve a presença de Secretários de Estado e outras destacadas figuras dos altos círculos administrativos do Paraná, dirigentes e técnicos dos órgãos geográfico-cartográficos estaduais, além dos elementos responsáveis pela Chefia das repartições da Fundação IBGE sediadas em Curitiba.

O Têrmo aditivo refere-se ao mapeamento topográfico, na escala de 1:50 000, de importante área da zona cafeeira do Estado, tendo por centro a cidade de Maringá, cobrindo cêrca de 20 000 quilômetros quadrados Adicionando-se essa nova área às já levantadas ou em fase de levantamento, ter-se-á um total da ordem de 42 000 quilômetros quadrados do Estado mapeados em escala topográfica, em decorrência de Convênios firmados com o IBGE.

Cooperação administrativa e técnica

Após a assinatura do Convênio, o Presidente da Fundação IBGE discursou, salientando a existência, no Estado do Paraná, de ambiente altamente favorável às formas de cooperação administrativa e técnica, que caracterizam a ação da entidade, dentro do espírito da Reforma Administrativa, como instrumento capaz de assegurar melhor produtividade ao trabalho comum de bem servir ao País. Era o que se comprovava — assinalou o Professor Sebastião Aguiar Ayres — pela feliz circunstância de que o Convênio para o qual se firmava, naquele momento, um Têrmo aditivo, fôra o segundo assinado pelo IBGE com o Estado do Paraná.

— "O primeiro Convênio — acentuou —, em 1965, previu o levantamento, para fins de mapeamento, de uma área limítrofe com o Estado de São Paulo, no Nordeste do Paraná. Cumprido, resultou na elaboração de 16 fôlhas topográficas, na escala de 1:50 000 Objetivou, também, êsse primeiro Convênio, a prestação de assistência técnica por parte do IBGE ao pessoal especializado do Departamento de Geografia, Terras e Colonização, para habilitá-lo a outras tarefas mais complexas no domínio da Cartografia. O êxito dos empreendimentos e a perfeita harmonia de execução dos trabalhos permitiram que, já no segundo Convênio, firmado em 1968, maiores atribuições técnicas fôssem absorvidas pelos órgãos estaduais".

Depois de referir-se à importância do segundo Convênio, o Professor Sebastião Aguiar Ayres assinalou que "com vistas a assegurar continuidade operacional e territorial ao esfôrço empreendido no mapeamento sistemático do Estado, a Comissão para o Mapeamento do Paraná (COMEP) propôs um Têrmo aditivo ao Convênio em execução, para o preparo de novas fôlhas topográficas, em contigüidade e a Oeste da área que já vem sendo levantada, também na zona limítrofe com o Estado de São Paulo. Isso permitirá o recobrimento, com 24 fôlhas topográficas, na escala de 1·50 000, de extensa área em desenvolvimento, com cêrca de 20 000 quilômetros quadrados"

Ao concluir a sua oração, o Presidente da Fundação IBGE externou a magnífica impressão de progresso e desenvolvimento que o Paraná proporciona, impressão, disse, que "bem reflete o espírito pioneiro, o dinamismo, a capacidade e o patriotismo de sua gente e de seus governantes"

Entrevista coletiva à imprensa de Curitiba

No dia seguinte, o Professor Sebastião Aguir Ayres concedeu entrevista coletiva à imprensa de Curtiba, no curso da qual deu ênfase ao esfôrço nos últimos anos levado a efeito pela Fundação IBGE, no empenho de colocar-se ao nível das exigências do desenvolvimento do País.

Depois de exteriorizar a impressão causada pelo crescimento urbano da capital do Paraná, bem como pelo extraordinário desenvolvimento do Estado, aludiu à reformulação do sistema estatístico nacional e aos motivos que levaram o Govêrno a dar nova institucionalização ao IBGE

Mencionou, em seguida, os expressivos êxitos conseguidos na atualização das estatísticas em geral, sobretudo quanto às Estatísticas Industriais, à Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios, aos levantamentos da Indústria de construção civil e aos inquéritos de preços. Aludiu, também, à progressiva antecipação da edição do *Anuário Estatístico do Brasil* e à publicação do volume *Atualidade Estatística do Brasil*, divulgando, em maio de cada ano, numeroso elenco de dados normalmente inseridos no *Anuário*

Quanto aos trabalhos do setor geográfico, referiu-se aos importantes estudos de análise espacial da economia brasileira, em apoio aos órgãos governamentais de planejamento nacional ou regional Aludiu, também, aos estudos de centralidade e rêde urbana, fluxos e zonas de estrutura essencialmente homogênea, os quais constituem elementos básicos para a compreensão dos fenômenos de regionalização e proporcionam subsídios indispensáveis à política de desenvolvimento econômico do País

No concernente ao setor cartográfico, salientou o Professor Sebastião Aguiar Ayres o impulso dado ao regime de colaboração na prestação de serviços técnicos, através de Convênios com Governos estaduais e entidades federais, para fins de mapeamento topográfico ou restituição aerofotogramétrica Mencionou, igualmente, por sua ampla repercussão e alcance, a edição do Mapa do Brasil, na escala de 1:5 000 000, a côres, para uso nas escolas, com a distribuição, à rêde do ensino primário, de cem mil mapas escolares, de feitura apropriada ao ensino elementar.

No setor da Geodésia e da Topografia, frisou o incremento dos trabalhos de apoio suplementar, baseados na rêde geodésica fundamental, a fim de assegurar aproveitamento o mais rápido possível à documentação existente.

Censo Geral de 1970

Prestou, em seguida, o Presidente da Fundação IBGE, informações e esclarecimentos a respeito dos trabalhos preparatórios para a realização do VIII Recenseamento Geral do Brasil, em 1970, frisando que já se possui no Brasil, suficiente experiência com relação ao planejamento e execução de censos.

"Os planos estabelecidos para os diversos Censos a serem efetuados em 1970 — ressaltou —, depois de apreciados e debatidos nas Comissões Técnicas da I Conferência Nacional de Estatística, realizada no Rio de Janeiro, em maio do ano passado, foram aprovados pela CONFEST Encontra-se em fase conclusiva o preparo da base geográfica da grande operação censitária, incluindo a atualização e, em muitos casos, a confecção, de cêrca de 4 000 mapas municipais, tarefa que está sendo efetuada com a eficiente cooperação do Instituto Brasileiro de Geografia".

Esclareceu que a base legal para a execução do Censo Geral de 1970 já se acha estabelecida pelo Decreto-lei nº 369, de 19 de dezembro último, que "dispõe sôbre a realização do VIII Recenseamento Geral do Brasil em 1970", o qual prevê a constituição da Comissão Censitária Nacional, que terá o importante encargo da orientação do plano do Censo Geral de 1970 e da assistência técnica de sua execução

Ao finalizar suas declarações à imprensa de Curitiba, ressaltou o Professor Sebastião Aguiar Ayres que a Fundação IBGE desenvolve os maiores esforços para bem cumprir a missão que o Govêrno lhe confiou ,e que já existem frutos dêsse trabalho dedicado, silencioso e patriótico, realizado por equipes de ibgeanos conscientes de suas responsabilidades E, por fim, registrou a participação eficiente dos ibgeanos do interior — quer os da rêde-de-coleta estatística, como os dos distritos de levantamentos geodésicos e topográficos — os quais não têm medido esforços para corresponder aos encargos que lhes têm sido atribuídos.

CALENDÁRIO DAS REUNIÕES DE ÓRGÃOS INTERNACIONAIS DE ESTATÍSTICA

Publicamos a seguir, o Calendário das reuniões de órgãos internacionais de Estatística, transcrito do nº 37, da Revista do Instituto Internacional de Estatística

DATAS	LUGAR	REUNIÃO
1969		
2-16 junho	Bangkok (Tailândia)	*Comissão Econômica das Nações Unidas para a Ásia* Nona Sessão da Conferência dos estatísticos asiáticos *Informação*: ECAFE Statistics Division, Sala Santhitam, Bangkok, Tailândia
23-27 junho	Genebra (Suiça)	*Comissão Econômica das Nações Unidas para a Europa* Décima sétima Sessão Plenária da Conferência dos estatísticos europeus *Informação*. ECE Statistical Division, Palais des Nations, CH-1211 Geneva 10, Switzerland
julho (tentativa)		*Instituto Interamericano de Estatística* Décima Sessão do Comitê de aperfeiçoamento da estatística nacional (COINS) *Informação* IASI, Pan American Union, Washington, D C , 20006, U S A
19-22 agôsto	New York	*Associação Americana de Estatística* 129ª Reunião Anual *Informação*: ASA, 810-18th Street, N W Washington, D C , 20006, U S A
21-28 agôsto	New Haven, Connecticut (Universidade de Yale)	*Associação Internacional de Ecologia — Instituto Internacional de Estatística.* Simpósio Internacional sôbre ecologia estatística *Informação*: G P Patil, Dept of Statistics, 302 Mc Allister Building, Pennsylvania State University, University Park, Penn. 16802 U.S A

25-27 agôsto	Praga (Checoslováquia)	*Organização Européia para Contrôle de Qualidade.* Décima terceira Conferência Anual. Tema: Treinamento de qualidade e confiança. *Informação*: Czechoslovak Scientific and Technical Society, 5 Siroka, Prague 1.
1-3 setembro	Bruxelas (Bélgica)	*Sociedade Econométrica* Reunião Européia Regional *Informação*: J Waelbroeck, Université Libre de Bruxelles, 49 rue de Châtelain, Bruxelles 5, Belgique
3-11 setembro	Londres	*Instituto Internacional de Estatística* Trigésima sétima Sessão do ISI *Informação*: ISI Permanent Office, 2 Oostduinlan, The Hague, Netherlands
3-11 setembro	Londres	*União Internacional para o Estudo Científico da População* Conferência Geral *Informação*: B Remiche, Exec Secr, 2 rue Charles Magnette, Liège, Belgium
15-23 setembro	Roma	*Organização de Alimentação e Agricultura das Nações Unidas* Quarta Sessão, FAO Comitê consultivo de peritos estatísticos *Informação* FAO Statistics Division, Via delle Terme di Caracalla, Rome
Setembro	Moscou	*Comissão Econômica das Nações Unidas para a Ásia* Seminário sôbre planejamento estatístico *Informação*: ECAFE, Bangkok, Thailand
outono	Varsóvia	*Comissão Econômica das Nações Unidas para a Europa* Seminário sôbre estatística regional *Informação*: ECE Statistical Division, Palais des Nations, Geneva, Switzerland
1-4 outubro	Atlanta, Ga (Georgia) U S A	*Instituto de Ciências Administrativas* Reunião americana. *Informação* TIMS
21-24 outubro	Tóquio	*União dos Cientistas e Engenheiros Japonêses* — Sociedade Americana de Contrôle de Qualidade — Organização Européia de Contrôle de Qualidade Conferência Internacional sôbre contrôle de qualidade.

		Informação: ICQC 69 Union of Japonese Scientists and Engineers, 5-10 Sendagaya, Shibuyaku, Tokyo, Japan.
3-14 novembro	Genebra (Suiça)	*Nações Unidas* Reunião da Comissão de População *Informação*: UN Statistical Office, New York, NY 10017 — USA
dezembro	New York	*Sociedade Econométrica* Reunião regional americana *Informação*: Econometric Society, Box 1264, Yale Station, New Haven, Conn., USA.
1970		
indeterminado (2 semanas)	África ou América do Sul	*Organização Internacional de Aviação Civil* Quinta sessão da Divisão de Estatística do ICAO. *Informação*: ICAO
indeterminado (2 semanas)	América Latina	*Organização Educacional, Científica e Cultural das Nações Unidas* Seminário Regional sôbre estatística cultural e de comunicação para os países latino-americanos *Informação*: Office of Statistics, UNESCO, Place de Fontenoy, Paris, 7e France.
abril (tentativa)	Paris	*Organização Educacional, Científica e Cultural das Nações Unidas* Comitê Especial de técnicos do govêrno e especialistas credenciados para a padronização internacional de bibliotecas estatísticas *Informação*: Office of Statistics, UNESCO, Place de Fontenoy, Paris, 7e, France.
29 junho — 3 julho	Londres	*Instituto de Ciências Administrativas* 17ª Reunião Internacional. *Informação*: TIMS
9-14 setembro	Cambridge-Inglaterra	*Sociedade Econométrica* Segundo Congresso Mundial. *Informação*: Econometric Society, Box 1264, Yale Station, New Haven, Conn., U S A.
outubro-novembro (2 semanas)	Genebra (Suiça)	*Nações Unidas* 16.ª Sessão da Comissão de Estatística. *Informação*: U N Statistical Office, New York, N.Y 10017

27-30 dezembro	Detroit, Mich. (U S.A.)	*Associação Americana de Estatística* 130 ª Reunião Anual.
27-30 dezembro	Detroit, Mich. (U.S.A)	*Sociedade Econométrica* Reunião americana regional *Informação*: Econometric Society, Box 1264, Yale Station, New Haven, Conn, U.S.A
dezembro	Bangkok (Tailândia)	*Comissão Econômica das Nações Unidas para a Ásia* Décima Sessão da Conferência dos Estatísticos Asiáticos
1971		*Informação*: ECAFE, Bangkok
Primavera	Washington	*Instituto de Ciências Administrativas* Décima oitava Reunião Internacional *Informação*· TIMS
julho (tentativa)		*Instituto Interamericano de Estatística* Décima primeira Sessão do Comitê para aperfeiçoamento da estatística nacional (COINS) *Informação*: IASI

FLORÊNCIO DE ABREU

O nome do desembargador Florêncio de Abreu está entre os daqueles que, na presidência da entidade coordenadora das atividades estatísticas e geográficas do país, mais relevantes serviços lhe prestaram, assegurando a continuidade de uma tradição de eficiência e proveitoso labor. Foi justamente num período extremamente delicado da vida da instituição — em setembro de 1952 — que o ilustre brasileiro assumiu a direção do IBGE, desde logo lhe impondo uma linha e um ritmo de trabalho realmente notáveis, graças a uma prudente mas corajosa administração

Em virtude de formação intelectual, foi-lhe possível, com a experiência adquirida ao longo de uma brilhante carreira de magistrado, estabelecer condições de raro equilíbrio e natural disciplinação aos trabalhos do IBGE, quer no campo da estatística, quer na área da geografia As qualidades superiores que antes demonstrara, de sobejo, no exercício de altos cargos públicos, êle iria confirmar na presidência da Casa de Teixeira de Freitas e José Carlos de Macedo Soares, por isso mesmo cercado da estima, admiração e respeito de quantos lhe prestavam colaboração direta

O desembargador Florêncio de Abreu (Florêncio Carlos de Abreu e Silva), que morreu no Rio de Janeiro — GB, no dia 20 de fevereiro de 1969, nasceu na antiga Capital da República a 13 de janeiro de 1882, filho do dr Florêncio Carlos de Abreu e Silva, que foi Senador do Império e Presidente do Estado de São Paulo, e de d Gonçalina Simões de Abreu e Silva. Com meses de idade foi levado para o Rio Grande do Sul, onde viveu grande parte de sua vida. Tanto que foi na Faculdade de Direito de Pôrto Alegre que iniciou seus estudos superiores, concluídos na Faculdade de Ciências Jurídicas e Sociais do Rio de Janeiro De regresso ao Rio Grande do Sul, fêz carreira na Magistratura, tendo sido Juiz Municipal, Juiz

de Direito e, por merecimento, Desembargador. Entre os altos postos que ali ocupou citam-se os de Diretor do Arquivo Público, Chefe de Polícia e Procurador Geral.

Dedicado ao culto das letras e, particularmente, da história, foi membro da Academia Sul-Riograndense de Letras, fundador do Instituto Histórico e Geográfico do Rio Grande do Sul e do Instituto de História e Geografia do Rio de Janeiro.

Jurista, participou do Congresso Jurídico Nacional, em 1943, e, nesse mesmo ano, da Conferência dos Desembargadores, havendo prestado colaboração no preparo do anteprojeto de reforma dos Códigos Comercial, de Contravenções Penais e de Processo Penal

Deixou várias obras: A Constituinte e a República Riograndense, Retrospecto Econômico e Financeiro do Rio Grande do Sul, A Influência do Gado na Antropogeografia do Rio Grande do Sul e Silveira Martins, o Tribuno. *Deixou inédita uma biografia do pai.*

O desembargador Florênico de Abreu exerceu as funções de Presidente do IBGE no período de setembro de 1952 até setembro de 1954

GIORGIO MORTARA *
(1885-1967)

A 30 de março de 1967 falecia, no Rio de Janeiro, Giorgio Mortara

Nascido em 4 de abril de 1885 em Mântua, Itália, doutor em Jurisprudência em 1905, docente livre de Estatística em 1909, professor de disciplinas estatísticas nas Universidades de Messina, de Roma e de Milão a partir de 1909-10, Giorgio Mortara pertencia a uma geração de estudiosos que tinham feito da pesquisa e do ensino a razão de sua própria existência

Entre êstes, êle se distinguira logo pela profundidade da doutrina, pela clareza do pensamento e pela amplitude dos seus interêsses

Desde o início de sua atividade científica, êle se dedicara ao estudo de problemas demográficos de vasto alcance, a que talvez o tivessem encaminhado as experiências obtidas — após o doutoramento — com o aperfeiçoamento em estudos estatísticos na Universidade de Berlim (onde, entre outros, seguiu os cursos de von Bortkiewicz) e na de Roma (onde freqüentou as aulas de Rodolfo Benini) Assim, já em 1908 aparece simultâneamente na Itália e na Alemanha um estudo sôbre variações das probabilidades de óbito e sôbre as relações entre mortalidade e duração da vida econômicamente ativa, e no mesmo ano é publicado na "Biblioteca dell Economista" um trabalho sôbre as populacões das grandes cidades italianas, modêlo não igualado de análise do desenvolvimento dos centros urbanos e dos fatôres que o determinam

A obra de Mortara se apresenta como um exemplo daquela bem sucedida simbiose entre contribuição metodológica e investigação do fenômeno concreto, que distinguiu a Estatística italiana (dentro do quadro da Estatística européia) do fim do século passado e dos primeiros decênios dêste, e que resultou na afirmação em nível internacional de numerosos cultores italianos de disciplinas estatísticas: de Pareto a Benini, de Gini ao próprio Mortara, de Livi a Niceforo.

Com efeito, são contribuições originais de metodologia demográfica e ao mesmo tempo análises das características das tendências, os múltiplos estudos sôbre mortalidade e tábuas de sobrevivência, que se seguiram ao primeiro trabalho de 1909, as numerosas investigações sôbre fecundidade e as pesquisas sôbre concepções pré-nupciais, que aparecem nos decênios sucessivos apontando o caminho àqueles que, na Itália ou em outros países, investigarão com procedimentos análogos a dinâmica demográfica à medida que a disponibilidade e os detalhes dos dados crescem Devem-se, assim, a Mortara, entre outros trabalhos: a primeira tentativa na Itália (e segunda no mundo) de construção de uma tábua de sobrevivência para uma geração feminina, segundo o estado civil, associada a uma tábua de fecundidade, que êle construiu para o Município de Milão (período 1899-1902), como também o primeiro cálculo para a Itália (e um dos primeiros no mundo) de uma tábua de mortalidade por causas de óbito, e as primeiras tábuas de fecundidade dos casamentos, (segundo a ordem de nascimento dos filhos) calculadas para a Itália.

No primeiro período de sua longa vida de estudos, Mortara — que fôra de 1917 a 1919 chefe da seção estatística do Comando do Exército Italiano — elabora, também, um estudo sôbre as conseqüências demográficas e sani-

* Comunicado divulgado na revista *Genus*, vol. XXIII, nº 1-2, 1967, de autoria de Nora Federici, especialista em Demografia e colaboradora em trabalhos do saudoso Professor Giorgio Mortara, a quem tanto deve o Brasil Divulgado, em nosso País, ao ensejo do segundo aniversário de sua morte

tárias, diretas e indiretas, da primeira guerra mundial Neste estudo, êle ilustra, numa visão de conjunto, os diversos aspectos dessas conseqüências e o volume que daí resulta (*La salute publica in Italia durante e dopo la guerra*) é publicada em 1925 pela Fundação Carnegie pela paz internacional, na série italiana da história econômica e social da guerra mundial.

Paralelamente, seu interêsse começa a se orientar para aquêle setor de pesquisa que iria constituir um dos veios fundamentais e caracterizantes da sua multiforme atividade científica; êle vai, com efeito, desenvolvendo gradativamente a investigação das relações entre fenomenologia demográfica e fenomenologia econômica, de que já tinha considerado um primeiro aspecto no estudo sôbre relações entre vida média e duração da vida ativa e que, através de uma série de pesquisas originais, irá culminar mais tarde, numa síntese de suas meditações e dos resultados alcançados, no volume *Economia della Populazione*, obra que se situa na produção demográfica como expressão daquela orientação econômica da Demografia, de que justamente Mortara foi indicado como o maior expoente na Itália.

Na verdade, a sua vocação de estudos é ao mesmo tempo demográfica e econômica E bastaria citar — entre suas obras de Economia — a monumental e bem conhecida coleção das *Prospettive Economiche* publicadas pela Universidade Bocconi de 1921 a 1937, na qual, ao lado da resenha anual dos principais aspectos e tendências da economia italiana e internacional, aparecem importantes estudos monográficos de que são exemplos um sôbre os grandes mercados e outro sôbre a distribuição internacional dos recursos naturais e da população (que apresenta de nôvo, sob outro ponto de vista, a interdependência entre problema demográfico e problema econômico) Ou, ainda, poder-se-iam assinalar as contribuições metodológicas que êle deu à *vexata quaestio* do cálculo do custo e do valor monetário do homem, com a determinação dos coeficientes de renda e de despesa a serem aplicados às distribuições por idade da população E finalmente não se poderia omitir o impulso que êle imprimiu à Estatística Econômica, em particular pela introdução de índices sintéticos destinados a medir o estado e o progresso econômico de uma coletividade.

Sua dedicação e sua experiência de docente, por outro lado, vão aos poucos se condensando em apostilas e manuais de Estatística Metodológica e de Estatística Econômica e Demográfica, nos quais o rigor científico acompanha uma clareza singular na exposição de métodos e problemas, a que êle sempre fornece a contribuição dos resultados de pesquisas originais.

Quando sua atividade didática na Itália é bruscamente interrompida pela legislação racista, êle emigra — em 1939 — com a família, para o Brasil. Convidado inicialmente para consultor técnico da Comissão Censitária Nacional, continua, como consultor do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, até 1956, recebendo ainda o título de Professor Honoris Causa da Universidade do Brasil.

A êle deve o Brasil grande contribuição na organização do censo demográfico de 1940 e mais tarde do de 1950, além da utilização sagaz e exemplar dos resultados censitários, constituindo modelos de referência para quem pretenda efetuar levantamentos e análises demográficas em Países para os quais não se disponha de estatísticas do movimento da população dignas de confiança.

Os vários aspectos da demografia brasileira são investigados sistemàticamente por Mortara numa longa série de estudos que em parte êle conduz diretamente e em parte confia, sob sua constante orientação, a jovens pesquisadores brasileiros que êle vai formando a seu lado: análise das características estruturais da população e de seu desenvolvimento, estimativas da fecundidade da mulher e da fecundidade diferencial nos diversos grupos de côr, construção de tábuas de mortalidade; avaliação da freqüência das uniões livres, são os assuntos principais a que êle se dedica durante sua permanência no Brasil.

E quando finalmente é chamado de volta à Itália em 1956 para retomar o ensino universitário e assumir a Cátedra de Estatística Econômica na Faculdade de Ciências Estatísticas, Demográficas e Atuariais, êle — embora já com idade avançada — dedica-se com fervor e entusiasmo juvenil a formar novas gerações de discípulos, enquanto reinicia com ritmo inalterado os estudos de demografia italiana, sem contudo abandonar a orientação de pesquisas efetuadas no Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística no Rio de Janeiro, onde êle permanece parte do ano, junto dos filhos que ficaram no Brasil.

Também nesta última, mas não menos fecunda, fase de sua atividade, êle segue o mesmo método de trabalho que sempre lhe foi próprio: o trabalho que poderia se dizer "integral". Colheita, elaboração, interpretação dos dados, tinham sido e continuaram sendo tôdas as fases da pesquisa êle reali-

zava pessoalmente, sem qualquer auxílio, certamente porque estava bem ciente do perigo de confiar a outrem o preparo dos dados de base, mas talvez também porque sua absoluta retidão rejeitasse utilizar para si o trabalho de outros.

Antes de deixar definitivamente o ensino (1960), Mortara promove a criação do Instituto de Demografia — o primeiro na Itália — anexo à Faculdade de Ciências Estatísticas de Roma, acompanhando com carinho suas atividades e encorajando com autorizados conselhos suas primeiras iniciativas por vêzes sugeridas e encaminhadas por êle próprio.

Estatístico, demógrafo, economista de fama mundial, presidente efetivo e depois honorário da União Internacional para o estudo científico da população, membro da Accademia dei Lincei, diretor por 28 anos (de 1910 a 1938) do "Giornale degli Economisti" — que graças sobretudo a seu mérito goza de prestígio seguro na Itália e no exterior — Giorgio Mortara permanecerá porém na lembrança de todos que o conheceram também como pessoa dotada daquele singular fascínio humano que tanto ajuda mesmo aos grandes cientistas.

É difícil dizer, para quem teve a ventura de conhecê-lo e de trabalhar a seu lado, se a admiração e a devoção que suscitava em volta de si eram devidas mais à doutrina, que êle sabia explicar com tanta simplicidade e com modéstia invulgar, ou ao calor humano que irradiava de sua pessoa sempre serena e do sorriso que quase sempre iluminava seu rosto.

Em qualquer caso, é certo que a lembrança de Giogio Mortara permanecerá longamente em todos que dêle se aproximaram, assim como suas contribuições à Demografia, à Economia, à Estatística irão perpetuar seu nome junto às futuras gerações de estudiosos.

RBE: ÍNDICE ALFABÉTICO E REMISSIVO
ANO 1968

O presente índice, elaborado na Seção de Documentação do IBE, pela Documentarista Hesperia Zuma de Rosso, abrange a matéria publicada nos números 113 (janeiro-março) a 116 (outubro-dezembro-1968) da Revista Brasileira de Estatística.

Conforme a norma brasileira para a citação de artigos de periódicos (NB-61, in Normalização da Documentação no Brasil, *2 ed, Rio de Janeiro, Associação Brasileira de Normas Técnicas e Instituto Brasileiro de Bibliografia e Documentação, 1964, p. 61-3), o número do fascículo precede o das páginas inicial e final do artigo, separado das mesmas por dois pontos (:) Ex: 114: 149-57 = fascículo 114, p 149 a 157.*

FASCÍCULOS PUBLICADOS E PERÍODOS DE REFERÊNCIA

Ano XXIX — 113 — jan./mar 1968
Ano XXIX — 114 — abr./jun. 1968
Ano XXIX — 115 — jul./set. 1968
Ano XXIX — 116 — out./dez 1968

ABIBE, Antônio Tânios 114:149-57

AGROPECUÁRIA
- pesquisas de estatísticas agrícolas básicas
  - Três Lagoas, MT 116:462-80

AMOSTRAGEM
- estatísticas agropecuárias
  - aplicação
    - Brasil 115:332-46
- levantamentos de fluxos de mercadorias
  - aplicação 115:347-60
- pesquisa de domicílios
  - aplicação
    - Brasil 115:361-72

ARROZ
- comercialização
  - Santa Catarina 116:455-62

ASSEMBLÉIA-GERAL
- do Conselho Nacional de Estatística
  - resoluções 113:111-4
- do Conselho Nacional de Geografia
  - resoluções 113:116-20

ASTRONOMIA ESTATÍSTICA 116:451-54

AYRES, Sebastião Aguiar 113:1

BARBOSA, Carlos Marcos 115:361-72

BIBLIOGRAFIA ESTATÍSTICA 114: 257
- Brasil 116.542-3

BRASIL
- amostragem
  - aplicação de
    - nas estatísticas agropecuárias 115:332-46
    - nas pesquisas de domicílios 115:361-72
- Censo
  - agrícola (1970)
    - estudo e sugestões 114: 174-89
  - agropecuário (1970)
    - planejamento 116:547-9
  - comercial (1970)
    - planejamento 114:202-8
  - demográfico (1970)
    - planejamento 114:190-201
  - dos serviços (1970)
    - planejamento 114:208-12
  - industrial (1970)
    - planejamento 115:310-6
- contas nacionais
  - aperfeiçoamento 114:157-66
- estatísticas industriais
  - levantamento 115:327-32
- índice de preços
  - estudo 114:166-73
- pesquisas demográficas 115:317-26
- população
  - projeções de 115:306-10
- produção industrial
  - construção de índice 115:303-5

CARNEIRO JÚNIOR, David 115:327-32

CENSO (1970)

agrícola
estudo e sugestões 114:174-89
agropecuário
planejamento 116:547-9
comercial
planejamento 114:202-8
demográfico
planejamento 114:190-201
dos serviços 114.208-12
industrial 115 310-6

CENTRO BRASILEIRO DE ESTATÍSTICAS AGROPECUÁRIAS (CBEA)

alteração da Resolução 30/68
COD/Res. 116:522-3
criação
COD/Res. 114:248-50
quadro de pessoal
COD/Res 115:390-1

CENTRO BRASILEIRO DE ESTATÍSTICAS EDUCACIONAIS (CBESE)

criação
COD/Res. 116:497-8
quadro de pessoal
COD/Res 116:507-8

CENTRO DE PROCESSAMENTO DE DADOS — CENPRO

criação
COD/Res. 115:388-90
despesa orçamentária
COD/Res. 116:539-41
orçamento
COD/Res. 116:538-9
quadro de pessoal
COD/Res. 116:499

CLÓVIS CALDEIRA

necrológio 115:420

COMISSÃO DE CARTOGRAFIA — COCAR

quota de presença dos membros da
COD/Res. 114:236

COMISSÃO NACIONAL DE PLANEJAMENTO E NORMAS ESTATÍSTICAS — CONPLANE

quota de presença dos membros
COD/Res. 114:236

COMISSÃO NACIONAL DE PLANEJAMENTO E NORMAS GEOGRÁFICO-CARTOGRÁFICAS — CONPLANGE

quota de presença dos membros
COD/Res. 114:236

COMPUTADORES DIGITAIS

aritmética em 115:287-302

CONCURSO "BULHÕES DE CARVALHO" 114:272

CONFERÊNCIA NACIONAL DE ESTATÍSTICA (I) 114:141-9, 115:303-72

CONFERÊNCIA NACIONAL DE GEOGRAFIA (I) 115:416-6

CONGRESSO NACIONAL DE AGROPECUÁRIA (II)

presença da Fundação IBGE 115·409

CONSELHO DIRETOR DA FUNDAÇÃO IBGE

resoluções 114:230-56; 115:379-404; 116·494-541

CONSELHO FEDERAL DE ESTATÍSTICA

posse 114:269-70

CONTAS NACIONAIS

aperfeiçoamento
Brasil 114:157-66

COORDENAÇÃO GERAL DA RÊDE DE COLETA — COGERE

criação
COD/Res 115 384-5
quadro de pessoal
COD/Res. 115:394-5

CORREIA, Aldemar Neves 116:448-50

COSTA, Manoel Augusto 115 317-26

CUNHA, Hilton 115:332-46

DECRETOS FEDERAIS 114:220-30; 115·373-8; 116:481-93

DEMOGRAFIA

curso de pós-graduação
Grã-Bretanha 116:558

DEPARTAMENTO DE CENSOS — DECEN

criação
COD/Res. 115:385-7
quadro de pessoal
COD/Res. 115:394

DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICAS INDUSTRIAIS, COMERCIAIS E DE SERVIÇOS — DEICOM

criação
COD/Res. 114:241-2

levantamentos efetuados 116:545-7
quadro de pessoal
COD/Res. 114:254

DEPARTAMENTO DE GEOGRAFIA — DEGEO

criação
COD/Res. 114.254-6
quadro de pessoal
COD/Res 115:393

DIA DO ESTATÍSTICO E DO GEÓGRAFO

comemorações 114:268

DIRETÓRIO CENTRAL DO CONSELHO NACIONAL DE GEOGRAFIA

resoluções 113:115-6

ENTROPIA

em relação à probabilidade 116: 423-30

ESCOLA NACIONAL DE CIÊNCIAS ESTATÍSTICAS — ENCE 116 549-50

crédito suplementar
COD/Res. 115:380-1; 116:495-6
despesa
COD/Res. 116.525-7
estágio de alunos no IBE
COD/Res 115:395-6
orçamento analitico
alteração
COD/Res. 115·399-401
organização administrativa
COD/Res. 115:392-3
quadro de pessoal
COD/Res. 116:499-500

ESTATÍSTICA

aplicações à psicologia 114:129-34
industrial
levantamento
Brasil 115:327-32
matemática 115:273-86

ESTATÍSTICO

exercício da profissão
legislação 114:220-9
formação e aperfeiçoamento 114: 149-57

EXPOSIÇÃO

gráficos da Fundação IBGE
Brasília 116 551-3
Nordeste 116:555-7
São Paulo 115:405-8

FUNDAÇÃO IBGE

Administração Central
orçamento analítico
alteração
COD/Res. 115:391
compra de material, etc.
COD/Res. 114:232-5
Conselho Diretor da
regimento interno
COD/Res. 114:242-6
dirigentes
posse 114:263-7
Escola Nacional de Ciências Estatísticas
quadro de pessoal
COD/Res. 116:499-500
exposição de gráficos
Brasília 116.551-3
Nordeste 116:555-7
São Paulo 115:405-8
orçamento
COD/Res 116:509-20,523-5
presidente
visita à Brasília e Goiás 114: 271-2
primeiro ano de atividades 115: 410-4
quadro geral de pessoal (QGP)
COD/Res. 114:236-41
ASFIN
ASPES
CBED
GEPD
Gabinete da Presidência e Secretário Geral
COD/Res. 114 253-4
Serviço Especial do Pessoal dos Quadros em Extinção (SEPEX)
estruturação e instalação
COD/Res. 114:250-2
Serviço Gráfico
despesa do
COD/Res 114:230-2
normas econômico-financeiras
COD/Res. 114:247-8
orçamento analítico
alteração
COD/Res 115:402-4
treinamento de pessoal
curso 114:260-1
visitantes
dirigentes da Fundação Getúlio Vargas 114:267-8
Guillermo N. Fuentes 115:409
Ministro Hélio Beltrão 114: 261-3
Sérgio Pinto Iglésias 116:547-9
técnicos do "Industrial College of the Armed Forces" 114: 268-9

GEOMETRIA

tangentes a uma cônica 116:444-7

GRÃ-BRETANHA

demografia
curso de pós-graduação 116: 558

GRUPO EXECUTIVO DE PESQUISAS DOMICILIARES — GEPD

Comissão de Coordenação
instalação 114:270-1

ÍNDICE

preços
estudo
Brasil 114·166-73
Revista Brasileira de Estatística 113:121-8

INDÚSTRIA DE TRANSFORMAÇÃO

pesquisa do DEICOM 116:559-61

INFORMAÇÕES PARA FINS ESTATÍSTICOS

obrigatoriedade 116 493-4

INSTITUTO BRASILEIRO DE ESTATÍSTICA

Centro Brasileiro de Estatísticas Agropecuárias
criação
COD/Res. 114:248-50
quadro de pessoal
COD/Res 115:390-1
Centro de Processamento de Dados
criação
COD/Res. 115 388-90
quadro de pessoal
COD/Res. 116:499
Coordenação Geral da Rêde de Coleta
criação
COD/Res. 115:384-5
quadro de pessoal
COD/Res 115 394-5
crédito especial
COD/Res 116 508
crédito suplementar
COD/Res. 116:520-2
Departamento de Censos
criação
COD/Res. 115:385-7
quadro de pessoal
COD/Res. 115:394
Departamento de Estatísticas Industriais, Comerciais e de Serviços
COD/Res. 114·254-2
criação
COD/Res. 114 241-2
Diretor-Superintendente
quadro de pessoal
COD/Res 116.508-9
estágio de alunos da ENCE
COD/Res 115 395-6; 116 500-1
orçamento
COD/Res 116 494-5, 501-4; 528-30
publicações 114:257-9; 115-417-9; 116:543-4
Serviço Nacional de Recenseamento
crédito especial
COD/Res. 114:252

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA

crédito suplementar
COD/Res 115:401-2
Departamento de Geografia
criação
COD/Res 114:254-6
quadro de pessoal
COD/Res 115:393
despesa
COD/Res. 116 530-3
estágio de alunos de cursos superiores
COD/Res 116:498
orçamento
COD/Res 115:396-9

INSTITUTO INTERNACIONAL DE ESTATÍSTICA

37ª Sessão 116:557-8

IÓRIO, Oswaldo 115 273-86

JOSÉ CARLOS DE MACEDO SOARES

bibliografia 113 15-26
biografia 113 5-14
coletânea de discursos 113:43-100
congratulações
DC/Res 113 115-6
e apêlo
AG/Res 113:111-2
documentação fac-similar 113:27-42
homenagem a
AG/Res. 113:113-4
votos
de aplauso
AG/Res 113:117-20
de louvor
AG/Res 113:112-3, 116-7

KESSEL, Moysés 115:347-60

LEGISLAÇÃO

Assembléia-Geral do CNE
resoluções 113:111-4
Assembléia-Geral do CNG
Resoluções 113:116-20
Conselho Diretor da Fundação IBGE
resoluções 114 230-56, 115:397-404; 116:494-541
Diretório Central do CNG
resoluções 113 115-6
Leis e Decretos Federais 116.481-94

LEIS FEDERAIS 116:493-4

LOPES, Waldemar 113:5-10

MACEDO SOARES ver JOSÉ CARLOS DE MACEDO SOARES

MACEDO SOARES, José Augusto de 113:11-2

MADEIRA, João Lyra 115:317-26

MALOGOLOWKIN, Michael 115-287--302

MALVAR, Henrique 116:423-30

MATEMÁTICA

alguns conceitos em 116.448-50

MONTEIRO, Amaro 114:190-212; 115: 310-6

NECROLÓGIO 115.420

NÚMEROS ÍNDICES

conceito de
análise crítica 116 441-43

ORÇAMENTO

Centro de Processamento de Dados
COD/Res 116.538-9
Fundação IBGE
COD/Res. 116:509-20, 523-5
Instituto Brasileiro de Estatística
COD/Res. 116 494-5, 501-4
Instituto Brasileiro de Geografia
COD/Res 115:396-9
Serviço Gráfico da Fundação IBGE
COD/Res 116.534-5
Serviço Nacional de Recenseamento
COD/Res. 116 505-7

ÓRGÃOS REGIONAIS DE ESTATÍSTICA

auxílio financeiro
COD/Res. 114 247; 115:387-8

PESQUISAS

de estatísticas agrícolas básicas
Três Lagoas, MT 116:462-80
demográficas
Brasil 115:317-26
industrial
estudo 114:135-40

PLANO NACIONAL DE ESTATÍSTICAS BÁSICAS

legislação 114 229-30, 115 373-8

POPULAÇÃO

projeções de
Brasil 115:306-10

PROBABILIDADE

a entropia na teoria da 116:423-30

PRODUÇÃO

industrial
índice de
Brasil 115 303-5
lote econômico
metodologia adotada 115:273-86

PSICOLOGIA

aplicações da estatística à 114:129--34

QUOTA DE PRESENÇA

membros da COCAR, CONPLANE e CONPLANGE
COD/Res 114:236

RECENSEAMENTO ver CENSO

REIS, Maurício Rangel 114:174-89

REIS, Sebastião de Oliveira 114:190--212, 115:310-6

REVISTA BRASILEIRA DE ESTATÍSTICA

índice geral 113 121-8

ROCHA, Marcos Vinícius da 116 431-43

RODRIGUES, Aroldo 114:129-34

SALDANHA, Francisco P S. 116:451-4

SANTA CATARINA

arroz
comercialização 116 455-62

SEMANA DA REFORMA ADMINISTRATIVA

colaboração da Fundação IBGE 116 553-5

SEMINÁRIO DE ESTATÍSTICA DA RFFSA 115:414

SERVIÇO ESPECIAL DO PESSOAL DOS QUADROS EM EXTINÇÃO — SEPEX

estruturação e instalação
COD/Res 114.250-2
lotação de pessoal
COD/Res. 115 379

SERVIÇO GRÁFICO DA FUNDAÇÃO IBGE

despesa
COD/Res 114 230-2; 116:535-7
normas econômico-financeiras
COD/Res. 114:247-8
orçamento
COD/Res 116:534-5
alteração
COD/Res. 115:402-4

SERVIÇO NACIONAL DE RECENSEAMENTO

crédito especial
COD/Res. 114 252; 116:496-7
orçamento
COD/Res 116 505-7
alteração
COD/Res. 115:381-3

SERVIÇOS CENTRAIS DE ESTATÍSTICA

auxílio financiero
COD/Res. 114 246-7, 115:397-80

SILVA, Fausto Machado da 116 444-7

SOCIEDADE BRASILEIRA DE ESTATÍSTICA

nova diretoria 115 410

SOUZA, Ângelo Jorge de 114 157-66

SOUZA, Janes Ângelo de 114 166-73

TANGENTES

determinação das 116 444-7

TRÊS LAGOAS, MT 116:462-80

UNIDADES DE MEDIDA

decreto sôbre 116:481-93

VELLOZO, Heitor Câmara 114:190-212; 115:310-6

VISITANTES

Fundação IBGE
Dirigentes da Fundação Getúlio Vargas 114:267-8
Guillermo N Fuentes 115:409
Ministro Hélio Beltrão 114:261-3
Sérgio Pinto Iglésias 116 547-9
técnicos do "Industrial College of the Armed Forces" 114:268-9

VULTOS DA ESTATÍSTICA BRASILEIRA

Macedo Soares 113:13-4

WALDEMAR LOPES

homenagem a 114 213-9

WUENSCHE, Rudolf W F 115 310-6

ZERKOWSKI, Ralph Miguel 115 303-5

CATÁLOGO DE PUBLICAÇÕES

PERIÓDICOS

Anuário Estatístico do Brasil

1964	NCr$	2,50
1965	NCr$	4,00
1966	NCr$	6,00
1967	NCr$	10,00
1968	NCr$	10,00
Atualidade Estatística do Brasil — 1968	NCr$	8,00
Atualidade Estatística do Brasil — 1969	NCr$	10,00
Boletim Estatístico		
Revista Brasileira de Estatística		
Assinatura anual (sem descontos)	NCr$	5,60
Número avulso	NCr$	2,00

ECONOMIA E FINANÇAS

Comércio Exterior do Brasil:		
Por mercadorias segundo os países — 1964	NCr$	4,00
Por países segundo as mercadorias:		
1962	NCr$	2,60
1964	NCr$	8,50
1966 — Vol I — Importação	NCr$	2,50
1967 — Vol I — Importação	NCr$	5,00
Vol II — Exportação	NCr$	3,50
Movimento Bancário do Brasil, segundo as praças:		
1959/1960	NCr$	0,35
1962	NCr$	0,60
1963	NCr$	2,50
1964	NCr$	4,50
1965	NCr$	6,50
1966	NCr$	10,00
1967	NCr$	15,00

ESTUDOS DE ESTATÍSTICA

Curso de Estatística — Marcos Vinícius da Rocha	NCr$	7,00
Exercícios de Estatística (10ª edição) — Lauro Sodré Viveiros de Castro	NCr$	7,00
Introdução à Teoria da Amostragem (Separata da Revista Brasileira de Estatística número 108) — Oswaldo Júlio (sem desconto)	NCr$	0,50
Noções Práticas de Estatística — Mario Ritter Nunes	NCr$	6,00
Normas de Apresentação Tabular — 1967 (sem desconto)	NCr$	0,20
Pontos de Estatística (14.ª edição) — Lauro Sodré Viveiros de Castro	NCr$	7,00
Representação Gráfica de Séries Estatísticas — 1968 — Marcos Vinícius da Rocha	NCr$	3,50

PUBLICAÇÕES AVULSAS

A Formação de Médicos	NCr$	2,00
Avaliação de Recursos Humanos	NCr$	2,00
Brazil Today — 1967	NCr$	3,00
Cadastro Industrial — 1965:		
I volume — Rondônia, Acre, Amazonas, Roraima, Pará, Amapá, Maranhão, Piauí e Ceará . .	NCr$	12,00
II volume — Rio Grande do Norte, Paraíba e Pernambuco	NCr$	12,00
III volume — Alagoas, Sergipe e Bahia .	NCr$	12,00
IV volume — Minas Gerais, dividido em dois tomos (não pode ser vendido separadamente) .	NCr$	16,00
V volume — Espírito Santo e Rio de Janeiro	NCr$	6,00
VI volume — Guanabara . .	NCr$	3,00
VII volume — São Paulo, dividido em quatro tomos (não pode ser vendido separadamente)	NCr$	38,00
VIII volume — Paraná	NCr$	10,00
IX volume — Santa Catarina	NCr$	9,00
X volume — Rio Grande do Sul	NCr$	12,00
XI volume — Mato Grosso, Goiás e Distrito Federal .. .	NCr$	9,00
Considerações sôbre o Problema de Absorção de Mão-de-obra, nos Principais Setores de Atividade Humana	NCr$	2,00
Distribuição Espacial da População do Brasil .	NCr$	2,00
Estimativa de População para os Municípios Brasileiros — 1 7 1968	NCr$	4,00
Indústria da Construção — 1967 . .	NCr$	5,00
Indústria da Construção — 1968 . . .	NCr$	8,00
Indústrias de Transformação:		
Dados Gerais — Brasil: 1964/65	NCr$	3,00
Dados Mensais — 1967	NCr$	3,00
Dados Mensais — 1968	NCr$	7,00
Inquéritos Econômicos — 1966	NCr$	1,00
O Brasil em Números — 1966	NCr$	5,00
Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios		
Resultados Preliminares		
Regiões I, II, III e IV — 2º Trimestre		
Regiões I, II, III, IV e V — 3º Trimestre		
Regiões I e VI — 4.º Trimestre (cada exemplar)	NCr$	2,00
Região I — Guanabara e Rio de Janeiro		
Região II — São Paulo		
Região III — Paraná, Santa Catarina e Rio Grande do Sul		
Região IV — Minas Gerais e Espírito Santo		
Região V — Maranhão, Piauí, Ceará, Rio Grande do Norte, Paraíba, Pernambuco, Alagoas, Sergipe e Bahia		
Região VI — Distrito Federal		
Região VII — Demais Unidades da Federação		
Registro Industrial — 1965	NCr$	15,00
Relações Públicas, Relações Humanas (2ª edição) — Celso Magalhães .	NCr$	1,50
Técnica da Chefia e do Comando — (6ª edição) — Celso Magalhães	NCr$	1,50

PUBLICAÇÕES GRATUITAS

Brasil: Instantâneos
Brasil: Um Bosquejo Estadístico
Brazil: A Statistical Glimpse
Brésil: Un Aperçu Statistique
Flagrantes Brasileiros
Monografias Municipais
Sinopse Estatística do Estado de Pernambuco — 1968
Sinopse Estatística do Estado de São Paulo — 1968

DESCONTOS

É concedido desconto de 30%, em tôdas as publicações, a funcionários do sistema estatístico-geográfico brasileiro, sócios quites da Sociedade Brasileira de Estatística, professôres, estudantes e livreiros, com pagamento à vista, sem consignação

VENDAS NA GUANABARA

As publicações acham-se à venda na Seção de Distribuição, Avenida Franklin Roosevelt, 146, loja A — ZC 39, Rio de Janeiro, GB, telefone 242-7142

VENDAS NO INTERIOR

Nos Estados e Territórios, as publicações do IBE, poderão ser adquiridas nas sedes das Respectivas Inspetorias Regionais de Estatística Municipal localizadas nas Capitais

VENDAS PARA O INTERIOR

São efetuadas vendas mediante a remessa de pedidos endereçados ao Instituto Brasileiro de Estatística, Fundação IBGE, Avenida Franklin Roosevelt, 166 — ZC 39, Rio de Janeiro, GB, para pagamento contra apresentação da fatura respectiva

FUNDAÇÃO IBGE
Presidente: SEBASTIÃO AGUIAR AYRES
INSTITUTO BRASILEIRO DE ESTATÍSTICA
Diretor-Superintendente: RAUL ROMERO DE OLIVEIRA