REVISTA BRASILEIRA DE ESTATÍSTICA

Ano XXVII — N.º 108 — out./dez. 1966

IBGE — CONSELHO NACIONAL DE ESTATÍSTICA

REVISTA BRASILEIRA DE ESTATÍSTICA

Órgão oficial do IBGE — Conselho Nacional de Estatística e Sociedade Brasileira de Estatística

DIRETOR responsável: RAUL ROMERO DE OLIVEIRA
Secretária, substituta: YEDDA BORGES DE MENDONÇA

Redação: Av. Franklin Roosevelt, 166 — ZC-39 — Rio de Janeiro, GB — Brasil — Tel.: 52 3605

Preço: assinatura anual: Cr$ 1 280
número avulso: Cr$ 400

Vendas: Av. Franklin Roosevelt, 146-A — Loja B — Tel.: 42 7142

S U M Á R I O

R. bras Estat.	Rio de Janeiro	v. 27	n 108	p. 209 - 299	out /dez 1966

GIORGIO MORTARA

COMPOSIÇÃO POR SEXO E IDADE DA POPULAÇÃO PROFISSIONALMENTE ATIVA

SUMÁRIO 1 Esclarecimentos preliminares — 2 Proporção da população profissionalmente ativa na população total e sua composição por sexo e idade — 3 Influências da composição por idade da população e da intensidade da ocupação profissional nas diferentes idades sôbre a proporção da população profissionalmente ativa na população masculina total — 4 Considerações finais

1 Aplica-se aqui a qualificação de "profissionalmente ativa" àquela parte da população de um país que na nomenclatura internacional de uso geral é errôneamente qualificada de "econômicamente ativa" Com efeito, essa parte da população não compreende um grande número de pessoas, principalmente mulheres, que exercem, a serviço do seu próprio lar, atividades domésticas, cujo inegável caráter econômico é atestado pela inclusão na chamada população "econômicamente ativa" das pessoas assalariadas que exercem as mesmas atividades por conta alheia

De acôrdo com a definição adotada pelo Serviço de População das Nações Unidas, a população aqui qualificada de profissionalmente ativa é o conjunto das pessoas de um e do outro sexo que fornecem a oferta de trabalho disponível para a produção de bens e serviços econômicos, incluindo

os empregadores, os assalariados, os trabalhadores por conta própria e os trabalhadores familiares não retribuídos,

os membros das fôrças armadas,

os ocupados ou desocupados, inclusive os em busca do primeiro emprêgo,

os que trabalham em tempo parcial,

os criados

Nos anuários demográficos das Nações Unidas, estão coordenados dados referentes a êste assunto para muitos países, apresentados, todavia, com a advertência de que freqüentemente os critérios aplicados na apuração divergem em parte dos estabelecidos na definição acima referida Às vêzes são declaradas e classificadas nos censos, como contínuas e atuais, atividades só descontínua ou ocasionalmente exercidas, ou que foram exercidas no passado, ou que poderão ser exercidas no futuro, ou que o recenseado está habilitado para exercer mas não exerce Em alguns casos, os trabalhadores familiares não retribuídos figuram como profissionalmente ativos, em outros casos não figuram, especialmente se a participação dêles no trabalho não fôr contínua Análogas divergências verificam-se quanto à inclusão ou não inclusão dos trabalhadores em tempo parcial E substanciais diferenças de critérios encontram-se a respeito das mulheres que cuidam do seu próprio lar, embora trabalhando também no campo, na oficina ou na loja, dando-se relêvo ora à primeira dessas atividades, ora à segunda

Apesar da imperfeita comparabilidade dos dados censitários dos diversos países, alguns confrontos internacionais tornam-se possíveis e úteis No presente estudo será examinada comparativamente a proporção e a composição por sexo e idade da população profissionalmente ativa em alguns países de civilização ocidental onde essa composição não foi profundamente alterada — como ocorreu na França, na Alemanha, na Rússia, etc — pelas conseqüências das duas guerras mundiais

R bras Estat, Rio de Janeiro, 27(108):209-214, out/dez 1966

2 Constam da tabela I as proporções da população profissionalmente ativa apuradas em quatorze países, dos quais dez americanos, nos últimos censos (apenas para o Brasil, faltando os dados do censo de 1960, foram aproveitados os de 1950)

TABELA I

Proporções da população profissionalmente ativa, discriminada por sexo e grandes grupos de idade, por 100 000 habitantes *

PAÍS	ANO	HOMENS		MULHERES		TOTAL
		de menos de 15 anos	de 15 anos e mais	de menos de 15 anos	de 15 anos e mais	
Canadá	1961		25 933		9 763	35 696
Estados Unidos	1960	198	26 362	43	12 454	38 967
México	1960	1 387	25 234	223	5 [illegible]5	32 149
Venezuela	1961	1 603	25 611	217	5 756	31 987
Equador	1962	1 586	25 416	385	5 177	32 864
Peru	1960	416	24 269	388	6 167	31 540
Brasil	1950	1 887	26 166	518	4 292	32 863
Chile	1960	399	24 718	130	7 115	32 392
Argentina	1960	135	29 328	48	8 539	38 050
Uruguai	1963	386	27 811	324	10 615	39 169
Suécia	1960	16	30 317	17	12 872	43 282
Espanha	1960	463	30 706	193	6 752	38 114
Portugal	1960	1 651	30 038	[illegible]	6 129	38 512
Austrália	1961	76	30 052	68	10 012	40 208

* As proporções constantes desta tabela e das seguintes foram calculadas de acôrdo com os dados do **Annuaire démographique, 1964**, das **Nações Unidas**, exceto para o Brasil

A percentagem[1] da população profissionalmente ativa na população total varia nesses países entre os mínimos de 31,5 no Peru e de 32,0 na Venezuela e os máximos de 40,2 na Austrália e de 43,3 na Suécia Um fator de fortes diferenças entre os diversos países é a diferente participação das mulheres nas atividades econômicas profissionais a percentagem das mulheres assim ocupadas, em relação à população total de ambos os sexos, é apenas de 6,9 no Peru e de 6,0 na Venezuela e desce até o mínimo de 4,8 no Brasil, mas sobe para 10,1 na Austrália e 12,9 na Suécia, sendo, também, bastante elevada nos Estados Unidos (12,5), e relativamente elevada no Uruguai (10,9) e na Argentina (8,6) entre os países latino-americanos É claro que tais diferenças refletem a maior participação da mulher nas atividades profissionais nos países econômicamente mais adiantados, e a sua menor participação nos países atrasados como a maior parte dos da América Latina, cumpre, entretanto lembrar que também diferenças de critérios na declaração e na classificação da ocupação feminina contribuem para determiná-las

É notável a influência dos diversos critérios de levantamento sôbre a proporção aparente dos menores de 15 anos profissionalmente ativos No Canadá, sendo a de 15 anos a idade inicial para a apuração da atividade profissional, não podem ser incluídas entre os ativos as crianças que efetivamente exercem atividades profissionais (poucas, todavia, sendo nesse país sèriamente observada a obrigação da instrução) A idade inicial da apuração varia muito 14 anos nos Estados Unidos e na Argentina, 12 no Equador e no Chile, 10 na Venezuela, no Brasil, na Espanha, no Uruguai, em Portugal, na Suécia, na Austrália, 8 no México e 6 no Peru Os limites iniciais de idade muito baixo adotados nestes últimos e em outros países latino-americanos correspondem à necessidade de se considerar profissional a ocupação de muitas crianças que efetivamente trabalham, subtraindo-se em geral à obrigação da instrução primária E, de outro lado, onde a máxima parte das crianças freqüenta a escola primária e depois a média, como nos Estados Unidos e na Suécia, mesmo se o limite fixado fôr mais baixo, bem poucos são os profissionalmente ativos de idade inferior a 15 anos apurados pelo censo

Examinando-se em particular a percentagem, na população total, dos homens profissionalmente ativos de 15 anos e mais, que em todos os países constituem o principal contingente da população profissionalmente ativa, verificam-se, ainda, fortes diferenças, variando essa percentagem entre mínimos de 24,3 no Peru e de 24,7 no Chile e máximos de 30,3 na Suécia e de 30,7 na Espanha Entre os países latino-americanos, sòmente no Uruguai (27,8) e

[1] Especificam-se no texto em percentagens os dados expostos nas tabelas I, III e IV na forma de proporções por 100 000

na Aigentina (29,3) encontram-se percentagens relativamente elevadas, em comparação com as do Brasil (26,2), do Equador (25,4), do México (25,2), da Venezuela (25,0), do Chile e do Peru Nos Estados Unidos, a percentagem correspondente é de 26,4, e no Canadá de 25,9

As diferenças acima salientadas, entre as proporções, na população total dos diversos países, dos homens profissionalmente ativos de 15 anos e mais, em parte dependem da diferente composição por idade das respectivas populações: nos países latino-americanos de elevada natalidade, de mortalidade não baixa, embora em diminuição, e de rápido incremento demográfico, a percentagem dos homens de 15 anos e mais na população total do mesmo sexo é ielativamente baixa, chegando, por exemplo, apenas, a 54,6 no México e a 57,6 no Brasil, em comparação com 67,8 nos Estados Unidos e 77,4 na Suécia

Considerando-se, agora, separadamente as percentagens dos profissionalmente ativos na população de cada sexo em idades de 15 anos e mais, encontram-se ainda consideráveis variações de país para país

No sexo masculino, a percentagem dos profissionalmente ativos entre os de 15 anos e mais atinge os valores mais elevados no Equador (93,9), no México (92,7), no Brasil (91,1), em Portugal (91,0) Valores algo menores verificam-se na Venezuela (89,5), na Espanha (89,0), no Peru (87,4): países, também, mais ou menos econômicamente atrasados Seguem-se a Austrália (85,7) e a Argentina (cêrca de 84) Nìtidamente menores são as percentagens verificadas nos Estados Unidos (78,9), na Suécia (78,6), no Uruguai (78,3) e no Canadá (78,1) Vê-se que em vários casos as proporções mais elevadas correspondem a países atrasados e as menos elevadas a países adiantados

Verifica-se o contrário com a percentagem das mulheres profissionalmente ativas entre as de 15 anos e mais, que amiude fica mais elevada nos países econômicamente adiantados Estados Unidos (35,1), Suécia (32,7), Canadá (29,7), enquanto já no Uruguai (29,0) e na Austrália (28,9) se torna sensìvelmente menor e desce para níveis ainda mais baixos na Argentina (onde não chega a 25), no Chile (22,7), no Peru (22,4), na Venezuela (21,1), no México (19,8), no Equador (19,7), na Espanha (17,7), em Portugal (17,0) e no Brasil (13,8) A influência do grau de urbanização e de industrialização do país sôbre essas proporções é em geral, predominante todavia, outras circunstâncias, como os costumes tradicionais, a maior ou menor participação feminina nas atividades agrícolas e nas do artesanato e do pequeno comércio, exercem notáveis influências E mais uma vez é preciso lembrar que as diferenças verificadas podem depender, em parte, da diversidade dos critérios de declaração e de classificação das ocupações femininas

Na população masculina de 15 anos e mais, a percentagem dos profissionalmente ativos depende das proporções dos diferentes grupos de idade em que ela se subdivide e da intensidade da ocupação em cada grupo Dados comparativos acêrca dêstes assuntos constam da tabela II

TABELA II

Dados sôbre a população masculina profissionalmente ativa em idades de 15 anos e mais

PAÍS	ANO	IDADE: ANOS COMPLETOS				
		15 a 24	25 a 44	45 a 64	65 e mais	15 e mais
1 PROPORÇÕES DOS PROFISSIONALMENTE ATIVOS SÔBRE 1 000 HOMENS NA IDADE ESPECIFICADA						
Canadá . ..	1961	619	942	878	285	781
Estados Unidos	1960	622	953	890	305	789
México	1960	852	971	966	917	927
Venezuela	1961	755	983	958	720	895
Equador	1962	873	985	977	847	939
Peru	1960	718	984	966	687	874
Brasil	1950	864	965	931	626	911
Chile	1960	751	969	868	514	851
Suécia	1960	625	958	922	271	786
2 DISTRIBUIÇÃO PROPORCIONAL POR IDADE, POR 1 000, DOS HOMENS PROFISSIONALMENTE ATIVOS, DE 15 ANOS E MAIS						
Canadá . .	1961	172	488	300	40	1 000
Estados Unidos	1960	158	462	333	47	1 000
México	1960	305	424	211	60	1 000
Venezuela	1961	267	490	210	33	1 000
Equador	1962	303	438	209	50	1 000
Peru	1960	273	467	213	47	1 000
Brasil	1950	321	457	195	27	1 000
Chile	1960	264	466	230	40	1 000
Suécia	1960	148	419	384	49	1 000

Na maior parte dos países latino-americanos econômica e culturalmente atrasados, já no grupo de 15 a 24 anos se torna elevada a percentagem[2] dos profissionalmente ativos (87,3 no Equador, 86,4 no Brasil, 85,2 no México), em comparação com os países mais adiantados (Suécia 62,5, Estados Unidos 62,2) No grupo de 25 a 44 anos verificam-se em todos os países considerados na tabela II percentagens muito elevadas de profissionalmente ativos, variando entre 94,2 no Canadá e 98,5 no Equador, parece evidente, pelos próprios valôres dêstes dados, que os critérios de inclusão em geral foram bastante largos Já no grupo de 45 a 64 anos diminui sensìvelmente a percentagem dos profissionalmente ativos, variando entre 86,8 no Chile e 97,7 no Equador, entretanto, nos países econômicamente atrasados da América Latina, essa percentagem mantém-se muito elevada também neste grupo No último grupo de idade, de 65 anos e mais, a percentagem dos profissionalmente ativos cai nos países econômicamente mais adiantados, onde as instituições de previdência social permitem um descanso inativo à maioria dos que trabalharam nas idades anteriores desce para 30,5 nos Estados Unidos, 28,5 no Canadá, 27,1 na Suécia, enquanto ainda atinge 84,7 no Equador e 91,7 no México (proporções, estas últimas, provàvelmente algo exageradas em comparação com a realidade)

A Composição por idade da população masculina de 15 anos e mais, e a intensidade da ocupação profissional nos diferentes grupos de idade (1ª seção da tabela II), contribuem para determinar a composição por idade da população masculina de 15 anos e mais profissionalmente ativa (2ª seção) Nos países atrasados, com elevada proporção de adolescentes ocupados, a percentagem do grupo de 15 a 24 anos no conjunto da população masculina profissionalmente ativa de 15 anos e mais é muito mais elevada do que nos países adiantados, atingindo 32,1 no Brasil e 30,5 no México, em comparação com 15,8 nos Estados Unidos e 14,8 na Suécia A percentagem do grupo de 25 a 44 anos apresenta variações relativamente menores (mínimo 41,9 na Suécia, máximo 49,0 na Venezuela), no grupo de 45 a 64 anos as diferenças se acentuam, ficando baixas as respectivas percentagens nos países atrasados (19,5 Brasil, 20,9 Equador) e elevadas nos adiantados (33,3 Estados Unidos, 38,4 Suécia), onde êste grupo de idade tem maior representação relativa na população No grupo de 65 anos e mais, contrastam os efeitos da menor proporção de vivos nestas idades nos países atrasados com os da maior proporção de profissionalmente ocupados entre êles, ora prevalecendo aquêles efeitos, como no Brasil (percentagem de 0,3), ora êstes, como no México (0,6)

3 Torna-se possível uma análise mais aprofundada das relações entre a composição por idade da população masculina, a intensidade da ocupação profissional nas diferentes idades, e a proporção dos profissionalmente ativos na população total masculina, mercê dos cálculos expostos na tabela III, da qual constam, para quatro países típicos — México e Brasil, econômicamente atrasados, Estados Unidos e Suécia, adiantados — : a composição proporcional por grupos de idade da população total masculina, as proporções, em relação a esta população, dos profissionalmente ativos dos diferentes grupos de idade, e as proporções dos profissionalmente ativos em relação ao total dos presentes nestes diferentes grupos

No que diz respeito à composição por idade, os dados da tabela III evidenciam a abundância dos grupos infantis nos dois países latino-americanos a percentagem das crianças em idades inferiores a 15 anos, na população masculina, atinge 45,4 no México e 42,4 no Brasil, enquanto alcança apenas 32,2 nos Estados Unidos e cai para 22,6 na Suécia Os grupos de idades maduras e senis, pelo contrário, são relativamente escassos nos dois países latino-americanos e abundantes nos dois outros, a percentagem dos homens em idades de 45 anos e mais na população total masculina chega apenas a 13,3 no Brasil e a 14,4 no México, enquanto atinge 28,3 nos Estados Unidos e sobe para 36,3 na Suécia

A intensidade da ocupação profissional é maior nos dois países latino-americanos do que nos Estados Unidos e na Suécia, sobretudo nas idades mais môças e nas mais velhas Entre os homens de 15 a 24 anos, a parcentagem dos profissionalmente ativos ascende a 86,4 no Brasil e a 85,2 no México, enquanto ela atinge apenas 62,5 na Suécia e 62,2 nos Estados Unidos E entre os homens de 65 anos e mais, a percentagem dos profissionalmente ativos ainda chega a 91,7 no México (ficando, em parte, exagerada pelos critérios de declaração e de classificação) e a 62,6 no Brasil, em comparação com 30,5 nos Estados Unidos e 27,1 na Suécia Tamanhas diferenças, em parte considerável, embora não em todo, refletem a mais intensa exploração do trabalho infantil e senil, que constitui uma necessidade vital para os países pobres

[2] Especificam-se no texto em percentagens os dados expostos na tabela II na forma de proporções por 1 000

TABELA III

*Proporção dos profissionalmente ativos na população masculina *, em relação à composição por idade e às proporções dos profissionalmente ativos nos diversos grupos de idade*

IDADE Anos completos	PROPORÇÕES POR 100 000 HOMENS DOS NA IDADE ESPECIFICADA — Em total	PROPORÇÕES POR 100 000 HOMENS DOS NA IDADE ESPECIFICADA — Profissionalmente ativos	PROPORÇÃO DOS PROFISSIONALMENTE ATIVOS SÔBRE 100 000 HOMENS NA IDADE ESPECIFICADA
	1 ESTADOS UNIDOS, 1960		
0 a 13	30 563	-	-
14 .	1 588	220	13 857
15 a 24	13 569	8 435	62 163
25 a 44	25 948	24 729	95 270
45 a 64	20 054	17 854	89 025
65 e mais	8 278	2 526	30 529
Tôdas as idades	100 000	53 755	53 755
	2 MÉXICO, 1960		
0 a 7	26 845	-	-
8 a 14	18 553	2 792	15 049
15 a 24	18 119	15 439	85 208
25 a 44	22 123	21 479	97 090
45 a 64	11 037	10 667	96 648
65 e mais	3 323	3 047	91 672
Tôdas as idades	100 000	53 424	53 424
	3 BRASIL, 1950		
0 a 9	30 183	-	-
10 a 14	12 252	3 795	30 972
15 a 24	19 469	16 829	86 443
25 a 44	24 820	23 951	96 509
45 a 64	11 014	10 259	93 149
65 e mais	2 262	1 416	62 599
Tôdas as idades	100 000	56 253	56 253
	4 SUÉCIA, 1960		
0 a 9	14 287	-	-
10 a 14	8 359	92	1 102
15 a 24	14 419	9 010	62 487
25 a 44	26 626	25 498	95 763
45 a 64	25 335	23 359	92 202
65 e mais	10 974	2 970	27 060
Tôdas as idades	100 000	60 929	60 929

* Exclusive, para o México e o Brasil, os homens de idade ignorada Nos Estados Unidos e na Suécia não constam habitantes de idade ignorada

Para obter uma medida da influência da intensidade da ocupação profissional nas diferentes idades sôbre a proporção dos profissionalmente ativos na população masculina total, calculou-se, na segunda coluna da tabela IV, qual seria essa proporção se a composição por idade fôsse a do Brasil (1ª coluna da tabela III) e a intensidade da ocupação profissional em cada grupo de idade fôsse a verificada na Suécia (3ª coluna da tabela III) Nessa hipótese, a percentagem dos profissionalmente ativos na população total masculina, que no Brasil ascende a 56,3 desceria para 46,8 em virtude da menor intensidade da ocupação marcada pelas taxas suecas

De outro lado, para obter uma medida da influência da composição por idade da população total masculina sôbre a proporção dos profissionalmente ativos nessa população, calculou-se, na terceira coluna da tabela IV, qual seria essa proporção se a composição por idade fôsse a da Suécia (1ª coluna da tabela III) e a intensidade da ocupação profissional em cada grupo de idade fôsse a do Brasil (3ª coluna da tabela III) Nessa hipótese, a percentagem dos profissionalmente ativos na população total masculina, que no Brasil ascende a 56,3, subiria para 71,2, em virtude da menor proporção das idades juvenis e da maior proporção das idades maduras e senis, típicas da composição por idade da população da Suécia

4 Resumindo os resultados das análises efetuadas nos parágrafos anteriores, pode-se concluir — com tôdas as reservas sugeridas pelas divergências dos critérios de declaração e de classificação das atividades econômicas, aplicados nos diversos censos — que nos países econômicamente adiantados é em geral

maior do que nos atrasados a proporção dos profissionalmente ativos na população total, em virtude da maior percentagem de adultos nesta população e da maior participação feminina nas atividades profissionais, e apesar da maior percentagem de anciãos na população e da menor intensidade da ocupação profissional das crianças e dos anciãos

A intensidade da ocupação profissional na população masculina parece ser maior, em tôdas as idades, nos países atrasados do que nos adiantados, pelo menos em parte em conseqüência da menor produtividade do trabalho, devida a deficiências de educação, de técnica, de organização, e da menor extensão e eficácia da instrução e da previdência social

TABELA IV

Proporção dos profissionalmente ativos por 100 000 homens de tôdas as idades na realidade, no Brasil, e em determinadas hipóteses

IDADE Anos completos	REALIDADE Composição por idade do Brasil e intensidades de ocupação do Brasil	1.ª HIPÓTESE Composição por idade do Brasil e intensidades de ocupação da Suécia	2.ª HIPÓTESE Composição por idade da Suécia e intensidades de ocupação do Brasil
10 a 14	3 795	135	2 589
15 a 24	16 829	12 166	12 464
25 a 44	23 954	23 768	25 696
45 a 64	10 259	10 155	23 599
65 e mais	1 416	612	6 870
10 e mais	56 253	46 836	71 218

INTRODUÇÃO À TEORIA DA AMOSTRAGEM

Oswaldo Ioric

1 — Noções de Cálculo de Probabilidade

11 — DEFINIÇÃO DE PROBABILIDADE

A probabilidade de realização de um acontecimento é a relação entre o número de casos favoráveis a êsse acontecimento e o número total de casos, supostos igualmente possíveis (favoráveis e contrários)

$$p = \frac{\text{N.º de casos favoráveis}}{\text{N.º de casos favoráveis} + \text{N.º de casos contrários}}$$

Assim, a probabilidade de tirarmos "cara" no jôgo de "cara-coroa" é 1/2, pois, quando jogamos a moeda, dois casos são igualmente possíveis, excluída a possibilidade de a moeda se equilibrar na borda saída da cara ou saída da coroa, sendo que dêsses dois casos apenas um é favorável à saída da cara Anàlogamente, quando lançamos um dado de 6 faces, a probabilidade "p" de cair uma das faces voltadas para cima, a de n.º 4, por exemplo, é 1/6 A probabilidade contrária "q" à realização dêsse acontecimento, isto é, a de cair outra face qualquer diferente de 4, é 5/6 Se somarmos as probabilidades favoráveis e contrárias à realização do acontecimento (saída da face 4), teremos:

$$p + q = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Consideremos, agora, uma urna com "m" bolas brancas e "n" bolas pretas A probabilidade de sair uma bola branca, em uma extração, segundo a definição acima, é

$$p = \frac{m}{m+n} \qquad (1)$$

e a probabilidade de sair uma bola preta, ou seja, a de não sair uma bola branca, é:

$$q = \frac{n}{m+n} \qquad (2)$$

Somando membro a membro as igualdades (1) e (2), resulta

$$p + q = \frac{m}{m+n} + \frac{n}{m+n} = \frac{m+n}{m+n} = 1$$

donde se conclui que a soma das probabilidades de acontecimentos contrários é igual à unidade, sendo lícitas as seguintes relações

$$p + q = 1, \quad p = 1 - q, \quad q = 1 - p$$

Como decorrência da própria definição, a probabilidade "p" de um acontecimento é um número compreendido entre 0 e 1 Quando $p = 1$, o acontecimento é certo, visto que o número de casos favoráveis é igual ao número de casos possíveis Assim, a probabilidade de extrairmos uma bola vermelha de uma urna que contém sòmente bolas dessa côr é, evidentemente, igual a *1*, ao passo que a de extrairmos uma bola azul dessa mesma urna é *0*, símbolo da impossibilidade É claro que, quanto maior a probabilidade favorável, mais "chance" tem o acontecimento de produzir-se

12 — TEOREMA DA PROBABILIDADE TOTAL

Quando um acontecimento pode realizar-se de diferentes maneiras que se excluem mùtuamente, a probabibilidade dêsse acontecimento é igual à soma das probabilidades simples correspondentes aos diversos modos de realização

Dois ou mais acontecimentos são mùtuamente exclusivos quando a realização de um dêles torna impossvel a apresentação dos outros, isto é, quando não podem produzir-se simultâneamente Assim, por exemplo, o aparecimento das faces de uma moeda em um único lance, constitui um acontecimento mùtuamente exclusivo, pois a saída de uma face impossibilita, no mesmo lance, o aparecimento da outra As faces de um dado constituem outro exemplo de acontecimento mùtuamente exclusivo

Para demonstrar êsse teorema, consideremos os acontecimentos mùtuamente exclusivos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ com as respectivas probabilidades $p(A_1), p(A_2), p(A_3), \ldots, p(A_n)$ Em virtude do enunciado acima, podemos escrever

$$p(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n) =$$
$$= p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) + \ldots + p(A_n)$$

onde $p(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n)$ representa a probabilidade de que se realize ao menos um dos acontecimentos

Seja N o número total de casos possíveis, dos quais m_1 são favoráveis ao acontecimento A_1, m_2 favoráveis ao acontecimento A_2, e assim por diante, até m_n favoráveis ao acontecimento A_n Ora, os acontecimentos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ são, por hipótese, mùtuamente exclusivos, logo o número de casos favoráveis à realização de cada um dêles será

$$m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n$$

Aplicando-se a definição de probabilidade, podemos escrever simbòlicamente

$$p(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n) =$$
$$\frac{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n}{N} = \frac{m_1}{N} + \frac{m_2}{N} + \frac{m_3}{N} +$$
$$+ \frac{m_n}{N}$$

mas, $p(A_1) = \frac{m_1}{N}$, $p(A_2) = \frac{m_2}{N}$, $p(A_3) =$

$$= \frac{m_3}{N}, \quad \ldots, \quad p(A_n) = \frac{m_n}{N}$$

Substituindo êsses valôres na relação anterior, vem

$$p(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n =$$
$$= p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) + \ldots + p(A_n)$$

Para exemplificar com dados numéricos o teorema que acabamos de demonstrar, considere-se uma urna contendo 120 bolas, das quais 15 são vermelhas, 20 pretas, 35 amarelas e 50 brancas Qual a probabilidade de extrair, em uma extração, uma bola vermelha ou uma bola preta?

Façamos $m_1 = 15$, $m_2 = 20$, $m_3 = 35$, $m_4 = 50$,

$$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = N = 120$$

A probabilidade de sair uma bola vermelha é $p(A_1) = m_1/N = 15/120$

A probabilidade de sair uma bola preta é $p(A_2) = m_2/N = 20/120$

A probabilidade de sair uma bola vermelha ou uma bola preta, segundo o teorema da probabilidade total, é

$$p(A_1 + A_2) = p(A_1) + p(A_2) =$$
$$= 15/120 + 20/120 = 35/120$$

A aplicação dêste teorema se torna mais evidente se calcularmos a probabilidade de sair, em uma única extração, uma bola vermelha, ou uma preta, ou uma amarela, ou uma branca Nesse caso, teriamos

A probabilidade de sair uma bola vermelha é $p(A_1) = m_1/N = 15/120$

A probabilidade de sair uma bola preta é $p(A_2) = m_2/N = 20/120$

A probabilidade de sair uma bola amarela é $p(A_3) = m_3/N = 35/120$

A probabilidade de sair uma bola branca é $p(A_4) = m_4/N = 50/120$

A probabilidade total é, como vimos, igual à soma das probabilidades parciais, ou seja,

$$p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) + p(A_4) =$$
$$= \frac{15}{120} + \frac{20}{120} + \frac{35}{120} + \frac{50}{120} + \frac{120}{120} = 1$$

resultado êsse que, conforme acentuamos no item 1 1, denota a certeza De fato, é certo extrair uma bola da urna independentemente da sua côr

1 3 — *Teorema da Probabilidade Composta*

Quando um acontecimento supõe a realização de dois outros A e B, sua probabilidade é igual ao produto da probabilidade de A pela probabilidade de B, suposto que A se tenha produzido (probabilidade condicional)

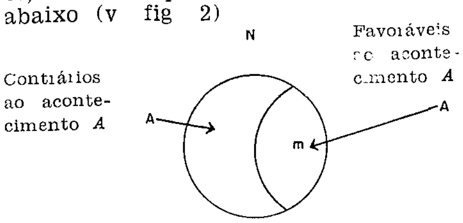
Se tivermos dois acontecimentos A e B, o acontecimento composto AB consiste na apresentação simultânea de A e B, e a probabilidade dêsse acontecimento composto será anotada por: $p(AB)$ Ora, a probabilidade de A é determinada de modo completamente independente da de B, pois nada se sabe a respeito da apresentação ou não de B Se soubermos, porém, que B ocorreu, o acontecimento A pode ter uma probabilidade distinta (Basta imaginar uma urna com duas bolas uma branca e outra preta Antes de qualquer extração a probabilidade de tirarmos uma bola branca, por exemplo, na 1ª ou na 2ª extrações é 1/2

Uma vez efetuada a 1ª extração, a probabilidade de tirarmos uma bola branca na 2ª extração será igual a 1 ou a 0, conforme tenha sido preta ou branca a bola retirada na 1ª extração) Representemos essa probabilidade pela notação *p(A/B)* e designemos êsse fato de "probabilidade condicional de *A*, quando *B* realmente ocorreu" O teorema acima enunciado pode ser representado simbòlicamente pela relação

$$p(AB) = p(A) \cdot p(B/A)$$

que se lê abreviadamente assim a probabilidade composta *AB* é igual ao produto da probabilidade de *A* pela probabilidade de *B*, dado *A* Vejamos como demonstrá-lo

Seja *N* o número de casos possíveis, dos quais apenas "m" são favoráveis ao acontecimento *A* Esquemàticamente, podemos representar êsse fato por um círculo em que "m" corresponde aos casos favoráveis ao acontecimento *A* (V fig 1) Anàlogamente, teriamos para *B* a representação abaixo (v fig 2)



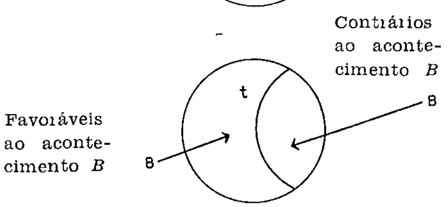


Fig 2

Os casos favoráveis ao acontecimento *A* e *B* devem estar necessàriamente incluídos entre os "m" casos favoráveis a *A*, uma vez que êles devem realizar-se simultâneamente Seja, pois, "m₁" o número dêsses casos favoráveis a ambos os acontecimentos A probabilidade dêsse acontecimento composto será anotada, então, por *p(AB)* (V fig 3)

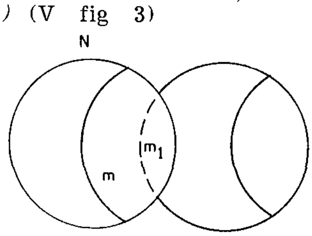


Fig 3

m_1 = casos favoráveis simultâneamente a *A* e *B*, isto é, favoráveis a *AB*

Pela definição de probabilidades, temos que

$$p(AB) = \frac{m_1}{N}$$

igualdade essa que pode ser escrita sob a forma abaixo

$$p(AB) = \frac{m}{N} \cdot \frac{m_1}{m}$$

$$\text{mas} \quad p(A) = \frac{m}{N} \quad e \quad p(B/A) = \frac{m_1}{m}$$

isto é, a probabilidade de que ocorra o acontecimento *B*, na hipótese de se ter realizado o acontecimento *A* Ora, se *A* ocorreu, o conjunto possível será "m", que representa, como vimos, os casos favoráveis ao acontecimento *A* Sendo "m_1" os casos favoráveis a *A* e *B*, a probabilidade de ocorrer *B*, dado *A*, é m_1/m Logo:

$$p(AB) = p(A) \cdot p(B/A)$$

Consideremos uma urna contendo duas bolas brancas e três bolas pretas A probabilidade de extrair uma bola branca é $p(A) = 2/5$ e a de extrair uma bola preta é $p(B) = 3/5$ Qual será a probabilidade de extrair uma bola branca e uma bola preta, sem repor na urna a 1ª bola extraída?

O teorema da probabilidade composta nos diz que êsse resultado é igual à probabilidade de extrair uma bola branca, multiplicada pela probabilidade de extrair uma bola preta, supondo que na 1ª extração tenha saído uma bola branca Ora, se na 1ª extração saiu de fato uma bola branca, não a repondo na urna, o número de casos possíveis para a 2ª extração se reduz a 4 Assim, a probabilidade de sair uma bola preta na 2ª extração é dada por $p(B/A) = 3/4$ Logo, a probabilidade procurada será igual ao produto dessas duas probabilidades

$$p(AB) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

Tendo em vista o exemplo supra, vamos substituir a notação utilizada na demonstração do teorema, por outra que será empregada freqüentemente no decorrer destas aulas Representemos por

p_i a probabilidade de extrair uma bola branca,

p_j a probabilidade de extrair uma bola preta,

p_{ij} a probabilidade de extrair uma bola branca e uma preta

Nessas condições $p_i = p(A)$, $p_j = p(B)$, $p_{ij} = p(AB)$

O teorema da probabilidade composta passa a ser representado pela seguinte notação:

$$p_{ij} = p_j \, p_{i/j}$$

isto é, a probabilidade de extrair uma bola branca e uma bola preta, sem repor na urna a 1ª bola extraída, é igual à probabilidade de extrair uma bola branca multiplicada pela probabilidade de extrair uma bola preta, supondo que na 1ª extração tenha saido uma bola branca.

E se na 1ª extração não tivesse saído realmente uma bola branca? A probabilidade do acontecimento composto continuaria sendo a mesma? É o que examinaremos a seguir Se na 1.ª extração não saiu uma bola branca é porque saiu uma bola preta e a probabilidade dêsse acontecimento é dada por 3/5 Não sendo reposta a bola preta na urna o total de bolas se reduzirá a 4 A probabilidade, já agora, de extrair uma bola branca é 2/4 e a probabilidade composta será igual ao produto da 1ª pela 2ª:

$$p_{ij} = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

ou, em símbolos

$$p_{ij} = p_j \, p_{i/j}$$

resultado êsse idêntico ao anterior e que mostra, inclusive, que

$$p_{ij} = p_i \, p_{j/i} = p_j \, p_{i/j}$$

Quer isto dizer que a probabilidade composta de "i" e "j" é igual à probabilidade isolada de "i" multiplicada pela de "j", na hipótese de que se tenha realizado "i", ou, à probabilidade isolada de "j" multiplicada pela de "i", na hipótese de que se tenha verificado "j". A igualdade que mostramos acima pode ser vista também, através do seguinte exemplo:

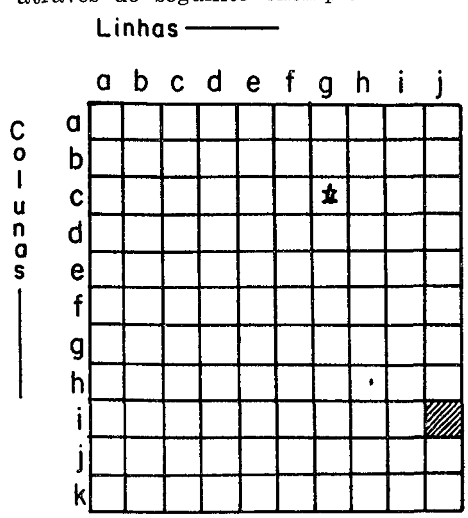


Fig 4

Considere-se um pequeno teatro com capacidade para acomodar 110 pessoas sentadas: 10 na 1ª fila, 10 na 2ª, e assim por diante até a 11ª fila Esquemàticamente, poderiamos representar a disposição das cadeiras dêsse teatro por um quadro de dupla entrada com linhas e colunas identificadas, respectivamente, pelas letras *a, b, c,* , *j* e *a, b, c,* , *k* (V fig 4). Êste arranjo nos permite atribuir a cada cadeira duas letras: uma referente à linha e outra referente à coluna Assim, por exemplo, o quadrado assinalado com um asterisco (*) representa a cadeira "cg" e o quadrado hachurado indica a cadeira "ij" Suponhamos o teatro inteiramente lotado e procuremos a probabilidade de tirar ao acaso o espectador sentado na cadeira "ij'.

Representemos essa probabilidade por p_{ij} e seja $N = 110$ o número total de cadeiras

A probabilidade procurada será dada por

$$p_{ij} = \frac{1}{N} = \frac{1}{110}$$

que exprime a relação entre o caso favorável e o número de casos possíveis

Poderiamos, entretanto, chegar ao mesmo resultado calculando essa probabilidade indiretamente, se procedessemos da seguinte maneira·

1.º) sorteando uma linha;

2º) sorteando uma coluna

No caso proposto a linha a sortear seria a letra "i", e a coluna, a de letra "j" Ora, a saída da cadeira "j" situada na linha "i" depende, evidentemente, de que no 1º sorteio tenha saído a linha "i", o que implica dizer que o sucesso de um acontecimento depende da realização do outro Aplicando o teorema da probabilidade composta, podemos escrever

$$p_{ij} = p_i \, p_{j/i}$$

isto é, a probabilidade de sortear a cadeira "ij" é igual à probabilidade de sortear a linha "i" multiplicada pela probabilidade de sortear a coluna "j", na hipótese de que tenha sido sorteada a linha "i"

Mas, a probabilidade de sortear a linha "i" é: $p_i = 1/11$ e a de sortear a coluna "j", dado "i", é: $p_{j/i} = 1/10$

$$\text{Logo} \quad p_{ij} = p_i \, p_{j/i} = \frac{1}{11} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{110}$$

como haviamos obtido diretamente É claro que chegariamos ao mesmo resultado se torteássemos primeiro a coluna e depois a linha Teriamos, assim

$$p_{ij} = p_j \, p_{i/j}$$

isto é, a probabilidade de sortear a cadeira "ij" é igual à probabilidade de sortear a coluna "j" multiplicada pela probabilidade de sortear "i", na hipótese de que tenha sido sorteada a coluna "j"

No caso de 3 acontecimentos compostos *ABC*, teriamos

$$p(ABC) = p(A)\ p(B/A)\ p(C/AB) \text{ ou}$$

$$p_{ijk} = p_i \cdot p_{j,i} \cdot p_{k,ij}$$

1 4 — *Teoremas de Multiplicação das Probabilidades*

Quando dois acontecimentos são independentes a probabilidade de realização simultânea de ambos é igual ao produto das respectivas probabilidades Em símbolos

$$p(AB) = p(A) \cdot p(B)$$

Dois acontecimentos são independentes quando a realização de um não influi na realização do outro, vale dizer, quando a probabilidade de um não modifica a do outro Podemos demonstrar êsse teorema recorrendo ao anterior Se A e B são acontecimentos independentes $p(A/B) = p(A)$ e $p(B/A) = p(B)$ Com efeito, se B não influi na realização de A, a probabilidade de A ocorrer, na hipótese de que se tenha verificado B é, evidentemente, a própria probabilidade de A Anàlogamente, a probabilidade de B ocorrer, na hipótese de que se tenha verificado A é, no caso de acontecimentos independentes, a própria probabilidade de B Temos, então, que

$$p(AB) = p(A) \cdot p(B)$$

Êsse teorema se estende a 3 ou mais acontecimentos independentes Assim,

$$p(ABC) = p(A) \cdot p(B) \cdot p(C)$$

ou, com outra notação

$$p_{ij} = p_i \cdot p_j \text{ e } p_{ijk} = p_i \cdot p_j \cdot p_k$$

Quando lançarmos uma moeda repetidas vêzes, o aparecimento de uma face em determinado lance não modifica a probabilidade do lance subseqüente Se a saída da "cara" tem a probabilidade 1 2 no 1 o lance, terá essa mesma probabilidade no 2 o lance, no 3 o lance, etc Essa independência mais nítida se torna se jogarmos 4 moedas simultâneamente, cujos resultados são idênticos aos obtidos com o lançamento de uma moeda 4 vêzes consecutivas

Na hipótese de ser homogênea a moeda utilizada, qual a probablidade de obtermos em 3 jogadas sucessivas, 3 vêzes cara?

A probabilidade de sair cara em cada um dos lances é 1/2, portanto, a probabilidade de sair 3 caras consecutivas é igual ao produto das probabilidades isoladas, isto é

$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

A probabilidade de em 5 jogadas consecutivas obtermos a sucessão cara, cara, coroa, coroa, cara, será:

$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$$

É claro que qualquer outra sucessão de 5 têrmos terá idêntica probabilidade

1 5 — *O Problema das Provas Repetidas — Distribuição Binomial*

Suponhamos que se realizem "n" provas consecutivas, sob as mesmas condições, isto é, que ao iniciar cada prova, a probabilidade de um ou outro dos sucessos seja a mesma No caso de uma urna contendo bolas brancas e vermelhas, por exemplo, será a extração sucessiva de bolas, repondo-as na urna após cada prova Nas "n" extrações pode ocorrer que se obtenha sempre bola branca e nenhuma vermelha Segundo o teorema que acabamos de demonstrar, podemos expressar êsse fato da seguinte maneira

$$p \quad p \quad p \quad p \qquad p = p^n = p^n q^o$$

onde q^o represente a não saída de uma bola vermelha Pode suceder, entretanto, que se obtenha bola branca em "n — 1" extrações e 1 bola vermelha, cuja probabilidade assim se representa $p^{n-1}q$ Sucessivamente, pode acontecer que se obtenha bola branca em "n—2" "n—3", "n—4", etc , etc , extrações e 2, 3, 4, etc , bolas vermelhas, cujas probabilidades são as seguintes

$$p^{n-2} q^2, p^{n-3} q^3, p^{n-4} q^4, \quad p^k q^{n-k}, \quad p^{n-1} q, p^o q^n$$

Significa isto que a probabilidade em que "n" prova um acontecimento se realize "k" vêzes e o sucesso contrário "n—k" vêzes, em uma ordem prefixada, como, por exemplo, primeiro "k" bolas brancas e depois as "n—k" bolas verrelhas, é

$$\boxed{p^k q^{n-k}}$$

Se não levarmos em conta a ordem prefixada, êsse valor $p^k q^{n-k}$ se repetirá e deverá ser multiplicado pelo número de combinações, dando em resultado a expressão

$$\boxed{P_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k q^{n-k}}$$

Nesta fórmula a probabilidade de um sucesso corresponde ao têrmo p^n do desenvolvimento do binômio $(q+p)^n$ Convém notar que a fração acima representa o número de combinações de "n" elementos "k a k", que também se costuma representar por uma das seguintes notações:

$$C_n^k \quad \text{ou} \quad \binom{n}{k}$$

Se desenvolvermos o binômio $(q + p)^n$ encontraremos para têrmo geral, a fórmula acima obtida, conforme mostraremos a seguir

$$(q + p)^n = q^n + n\, p\, q^{n-1} + C_n^2\, p^2\, q^{n-2} +$$
$$+ C_k^n\, p^k\, q^{n-k} + \qquad + p^n$$

O 1º têrmo q^n, representa a probabilidade de se realizarem "n" acontecimentos contrários em "n" provas, o 2º têrmo representa a probabilidade de se realizarem "n—1" acontecimentos contrários e 1 acontecimento favorável o têrmo geral em "k" representa a probabilidade de se realizarem "k" acontecimentos favoráveis e "n — k" acontecimentos contrários, finalmente, o último têrmo representa a probabilidade de só se realizarem acontecimentos favoráveis

Exemplo I — Qual a probabilidade de saírem 3 caras e duas coroas, na ordem abaixo indicada, em 5 lances consecutivos de uma moeda?

cara, cara, coroa, coroa, cara

Estando prefixada a ordem de sucessão, a fórmula a empregar é $p^k\, q^{n-k}$, conforme estabelecemos acima Para aplicá-la, fazemos

$$n = 5, \quad p = 1/2, \quad q = 1/2, \quad k = 3$$

$$p^k\, q^{k-n} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2^3} \times \frac{1}{2^2} =$$

$$= \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$$

Se não tivéssemos prefixado a ordem de aparecimento das faces, mas desejássemos calcular a probabilidade de sairem 3 caras e 2 coroas, em qualquer ordem, aplicariamos a fórmula geral, como se acha feito a seguir:

$$P_{n,k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \cdot p^k\, q^{n-k} =$$

$$= \frac{5!}{3!\,(5-3)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{32}$$

Se, por fim, quiséssemos calcular tôdas as probabilidades referentes aos diversos acontecimentos, bastaria substituir na fórmula geral, "k" por 0, 1, 2, 3, 4 e 5, ou então desenvolver o binômio $(1/2 + 1/2)^5$

O quadro completo ficaria assim organizado

Caras	Coroas	Probabilidades
0	5	$\binom{n}{0} q^n = \binom{5}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 1/32$
1	4	$\binom{n}{1} p^2 q^{n-1} = \binom{5}{1}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 5/32$
2	3	$\binom{n}{2} p^2 q^{n-2} = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 10/32$
3	2	$\binom{n}{3} p^3 q^{n-3} = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 10/32$
4	1	$\binom{n}{4} p^1 q^{n-4} = \binom{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right) = 5/32$
5	0	$\binom{n}{5} p^5 = \binom{5}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 1/32$
		Soma das probabilidades = 32/32

Cumpre notar que as probabilidades assim obtidas se referem às saídas das faces em qualquer ordem Assim, por exemplo, a probabilidade de sair 1 cara e 4 coroas está representada por 5/32, não considerando a ordem de apresentação das faces, isto é, levando em conta as seguintes sucessões

cara, coroa, coroa, coroa, coroa
coroa, *cara*, coroa, coroa, coroa
coroa, coroa, *cara*, coroa, coroa
coroa, coroa, coroa, *cara*, coroa
coroa, coroa, coroa, cora, *cara*

Qualquer das sucessões tem uma probabilidade, portanto, 5 vêzes menor, ou seja, 1/32 De fato, se prefixássemos o aparecimento de duas coroas, depois uma cara seguida de duas coroas, teriamos

Fazendo coroa $= A$ e cara $= B$

$$A\,A\,B\,A\,A$$

Segundo o teorema de multiplicação das probabilidades (acontecimentos indenpendentes), podemos escrever

$$p \cdot p \cdot q \quad p \cdot p = p^4\, q$$

De modo geral

$$p^k\, q^{n-k}$$

como já haviamos obtido Fazendo as respectivas substituições, resulta,

$$p^k \cdot q^{n-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$$

Exemplo II — Lançamos um dado três vêzes consecutivas (o que é a mesma coisa que jogar 3 dados, simultâneamente, uma só vez) Qual a probabilidade de sair a face 4 duas vêzes?

O problema não está exigindo nenhuma ordem de apresentação, de modo que vamos aplicar a fórmula geral, convindo notar que

$$p = 1/6,\ q = 5/6,\ n = 3,\ k = 2$$

$$P_{n,k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \binom{3}{2} p^2 q = \frac{3!}{2!\,1!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \frac{5}{6}\ \frac{5}{432} = \frac{5}{72}$$

Se quizéssemos calcular a probabilidade de sair a face 4 duas vêzes, nos dois primeiros lances, teríamos que fazer

$$p^k q^{n-k} = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{36} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{216}$$

O quadro completo, sem considerar a ordem de apresentação, poderia ser organizado, ou aplicando a fórmula geral diretamente, ou desenvolvendo o binômio $(q+p)^n$ Os resultados acham-se consignados no quadro a seguir

Sucessos k (Saída da face 4)	Fracassos n k (Saída das faces 1, 2, 3, 5, 6)	Probabilidades
0	3	125/216
1	2	75/216
2	1	15/216
3	0	1/216
	Soma das probabilidades	216/216

1 6 — *Distribuição de Poisson*

A distribuição de Poisson é o limite da distribuição binomial quando "n" tende para infinito e "p" tende para zero, de tal modo que o produto "np" permaneça constante

Comecemos, pois, pela distribuição binomial

$$P_{n,k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\, p^k q^{n-k}$$

cuja média aritmética é, como sabemos, igual a np (Quando estudarmos esperança matemática da distribuição binomial, veremos que êsse resultado será confirmado) Designando por "m" a média da distribuição binomial, podemos escrever $m = np$, donde $p = m/n$

A fração que aparece na expressão acima representa, como vimos no item 1 5, o número de combinações de "n" elementos "k a k" Êsse número de combinações também se representa sob a forma

$$\binom{k}{n} = \frac{n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-k+1)}{k!}$$

Substituindo essa expressão na fórmula anterior e, bem assim, "p" por m/n e "q" por $1 - p = 1 - \frac{m}{n}$, resulta:

$$P_{n,k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-k+1)}{k!} \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^k \left(1 - \frac{m}{n}\right)^{n-k}$$

ou

$$P_{n,k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{m^k}{n^k} \left(1 - \frac{m}{n}\right)^n \left(1 - \frac{m}{n}\right)^{-k}$$

ou ainda

$$P_{n,k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{m^k}{k!} \left(1 - \frac{m}{n}\right)^n \left(1 - \frac{m}{n}\right)^{-k}$$

O numerador da 1ª fração tem "k" têrmos e o denominador tem "k" têrmos "n" Dividindo cada têrmo do numerador por "n", teremos dividido todo o numerador da 1ª fração por n^k A fim de não alterar o valor da fração, dividamos também o denominador por n^k Resulta

$$P_{n,k} = \frac{\frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n}\ \ldots\ \frac{n-k+1}{n}}{n^k / n^k} \cdot \frac{m^k}{k!} \left(1 - \frac{m}{n}\right)^n \left(1 - \frac{m}{n}\right)^{-k}$$

Ora, $\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$, $\frac{n-2}{n} = 1 - \frac{2}{n}$, ..., $\frac{n-k+1}{n} = 1 - \frac{k-1}{n}$

Substituindo na expressão anterior, vem

$$P_{n,k} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ \ldots\ \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot \frac{m^k}{k!} \left(1 - \frac{m}{n}\right)^n \left(1 - \frac{m}{n}\right)^{-k}$$

Fazendo "n" tender para infinito $(n \rightarrow \infty)$, todos os fatôres tendem para um, com exceção dos dois seguintes

$$\frac{m^k}{k!} \cdot \left(1 - \frac{m}{n}\right)^n$$

o segundo dos quais tende para e^{-m}, sendo "e" a base do sistema de logaritmo neperiano Portanto

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} P_{n\,k} = e^{-m} \cdot \frac{m^k}{k!}}$$

2 — VARIÁVEL ALEATÓRIA OU CASUAL

2 1 — *Definição*

Uma variável capaz de assumir diferentes valores

$$x_1,\ x_2,\ x_3, \qquad ,\ x_n$$

com respectivas probabilidades

$$p_1,\ p_2,\ p_3, \qquad ,\ p_n$$

tais que

$$p_1 + p_2 + p_3 + \qquad + p_n = 1$$

recebe o nome de varável aleatória ou casual O que caracteriza, pois, a variável aleatória é que aos diversos valores que ela possa assumir se acham associadas probabilidades respectivas, cuja soma é igual à unidade Êsse conjunto de pares de valores determina a "lei de probabilidade" da variável aleatória Assim, por exemplo, ao lançarmos um dado correto, é possível o aparecimento de qualquer uma das faces

$$x_i)\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$$

cada uma das quais tem, na hipótese de o dado ser homogêneo, a mesma probabilidade

$$p_i)\ 1/6,\ 1/6,\ 1/6,\ 1/6,\ 1/6,\ 1/6$$

e cuja soma é igual a 1 A variável acima figurada é uma variável aleatória A distribuição de Poisson pode ser definida como uma variável aleatória que assume os valores discretos

$$x_i)\ 0,\ 1,\ 2,\ 3, \qquad ,\ r,$$

com as respectivas probabilidades

$$p)\ e^{-m},\ m\,e^{-m},\ \frac{m^2}{2!}\,e^{-m},$$

$$\frac{m^3}{3!}\,e^{-m}, \qquad ,\ \frac{m^r}{r!}\,e^{-m}$$

cuja soma é igual a 1 Para verificar êsse resultado somemos as probabilidades acima, colocando inicialmente e^{-m} em evidência

$$e^{-m}\left(1 + m + \frac{m^2}{2!} + \frac{m^3}{3!} + \qquad + \frac{m^r}{r!} + \qquad\right)$$

Sendo

$$e^m = 1 + m + \frac{m^2}{2!} + \frac{m^3}{3!} +$$

e substituindo acima, resulta

$$e^{-m} \cdot e^m = e^0 = 1$$

2 2 — *Exemplos de variáveis aleatórias*

I — Consideremos uma urna contendo 10 bolas rigorosamente iguais e assim numeradas

duas bolas com o número 6,
três bolas com o número 7, e
cinco bolas com o número 8

A probabilidade de extrair uma bola número 6 é 2/10,
a probabilidade de extrair uma bola número 7 é 3/10, e
a probabilidade de extrair uma bola número 8 é 5/10

A soma dessas probabilidades, como se vê, é igual a 1 Portanto, a variável considerada é uma variável aleatória que pode assumir os valores

$$x_i)\ 6,\ 7,\ 8$$

respectivamente, com as probabilidades

$$p_i)\ 2/10,\ 3/10,\ 5/10$$

II — Se lançarmos dois dados simultâneamente e considerarmos a soma dos pontos das faces voltadas para cima poderemos obter em cada jogada um dos valores abaixo

$$x_i)\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12$$

cujas probabilidades são, respectivamente, as seguintes

$$p_i)\ \frac{1}{36}, \frac{2}{36}, \frac{3}{36}, \frac{4}{36}, \frac{5}{36}, \frac{6}{36}, \frac{5}{36}, \frac{4}{36}, \frac{3}{36}, \frac{2}{36}, \frac{1}{36}$$

sendo $\sum p_i = 1$

3 — ESPERANÇA MATEMÁTICA DE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA

3 1 — *Definição*

Tendo em vista os resultados obtidos no exemplo II, efetuemos o produto dos valores que a variável pode assumir pelas probabilidades correspondentes e somemos êsses produtos, como se acha indicado a seguir A soma dêsses produtos se denomina "Esperança Matemática" de X e se denota por $E(X)$ Assim, a esperança matemática de uma variável aleatória X é a soma dos produtos dos valores $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ que a variável pode assumir pelas respectivas probabilidades $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$, isto é

$$E(X) = x_1 \; p_1 + x_2 \; p_2 + x_3 \; p_3 + \ldots + x_n \; p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \; p_i$$

$$\boxed{E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \; p_i}$$

x_i	p_i	$x_i\,p_i$
2	1/36	2/36
3	2/36	6/36
4	3/36	12/36
5	4/36	20/36
6	5/36	30/36
7	6/36	42/36
8	5/36	40/36
9	4/36	36/36
10	3/36	30/36
11	2/36	22/36
12	1/36	12/36
Total	36/36	252/36
Total	$\Sigma\, p_i = 1$	$\Sigma\, x_i\, p_i = 7$

3 a — *Esperança Matemática da Distribuição de Poisson*

A título de exercício vamos calcular a esperança matemática da distribuição de Poisson, cuja lei de probabilidade é a seguinte

$$x_i) \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \ldots$$

$$p_i) \quad e^{-m}, \; me^{-m}, \; \frac{m^2}{2!}\, e^{-m}, \; \frac{m^3}{3!}\, e^{-m}, \; \frac{m^4}{4!}\, e^{-m} \ldots$$

Efetuando os produtos $x_i p_i$ e somando-os, obteremos a esperança matemática da função de Poisson·

$$E(X) = me^{-m} + 2\, \frac{m^2}{2!}\, e^{-m} + 3\, \frac{m^3}{3!}\, e^{-m} + 4\, \frac{m^4}{4!}\, e^{-m} + \ldots$$

$$E(X) = me^{-m} + m^2\, e^{-m} + \frac{m^3}{2!}\, e^{-m} + \ldots + e^{-m} + \ldots$$

Pondo me^{-m} em evidência

$$E(X) = me^{-m}\left(1 + m + \frac{m^2}{2!} + \frac{m^3}{3!} + \ldots\right)$$

Sendo $e^m = 1 + m + \frac{m^2}{2!} + \frac{m^3}{3!} + \ldots$

e substituindo acima, resulta

$$E(X) = me^{-m} \cdot e^m = me^0 = m$$

Poderiamos chegar ao mesmo resultado, procedendo da seguinte maneira a soma dos produtos que a variável pode assumir pelas respectivas probabilidades exprime-se abreviadamente por

$$\sum_{x=0}^{n} x \cdot \frac{m^x}{x!} \cdot e^{-m}$$

somatório que se estende de $x = 0$ até $x = n$ A esperança matemática de X, assim se indica

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} x \cdot \frac{m^x}{x!} \cdot e^{-m}$$

Tirando um "m" de m^x o expoente de "x" fica sendo "x — 1" e multiplicando êsse "m" por e^{-m} resulta me^{-m} A expressão acima passa então a

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} x \cdot \frac{m^{x-1}}{x!} \cdot me^{-m}$$

Passando me^{-m} para fora do somatório porque é constante, vem

$$E(X) = me^{-m} \sum_{x=1}^{n} \frac{m^{x-1}}{(x-1)!}$$

expressão na qual simplificamos o "x" que precedia a fração com "x" do fatorial, passando êste a ser $(x-1)!$ Se dermos a "x" dessa fração valores 1, 2, 3, ..., n, obteremos a série abaixo, cuja soma é igual a e^m

$$1 + m + \frac{m^2}{2!}\; \frac{m^3}{3!} + \ldots = e^m$$

Logo

$$E(X) = me^{-m} \cdot e^m = me^0 = m$$

3 3 — *Esperança Matemática da Distribuição Binomial*

Sendo "p" a probabilidade de um sucesso numa prova, a probabilidade de ocorrer "k" sucessos em "n" provas é dada por (v item 1 5)

$$p_{n\,k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\; p^k\, q^{n-k}$$

têrmo de ordem geral do desenvolvimento de $(p-q)^n$, onde $p + q = 1$ A variável aleatória X pode assumir os seguintes valores inteiros

$$k: \; 0, \; 1, \; 2, \; \ldots, \; k, \; \ldots, \; n$$

com as respectivas probabilidades

$p_{n,k}\ p_{n,0}, p_{n,1}, p_{n,2}, \quad , p_{n,k}, \quad , p_{n,n}$

A esperança matemática dessa variável será:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot p_{n,k}$$

Substituindo $p_{n,k}$ pelo seu valor, vem

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

Vamos substituir nesta expressão

a) $n - k$ por $[(n-1) - (k-1)]$

b) $(n-k)!$ por $[(n-1) - (k-1)]!$

c) p^k por $p^{n-k} \cdot p$

Resulta:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{k![(n-1) - (k-1)]!} \cdot$$

$$\cdot\ p^{k-1}\ p\ q^{[(n-1)-(k-1)]}$$

Substituamos ainda:

a) $n!$ por $n(n-1)!$

b) $k!$ por $k(k-1)!$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \frac{n(n-1)!}{k(k-1)![(n-1) - (k-1)]!} \cdot$$

$$\cdot\ p^{k-1}\ p\ q^{[(n-1)-(k-1)]}$$

Passando "n" e "p" para fora do somatório porque são constantes, resulta:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1) - (k-1)]!} \cdot$$

$$\cdot\ p^{k-1}\ q^{[(n-1)-(k-1)]}$$

Mas, o somatório é o têrmo geral do desenvolvimento do binômio $(p+q)^{n-1}$ e a soma de todos êsses têrmos é igual a $1^{n-1} = 1$

Logo:

$$E(X) = np$$

3 4 — *Esperança Matemática de uma Função*

Nos exemplos que acabamos re examinar as variáveis só apresentavam valores discretos, caracterizados pela lei de probabilidade (x_i, p_i). Distribuições há, todavia, em que a variável é capaz de assumir todos os valôres de um intervalo compreendido entre dois números reais Tais distribuições são definidas pela lei de probabilidade $|x, f(x)|$ e são representadas por uma curva contínua (V fig 1) A função

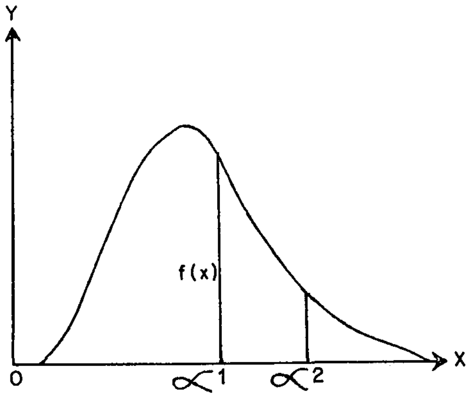


Fig 1

$f(x)$ que representa as ordenadas da curva de probabilidade, denomina-se "densidade de probabilidade". A probabilidade de que a variável X assuma os valôres de um intervalo qualquer $[\alpha_1, \alpha_2]$ será fornecida pela área da curva compreendida entre as ordenadas levantadas pelas extremidades α_1 e α_2 Se considerarmos um intervalo infinitésimo $(x, x + dx)$, a área que representará a probabilidade de a variável X assumir os valôres compreendidos nesse intervalo, poderá ser comparada à área de um retângulo de base dx e de altura $f(x)$, vale dizer, por $f(x)dx$ (vide fig 2) Ora, a área limi-

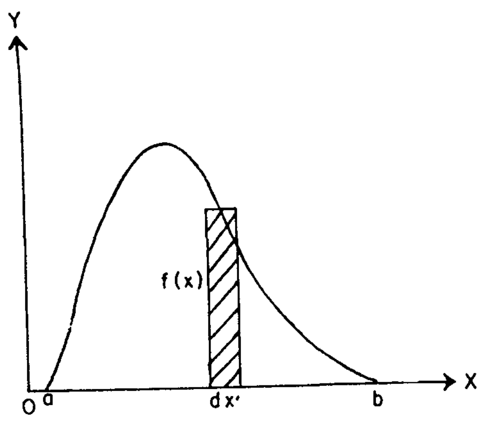


Fig 2

tada pela curva de probabilidade e as ordenadas levantadas pelas extremidades α_1 α_2 pode ser considerada como uma soma de retângulos infinitamente pequenos, de bases iguais a dx Nesse caso, a área compreendida entre α_1 e α_2 será apresentada pela soma

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x)\, dx$$

na qual figura o símbolo de integral, em vez do sigma, por se tratar de uma soma de infinitésimos As extremidades do intervalo $[\alpha_1 \alpha_2]$ que figuram na integral indicam que as ordenadas da curva de probabilidade são as que se obtêm fazendo X variar de α_1 a α_2. Se o campo total de variação fôsse o intervalo $[a, b]$ a área total sob a curva seria igual à unidade e assim se expressaria

$$\int_a^b f(x)\,dx = 1$$

Se X pudesse tomar valores de $-\infty$ a ∞ e se considerarmos o intervalo de α_1 a α_2 como sucesso, a probabilidade de um sucesso seria definida pela relação entre a área limitada pelas ordenadas levantadas em α_1 e α_2 e a área total

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x)\,dx \bigg/ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

Sendo, evidentemente, nesse caso

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

Se X é uma variável aleatória, tôda função $\phi(X)$ é também uma variável aleatória, cuja esperança matemática é dada por

$$E[\phi(X)] = \sum_{i=1}^{n} \phi(x_i)\,p_i$$

onde $x_i (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ indica os valores assumidos pela variável X Se a varável fôr contínua substitui-se o somatório pela integral, e vem

$$E[\phi(X)] = \int \phi(x)\,f(x)\,dx$$

Assim, a esperança matemática de uma função, no caso de uma variável contínua, é igual ao produto da função pela densidade de probabilidade Se os valôres de X variassem no intervalo $[a, b]$, escreveriamos

$$E[\phi(X)] = \int_a^b \phi(x)\,f(x)\,dx$$

Suponhamos que $\phi(X) = X^n$ A esperança matemática, no caso de uma variável discreta, será

$$E(X^n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^n\,p_i$$

O somatório representa o momento de ordem n (que se costuma indicar pelo símbolo ν_n referido à origem dos X

No caso de uma variável contínua a esperança matemática seria representada pela expressão

$$E(X^n) = \int x^n\,f(x)\,dx$$

Antes de prosseguir no estudo de esperança matemática, convém recordar a noção de "momentos" Por definição, o momento de ordem n em relação à origem (x=0) tem por expressão

$$\nu_n = \frac{1}{N} \sum x_i^n$$

Sendo N o número de têrmos

Para $n = 0$ teremos o momento de ordem zero, para $n = 1$, o momento de 1ª ordem, e assim por diante Se tivermos, por exemplo, os valores 1, 2, 3 e 4 os três primeiros momentos em relação à origem $(x = 0)$, serão

$$\nu_0 = \frac{1}{N} \sum x_i^0 = \frac{1}{4} (1^0 + 2^0 + 3^0 + 4^0) = 1$$

$$\nu_1 = \frac{1}{N} \sum x_i^1 = \frac{1}{4} (1 + 2 + 3 + 4) = 2{,}5$$

$$\nu_2 = \frac{1}{N} \sum x_i^2 = \frac{1}{4} (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) = 7{,}5$$

É comum referir os momentos em relação a outro ponto diferente de zero Para calculá-los em relação a uma origem qualquer $(x = a)$, por exemplo, a expressão é a seguinte

$$\nu_n = \frac{1}{N} \sum (x_i - a)^n$$

Se essa origem fôr a média aritmética $\bar{x}$ da série, os momentos, que neste caso particular são denominados momentos centrais, serão dados por

$$\mu_n = \frac{1}{N} \sum (x_i - \bar{x})^n$$

onde μ_n representa o momento central de ordem n, do mesmo modo que ν_n representava o momento auxiliar de ordem n

Os três primeiros momentos centrais do exemplo anterior seriam, pois

$$\mu_0 = \frac{1}{4} [(1 - 2{,}5)^0 + (2 - 2{,}5)^0 + (3 - 2{,}5)^0 + (4 - 2{,}5)^0] = 1$$

$$\mu_1 = \frac{1}{4} [(1 - 2{,}5) + (2 - 2{,}5) + (3 - 2{,}5) + (4 - 2{,}5)] = 0$$

$$\mu_2 = \frac{1}{4} [(1 - 2{,}5)^2 + (2 - 2{,}5)^2 + (3 - 2{,}5)^2 + (4 - 2{,}5)^2] = 1{,}25$$

Se, ao invés de uma série de números, tivéssemos uma distribuição de freqüência, o momento de ordem n em relação à origem $(x = 0)$ seria dado pela expressão

$$\nu_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} x_i^n f_i$$

e o momento central por

$$\mu_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^n f_i$$

Finalmente, se a distribuição fôsse definida por uma lei de probabilidade, isto é, se a variável pudesse assumir valores $x_1, x_2, . . . , X_n$ associados às respectivas probabilidades $p_1, p_2, \ldots, p_n$, de tal modo que a soma dessas probabilidades fôsse 1, então teríamos uma variável aleatória, o momento auxiliar de ordem n seria expresso por

$$\nu_n = \sum_{i=1}^{n} x_i^n p_i$$

e o momento central por·

$$\mu_n = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^n p_i$$

desaparecendo o N da fração, uma vez que, se na distribuição de freqüência

$N = \sum_{i=1}^{n} f_i$, na variável aleatória $N =$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Consideremos, agora, a função $\phi(X) = (X - \tilde{X})^n$ onde $\tilde{X} = E(X)$ A esperança matemática dessa função será

$$E(X - \tilde{X})^n = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \tilde{X})^n p_i = \mu_n$$

no caso discreto, e

$$E(X - \tilde{X})^n = \int (x - \tilde{X})^n f(x)\, dx$$

no caso contínuo

As constantes μ_n são, como vimos, os momentos centrais da variável aleatória

3 5 — *Esperança Matemática de uma Constante*

A esperança matemática de uma constante é a própria constante Nesse caso a variável aleatória só pode assumir um único valor "c" com probabilidade igual a 1 Por definição, temos:

$$E(c) = \sum c\, p$$

$$E(c) = c \sum p$$

e, sendo $\sum p = 1$ $\qquad E(c) = c$

3 6 — *Esperança Matemática de uma Função Linear*

Seja a função $Y = aX + b$, equação de uma linha reta, em que "a" e "b" são constantes e X uma variável aleatória A esperança matemática dessa função será

$$E(Y) = a\, E(X) + b$$

De fato, sejam $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ os valores da variável aleatória e $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ as probabilidades respectivas A variável assumirá, pois, os seguintes valores

$$ax_1 + b,\ ax_2 + b,\ ax_3 + b,\ \ldots,\ ax_n + b$$

com as mesmas probabilidades da variável X, isto é, $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$.

Efetuando os produtos, obteremos

$$E(Y) = (ax_1 + b)\, p_1 + (ax_2 + b)\, p_2 + (ax_3 + b)\, p_3 \ldots + (ax_n + b)\, p_n$$

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b)\, p_i$$

Desenvolvendo o somatório, vem:

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{n} ax_i\, p_i = \sum_{i=1}^{n} b p_i$$

e passando as constantes para fora do somatório

$$E(Y) = a \sum_{i-1}^{n} x_i p_i + b \sum_{i=1}^{n} p_i$$

Sabendo que $\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = E(X)$ e que

$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, resulta

$$E(Y) = aE(X + b)$$

À primeira vista poderia parecer estranho que a variável aleatória X, assumindo valores $ax_i + b$ permanecesse com as mesmas probabilidades de x_i Para verificar a permanência dessas probabilidades bastaria considerar, por exemplo, o caso de um dado As probabilidades de $x_1, x_2, \ldots, x_6$, são, respectivamente, $p_1, p_2, \ldots, p_6$, sendo $p_i = 1/6$ Mas, se os pontos das faces do dado, ao invés de 1, 2, ... 6, fôssem iguais a $ax_i + b$, sendo, por hipótese, $a = 2$ e $b = 3$, teriamos os valores abaixo

$$5, \ 7, \ 9, \ 11, \ 13, \ 15$$

com as mesmas probabilidades anteriores, pois a simples substituição dos valores numéricos dos pontos não constitui, òbviamente, motivo suficiente para modificar a probabilidade de cada uma das faces do dado

Considere-se novamente a função $Y = aX + b$ e sua esperança matemática $E(Y) = aE(X) + b$, ou utilinzando outra notação $\tilde{Y} = a\tilde{X} + b$ Subtraindo essa expressão da anterior e elevando ao quadrado, vem

$$(Y - \tilde{Y})^2 = [(aX + b) - (a\tilde{X} + b)]^2 =$$
$$= (aX + b - a\tilde{X} - b)^2 \ (Y - \tilde{Y})^2 = a^2(X - \tilde{X})_2$$

Tomando as esperanças matemáticas de ambos os membros

$$E(Y - \tilde{Y})^2 = a^2 E(X - \tilde{X})^2$$

Mas,

$$E(Y - \tilde{Y})^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y - \tilde{Y})^2 p_i = \sigma_y^2$$

e

$$E(X - \tilde{X})^2 = \sum_{i=1}^{n} (X - \tilde{X})^2 p_i = \sigma_x^2$$

Substituindo, vem

$$\sigma_y^2 = a^2 \sigma_x^2 \qquad \sigma_y = |a| \sigma_x$$

onde $|a|$ representa o valor absoluto de a Como se verifica, a constante "b" não figura na expressão da variância, donde se conclui que se somarmos ou subtrairmos uma constante e uma variável aleatória a sua variância não se altera

Vamos mostrar a seguir que a variância de uma série qualquer de valores não se altera quando somamos (ou subtraimos) uma constante "c" a todos os valores da série Sejam, por exemplo, os valores abaixo

$$x_1, \ x_2, \ x_3, \ \ldots, \ x_n$$

de média aritmética $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} x_i$ e variância $\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$

Somando-se a cada valor a constante "c", resulta

$$x_1 + c, \ x_2 + c, \ x_3 + c, \ \ldots, \ x_n + c$$

cuja média aritmética $\overline{X}$ será igual a $\bar{x} + c$ (A título de exercício, deixamos a cargo do aluno a demonstração desta propriedade) A variância desta nova série de valores terá por expressão

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} [(x_i + c) - \overline{X}]^2$$

Sendo $\overline{X} = \bar{x} + c$, substituindo acima, vem

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} (x_i + c - \bar{x} - c)^2$$

e, finalmente

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

Se, em vez de somarmos (ou subtrairmos) uma constante, multiplicarmos (ou dividirmos) cada têrmo da série por essa constante, a variância ficará multiplicada (ou dividida) pelo quadrado da constante Consideremos a série anterior e multipliquemos cada têrmo pela constante "c"

$$cx_1, \ cx_2, \ cx_3, \ \ldots, \ cx_n$$

A nova média aritmética será $\overline{cx}$ e a variância, que designaremos por σ_t^2 terá por expressão

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} (cx_i - c\bar{x})^2$$

ou

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} c^2 (x - \bar{x})^2$$

ou, ainda,

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{N} c^2 \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

donde

$$\sigma_t^2 = c^2 \sigma^2$$

3 7 — *Esperança Matemática de uma Soma de Variáveis Aleatórias*

A esperança matemática de uma soma de variáveis aleatórias é igual à soma das esperanças matemáticas de cada uma delas

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias a 1.ª pode assumir "n" valores x_i com probabilidades $p_i (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ e a 2.ª pode assumir "m" valores y_j com probabilidades p_γ ($\gamma = 1, 2, 3, \ldots, m$) A soma $X + Y$ poderá assumir, pois os "nm" valores de $x^i + y^j$, uma vez que qualquer dos "n" valores de "i" pode ser associado a qualquer dos "m" valores de "j", como se acha indicado a seguir

$y_j \backslash x_i$	x_1	x_2	x_3	x_i	x_n	Somas
y_1	$x_1 + y_1$	$x_2 + Y_1$	$x_3 + y_1$	$x_i + y_1$	$x_n + y_1$	$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_1)$
y_2	$x_1 + y_2$	$x_2 + y^2$	$x_3 + y_2$	$x_i + y_2$	$x_n + y_2$	$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_2)$
y_3	$x_1 + y_3$	$x_2 + y_3$	$x_3 + y_3$	$x_i + y_3$	$x_n + y_3$	$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_3)$
.						
y_j	$x_i + y_j$	$x_2 + y_j$	$x_3 + y_j$	$x_i + y_j$	$x_n + y_j$	$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_j)$
			.			
.						
y_m	$x_1 + y_m$	$x_2 + y_m$	$x_3 + y_m$	$x_i + y_m$	$x_n + y_m$	$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_m)$
Somas	$\sum_{j=1}^{m} (x_i + y_j)$	$\sum_{j=1}^{m} (x_2 + y_j)$	$\sum_{j=1}^{m} (x_3 + y_j)$	$\sum_{j=1}^{m} (x_i + y_j)$	$\sum_{j=1}^{m} (x_n + y_j)$	$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i + y_m)$

Seja p_{ij} a probabilidade para que X assuma o valor x_i e, ao mesmo tempo, para que Y assuma o valor y_j Vimos no item 1 3 que no caso de dois acontecimentos compostos (dependentes) a probabilidade condicional era dada por

$$p_{ij} = p_i \, p_{j/i}$$

isto é, a probabilidade de ocorrer x_i y_j é, portanto, igual à probabilidade de ocorrer x_i, multiplicada pela probabilidade do aparecimento de y_j, sabendo-se que já ocorreu x_i A nova variável aleatória é definida, então, da seguinte maneira:

$$X + Y: x_1 + y_1, x_1 + y_2, \quad , x_i y_j, \quad , x_n + y_1, \quad x_n + y_2, \quad , x_n + y_m$$

$$p_{ij}, p_{11}, p_{12}, \quad , p_{ij}, \quad , p_{n1}, p_{n2}, \quad , p_{nm}$$

Pela própria definição de esperança matemática, podemos escrever

$$E(X + Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i + y_j) \, p_{ij}$$

O somatório $\sum_{i=1}^{n} (a_i + y_j)$ representa a soma de todos os valores $x_i + y_j$, dando a x valores de 1 a n e mantendo fixo y_j Em outras palavras é a soma de cada linha do quadro supra

O somatório $\sum_{j=1}^{m}$ exprime a soma de tôdas essas somas, dando a j valores de 1 a m. Êste total, evidentemente, coincide com a soma das somas das colunas, de vez que num quadro de dupla entrada, a menos que haja erros de soma, existe a seguinte igualdade:

Soma das somas das linhas = soma das somas das colunas Poderemos, então, escrever

$$E(X + Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i + y_j) \, p_{ij} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_j) \, p_{ij}$$

Decompondo a 1ª das expressões, vem

$$E(X + Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i \, p_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} y_j \, p_{ij} \qquad (\;)$$

Sendo x_i constante em relação ao somatório j e sendo y_j constante em relação ao somatório x_i, podemos passá-lo para fora dos somatórios

$$E(X + Y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} p_{ij} + \sum_{j=1}^{m} y_j \sum_{i=1}^{n} p_{ij} \qquad (2)$$

Sendo $\sum_{j} p_{ij}$ a soma das probabilidades para que x assuma o valor x_i quando y assuma um dos valores

$y_1, y_2, \ldots y_m$, seu valor é igual a p_i, isto é

$$\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = p_{i,1} + p_{i2} + p_{i3} + \ldots + p_{i,n} = p_i$$

Anàlogamente

$$\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = p_{1,j} + p_{2j} + p_{3,j} + \ldots + p_{n,j} = p_j$$

Substituindo em (2) resulta, finalmente

$$E(X + Y) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i + \sum_{j=1}^{m} y_j p_j =$$

$$= E(X) + E(Y)$$

Poderíamos chegar ao mesmo resultado substituindo p_{ij} por $p_i p_{j/i}$, como mostraremos a seguir. Acabamos de ver em (1) que

$$E(X + Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i p_{ij} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} y_j p_{ij}$$

Fazendo a substituição a que nos propomos, vem

$$E(X + Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i p_{ij} =$$

$$= \sum_{1=i}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} p_i p_{j/i} = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \sum_{j=1}^{m} p_i$$

Ora, $\sum_{j=1}^{m} p_{j/i}$ é a probabilidade para que "y" assuma o valor de y_j, qualquer que seja "j", sendo x_i constante, o que implica em dizer que êste acontecimento é certo. De fato,

$$\sum_{j=1}^{m} p_{j/i} = p_{1/i} + p_{2/i} + \ldots + p_{j/i} + \ldots + p_{m/i} = 1$$

Logo

$$E(X + Y) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i + \sum_{j=1}^{m} y_j p_j =$$

$$= E(X) + E(Y)$$

De modo geral $E(X + Y + Z + \ldots) = E(X) + E(Y) + E(Z) + \ldots$

Um exemplo numérico esclarecerá melhor a propriedade da soma de duas variáveis aleatórias.

Suponhamos duas urnas A e B, a 1ª com duas bolas n.º 2 e quatro bolas n.º 3, a 2ª urna com 3 bolas n.º 3 e 4 bolas n.º 4. A probabilidade de extrair cada uma das bolas é, como sabemos

Urna A		Urna B	
bola n.º 2	$p_2 = 2/6$	*bola n.º 3*	$p_3 = 3/7$
bola n.º 3	$p_3 = 4/6$	*bola n.º 4*	$p_4 = 4/7$

Estamos, assim, diante de duas variáveis aleatórias que assumem os valôres 2 e 3 para a 1ª urna e 3 e 4 para a 2ª urna, com as respectivas probabilidades 2/6, 4/6, 3/7, 4/7. Chamando a 1ª variável de X e a 2ª de Y, a esperança matemática de cada uma delas será

$$E(X) = \sum_{i=2}^{n} x_i p_i = \left(2 \, x \frac{2}{6}\right) + \left(3 \, x \frac{4}{6}\right) =$$

$$= 2{,}6666$$

$$E(Y) = \sum_{i=3}^{n} y_i p_i = \left(3 \, x \frac{3}{7}\right) + \left(4 \, x \frac{4}{7}\right) =$$

$$= 3{,}5714$$

A esperança matemática de $E(X + Y) = 2{,}6666 + 3{,}5714 = 6{,}2380$. Reunindo as duas variáveis, a variável aleatória resultante assumirá os seguintes valores

$$(2 + 3),\ (2 + 4),\ (3 + 3),\ (3 + 4)$$

Com as probabilidades (acontecimentos independentes)

$$\frac{2}{6} \times \frac{3}{7},\ \frac{2}{6} \times \frac{4}{7},\ \frac{4}{6} \times \frac{3}{7},\ \frac{4}{6} \times \frac{4}{7}$$

ou seja

$$\frac{6}{42},\ \frac{8}{42},\ \frac{12}{42},\ \frac{16}{42}$$

A esperança matemática dessa nova variável, será

$$E(X + Y) = \left(5 \times \frac{6}{42}\right) + \left(6 \times \frac{8}{42}\right) +$$

$$+ \left(6 \times \frac{12}{42}\right) + \left(7 \times \frac{16}{42}\right) = 6{,}2380$$

Note-se que neste exemplo as variáveis X e Y são independentes, mas a propriedade da soma se estende também ao casos em que essas variáveis estejam relacionadas.

3.8 — *Esperança Matemática do produto de uma Variável Aleatória por uma Constante*

A esperança matemática do produto de uma variável aleatória por uma constante é igual à própria constante multiplicada pela esperança matemática de variável. Com efeito, se duas ou mais variáveis aleatórias são iguais a X, tendo em vista a propriedade da soma, podemos escrever:

$$\underbrace{E(X + X + X + \quad + X}_{k \text{ vêzes}} =$$

$$= \underbrace{E(X) + E(X) + E(X) + \quad + E(X)}_{k \text{ vêzes}}$$

ou seja, $E(kX) = kE(X)$.

3 9 — *Esperança Matemática do produto de Variáveis Aleatórias*

A esperança matemática de um produto de variáveis aleatórias *independentes*, é igual ao produto das esperanças matemáticas das próprias variáveis.

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias que podem assumir os valores $x_1, x_2, \quad , x_n$ e $y_1, y_2, \quad , y_n$, com probabilidades respectivas, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ e $p_1, p_2, \quad , p_n$ Os valores correspondentes ao sistema formado pelo produto delas, será

$$x_1 y_1, x_1 y_2, \quad , x_1 y_n, x_2 y_1, x_2 y_2, \quad , x_2 y_n$$
$$, x_n y_1, x_n y_2, \quad , x_n y_n$$

com probabilidades:

$$p_1 p_1', p_1 p_2', \quad , p_1 p_n', p_2 p_1', p_2 p_2', \quad , p_2' p_n',$$
$$, p_n p_1', p_n p_2', \quad , p_n p_n'$$

uma vez que se tem de realizar simultâneamente os valores de ambas as variáveis aleatórias independentes Teremos, pois·

$$E(X Y) =$$
$$= x_1 y_1 p_1 p_1' + x_1 y_2 p_1 p_2' + \quad + x_1 y_n p_1 p_n' +$$
$$+ x_2 y_1 p_2 p_1' + x_2 y_2 p_2 p_2' + \quad + x_2 y_n p_2 p_n' +$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \ldots$$
$$+ x_n y_1 p_n p_1' + x_n y_2 p_n p_2' + \quad + x_n y_n p_n p_n'$$

Pondo $x_1 p_1, x_2 p_2, \quad , x_n p_n$ em evidência, resulta:

$$E(X Y) = x_1 p_1 (y_1 p_1' + y_2 p_2' + \quad + y_n p_n') +$$
$$+ x_2 p_2 (y_1 p_1' + y_2 p_2' + \quad + y_n p_n') +$$
$$\cdot \quad \cdot \cdot \cdot$$
$$+ x_n p_n (y_1 p_1' + y_2 p_2' + \quad + y_n p_n')$$

$$E(X Y) = (x_1 p_1 + x_2 p_2 + \quad + x_n p_n)$$
$$(y_1 p_1' + y_2 p_2' + \quad + y_n p_n')$$

$$E(X Y) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i p_i' = E(X) \cdot E(Y)$$

Êste princípio se estende a mais de duas variáveis aleatórias De modo geral, se $X, Y, Z, \quad$, forem independentes, será:

$$E(X, Y, Z, \quad) = E(X)\ E(Y)\ E(Z)$$

Há um meio mais rápido para demonstrar que

$$E(X Y) = E(X)\ E(Y)$$

e que consiste em aplicar a definição de esperança matemática. Assim:

$$E(X Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_i y_j p_i p_j$$

convindo notar neste caso de variáveis aleatórias indenpendentes, a probabilidade de X assumir o valor x_i e, simultâneamente, Y assumir o valor y_j, é igual ao produto das respectivas probabilidades consideradas isoladamente Sendo $x_i\ p_i$ constante em relação ao somatório j podemos passá-lo para fora, advindo então

$$E(X Y) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \sum_{j=1}^{m} y_j p_j$$

$$E(X Y) = E(X) \cdot E(Y)$$

3 10 — *Esperança Matemática do Quadrado de uma Variável Aleatória*

A esperança matemática do quadrado de uma variável aleatória é igual à soma dos quadrados de seus valores multiplicados pelas respectivas probabilidades

$$E(X \cdot X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i\, x_i)\, p_i$$

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\, p_i$$

que se denomina momento auxiliar de 2ª ordem em relação à origem zero Como vimos, costuma-se designar o momento auxiliar de ordem "n" pela notação γ_n Portanto:

$$\gamma_n = E(X^n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^n\, p_i$$

é o momento de ordem n em relação à origem zero O 1º momento seria $\gamma_1 = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\ p_i$ e o momento de ordem zero assim se expressaria

$$\gamma_0 = E(X^0) = \sum_{i=1}^{n} x_i^0\, p_i = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

3 11 — *Esperança Matemática dos Desvios*

A esperança matemática das diferenças entre cada valor da variável aleatória e sua esperança matemática é nula

$$E[X - E(X)] = 0$$

Sejam $x_1, x_2, \quad , x_n$ os valores que a variável aleatória X pode assumir com as respectivas probabilidades $p_1, p_2, \quad , p_n$ Os desvios de cada valor em relação à esperança matemática dessa variável, são:

$$x_1 - E(X), x_2 - E(X), \qquad , x_n - E(X)$$

cujos valores têm as mesmas probabilidades $p_1, p_2, \quad , p_n$ que os x_i Logo

$$E[X - E(X)] = [x_1 - E(X)]\, p_1 + [x_2 - - E(X)]\, p_2 \quad + [x_n - E(X)]\, p_n$$

$$E[X - E(X)] = x_1 p_1 - E(X)\, p_1 + x_2 p_2 - - E(X)\, p_2 + \quad + x_n p_n - E(X)\, p_n$$

$$E[X - E(X)] = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \quad + x_n p_n - - E(X)(p_1 + p_2 + \quad + p_n)$$

$$E[X - E(X)] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i - E(X) = E(X) - - E(X) = 0$$

NOTA: A esperança matemática X também se denota por $\tilde{X}$, de modo que prevalece a igualdade

$$E[X - E(X) = E[X - \tilde{X}] = 0$$

3 12 — *Esperança Matemática de uma Combinação Linear de Variáveis Aleatórias*

A esperança matemática de uma combinação linear de variáveis aleatórias é igual à combinação linear das respectivas esperanças matemáticas

Consideremos uma variável aleatória X relacionada linearmente a "n" variáveis aleatórias $X_1, X_2, X_3, \quad . \quad , X_n$, isto é

$$X = a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + \qquad + a_n X_n$$

em que $a_1, a_2, a_3, \quad , a_n$ são constantes Temos

$$E(X) = E(a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + \qquad + a_n X_n)$$

$$E(X) = E\, a_1 X_1 + E\, a_2 X_2 + E\, a_3 X_3 + \qquad + + E\, a_n X_n$$

$$E(X) = a_1 E(X_1) + a_2 E(X_2) + \qquad + a_n E(X_n)$$

que também se escreve

$$E(X) = a_1 \tilde{X} + a_2 \tilde{X}_2 + \qquad + a_n \tilde{X}_n$$

3 13 — *Variância de uma Variável Aleatória*

Chama-se variância de uma variável aleatória X, e se denota por σ^2, a esperança matemática do quadrado da diferença entre a variável e a sua esperança matemática Em símbolos:

$$\sigma^2 = E[X - E(X)]^2 = E(X - \tilde{X})^2$$

Vejamos o significado dessa expressão Para isso considere-se uma variável aleatória X que pode assumir os valores: $x_1, x_2, \quad , x_n$, com probabilidades respectivas, $p_1, p_2, \quad , p_n$. A esperança matemática dessa variável é, como sabemos

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

que por simplicidade anotaremos $\tilde{X}$. Se subtrairmos de cada valor da variável X a sua esperança matemática, obteremos uma nova variável aleatória que assume os valores:

$$x_1 - \tilde{X}, x_2 - \tilde{X}, \qquad , x_n - \tilde{X}$$

com as probabilidades correspondentes dos valores de x

$$p_1, p_2, \qquad , p_n$$

A esperança matemática do quadrado desta nova variável é que se denomina variância de X

$$E(X - \tilde{X})^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \tilde{X})^2 p_i = \sigma^2$$

Vamos mostrar a seguir que a variância de uma variável aleatória é igual à diferença entre a esperança matemática do quadrado da variável e do quadrado da esperança da mesma variável, isto é:

$$\sigma^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

Por definição de variância, podemos escrever

$$\sigma^2 = E(X - \tilde{X})^2$$

cujo 2.º membro assim se desenvolve·

$$\sigma^2 = E(X^2 - 2X\tilde{X} + \tilde{X}^2)$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - 2\tilde{X}\, E(X) + E(\tilde{X})^2$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - 2\tilde{X}\tilde{X} + \tilde{X}^2 = E(X^2) - 2\tilde{X}^2 + \tilde{X}$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - \tilde{X}^2$$

$$\sigma = E(X^2) - E(X)^2$$

(média quadrática da variável X menos o quadrado da média aritmética)

3 14 — *Esperança Matemática do Quadrado da Soma de duas Variáveis Aleatórias*

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias quaisquer Podemos escrever

$$E(X + Y)^2 = E(X^2 + Y^2 + 2XY) = = E(X^2) + E(Y^2) + 2E(XY)$$

Se as variáveis X e Y são independentes, resulta.

$$E(X+Y)^2 = E(X^2) + E(Y^2) + 2E(X)\cdot E(Y)$$

Se admitirmos que as esperanças matemáticas das variáveis X e Y sejam nulas (o que acontece quando lidamos com os desvios da média), desaparece a última parcela do 2º membro, e vem:

$$E(X+Y)^2 = E(X^2) + E(Y^2)$$

No caso de termos três ou mais variáveis, escreveríamos:

$$E(X+Y+Z+\quad)^2 = E(X^2) + E(Y^2) + E(Z^2) +$$

Portanto, se considerarmos um número finito de variáveis aleatórias independentes e cujas esperanças matemáticas sejam nulas, a esperança do quadrado da soma das variáveis é igual à soma das esperanças dos quadrados de cada uma Anàlogamente

$$E(X-Y)^2 = E(X^2) + E(Y^2)$$

3 15 — *Variância de duas ou mais Variáveis Aleatórias Independentes*

A variância de duas ou mais Variáveis aleatórias indenpendentes é igual à soma das variâncias de cada uma delas

Sejam X, Y e Z três variáveis aleatórias independentes e σ_x^2, σ_y^2, σ_z^2 suas respectivas variâncias

$$\sigma_x^2 = E[X - E(X)]^2 = E(X - \tilde{X})^2$$

$$\sigma_y^2 = E[Y - E(Y)]^2 = E(Y - \tilde{Y})^2$$

$$\sigma_z^2 = E[Z - E(Z)]^2 = E(Z - \tilde{Z})^2$$

Somando membro a membro, vem:

$$\sigma_{x+y+z}^2 = E(X - \tilde{X})^2 + E(Y - \tilde{Y})^2 + E(Z + \tilde{Z})^2$$

$$\sigma_{x+y+z}^2 = E(X^2 + \tilde{X}^2 - 2X\tilde{X}) + E(Y^2 + Y^2 - 2Y\tilde{Y}) + E(Z^2 + \tilde{Z}^2 - 2Z\tilde{Z})$$

$$\sigma_{x+y+z}^2 = [E(X^2) - E(X)^2] + [E(Y^2) - E(Y)^2 + [E(Z^2) - E(Z)^2]$$

Conforme vimos no item 3 13, cada uma das parcelas é igual a σ_x^2, σ_y^2, σ_z^2 Logo:

$$\sigma_{x+y+z}^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2$$

3 16 — *Relação entre os Momentos*

Seja X uma variável aleatória Os momentos auxiliares e centrais, de ordem n, são definidos, respectivamente, por

$$\gamma_n = \sum_{i=1}^{n} x_i^n p_i \quad \text{e} \quad \mu_n = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \tilde{X}_i)\, p_i$$

ou, em função da esperança matemática,

$$\gamma_n = E(X^n) \quad \text{e} \quad \mu_n = E(X - \tilde{X})^n$$

O 1.º momento central será, pois, igual a.

$$\mu_1 = E(X - \tilde{X}) = E(X) - E(\tilde{X}) = \tilde{X} - \tilde{X} = 0$$

e o 2 º momento será a variância:

$$\mu_2 = E(X - \tilde{X})^2 = \sigma^2 \quad \text{(V item 3 18)}$$

Calculemos agora o 1º e o 2º momentos auxiliares

$$\gamma_1 = E(X) \quad \text{e} \quad \gamma_2 = E(X^2)$$

Se desenvolvermos μ_2, encontraremos (V item 3 13):

$$\mu_2 = E(X^2) - E(X)^2$$

Ora, $E(X^2) = \gamma_2$ e $E(X)^2 = \gamma_1^2$

Logo $\sigma^2 = \mu_2 = \gamma_2 - \gamma_1^2$

isto é, a variância, ou o 2º momento central, é igual ao momento auxiliar de 2ª ordem menos o quadrado do momento auxiliar de 1ª ordem Conseqüentemente,

$$\sigma = \sqrt{\gamma_2 - \gamma_1^2}$$

Consideremos a seguir o momento central de 3ª ordem e calculemos a sua esperança matemática·

$$\mu_3 = E(X - \tilde{X})^3 = E(X^3 - 3X^2\tilde{X} + 3X\tilde{X}^2 - \tilde{X}^3)$$

$$\mu_3 = E(X^3) = 3E(X^2)\,E(\tilde{X}) + 3E(X)\,E(\tilde{X}^2) - E(\tilde{X}^3)$$

Sendo: $E(X) = \nu_1$; $E(X^2) = \nu_2$; $E(X^3) = \nu_3$

e $E(X) = \tilde{X} = \nu_1$

Substituindo, resulta

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1^3$$

Semelhantemente, obteremos para μ_4.

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4$$

3 17 — *Média de Distribuição Binomial*

Consideremos uma urna com "n" bolas, das quais algumas são pretas e outras são brancas O esquema de Bernoulli, que estudamos no item 1.5 sob o título "O problema das provas repetidas", corresponde ao caso em que as probabilidades de cada prova é a mesma. No exemplo da urna equivale a repor a bola extraída após cada extração. A extração de uma bola pode ser representada, pois, por uma variável aleatória X, a qual, nesse caso, só pode assumir um dos valores: sair bola preta, que designaremos com o valor 1 ou sair bola branca, que designaremos por 0. Sejam "p" e "q" as probabilidades de ambos os sucessos, em que $p + q = 1$, e tomemos a esperança matemática de X

$$x_i: \quad 0, \quad 1$$

$$p_i: \quad q, \quad p$$

$$E(X) = \sum_{i=0}^{1} x_i\, p_i = (0 \cdot X\, q) + (1\, X\, p) = p$$

A esperança matemática das bolas pretas em "n" provas sucessivas com reposição, isto é, com probabilidade constante em cada extração, será igual à soma das esperanças matemáticas de cada prova, o número de bolas pretas em "n" extrações será, pois, uma variável aleatória representada pela soma

$$E(X) = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

Aplicando a propriedade da soma, vem

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n)$$

$$E(X) = p + p + \ldots + p = np$$

Assim, a esperança matemática de bolas pretas em "n" extrações sucessivas, com reposição, é np. É claro que se quizéssemos a esperança matemática das bolas brancas, consideraríamos como valor 1 a extração de uma bola branca e como valor 0 a de uma bola preta. Cumpre notar que êste processo se aplica sempre que tivermos dois acontecimentos mùtuamente exclusivos, duas alternativas, presença ou ausência de determinado atributo, etc.

Já havíamos encontrado êsse mesmo resultado no item 3.3, aplicando diretamente a definição de esperança matemática.

3.18 — *Variância da Distribuição Binomial*

Tivemos oportunidade de definir "desvios" no item 3.11 como sendo a diferença entre cada valor e a esperança matemática da variável, ou seja

$$x_1 - E(X),\; x_2 - E(X),\; \ldots,\; x_n - E(X)$$

Êsses valores formam uma nova variável aleatória com as probabilidades correspondentes que tinham os valores anteriores $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Mostramos, entretanto, que $E(X) = p$ e que a variável só podia assumir dois valores: o com probabilidade "q", e um com probabilidade "p". A nova variável assumirá o valor $x_1 - p$ com probabilidade "p" e $x_2 - p$ com probabilidade "q", sendo $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$. Assim,

Valores	Probabilidade	Produto
0 - p	q	(0 - p)q = - pq
1 - p	p	(1 - p)p = pq

$$E(X - p) = -pq + pq = 0$$

o que vem confirmar o que havíamos dito no item 3.11: a esperança matemática dos desvios é nula.

Para achar a variância da distribuição binomial basta elevar os desvios ao quadrado e calcular a esperança matemática, assim,

Valores	Probabilidade	Produto
(0 - p)²	q	(0 - p)²q = p²q
(1 - p)²	p	(1 - p)²p = pq²

$$\sigma^2 = E(X - p)^2 = p^2 q + p q^2 = pq\,(p + q) = pq$$

A variância em cada prova é igual ao produto das probabilidades dos sucessos contrários, em "n" provas será npq.

3.19 — *Momentos da Distribuição Binomial*

Acabamos de verificar que $E(X) = p$ e que $E(X - p)^2 = pq$. Anàlogamente, poderíamos obter os momentos centrais de 3.ª e 4.ª ordens desenvolvendo, respectivamente $E(X - p)^3$ e $E(X - p)^4$. Damos a seguir o desenvolvimento de μ_3:

$$\mu_3 = E(X - p)^3 = (0 - p)^3 q + (1 - p)^3 p$$

$$\mu_3 = E(X - p)^3 = -p^3 q + q^3 p = pq(q^2 - p^2)$$

Sendo $(q^2 - p^2) = (q + p)\,(q - p)$ e sabendo que $p + q = 1$, vem $\mu_3 = E(X - p)^3 = pq(q - p)$ em cada prova. Em "n" provas será $\mu_3 = npq(q - p)$.

3.20 — *Esperança Matemática de uma Função de duas Variáveis Aleatórias*

Consideremos uma função de duas variáveis aleatórias X e Y, e representêmo-la por $\phi(X, Y)$ A esperança matemática dessa função será

$$E[\phi(X \cdot Y)] = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \phi(x_i y_j)\, p_{ij}$$

no caso discreto, e

$$E[\phi(X Y)] = \int\int \phi(xy)\, f(xy)\, dx\, dy$$

no caso contínuo Se considerarmos agora a função:

$$\phi(X Y) = (X - \tilde{X})\ (Y - \tilde{Y})$$

onde $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$ representam as esperanças matemáticas de X e Y, resulta para esperança matemática da função $\phi(X Y)$

$$E[(X-\tilde{X})(Y-\tilde{Y})] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x_i - \tilde{X})(y_j - \tilde{Y})\, p_{ij}$$

se as variáveis forem discretas,: e

$$\int\int (X - \tilde{X})\ (Y - \tilde{Y})\, f(xy)\, dx\, dy$$

no caso contínuo

O coeficiente de correlação entre duas variáveis X e Y por definição é igual a

$$\rho_{xy} = \frac{E[(X - \tilde{X}]\ (Y - \tilde{Y})}{\sigma_x\ \sigma_y}$$

Se as variáveis são independentes então o coeficiente de correlação será nulo, pois, nesse caso, $E[(X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y})] = 0$ (vide idem 3.11) Se, porém, existir entre as variáveis X e Y uma relação matemática, tal como

$$Y = a X + b \qquad (1)$$

então $\sigma_y^2 = a^2\ \sigma_x^2$, conforme tivemos oportunidade de mostrar no item 3.6, ao estudarmos a esperança matemática de uma função linear Extraindo a raiz de ambos os membros, resulta

$$\sigma_y = |a|\ \sigma_x$$

onde $|a|$ representa o valor absoluto de a Portanto

$$\sigma_x\ \sigma_y = \sigma_x\, |a|\ \sigma_x = |a|\ \sigma_x^2$$

Vejamos o que acontece com o numerador da fração:

$$E[(X - \tilde{X})\ (Y - \tilde{Y}]$$

De (1) resulta $\overline{Y} = a\overline{X} + b \qquad (2)$

Subtraindo (2) de (1) vem:

$$(Y - \tilde{Y}) = a(\tilde{X} - X)$$

Substituindo na expressão anterior, vem.

$$E[(X - \tilde{X})\ a(X - \tilde{X})] = a\ E(X - \tilde{X})^2 = a\ \sigma_x^2$$

Logo, tem-se:

$$\rho_{xy} = \frac{E[(X - \tilde{X})\ (Y - \tilde{Y})]}{\sigma_x\ \sigma_y} = \frac{a\ \sigma_x^2}{|a|\ \sigma_x^2} = \pm 1$$

Significa isto que o coeficiente de correlação é nulo quando as variáveis são independentes e igual a $\pm$ 1 (dependendo do sinal de x), se entre elas existir uma relação matemática linear.

3 21 — *Esperança Matemática de uma Função Linear de N Variáveis Aleatórias*

Consideremos uma variável ω que seja função linear de n outras variáveis aleatórias X_1, X_2, , X_n, isto é

$$\omega = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \qquad + a_n X_n$$

onde os "a_i" são constantes quaisquer. (V item 3 12) A sua esperança matemática será·

$$E(\omega) = a_1 E(X_1) + a_2 E(X_2) + \qquad + a_n E(X_n)$$

Representemos a esperança matemática de $E(\omega)$ por $\tilde{\omega}$ e a de $E(X_i)$ por $\tilde{X}_i$ Temos então

$$\tilde{\omega} = a_1 \tilde{X}_1 + a_2 \tilde{X}_2 + \qquad + a_n \tilde{X}_n$$

Subtraindo esta última de 1ª, vem:

$$\omega - \tilde{\omega} = (a_1 X_1 - a_1 \tilde{X}_1) + (a_2 X_2 - a_2 \tilde{X}_2) + \qquad + (a_n X_n - a_n \tilde{X}_n)$$

Pondo os a_i em evidência, resulta

$$\omega - \tilde{\omega} = a_1 (X_1 - \tilde{X}_1) + a_2 (X_2 - \tilde{X}_2) + \qquad + a_n (X_n - \tilde{X}_n)$$

Fazendo $(X_1 - \tilde{X}_1) = Z_1$, $(X_2 - \tilde{X}_2) = Z_2$, $(X_n - \tilde{X}_n) = Z_n$, podemos escrever

$$\omega - \tilde{\omega} = a_1 Z_1 + a_2 Z_2 + \qquad + a_n Z_n$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, vem:

$$\omega - \tilde{\omega})^2 = (a_1 Z_1 + a_2 Z_2 + \qquad + a_n Z_n)^2$$

Desenvolvendo o 2º membro, resulta:

$$(\omega - \tilde{\omega})^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Z_i^2 + \sum_{i \neq j} a_i\, a_j\, Z_i\, Z_j$$

Substituindo Z pelo seus valores:

$$(\omega - \tilde{\omega})^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 (X_i - \tilde{X}_i)^2 + \sum_{i \neq j} a_i\, a_j (X_i - \tilde{X}_i)\ (X_j - \tilde{X}_j)$$

Tomando a esperança matemática de cada membro

$$E[\omega - \bar{\omega}] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 E(X_i - \tilde{X}_i)^2 +$$

$$+ \sum_{i \neq j} a_i a_j E[(X_i - \tilde{X}_i)(X_j - \tilde{X}_j)] \quad (1)$$

Sendo, por definição, o coeficiente de correlação ρ_{ij} igual à expressão

$$\rho_{ij} = \frac{E[(X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y})]}{\sigma_i \sigma_j}$$

temos que

$$\rho_{ij} \sigma_i \sigma_z = E[(X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y})]$$

Substituindo o 2º membro na igualdade (1)

$$E[(\omega - \bar{\omega})]^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 E(X_i - \tilde{X}_i)^2 +$$

$$+ \sum_{i \neq j} a_i a_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

ou, sabendo que

$$E[(\omega - \bar{\omega})]^2 = \sigma_w^2 \text{ e } E(X_i - \tilde{X}_i)^2 = \sigma_i^2$$

$$\boxed{\sigma_w^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i \neq j} a_i a_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j} \quad (2)$$

Se as variáveis X_i e X_j são independentes duas a duas, o coeficiente de correlação ρ_{ij} será nulo e a fórmula simplifica-se para:

$$\boxed{\sigma_w^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2} \quad (3)$$

a qual, desenvolvendo o somatório, pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\boxed{\sigma_w^2 = a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2 + \qquad + a_n^2 \sigma_n^2} \quad (4)$$

As fórmulas (2) e (3) são de uso freqüente na teoria da amostragem e nos permitem calcular as variâncias das médias das amostras, tanto no caso de "extração sem reposição", quanto no de "extração com reposição". Examinaremos cada caso separadamente

4 — MÉDIA E VARIÂNCIA DA DISTRIBUIÇÃO DE MÉDIAS

4 1 — *Extração com Reposição*

Suponhamos um universo qualquer do qual extraimos uma amostra, com reposição, de tamanho "n" A média dessa amostra será:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + x_2 + \qquad + x_n) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

e representa uma estimativa da média do universo Se extrairmos grande número de amostras obteremos vários valores para x_i e, nesse caso, a média aritmética $\tilde{X}$ pode ser considerada uma variável aleatória, uma vez que cada amostra extraída corresponde a um valor de $\tilde{X}$, com determinada probabilidade Nessas condições, podemos escrever:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + X_3 + \qquad X_n) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i) \quad (1)$$

Convém notar que os X_1, X_2, X_3, $\quad$, X_n representam agora variáveis aleatórias e não mais os valores obtidos numa amostra, os quais representamos acima por $x_1, x_2, x_3, \quad, x_n$.

Tomando a esperança matemática de ambos os membros, vem.

$$E(\overline{X}) = \frac{1}{n}[E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) +$$

$$+ \qquad + E(X_n)] \quad (2)$$

Ora, pelas próprias condições da amostragem, $E(X_i) = \tilde{X}$, média do universo para qualquer que seja o índice "i"

Vejamos o que isso significa Suponhamos que tivéssemos extraído tôdas as amostras possíveis, com reposição, de um universo determinado Podemos, então, associar a cada extração uma certa variável: à extração de ordem 1 associamos uma variável aleatória X_1; à extração de ordem 2, uma variável X_2; à de ordem "i", uma variável X_i, e assim por diante A variável X_i assumirá todos os valores x_i da extração de ordem "i" em cada amostra, de modo que resulta $E(X_i) = \tilde{X}$, média do universo para qualquer um dos valores "i" Um exemplo numérico, esclarecerá a questão

Seja uma urna contendo apenas 4 bolas, assim numeradas 1, 2, 3 e 4 e consideremos essa urna como sendo nosso universo e cujas características são as seguintes

Média aritmética	$= \tilde{X} = 2{,}5$
Variância	$= \sigma^2 = 1{,}25$

Se extrairmos tôdas as amostras possíveis de 2 elementos, repondo na urna a bola após cada extração, podemos organizar o seguinte quadro:

1a Extração	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4
2a Extração	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4

A média das bolas extraídas na 1ª extração é 2,5 e a das bolas extraídas na 2ª extração é, também, 2,5 A variância das duas séries é a mesma e igual a 1,25 Consideremos, assim, todos os valôres obtidos na 1ª extração de cada amostra como uma variável aleatória X_1, e os obtidos em tôdas as segundas extrações como outra variável aleatória X_2 Ambas as variáveis assumem todos os valôres do universo e têm média e variância iguais às do próprio universo de que provém Podemos, pois, escrever

$$E(X_1) = \tilde{X} \qquad \sigma_1^2 = \sigma^2$$

e

$$E(X_2) = \tilde{X} \qquad \sigma_2^2 = \sigma^2$$

De modo geral $E(X_i) = \tilde{X}$ e $\sigma_i^2 = \sigma^2$

Substituindo em (2) resulta

$$E(X) = \frac{1}{n}(\tilde{X} + \tilde{X} + \tilde{X} + \qquad + \tilde{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i)$$

ou $E(\overline{X}) = \frac{1}{n}\, n\, \tilde{X} = \tilde{X}$

isto é, a média de tôdas as amostras possíveis é igual à média do universo.

Para calcular a variância da distribuição da média, retomemos a expressão (1)

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + X_3 + \qquad + X_n)$$

e notemos que ela coincide com a variável "ω" estudada no item 3 21, em que todos os a_i são iguais, isto é

$$a_1 = a_2 = a_3 = \qquad = a_n = \frac{1}{n} \qquad (3)$$

Mas, no caso de amostras com reposição, as variáveis X_i são independentes, o que equivale dizer que os coeficientes de correlação são nulos, isto é, $\rho_{ij} = 0$ Prevalece, assim, a expressão

$$\sigma_w^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2 \qquad (4)$$

estudada no item 3 21 Observe-se, porém, que todos os σ_i^2 são iguais à própria variância do universo, fato êsse que mostramos com um exemplo numérico, de modo que $\sigma_i^2 = \sigma^2$ O têrmo a_i^2 em face de (3) é igual a $\frac{1}{n^2}$ Substituindo êsses valores em (4), resulta·

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \sum \frac{1}{n^2}\sigma^2$$

Somatório de "n" têrmos constantes logo

$$\boxed{\rho_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{n^2}\, n\, \sigma_2 = \frac{\sigma_2}{n}}$$

expressão que fornece a variância da média da amostra em função da variância do universo e do tamanho "n" da amostra Em outras palavras, a variância da distribuição de médias é igual à variância do universo dividida pelo número de elementos da amostra Extraindo a raiz quadrada a ambos os membros, teremos:

$$\boxed{\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

expressão essa conhecida como êrro padrão da média

4 2 — *Extração sem Reposição*

No caso de amostra sem reposição, sendo N o número de elementos do universo, as extrações não são independentes, conforme já acentuamos no decorrer destas aulas Iniciemos, pois, êsse estado reportando-nos à expressão geral, vista no item 3 21

$$\sigma_w^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i \neq j} a_i\, a_j\, \rho_{ij}\, \sigma_i\, \sigma_j \qquad (1)$$

Nessa hipótese ρ não é nulo, como no caso de extração com reposição,, mas ρ_{ij} é constante, isto é, $\rho_{ij} = \rho$

Em outras palavras, quer isto dizer que se extrairmos de um universo tôdas as amostras possíveis, sem reposição, e considerarmos os valores obtidos em tôdas as primeiras extrações como uma variável aleatória X_1, os obtidos em tôdas as segundas extrações como uma variável aleatória X_2, etc ; e calcularmos o coeficiente de correlação entre X_1 e X_2, X_1 e X_3, , X_1 e X_n, X_2 e X_3, X_2 e X_4, , X_{n-1} e X_n, encontraremos sempre o mesmo valor Vejamos, através de um exemplo numérico a veracidade dessa afirmativa Para isso, consideremos um universo constituído de 4 bolas numeradas 1, 2, 3 e 4 e do qual extraimos tôdas as amostras possíveis de 3 elementos, sem reposição. Convém, preliminarmente, acentuar que a média e a variância dêsse universo são, respectivamente, 2,5 e 1,25 As amostras possíveis de 3 elementos acham-se consignadas no quadro a seguir, no qual figura ainda a ordem de extração

Amostras possíveis de 3 elementos, extraídas sem reposição de um universo constituído de 4 elementos

1a Extração	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4
2a Extração	2	2	3	3	4	4	1	1	3	3	4	4	1	1	2	2	4	4	1	1	2	2	3	3
3a Extração	3	4	2	4	2	3	3	4	1	4	1	3	2	3	1	3	1	2	2	3	1	3	1	2

Média aritmética: das 1as extrações: 2,5; das 2as extrações: 2,5; das 3as extrações: 2,5

Variância: das 1as extrações: 1,25; das 2as extrações: 1,25; das 3as extrações: 1,25

Como vemos, tanto as médias, quanto as variâncias, das 3 séries de extrações coincidem respectivamente, com a média e com a variância do universo original Resta, agora, verificar se o coeficiente de correlação entre a 1ª e a 2ª séries é igual ao coeficiente de correlação entre a 1ª e 3ª e entre a 2ª e 3ª, isto é, se todos os ρ_{ij} são constantes.

Para calcular o coeficiente de correlação entre duas séries X e Y precisamos obter

1) a diferença entre cada valor da série X e a sua respectiva média $\bar{X}$: $Y - \bar{Y}$

2) a diferença entre cada valor da série Y e a sua respectiva média $\bar{Y}$ $Y - \bar{Y}$

3) a soma dos produtos $(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})$

4) o desvio padrão da série X

5) o desvio padrão da série Y

e aplicar a conhecida fórmula

$$\rho_{xy} = \frac{E(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\Sigma(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}{N \sigma_x \sigma_y}$$

Efetuando as operações acima indicadas, obteremos os seguintes valores

$$\rho_{xy} = 0{,}733 \qquad \rho_{xz} = 0{,}733 \qquad \rho_{yz} = 0{,}733$$

Se fizermos na expressão geral $a_i = 1/n$ e $a_j = 1/n$ e substituirmos σ_i e σ_j por σ, visto que êles são constantes, e, bem assim, ρ_{ij} por ρ, resulta·

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} \sigma^2 + \sum_{i \neq j} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \rho \sigma^2$$

isto é, todos os têrmos, no interior de cada somatório, são constantes Sendo "n" o número de têrmos do 1º somatório e $n(n-1)$ o do 2º, uma vez que no caso de extrações sem reposição não figuram elementos repetidos, tais como 11, 22, 33, etc, a expressão assume a forma

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{n}{n^2}\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n^2}\rho\, n(n-1) = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{n}\rho(n-1)$$

ou, finalmente,

$$\boxed{\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}[1 + \rho(n-1)]} \qquad (2)$$

Para determinarmos o valor de ρ supomos que $n = N$, isto é, que extraímos amostras compostas de todos os elementos do universo Nesse caso em que a amostra esgota a população, a variância da média da amostra é nula, pois a média $\bar{X}$ da amostra coincidirá com a média $\bar{X}$ do universo, não havendo, por conseguinte, dispersão Substituindo "n" por "N" em (2), e $\sigma_{\bar{x}}^2$ por 0, vem

$$0 = \frac{\sigma^2}{n}[1 + \rho(n-1])$$

o que conduz, no caso de ser $\sigma^2 \neq 0$, a:

$$0 = 1 + \rho(n-1)$$

donde $\rho = -\dfrac{1}{N-1}$

(Fizemos $\sigma^2 \neq 0$ porque se assim não fôsse estaríamos face a uma população em que todos os elementos seriam iguais e, nesse caso, um único elemento seria suficiente para fornecer tôdas as características do universo, sendo dispensável a amostragem).

Substituindo o valor de ρ em (2), resulta:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\left[1 - \frac{1}{N-1} \cdot (n-1)\right] =$$

$$= \frac{\sigma^2}{n}\left[1 - \frac{n-1}{N-1}\right] \qquad (3)$$

ou, finalmente

$$\boxed{\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}} \qquad (4)$$

expressão que fornece a variância da média da amostra, no caso de extração sem reposição, em função da variância, do tamanho da amostra e do próprio universo

Quando $N = \infty$ a fórmula (4) se reduz a·

$$\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sigma^2}{n}$$

expressão que fornece a variância da média da amostra no caso de extração com reposição (universo infinito)

Se N é muito grande e "n" é pequeno em relação a N, a fração $\frac{n-1}{N-1}$ de (3) é pràticamente igual a $\frac{n}{N} = p$ de modo que a expressão (3) pode ser substituída por

$$\boxed{\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sigma^2}{n}(1-p)}$$

onde "p" representa a "fração amostrada" do universo

Convém observar, finalmente, que quando não há reposição, a variância da média é menor do que quando há reposição, uma vez que

$\frac{N-n}{N-1}$ é sempre inferior à unidade

5 — DETERMINAÇÃO DO TAMANHO DA AMOSTRA (amostragem simples)

Denomina-se "tamanho da amostra" ao número de elementos que constituem a amostra Assim, uma amostra de tamanho "n" significa uma amostra de "n" elementos, entendendo-se por "elementos", conforme o caso, um único indivíduo, um objeto, um conjunto de indivíduos ou um conjunto de objetos quaisquer É claro que, como indivíduo ou objeto, não se deve entender apenas pessoa ou coisa. Uma série de preços mensais de carne, por exemplo, é uma amostra extraída da população de todos os preços mensais de carne capazes de serem observados, isto é, de todos os preços possíveis

Vimos que a média aritmética das médias de tôdas as amostras possíveis coincide com a média do universo de onde as amostras provieram e, ainda mais, que êsse resultado se aplica a amostras de qualquer tamanho, tanto no caso de extração com reposição, quanto no de extração sem reposição, independentemente da forma do universo original

Ainda com relação à distribuição das médias das amostras, convém ressaltar dois outros aspectos de grande importância teórica e prática na teoria da amostragem: o primeiro dêles refere-se ao fato de que sendo "normal" o universo a distribuição das médias também será "normal" e o segundo, ao fato de que embora não sendo "normal" a distribuição dos elementos do universo, ainda assim a distribuição das médias das amostras é "aproximadamente normal', tanto mais próximo da "normalidade" quanto maior o tamanho da amostra Cumpre notar, finalmente, que os vocábulos "normal"e "normalidade" se relacionam, nos casos aqui considerados, com a lei normal ou curva normal de probabilidade e que os aspectos considerados se referem à "amostragem simples", havendo outros tipos de amostragem como, por exemplo, a "amostragem estratificada", os quais serão oportunamente focalizados neste Curso Feitas essas considerações preliminares, passemos ao nosso objetivo, qual seja o de determinar o tamanho de uma amostra que satisfaça a certas condições preestabelecidas, como veremos a seguir

Suponhamos extraídas diversas amostras de um universo infinito e que essas amostras sejam suficientemente grandes Nesse caso, a distribuição das médias é normal, independentemente da forma do universo de onde foram retiradas, de modo que podemos utilizar na determinação do tamanho da amostra a própria curva normal de probabilidades Tomando por base a aproximação fornecida por essa curva, fàcilmente calcularemos as frações do total de amostras possíveis em que a média da amostra difira da média do universo de um, dois, três, etc , desvios padrões, para mais ou para menos Assim, por exemplo, sabemos que cêrca de 68,3% das amostras dão lugar a médias que diferem da média do universo original, para mais ou para menos, de um desvio padrão, cêrca de 95,4% dão lugar a médias que diferem de 2 desvios padrões e, 99,7%, aproximadamente, dão lugar a médias que diferem de 3 desvios padrões Sendo $\tilde{X}$ a média do universo, podemos representar simbòlicamente os resultados acima, da seguinte maneira $\tilde{X} \pm \sigma$, $X \pm 2\sigma$, $\tilde{X} \pm 3\sigma$

Se desejássemos extrair uma amostra da população industriária do Brasil para estudar a característica "idade", de tal modo que 95% das amostras extraídas nas mesmas condições não diferissem da média do universo de mais ou de menos 0,5 ano, escreveríamos: $1{,}96\sigma_{\bar{x}} \leqslant 0{,}5$

De modo geral, teríamos: $k\,\sigma_{\bar{x}} \leqslant E$ em que E representa um valor qualquer predeterminado Elevando ao quadrado, resulta $k^2\sigma^2_{\bar{x}} \leqslant E^2$ (1) mas, sendo $\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sigma^2}{n}$, no caso de extração com reposição (universo infinito) vem

$$k^2 \frac{\sigma^2}{n} \leq E^2$$

ou $$k^2\sigma^2 \leq E^2 n \therefore \frac{k^2\sigma^2}{E^2} \leq n$$

ou finalmente $$\boxed{n \geq \frac{k^2\sigma^2}{E^2}} \qquad (2)$$

No caso de extração sem reposição (universo finito), sabemos que a variância da distribuição das médias é dada pela expressão

$$\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

Substituindo $\sigma^2_{\bar{x}}$ em (1), decorre

$$k^2 \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1} \leq E^2$$

Multiplicando ambos os membros por $n(N-1)$:

$$k^2\sigma^2(N-n) \leq E^2 n (N-1)$$

ou $$k^2\sigma^2 N - nk^2\sigma^2 \leq E^2 n (N-1)$$

ou, ainda $$E^2 n (N-1) + nk^2\sigma^2 \geq k^2\sigma^2 N$$

donde, finalmente

$$\boxed{n \geq \frac{k^2\sigma^2 N}{F^2(N-1) + k^2\sigma^2}} \qquad (3)$$

Como vimos, a variância das médias no caso de extração sem reposição (universo finito) é menor do que a variância das médias no caso de extração com reposição (universo infinito)), pois a fração $\frac{N-n}{N-1}$ é menor do que 1 Conseqüentemente, numa amostragem simples sem reposição, obteremos a mesma precisão fornecida pela amostragem com reposição, adotando uma amostra de tamanho menor, ou maior precisão para o mesmo tamanho de amostra

Exemplo I Consideremos como universo original a distribuição por idade dos industriários de ambos os sexos, segundo o Censo realizado pelo IAPI, em 1948 Sendo $N = 1\ 002\ 549$, um número grande, é lícito admitir o universo como infinito, o que equivale a dizer que a amostragem é com reposição O desvio padrão e a variância dêsse universo são, respectivamente, 11,56 e 133,63

Se estabelecermos $k = 1{,}96$ e $E = 0{,}5$, isto é, uma faixa tal que 95% das amostras extraídas apresentem médias que não se afastem de mais ou de menos 0,5 ano da média do universo, o tamanho da amostra seria dado por

$$n \geq \frac{3{,}8416 \times 133{,}63}{0{,}25} = 2053{,}412 \cong 2053$$

Se desejássemos maior precisão nos resultados, de 0,1 de ano, por exemplo, o tamanho da amostra seria bem maior, como se vê a seguir

$$n \geq \frac{3{,}8416 \times 133{,}63}{0{,}01} = 51335$$

ou seja, exatamente 25 vêzes maior que a anterior

Se não tivéssemos considerado o universo infinito e calculássemos o tamanho da amostra com a fórmula correspondente (3), obteríamos para "n" o valor 2049,2, que difere pouco do obtido pela fórmula (2), como era de esperar, dado o grande valor de N

Exemplo II Consideremos novamente o universo dos industriários, mas suponhamos que o desvio padrão seja igual a 20, em vez de 11,56 como no exemplo anterior Se estabelecermos $k = 1{,}96$ e $E = 0{,}1$ o tamanho da amostra será

$$n \geq \frac{3{,}8416 \times 400}{0{,}01} = 153\ 664$$

no caso de extração com reposição (niverso infinito), e

$$n \geq \frac{3{,}8416 \times 400 \times 1002549}{0{,}01 \times 1002548 + 3{,}8416 \times 400}$$

no caso de extração sem reposição (universo finito) Êsses resultados mostram a influência que o desvio padrão do universo exerce sôbre o tamanho da amostra No Exemplo I, em que o desvio padrão era de 11,56 bastaria extrair uma amostra de 51 335 elementos para preencher as condições estabelecidas ($k = 1{,}96$ e $E = 0{,}1$), ao passo que no exemplo II, para satisfazer a essas mesmas condições, seria necessário extrair uma amostra de 153 664 elementos, ou seja, cêrca de 3 vêzes maior que a anterior

Para facilitar o emprêgo da fórmula (3) podemos simplificá-la, dividindo ambos os têrmos da fração por E^2, o que conduz a:

$$\boxed{n \geq n_0 \frac{N}{(N-1) + n_0}} \qquad (4)$$

onde $n_0 = \frac{l^2\sigma^2}{E^2}$, expressão essa, que, como vimos, fornece o tamanho da amostra na caso de extração com reposição

Exemplo III. Reportando-nos ao exemplo anterior, e tendo em vista a fórmula (4), podemos escrever $n_0 = 153\ 664$ Assim, o tamanho da amostra, no caso de extração com reposição, será dado por.

$$n \geq 153\ 664 \cdot \frac{1\ 002\ 549}{1\ 002\ 548 + 153\ 664} = 133\ 242$$

resultado idêntico ao anterior, obtido, porém, mais fàcilmente

6 — AMOSTRAGEM ESTRATIFICADA

Consideremos um universo constituído de 8 elementos, como, por exemplo, 8 fábricas de tecidos, cujo número de operários se especifica a seguir:

Fábricas (N.º)	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
N.º de Operários	100	104	504	108	500	5'8	112	512	2 448

O número médio de operários por fábrica está representado por $\tilde{X} = 306$, sendo a variância $\sigma^2 = 40\ 020$

Nosso propósito é estimar uma caracteiística qualquer dêsse universo por intermédio de duas amostras extraídas sem reposição; para exempiificar, seja o nosso objetivo estimar $\tilde{X}$ Para êsse fim adotaremos como estimativa de $\tilde{X}$ a média obtida em uma amostra de 2 fábricas. Preliminarmente, organizemos o quadro das amostras possíveis nas condições estabeleicidas e registremos ao lado de cada uma delas o respectivo número médio de operários Convém esclarecer, antes de focalizarmos outros aspectos, que no quadro abaixo transcrito só figuram 28 amostras, quando, na realidade, o número total de amostras possíveis se eleva a 56 É que deixamos de incluir as amostras constituídas pelas fábricas 21, 31, 41 , 87, uma vez que, no presente caso, em que se pretende estimar $\tilde{X}$ estamos interessados em extrair do universo duas fábricas quaisquer, independentemente da ordem de apresentação Nessas condições, uma amostra constituída, por exemplo, pelas fábricas 1 e 7, representa para nós a mesma coisa que uma amostra composta pelas fábricas 7 e 1, uma vez que conduz à mesma média, isto é, à mesma estimativa para $\tilde{X}$ Daí a razão de só considerarmos 28 amostras. em vez de 56 Como sabemos, a média aritmética dessas 28 amostras coincide com a do universo original. Entretanto, a estimativa que faríamos da média do universo, nas bases preestabelecidas, é muitíssimo precária, como fàcilmente se verifica comparando-se, por exemplo, as médias das amostras formadas pelas fábricas 12, 14, 17, 24, , 56, 58, com a média do universo de onde elas provêm Essas médias são, respectivamente, 102, 104, 106, 106, , 504, 506, bastante diferentes, como se vê, da média do universo (306).

Quadro I

Amostras (Fábricas)	N.º Médio de operários	Amostras (Fábricas)	N.º Médio de operários
12	102	35	502
13	302	36	506
14	104	37	308
15	300	38	508
16	304	45	304
17	106	46	308
18	306	47	110
23	304	48	310
24	106	56	504
25	302	57	306
26	306	58	506
27	108	67	310
28	308	68	510
34	306	78	312

Quer isto dizer, em última análise, que devemos abandonar êsse processo e recorrer a outro, que nos forneça estimativas mais precisas da média do universo Resultados mais satisfatórios serão obtidos, como veremos adiante, procedendo da seguinte maneira

1.º) grupando as fábricas de acôrdo com o número de operários;

2.º sorteando uma fábrica de cada grupo

Uma vez que é nosso objetivo extrair sòmente duas fábricas, poderíamos classificá-las em dois grupos apenas, incluindo no 1.º grupo aquelas que possuissem menos de 500 operários e, no 2.º grupo, as que contivessem mais de 500 operários, como se esclarece a seguir:

1.º GRUPO

Fábricas (N.º)	*N.º de operários*
1	100
2	104
4	108
7	112

2.º GRUPO

Fábricas (N.º)	*N.º de operários*
3	504
5	500
6	508
8	512

Cada grupo assim constituído recebe a denominação de "estrato" e a amostragem feita com base nesses estratos constitui a "amostragem estratificada". Cumpre notar que êsses grupos, ou estratos, devem ser formados, tanto quanto possível, de elementos homogêneos, de modo a reduzir ao mínimo a variância "dentro" de cada um dêles, uma vez que a estratificação fica completamente eliminada a variância "entre" os estratos (V Apêndice)

Se extrairmos agora uma fábrica do 1º estrato e outra fábrica do 2º estrato, melhoraremos sensìvelmente nossa estimativa As amostras possíveis extraídas sem reposição, em número de 16, se acham indicadas no quadro a seguir, juntamente com o respectivo número médio de operários. Qualquer dessas amostras assim constituídas fornece uma boa estimativa do universo, como fàcilmente se verifica comparando as médias obtidas com a média do universo original. Basta atentar para o fato de que as médias de tôdas as amostras possíveis se acham compreendidas entre os valores 300 e 312 para se ter a certeza de que êsse processo conduz a uma melhor estimativa No caso de amostragem simples, como vimos, êsses valores limites são 102 e 510, bem superiores aos obtidos com a amostragem estratificada

Quadro 2

Amostras (Fábricas)	Nº Médio de operários	Amostras (Fábricas)	Nº Médio de operários
13	302	43	306
15	300	45	301
16	304	46	308
18	306	48	310
23	301	73	308
25	302	75	306
26	306	76	310
28	308	78	312

$$\overline{X} = \tilde{X} = 306$$

$$\sigma^2 = \frac{160}{16} = 10$$

6 1 — *Variância das médias*

Mostramos na aula anterior que a variância das médias, no caso de amostragem simples, sem reposição, era dada pela expressão

$$\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N - n}{N - 1}$$

Aplicando essa fórmula ao exemplo acima figurado, obteremos.

$$\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{40\ 020}{2} \cdot \frac{8 - 2}{8 - 1} = 17\ 151{,}37$$

resultado êsse que o aluno poderá comprovar calculando diretamente a variância das médias consignadas no Quadro 1 No caso de amostragem estratificada a variância das médias, calculada diretamente (Quadro 2) é igual a 10 Vejamos agora como obtê-la por intermédio de uma fórmula.

Consideremos um universo de tamanho N, subdividido em k estratos, contendo cada amostra N_i elementos Representemos por $\tilde{X}_i$ a média de cada estrato e por $\tilde{X}$ a média do universo (V Quadro 3) A média do universo tem por expressão

$$\tilde{X} = \frac{\sum N_i \tilde{X}_i}{\sum N_i} = \frac{1}{N}(N_1 \tilde{X}_1 + N_2 \tilde{X}_2 + \quad + N_k \tilde{X}_k)$$

Quadro 3

Estratos	Nº de elementos N_i	Médias $\tilde{X}_i$
1	N_1	$\tilde{X}_1$
2	N_2	$\tilde{X}_2$
3	N_3	$\tilde{X}_3$
k	N_k	$\tilde{X}_k$
TOTAL	N	–

A melhor estimativa para a média do universo é o valor $\overline{X}$ que resulta substituindo-se na expressão anterior cada $\tilde{X}_i$ pela média $\overline{X}_i$ de cada estrato, obtida na amostra, isto é

$$\overline{X} = \frac{1}{N}(N_1 \overline{X}_1 + N_2 \overline{X}_2 + \quad + N_k \overline{X}_k)$$

$$\text{ou } \overline{X} = \frac{N_1}{N}\overline{X}_1 + \frac{N_2}{N}\overline{X}_2 + \quad + \frac{N_k}{N}\overline{X}_k$$

Fazendo $a_i = \frac{N_i}{N}$ e substituindo acima, resulta

$$\overline{X} = a_1 \overline{X}_1 + a_2 \overline{X}_2 + \quad + a_k \overline{X}_k$$

Vimos que a variância da variável ω, definida pela expressão

$$\omega = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \quad + a_n X_n$$

é dada por

$$\sigma^2_\omega = \sum a_i^2 \sigma^2_{x_i}$$

no caso de serem independentes as variáveis X_i Substituindo, pois,

$$\sigma^2_\omega \text{ por } \sigma^2_{\overline{X}}; \; a_i^2 \text{ por } \frac{N_i^2}{N^2} \text{ e } \sigma^2_{x_i} \text{ por } \sigma^2_{\overline{X}_i}$$

$$\text{vem } \sigma^2_{\overline{X}} = \sum \frac{N_i^2}{N^2}\sigma^2_{\overline{X}_i}$$

Sendo a variância das médias $\bar{X}_i$, no caso de extração sem reposição, igual a

$$\sigma^2_{\bar{X}_i} = \frac{\sigma_i^2}{n_i} \cdot \frac{N_i - n_i}{N_i - 1}$$

e substituindo na expressão anterior, resulta

$$\sigma^2_{\bar{X}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{N_i^2}{N^2} \cdot \frac{N_i - n_i}{N_i - 1} \cdot \frac{\sigma_i^2}{n_i}$$

ou: $\sigma^2_{\bar{X}} = \sum_{i=1}^{k} N_i^2 \frac{1}{N^2} \cdot \frac{N_i - n_i}{N_i - 1} \cdot \frac{\sigma_i^2}{n_i}$

ou, finalmente:

$$\boxed{\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{k} N_i^2 \frac{N_i - n_i}{N_i - 1} \cdot \frac{\sigma_i^2}{n_i}} \qquad (1)$$

expressão essa que fornece a variância das médias no caso de amostragem estratificada e na qual N representa o tamanho do universo; N_i o tamanho do estrato i; n_i o número de elementos do estrato i, extraídos para compor a amostra σ_i^2 a variância do estrato i

Para aplicar essa fórmula ao exemplo das fábricas calculemos inicialmente a variância dentro de cada estrato

1 º Estrato

N.º operários X	$\|X-\bar{X}\|$	$(X-\bar{X})^2$
100	6	36
104	2	4
108	2	4
112	6	36
$\bar{X}$ = 106	—	80

$\sigma_1^2 = 80/4 = 20$

2 º Estrato

N.º operários	$\|X-\bar{X}\|$	$(X-\bar{X})^2$
504	2	4
500	6	36
508	2	4
512	6	36
$\bar{X}$ = 506	—	80

$\sigma_1^2 = 80/4 = 20$

Temos então

$$N = 8,\ N_1 = 4,\ N_2 = 4;\ n_1 = 1;\ n_2 = 1,$$
$$\sigma_1^2 = 20;\ \sigma_2^2 = 20$$

Substituindo êsses valores em (1), vem

$$\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{1}{64}\left[16 \cdot \frac{4-1}{4-1} \cdot \frac{20}{1} + 16 \cdot \frac{4-1}{4-1} \cdot \frac{20}{1}\right]$$

$$\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{1}{64} \times 640 = 10$$

valor que coincide com o obtido diretamente no Quadro 2

6 2 — Consideremos um universo subdividido em 2 estratos, conforme consta do Quadro 4, e do qual desejamos extrair uma amostra de 100 elementos Nosso problema consiste, então, em determinar o número de elementos que devemos extrair de cada estrato para compor a amostra Há dois meios para resolvê-lo: o primeiro, usando a "amostragem proporcional", e o segundo, a "distribuição ótima' Vejamos cada processo separadamente

6 21 — *Amostragem proporcional (ou de Bowley)*

Consiste êsse processo, como o próprio nome indica, em retirar os elementos proporcionalmente ao tamanho dos estratos em que foi dividido o universo No exemplo figurado extrairíamos, pois, 30 elementos do 1 º estrato e 70 elementos do 2 º, perfazendo o total de 100. De modo geral, devemos ter a seguinte relação·

Quadro 4

Estratos i	Universo N_i
1	300
2	700
TOTAL	1 000

$$\frac{n_i}{n} = \frac{N_i}{n} \therefore n_i = n\frac{N_i}{N} \qquad (2)$$

Suponhamos, agora, que a variância do 1.º estrato seja nula e que a do 2 º estrato seja, por exemplo, igual a 50 Nesse caso não haveria necessidade de extrairmos 30 elementos do 1 º estrato, pois a variância nula significa que todos os elementos são iguais Assim sendo bastaria retirar 1 elemento dêsse estrato, ao invés de 30. A conclusão que procuramos tornar patente através do exemplo numérico é a de que o número de elementos a extrair de um extrato depende também da variância dentro dêsse próprio estrato Na ausência completa de informações, isto é, quando não conhecemos a variância do estrato, nem dispomos de nenhuma informação a êsse respeito, empregaremos a amostragem proporcional, visto que êsse tipo de amostragem dará resultados mais precisos que os fornecidos pela amostragem simples Para levar em conta a variância de cada estrato foi estudada por Neyman um nôvo tipo de distribuição que veremos a seguir

6 22 — *Distribuição ótima (Neyman)*

Neyman estabeleceu um critério de distribuição dos elementos da amostra pelos diferentes estratos a partir da condição de ser mínima a variância resultante De acôrdo com êsse critério o número n_i de elementos do estrato i, em uma amostragem de n elementos será dado pela expressão:

$$n_i = n \frac{N_i \sigma_i}{\sum N_i \sigma_i} \quad (3)$$

Se σ_i é constante, isto é, se os desvios padrões dos estratos forem iguais entre si, recairemos na amostragem proporcional De fato, sendo σ_i constante podemos escrever

$$n_i = n \frac{N_i \sigma_i}{\sigma_i \sum N_i} = n \frac{N_i}{\sum N_i} = n \frac{N_i}{N}$$

Consideremos um número constituído de 2 estratos (V Quadro 5), o primeiro dos quais tem um desvio padrão igual a 20 e o segundo um desvio padrão igual a 50

Quadro 5

Estratos i	Universo N_i	σ_i	$N_i \sigma_i$
1	400	20	8 000
2	600	50	30 000
TOTAL	1 000	—	38 000

Se quiséssemos extrair, por exemplo, uma amostra de 38 elementos, adotando a distribuição ótima, teríamos que retirar 8 elementos do 1 º estrato e 30 do 2 º, como se vê a seguir.

$$n_1 = n \frac{N_i \sigma_i}{\sum N_i \sigma_i} = 38 \frac{8\ 000}{38\ 000} = 8$$

$$n_2 = n \frac{N_2 \sigma_2}{\sum N_i \sigma_i} = 38 \cdot \frac{38\ 000}{30\ 000} = 30$$

Na amostragem proporcional, obteríamos, no entanto

$$n_1 = 38 \cdot \frac{400}{1000} \cong 15 \text{ para o 1º estrato e}$$

$$n_2 = 38 \cdot \frac{600}{1000} \cong 23 \text{ para o 2º estrato}$$

Pode acontecer, entretanto, que seja demasiado caro extrair um elemento no estrato i, devido, por exemplo às dificuldades de transporte, à extensão territorial, etc Para se levar em conta a diferença de custo na amostragem dos diversos estratos adota-se outro critério de distribuição no qual se considera êsse fator, o que será estudado em uma das próximas aulas

Consideremos um universo dividido em 3 estratos (V. Quadro 6) do qual desejamos extrair uma amostra de 1 000 elementos

Quadro 6

Estratos i	Universo N_i	σ_i	$N_i \sigma_i$
1	6 000	12	72 000
2	3 000	15	45 000
3	1 000	30	30 000
TOTAL	10 000	—	147 000

σ^2 do universo = 2 500

No caso de amostragem simples os 1 000 elementos seriam extraídos ao acaso Na amostragem proporcional extrairíamos

n_1 = 600 elementos do 1 º estrato,
n_2 = 300 elementos do 2 º estrato,
n_3 = 100 elementos do 3 º estrato

No caso de distribuição ótima, o número de elementos de cada estrato seria dado, respectivamente, por:

$$n_1 = n \frac{N_1 \sigma_1}{\sum N_i \sigma_i} = 1\ 000 \times \frac{72\ 000}{147\ 000} \cong 490$$

$$n_2 = n \frac{N_2 \sigma_2}{\sum N_i \sigma_i} = 1\ 000 \times \frac{45\ 000}{147\ 000} \cong 306$$

$$n_3 = n \frac{N_3 \sigma_3}{\sum N_i \sigma_i} = 1\ 000 \times \frac{30\ 000}{147\ 000} \cong 204$$

Comparação das variâncias

1) Amostragem simples

$$\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{\sigma^2}{n} = \frac{10.000-1\ 000}{9\ 999} \cdot \frac{2\ 500}{1\ 000} = 2,25$$

2) Amostragem estratificada proporcional

$$\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{k} N_i^2 \frac{N_i - n_i}{N_i - 1} \cdot \frac{\sigma_i^2}{n_i}$$

$$\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{1}{(10\ 000)^2} \left[(6\ 000)^2 \cdot \frac{6000-600}{5999} \cdot \frac{(12)^2}{600} + (3000)^2 \cdot \frac{3000-300}{2999} \cdot \frac{(15)^2}{300} + (1000)^2 \cdot \frac{1000-100}{999} \cdot \frac{(30)^2}{100} \right]$$

$$\sigma^2_{\bar{x}} = 0,220$$

3) Amostragem estratificada com distribuição ótima:

$$\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{k} N_i^2 \frac{N_i - n_i}{N - 1} \cdot \frac{\sigma_i^2}{n_i} \qquad (1)$$

$$\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{1}{(10\,000)^2} \left[(6\,000)^2 \cdot \frac{6000 - 490}{6000 - 1} \cdot \frac{(12)^2}{490} + (3000)^2 \cdot \frac{3003 - 306}{3000 - 1} \cdot \frac{(15)^2}{306} + (1\,000)^2 \cdot \frac{1000 - 204}{1000 - 1} \cdot \frac{(204)^2}{306} \right]$$

$$\sigma^2_{\bar{x}} = 0{,}193$$

Nota: O cálculo da variância pela fórmula (1) fica simplificado, no caso da amostragem proporcional ou ótima, desde que se substitua nessa expressão n_i pelos valôres dados pelas fórmulas (2) ou (3), respectivamente

APÊNDICE

Vamos mostrar através de um exemplo numérico que no caso de amostragem estratificada a variância "entre" os estratos fica completamente eliminada

Consideremos o caso das 8 fábricas tratadas no texto e os 2 estratos em que foi subdividido o universo

1º estrato: 100, 104, 108, 112 (média 106)

2º " : 504, 500, 508, 512 (média 506)

A média do universo é 306, sendo a variância igual a 40 020 (V. Quadro 1)

Quadro 1

X	$\lvert X-\bar{X} \rvert$	$(X-\bar{X})^2$
100	206	42 436
104	202	40 804
108	198	39 204
112	194	37 636
504	198	39 204
500	194	37 636
508	202	40 804
512	206	42 436
TOTAL	—	320 160

$$\sigma^2_t = \frac{320.160}{8} = 40\,020$$

A variância "dentro" dos estratos é dada pela soma dos quadrados das diferenças entre cada elemento do estrato e a respectiva média, dividida pelo número de elementos que compõem o estrato; assim,

$$(100 - 106)^2 + (104 - 106)^2 + (108 - 106)^2 + (112 - 106)^2 + (504 - 506)^2 + (500 - 506)^2 + (508 - 506) + (512 - 506)^2 = 160,$$

donte $\sigma^2_d = \frac{160}{8} = 20$

A variância "entre" os estratos pode ser obtida da seguinte maneira Cada um dos 4 elementos do 1.º estrato é suscetível de ser representado pela média dêsse estrato, o mesmo sucedendo com os elementos do 2º estrato em relação à sua média As diferenças entre as médias dos estratos e a média aritmética do universo, são, respectivamente.

$$106 - 306 = 200 \quad \text{e} \quad 506 - 306 = 200$$

Elevando ao quadrado essas diferenças e somando, vem:

$$(106 - 306)^2 + (506 - 306)^2$$

Como são 4 os elementos de cada estrato, são também em número de 4 êsses desvios, isto é

$$4\,(106 - 306)^2 + 4\,(506 - 306)^2 = 320\,000$$

Dividindo-se a soma dos quadrados dessas diferenças pelo número de elementos que compõem o universo, obteremos a variância "entre" os estratos, ou seja,

$$\sigma^2_e = 320\,000 \div 8 = 40\,000$$

Como se verifica numèricamente, a variância total é igual à variância "dentro" dos estratos mais a variância "entre" os estratos, isto é

$$\underbrace{\frac{320.160}{8}}_{\text{variância total}} = \underbrace{\frac{160}{8}}_{\text{variância "dentro"}} + \underbrace{\frac{320.000}{8}}_{\text{variância "entre"}}$$

Se calcularmos agora a variância das médias de tôdas as amostras possíveis de 2 elementos, obteremos·

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{n} = \frac{\frac{160}{8} + \frac{320.000}{8}}{8} =$$

$$= \underbrace{\frac{160}{16}}_{\text{variância dentro}} + \underbrace{\frac{320.000}{16}}_{\text{variância entre}}$$

Ora, a variância das médias das amostras extraídas do universo estratificado é igual a 160/16 (V. Quadro 2 do texto), valor êsse que corresponde exatamente à variância "dentro", como se vê na expressão anterior, tendo sido eliminado com a estratificação a fração correspondente à variância "entre" os estratos

7 — AMOSTRAGEM ESTRATIFICADA COM DISTRIBUIÇÃO ÓTIMA, LEVANDO EM CONTA O CUSTO

Ao estudarmos a distribuição ótima de Neyman (V item 6 22), salientamos que a extração de um elemento no estrato *i* poderia ser demasiadamente dispendiosa, em face, por exemplo, da extensão territorial abrangida pela amostragem, das dificuldades de transporte a locais longínquos, etc Dissemos ainda que para se levar em conta a diferença de custo na amostragem dos diversos estratos, adotava-se outro critério de distribuição no qual se considerava êsse fator e que conduzia à seguinte expressão:

$$\boxed{n_i = \frac{\mathcal{C}\, N_i\, \sigma_i}{\sqrt{c_i}\ \sum N_i\, \sigma_i \sqrt{c_i}}} \qquad (1)$$

onde n_i = número de elementos do estrato i

N_i = tamaho do estrato i

$\mathcal{C}$ = custo total da amostragem

c_i = custo unitário no estrato i

σ_i = desvio padrão do estrato i

Claio está que se todos os estratos conduzirem ao mesmo custo, a fórmula (1) se reduz à expressão inicial estabelecida por Neyman, a qual se representa, como vimos no item 6 22, por

$$n_i = n\, \frac{N_i\, \sigma_i}{\sum N_i\, \sigma_i}$$

De fato, sendo c_i o custo unitário no estrato i, o custo total dêsse estrato é $n_i c_i = C_i$ (V Quadro 1) O custo total da amostragem será, pois, igual à soma dos custos dos estratos, ou seja, $\sum C_i = \mathcal{C}$, mas, se todos os estratos conduzirem ao mesmo custo, teremos

$$C_1 = C_2 = C_3 = \quad = C_i = \quad = C_k$$

cuja soma é $nC = \mathcal{C}$ Portanto,

$$n_i = \frac{\mathcal{C}\, N_i\, \sigma_i}{\sqrt{c_i}\ \sum N_i\, \sigma_i \sqrt{c_i}} = \frac{n\, C\, N_i\, \sigma_i}{\sqrt{c_i}\ n \sqrt{c_i}\ \sum N_i\, \sigma_i}$$

$$\text{ou } n_i = \frac{n\, C\, N_i\, \sigma_i}{n\, c_i \sum N_i\, \sigma_i} = \frac{n\, C\, N_i\, \sigma_i}{C \sum N_i\, \sigma_i} = n\, \frac{N_i\, \sigma_i}{\sum N_i\, \sigma_i}$$

conforme havíamos dito.

Quadro 1

Estratos i	N º de elementos do estrato i n_i	Custo unitário no estrato i c_i	Custo total do estrato i C_i
1	n_1	c_1	$n_1 c_1 = C_1$
2	n_2	c_2	$n_2 c_2 = C_2$
3	n_3	c_3	$n_3 c_3 = C_3$
i	n_i	c_i	$n_i c_i = C_i$
k	n_k	c_k	$n_k c_k = C_k$
TOTAL	n	—	$\sum n_i c_i = \mathcal{C}$

Vejamos, agora, através de um exemplo numérico, a aplicação da fórmula (1), que apresentamos a seguir sob outro aspecto

$$n_i = \frac{\mathcal{C}}{\sum N_i\, \sigma_i \sqrt{c_i}} \cdot \frac{N_i\, \sigma_i}{\sqrt{c_i}} \qquad (2)$$

Sendo constante o denominador da primeira fração, representêmo-la por α; assim

$$n_i = \alpha\, \frac{N_i\, \sigma_i}{\sqrt{c_i}} \qquad (3)$$

Ora, na expressão (2) figura tanto o custo total $\mathcal{C}$, quanto a custo unitário c_i no estrato i, vamos, pois, determinar α em função apenas do custo unitário Somemos ambos os membros de (3)

$$n_i = \alpha \sum \frac{N_i\, \sigma_i}{\sqrt{c_i}} \qquad \text{ou} \qquad n = \alpha \sum \frac{N_i\, \sigma_i}{\sqrt{c_i}}$$

donde

$$\alpha = \frac{n}{\sum \frac{N_i\, \sigma_i}{\sqrt{c_i}}}$$

Substituindo o valor de α em (3), resulta

$$n_i = \frac{n}{\sum \frac{N_i\, \sigma_i}{\sqrt{c_i}}} \cdot \frac{N_i\, \sigma_i}{\sqrt{c_i}} =$$

$$= n\, \frac{1}{\sum \frac{N_i\, \sigma_i}{\sqrt{c_i}}} \cdot \frac{N_i\, \sigma_i}{\sqrt{c_i}}$$

ou, finalmente.

$$\boxed{n_i = n\, \frac{\frac{N_i\, \sigma_i}{\sqrt{c_i}}}{\sum \frac{N_i\, \sigma_i}{\sqrt{c_i}}}} \qquad (4)$$

Consideremos, para exemplificar, um universo constituído de 10 000 elementos, subdividindo em 3 estratos, e do qual desejamos extrair uma amostra de 1 000 elementos, levando em conta o custo unitário nos diversos estratos. No Quadro 2, abaixo, acham-se indicados os dados relativos a cada estrato e, bem assim, as colunas necessárias ao cálculo, já devidamente preenchidas

Quadro 2

Estratos i	Universos N_i	σ_i	Custo unitário no estrato i c_i	$\sqrt{c_i}$	$N_i \sigma_i$	$\frac{N_i \sigma_i}{\sqrt{c_i}}$	$n_i = n \frac{\frac{N_i \sigma_i}{\sqrt{c_i}}}{\Sigma \frac{N_i \sigma_i}{\sqrt{c_i}}}$
1	6 000	12	5	2,236	72 000	32 200	406
2	3 000	15	3	1,732	45 000	25 982	327
3	1 000	30	2	1,414	30 000	21 213	267
TOTAL	10 000	—	—	—	147 000	79 395	1 000

A título ilustrativo, comparemos êsses resultados com os obtidos anteriormente ao adotarmos a amostragem estratificada proporcional e a ótima, na qual não consideramos o custo das operações

Quadro 3

Comparação entre o número de elementos extraídos de cada estrato no caso de amostragem estratificada proporcional e ótima

Estratos	Proporcional	DISTRIBUIÇÃO ÓTIMA	
		Sem Considerar o Custo	Considerando o Custo
1	600	490	406
2	300	306	327
3	100	204	267
TOTAL	1 000	1 000	1 000

Observe-se que no 1.º estrato o número de elementos reduziu-se, primeiramente, de 600 para 490, devido à pequena variância dêsse estrato, e depois, de 490 para 406, em virtude do custo unitário do estrato ser relativamente alto Já no segundo e terceiro estratos, o número de elementos elevou-se, em 1.º lugar, devido a maior variância dêsses estratos e, em 2.º lugar, em face do custo relativamente pequeno que êles apresentam. Cabe, por fim, assinalar que, se considerarmos o fator custo na amostragem, obteremos resultados mais econômicos com uma precisão um pouco menor do que se desprezássemos êsse fator. Todavia, para o mesmo custo, o último tipo de amostragem fornecerá maior precisão que os anteriores

8 — SIMPLIFICAÇÃO DA FÓRMULA DA VARIÂNCIA DAS MÉDIAS NO CASO DE AMOSTRAGEM ESTRATIFICADA

No item 6 1 tivemos oportunidade de demonstrar a fórmula das variâncias das médias no caso de amostragem estratificada chegando à expressão seguinte:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{k} N_i^2 \frac{N_i - n_i}{N_i - 1} \cdot \frac{\sigma_i^2}{n_i} \quad (1)$$

Mencionamos o fato de que essa fórmula poderia ser simplificada no caso de amostragem estratificada, proporcional ou ótima, desde que substituisse n_i pelos valores correspondentes ao tipo de amostragem considerado. Vejamos, separadamente, em que consiste essa simplificação

8 1 — *Amostragem Estratificada com distribuição proporcional*

Sabemos que na amostragem proporcional o número de elementos a extrair do estrato i, em uma amostra de n elementos, é dado por

$$n_i = n \frac{N_i}{N} \quad \text{ou} \quad n_i = \frac{n}{N} N_i \quad (2)$$

Subtraindo ambos os membros de N_i, resulta

$$N_i - n_i = N_i - \frac{n}{N} N_i = N_i \left(1 - \frac{n}{N}\right) \quad (3)$$

Dividindo ambos os membros de (3) por (2), vem

$$\frac{N_i - n_i}{n_i} = \frac{N_i\left(1 - \frac{n}{N}\right)}{\frac{n}{N} N_i} \qquad (4)$$

Dividindo ambos os têrmos do 2º membro por N, e simplificando, encontramos

$$\frac{N_i - n_i}{n_i} = \frac{\left(1 - \frac{n}{N}\right) \cdot \frac{1}{N}}{\frac{n}{N} \cdot \frac{1}{N}} =$$

$$= \frac{\frac{N - n}{N^2}}{\frac{n}{N^2}} = \frac{N - n}{n} \qquad (5)$$

Se na fórmula (1) substituíssemos $N_i - 1$ por N_i, o que não afetará sensìvelmente os resultados, principalmente se N fôr grande, obteremos

$$\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{1}{N^2} \sum N_i (N_i - n_i) \frac{\sigma^2_i}{n_i} =$$

$$= \frac{1}{N^2} \sum N_i \frac{N_i - n_i}{n_i} \sigma^2_i$$

Substituindo, agoia, $\frac{N_i - n_i}{n_i}$ pelo seu valor dado em (5), vem

$$\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{1}{N^2} \sum N_i \frac{N - n}{n} \sigma^2_i$$

Passando $\frac{1}{N}$ para dentro do somatório e, ao mesmo tempo, retirando dêle a fiação $\frac{N - n}{n}$, que é constante, resulta

$$\sigma^2_{\bar{X}} \frac{1}{N} \cdot \frac{N - n}{n} \sum \frac{N_i \sigma^2_i}{N} = \frac{N - n}{Nn} \sum \frac{N_i \sigma^2_i}{N}$$

ou, finalmente $$\boxed{\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{N - n}{Nn} \cdot \frac{N_i \sigma^2_i}{\sum N_i}} \qquad (6)$$

expressão essa que fornece a variância das médias, no caso de amostragem proporcional, mais fàcilmente que com o emprêgo da fórmula (1), como mostraremos a seguii

Considere-se para êsse efeito um universo de 10 000 elementos, subdividido em 3 estratos, na conformidade do Quadro 4, e do qual desejamos conhecer a variância das médias de amostras constituídas de 1 000 elementos

Quadro 4

Estratos i	Universos N_i	σ_i	$N_i \sigma_i$	$N_i \sigma^2_i$
1	6 000	12	72 000	864 000
2	3 000	15	45 000	675 000
3	1 000	30	30 000	900 000
TOTAL	10 000	–	147 000	2 439 000

$N = 10\,000$
$n = 1\,000$

Aplicando a fórmula (6), obteiemos

$$\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{10\,000 - 1\,000}{10\,000 \times 1\,000} \cdot \frac{2\,439\,000}{10\,000} = 0{,}219\,51$$

resultado que já havíamos obtido anteriormente (V idem 6 22) com muito mais trabalho

8 2 — *Amostiagem Estratificada com distiibuição ótima*

Ao estudarmos a distribuição ótima de Neyman, vimos que o número de elementos a extrair do estrato i, em uma amostra de n elementos, era dado por

$$n_i = n \frac{N_i \sigma}{\sum N_i \sigma_i} = \frac{1}{\sum N_i \sigma_i} \cdot N_i \sigma_i n \qquad (1)$$

Sendo $\sum N_i \sigma_i$ constante, podemos fazer

$$\frac{1}{\sum N_i \sigma_i} \qquad n_i = \alpha N_i \sigma_i n$$

Substituindo n_i na fórmula geral da vaiiância das médias dada por (1), (item 8) resulta

$$\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{1}{N^2} \sum N^2_i \frac{N_i - \alpha N_i \sigma_i n}{N_i - 1} \cdot \frac{\sigma^2_i}{\alpha N_i \sigma_i n}$$

Substtuindo $N_i - 1$ por N_i e simplificando, vem

$$\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{1}{N^2} \sum (N_i - \alpha N_i \sigma_i n) \cdot \frac{N_i \sigma^2_i}{\alpha N_i \sigma_i n}$$

ou $$\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{1}{N^2} \sum \left(\frac{N_i \sigma_i}{\alpha n} - N_i \sigma^2_i\right)$$

ou $$\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{1}{N^2} \left(\frac{\sum N_i \sigma_i}{\alpha n} - \sum N_i \sigma^2_i\right) \qquad (2)$$

Mas $$\frac{\sum N_i \sigma_i}{\alpha n} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\sum N_i \sigma_i}{n}$$

Ora, $\alpha = \frac{1}{\sum N_i \sigma_i} \quad \therefore \quad \frac{1}{\alpha} = N_i \sigma_i$

Portanto,

$$\frac{\sum N_i \sigma_i}{\alpha\, n} = \sum N_i \sigma_i \cdot \frac{\sum N_i \sigma_i}{n} = \frac{(\sum N_i \sigma_i)^2}{n}$$

Substituindo o valor acima obtido em (2), resulta:

$$\sigma^2_{\bar{x}} = \left[\frac{1}{N^2}\,\frac{(\sum N_i \sigma_i^2)}{n} - \sum N_i \sigma^2_i\right]$$

ou $\sigma^2_{\bar{x}} - \frac{(\sum N_i \sigma_i)^2}{N^2 n} - \frac{1}{N^2} \sum N_i \sigma^2_i$

ou $\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{1}{n}\left(\frac{\sum N_i \sigma_i}{N}\right)^2 - \left(\frac{1}{N^2} \sum N_i \sigma^2_i\right)$

ou $\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{1}{n}\left(\frac{\sum N_i \sigma_i}{N}\right)^2 - \left(\frac{1}{N} \cdot \frac{\sum N_i \sigma^2_i}{N}\right)$

Somando e subtraindo $\frac{N-n}{Nn} \cdot \frac{\sum N_i \sigma^2_i}{N}$ ao segundo têrmo da expressão anterior, e substituindo N da segunda fração por ΣN_i, vem

$$\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{1}{n}\left(\frac{\sum N_i \sigma_i}{\sum N_i}\right)^2 + \frac{N-n}{Nn} \cdot \frac{\sum N_i \sigma^2_i}{N} - \frac{N-n}{Nn} \cdot \frac{\sum N_i \sigma^2_i}{N} - \frac{1}{N} \cdot \frac{\sum N_i \sigma^2_i}{N}$$

ou, alterando a ordem

$$\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{N-n}{Nn} \cdot \frac{\sum N_i \sigma^2_i}{N} + \frac{1}{n}\left(\frac{\sum N_i \sigma^2_i}{\sum N_i}\right)^2 - \frac{\sum N_i \sigma^2_i}{N} \cdot \frac{N-n}{Nn} - \frac{1}{N} \cdot \frac{\sum N_i \sigma^2_i}{N} \qquad (3)$$

Os dois últimos têrmos do segundo membro podem ser escritos assim

$$-\frac{\sum N_i \sigma^2_i}{N}\left(\frac{N-n}{Nn} + \frac{1}{N}\right) = -\frac{\sum N_i \sigma^2_i}{N}\left(\frac{N-n}{Nn} + \frac{n}{Nn}\right)$$

ou $-\frac{\sum N_i \sigma^2_i}{N} \cdot \frac{N}{Nn} = -\frac{\sum N_i \sigma^2_i}{Nn}$

Substituindo em (3), resulta:

$$\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{N-n}{Nn} \cdot \frac{\sum N_i \sigma^2_i}{N} + \frac{1}{n}\left(\frac{\sum N_i \sigma_i}{\sum N_i}\right)^2 - \frac{\sum N_i \sigma^2_i}{Nn}$$

ou $$\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{N-n}{Nn} \cdot \frac{\sum N_i \sigma^2_i}{N} - \left[\frac{\sum N_i \sigma^2_i}{Nn} - \frac{1}{n}\left(\frac{\sum N_i \sigma_i}{\sum N_i}\right)^2\right]$$

ou $$\sigma^2_{\bar{x}} = \underbrace{\frac{N-n}{Nn} \cdot \frac{\sum N_i \sigma^2_i}{N}}_{\text{variância das médias, no caso da distribuição proporcional}} - \frac{1}{n}\left[\underbrace{\frac{\sum N_i \sigma^2_i}{N}}_{\text{quadrado da média aritmética dos } \sigma_i} - \underbrace{\left(\frac{\sum N_i \sigma_i}{\sum N_i}\right)^2}_{\text{média quadrática dos } \sigma_i}\right]$$

ou $$\boxed{\sigma^2_{\bar{x}_{(ot)}} = \sigma^2_{\bar{x}_{(prop)}} - \frac{1}{n}\,\sigma^2_{\sigma}} \qquad (4)$$

donde se verifica que a variância das médias da distribuição ótima é menor que a variância das médias da distribuição proporcional, convindo notar, finalmente, que a expressão·

$$\boxed{\sigma^2_{\sigma} = \frac{\sum N_i \sigma^2_i}{\sum N_i} - \left(\frac{\sum N_i \sigma_i}{\sum N_i}\right)^2} \qquad (5)$$

fornece a variância dos desvios padrões σ_i dos diversos estratos.

Como aplicação, consideremos o universo de 10 000 elementos, subdividido em 3 estratos (V. Quadro 5), e do qual desejamos conhecer a variância das médias de amostras de 1 000 elementos

Quadro 5

Estratos i	Universos N_i	σ_i	$N_i \sigma_i$	$N_i \sigma^2_i$
1	6 000	12	72 000	864 000
2	3 000	15	45 000	675 000
3	1 000	30	30 000	900 000
TOTAL	10 000	—	147 000	2 439 000

N = 10 000
n = 1 000

Vimos no item 8 1, ao tratarmos do mesmo exemplo, que a variância das médias, em se adotando a amostragem estratificada proporcional, estava representada por 0,21951

Para aplicar a fórmula (4) resta, pois, calcular o valor de

$$\frac{1}{n}\sigma^2_\sigma = \frac{1}{n}\left[\frac{\Sigma N_i \sigma^2_i}{N_i} - \left(\frac{\Sigma N_i \sigma_i}{\Sigma N_i}\right)^2\right]$$

Substituindo nessa expressão, os valores consignados no Quadro 5, resulta

$$\frac{1}{n}\sigma^2_\sigma = \frac{1}{1\ 000}\left[\frac{2\ 439\ 000}{10\ 000} - \left(\frac{147\ 000}{10\ 000}\right)^2\right] = 0{,}027\ 81$$

resultado já obtido por outro caminho mais longo

Logo $\sigma^2_{\bar{x}_{(ot)}} = 0{,}219\ 51 - 0{,}027\ 81 = 0{,}191\ 71$

8 3 — *Novas expressões da variância das médias*

Consideremos novamente a expressão da variância das médias na distribuição proporcional.

$$\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{N-n}{Nn} \cdot \frac{\Sigma N_i \sigma^2_i}{\Sigma N_i} \qquad (1)$$

Ou

$$\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{N-n}{N} \cdot \frac{\dfrac{\Sigma N_i \sigma^2_i}{\Sigma N_i}}{n} \qquad (2)$$

Se nessa fórmula substituirmos o N que figura no denominador da primeira fração por $N - 1$, obteremos com sua aplicação resultados mais próximos dos valores exatos, uma vez que assim procedendo atenuaremos o êrro cometido primitivamente ao substituirmos $N_i - 1$ por N_i (V item 8) Tereros, então

$$\boxed{\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{\dfrac{\Sigma N_i \sigma^2_i}{\Sigma N_i}}{n}} \qquad (3)$$

Vimos anteriormente que a variância geral no caso de amostragem estratificada com distribuição proporcional é igual à variância interna, σ^2_I dos estratos, isto é,

$$\boxed{\frac{\Sigma N_i \sigma^2_i}{\Sigma N_i} = \sigma^2_I} \qquad (4)$$

de modo que a expressão (3) pode ser representada assim:

$$\boxed{\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{\sigma^2_I}{n}} \qquad (5)$$

Convém notar, entretanto, que essa fórmula foi deduzida para o caso de universo finito (extração sem reposição). Se o universo fôr infinito (extração com reposição), a primeira fração do segundo membro desaparece e a expressão da variância das médias se reduz a

$$\boxed{\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sigma^2_I}{n}} \qquad (6)$$

Comparando as expressões (5) e (6) com as equivalentes no caso de amostragem simples, onde $\sigma^2 = \sigma^2_I + \sigma^2_E$ vemos que, como resultado da estratificação, foi eliminada a variância externa σ^2_E

Quanto à variância das médias em amostragem estratificada com distribuição ótima, vimos que ela assim se expressava

$$\sigma^2_{\bar{x}_{(ot)}} = \sigma^2_{\bar{x}_{(prop)}} - \frac{1}{n}\sigma^2_\sigma \qquad (7)$$

Substituindo o primeiro têrmo do segundo membro pelo seu valor dado em (3), vem)

$$\sigma^2_{\bar{x}_{(ot)}} = \frac{N-n}{n} \cdot \frac{\dfrac{\Sigma N_i \sigma^2_i}{\Sigma N_i}}{n} - \frac{\sigma^2_\sigma}{n}$$

Substituindo N por $N - 1$, resulta:

$$\boxed{\sigma^2_{\bar{x}_{(ot)}} = \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{\dfrac{\Sigma N_i \sigma^2_i}{\Sigma N_i}}{n} \cdot \frac{\sigma^2_\sigma}{n}} \qquad (8)$$

ou, tendo em vista a expressão dada em (4):

$$\boxed{\sigma^2_{\bar{x}_{(ot)}} = \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{\sigma^2_I}{n} - \frac{1}{n}\sigma^2_\sigma} \qquad (9)$$

isto no caso de universo finito (extração sem reposição) Se o universo fôr infinito desaparece a primeira fração do segundo membro e a expressão anterior se reduz a

$$\boxed{\sigma^2_{\bar{x}_{(ot)}} = \frac{\sigma^2_I - \sigma^2_\sigma}{n}} \qquad (10)$$

9 — DIMENSIONAMENTO DE UMA AMOSTRA ESTRATIFICADA

Já vimos no item 5 como se determina o tamanho de uma amostra no caso de amostragem simples, com reposição e sem reposição Veremos a seguir que, em se tratando de amostragem estratificada, o problema comporta uma solução absolutamente análoga O objetivo á determinar o tamanho n da amostra de modo que haja uma probabilidade prefixada (0,95 ou 0,99, por exemplo) de que a média obtida não difira da média do universo mais do que um valor E também preestabelecido

9 1 — *Amostragem estratificada com distribuição proporcional*

9 11 — *Extração com reposição (universo infinito)*

Como sabemos, para determinar o tamanho n de uma amostra devemos ter

$$k^2 \sigma_{\bar{x}}^2 \leq E^2$$

Substituindo $\sigma_{\bar{x}}^2$ pelo seu valor dado em (6), vem

$$k^2 \frac{\sigma_I^2}{n} \leq E^2$$

$$k^2 \sigma_I^2 \leq n E^2$$

ou

$$\boxed{n \geq \frac{k^2 \sigma_I^2}{E^2}} \qquad (11)$$

9 12 — *Extração sem reposição (universo finito)*

$$k^2 \sigma_{\bar{x}}^2 \leq E^2$$

Substituindo $\sigma_{\bar{x}}^2$ pelo seu valor dado em (5), vem:

$$k^2 \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{\sigma_I^2}{n} \leq E^2$$

$$k^2 (N-n) \sigma_I^2 \leq E^2 (N-1) n$$

$$k^2 \sigma_I^2 N - k^2 \sigma_I^2 n \leq E^2 (N-1) n$$

$$k^2 \sigma_I^2 N \leq E^2 (N-1) n + k^2 \sigma_I^2 n$$

$$k^2 \sigma_I^2 N \leq n \left[E^2 (N-1) + k^2 \sigma_I^2 \right]$$

ou, finalmente:

$$\boxed{n \geq \frac{k^2 \sigma_I^2 N}{E^2 (N-1) + k^2 \sigma_I^2}} \qquad (12)$$

que para N infinito se transforma na expressão (11).

9 2 — *Amostragem Estratificada com distribuição ótima*

9 21 — *Extração com reposição (universo infinito)*

$$k^2 \sigma_{\bar{x}}^2 \leq E^2$$

Substituindo $\sigma_{\bar{x}}^2$ pelo seu valor dado em (10), vem:

$$k^2 \left(\frac{\sigma_I^2}{n} - \frac{\sigma_\sigma^2}{r} \right) \leq E^2$$

$$k^2 \frac{\sigma_I^2}{n} - k^2 \frac{\sigma_\sigma^2}{n} \leq E^2$$

$$k^2 \sigma_I^2 - k^2 \sigma_\sigma^2 \leq n E^2$$

ou

$$n \geq \frac{k^2 \sigma_I^2 - k^2 \sigma_\sigma^2}{E^2}$$

ou, finalmente

$$\boxed{n \geq \frac{k^2 (\sigma_I^2 - \sigma_\sigma^2)}{E^2}} \qquad (13)$$

9 22 — *Extração sem reposição (universo finito)*

$$k^2 \sigma_{\bar{x}}^2 \leq E^2$$

Substituindo $\sigma_{\bar{x}}^2$ pelo seu valor dado em (9), vem

$$k^2 \left(\frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{\sigma_I^2}{u} - \frac{\sigma_\sigma^2}{n} \right) \leq E^2$$

$$k^2 \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{\sigma_I^2}{n} - k^2 \frac{\sigma_\sigma^2}{n} \leq E^2$$

Multiplicando ambos os membros por $n(N-1)$, resulta:

$$k^2 (N-n) \sigma_I^2 - k^2 \sigma_\sigma^2 (N-1) \leq E^2 n (N-1)$$

$$k^2 \sigma_I^2 N - k^2 \sigma_I^2 n - k^2 \sigma_\sigma^2 (N-1) \leq E^2 n (N-1)$$

$$k^2 \sigma_I^2 N - k^2 \sigma_\sigma^2 (N-1) \leq E^2 n (N-1) + k^2 \sigma_I^2 n$$

$$k^2 \sigma_I^2 N - k^2 \sigma_\sigma^2 (N-1) \leq n \left[E^2 (N-1) + k^2 \sigma_I^2 \right]$$

ou, finalmente.

$$\boxed{n \geq \frac{k^2 \sigma_I^2 N - k^2 \sigma^2 (N-1)}{E^2 (N-1) + k^2 \sigma_I^2}} \qquad (14)$$

que para N infinito se transforma na expressão (13)

10 — APLICAÇÃO (DETERMINAÇÃO DO TAMANHO DA AMOSTRA)

A fim de familiarizar o leitor com as expressões aqui desenvolvidas, vamos aplicá-las à "distribuição do número de empregados por empregador" contida na página 282 do Relatório-Estudo do IAPI Nela se encontram indicados quantos empregadores existem com um só empregado, quantos têm dois empregados, etc., até 12 000 empregados Trata-se de um universo constituído por emprêsas bastante heterogêneas quanto ao número de empregados, que subdividimos em 6 estratos, na conformidade do Quadro 1, no qual se acham também consignados o número médio de operários em cada estrato, o desvio padrão de cada um dêles e as colunas indispensáveis à resolução do problema proposto.

Quadro 1

ESTRATOS		N.º de empregadores N_i	N.º médio de operários $\tilde{X}_i$	σ_i	$N_i\ \sigma_i$	$N_i\ \sigma_i^2$
N.º de Operários	i					
1 a 10	1	34 485	3,4	2,5	86 212,5	215 531,25
11 a 20	2	4 951	14,6	2,8	13 862,8	38 815,84
21 a 100	3	5 480	42,9	19,9	109 052,0	2 170 134,80
101 a 500	4	1 616	210,9	97,0	156 752,0	15 204 944,00
501 a 1 000	5	226	697,0	135,4	30 600,4	4 143 294,16
1 001 a 12 000	6	121	2 079,0	1 401,0	169 521,0	237 498 921,00
TOTAL		46 879	—	—	566 000,7	259 271 641,05

Média do universo: $\tilde{X} = 25{,}084$

Variância do universo: $\sigma^2 = 20\ 178{,}81$

Nosso propósito é determinar o tamanha n da amostra que deveriíamos extrair para estimar uma característica qualquer dêsse universo como, por exemplo, o número médio dos operários por emprêsa, de tal modo que em 95% dos casos as amostras não difiram da média do universo de mais de 0,5 ano para mais ou para menos Nessas condições, temos que:

$$k = 1{,}96 \quad \text{e} \quad E = 0{,}5$$

Sendo finito o universo considerado, empregaremos as fórmulas correspondentes à extração sem reposição, tanto no caso de amostragem simples, quanto no de amostragem estratificada. Examinaremos, separadamente, cada um dos casos

10 1 — *Amostragem simples*

Conforme já vimos, o tamanho da amostra, quando a extração dos elementos é feita ao acaso, é dada pela desigualdade

$$\boxed{n \geq \frac{k^2\ \sigma^2\ N}{E^2 (N-1) + k^2\ \sigma^2}}$$

No exemplo em tela, os valores conhecidos são os seguintes

$k^2 = 3{,}8416;\ \sigma^2 = 20178{,}84;\ N = 46879,\ E^2 = 0{,}25$

os quais, substituídos na expressão anterior, fornecem o valor procurado:

$$n \geq \frac{3{,}841\ 6 \times 20\ 188{,}84 \times 46\ 879}{0{,}25 \times 46\ 878 + 3{,}841\ 6 \times 20\ 178{,}84}$$

$$n = 40\ 723$$

10 2 — *Amostragem estratificada com distribuição proporcional*

Como sabemos, a expressão que fornece o tamanho de amostra no caso de amostragem proporcional em que os elementos são extraídos sem reposição (universo finito) é dada por:

$$\boxed{n \geq \frac{k^2\ \sigma_I^2\ N}{E^2 (N-1) + k^2\ \sigma_I^2}}$$

Sendo a variância interna σ_I^2 igual a (V Quadro 1)

$$\sigma_I^2 = \frac{N_i\ \sigma_i^2}{N_i} = \frac{259\ 271\ 641{,}05}{46\ 879} = 5\ 530{,}66$$

ou

$$n \geq \frac{3{,}841\ 6 \times 5\ 530{,}66 \times 46\ 879}{0{,}25 \times 46\ 878 + 3{,}841\ 6 \times 5\ 530{,}66} \quad n =$$

$$= 30\ 215$$

Assim, de cada um dos 6 estratos, extrairíamos o seguinte número de elementos

$$n_1 = 30\ 215 \times \frac{34\ 485}{46\ 879} = 22\ 226$$

$$n_2 = 30\ 215 \times \frac{4\ 951}{46\ 879} = 3\ 191$$

$$n_3 = 30\,215 \times \frac{5\,480}{46\,879} = 3\,533$$

$$n_4 = 30\,215 \times \frac{1\,616}{46\,879} = 1\,041$$

$$n_5 = 30\,215 \times \frac{226}{46\,879} = 146$$

$$n_6 = 30\,215 \times \frac{121}{46\,879} = 78$$

10 3 — *Amostragem estratificada com distribuição ótima*

Tratando-se de um universo finito (extração sem reposição), o tamanho da amostra é fornecido pela desigualdade já estudada:

$$\boxed{n \geq \frac{k^2 \sigma_I^2 N - k^2 \sigma_\sigma^2 (N-1)}{E^2 (N-1) + k^2 \sigma_I^2}}$$

Sendo σ_σ^2 dado por:

$$\sigma_\sigma^2 = \frac{\Sigma N_i \sigma_i^2}{\Sigma N_i} - \left(\frac{\Sigma N_i \sigma_i}{\Sigma N_i}\right)^2 = 5\,530{,}66 -$$

$$- \left(\frac{566\,000{,}7}{46\,879}\right)^2 = 5\,384{,}89$$

Substituindo na expressão anterior, vem:

$$n \geq \frac{3{,}841\,6 \times 5\,530{,}66 \times 46\,879 - 3\,841\,6 \times 5\,384{,}89 \times 46\,878}{0{,}25 \times 46\,878 + 3{,}841\,6 \times 5\,530{,}66}$$

$n \cong 797$

Sendo 797 o tamanho da amostra, deveriamos extrair de cada um dos estratos o número de elementos fornecidos pela expressão

$$\boxed{n_i = n \frac{N_i \sigma_i}{\Sigma N_i \sigma_i}}$$

Conforme já vimos antes.

$$n_1 = 797 \times \frac{86\,212{,}5}{566\,000{,}7} = 121$$

$$n_2 = 797 \times \frac{13\,862{,}8}{566\,000{,}7} = 20$$

$$n_3 = 797 \times \frac{109\,052{,}0}{566\,000{,}7} \quad 154$$

$$n_4 = 797 \times \frac{156\,752{,}0}{566\,000{,}7} = 221$$

$$n_5 = 797 \times \frac{30\,600{,}4}{566\,000{,}7} = 43$$

$$n_6 = 797 \times \frac{169\,521{,}0}{566\,000{,}7} = 238$$

No Quadro 2, a seguir, acham-se indicados o tamanho da amostra em cada tipo de amostragem e o número de elementos a serem extraídos de cada estrato em que subdividiu o universo

Quadro 2

Estratos i	N.	AMOSTRAGEM			Amostragem ótima corrigida
		Simples	Proporcional	Ótima	
1	34 485		22 226	121	146
2	4 951		3 191	20	24
3	5 480		3 533	154	186
4	1 616		1 041	221	268
5	226		146	43	52
6	121		78	238	121
TOTAL	46 879	40 722	30 215	797	797

Como se verifica, o número de elementos a extrair do último estrato, no caso de ser adotada a amostragem estratificada com distribuição ótima, é superior ao número de empregadores que o compõem. Nesse caso, costuma-se tomar o estrato integral e distribuir proporcionalmente pelos outros estratos a diferença entre o valor obtido e o universo (238 — 121 = 117) Dividindo 117 proporcionalmente aos 5 estratos (penúltima coluna do Quadro 2) os resultados seriam, respectivamente: 25, 4, 32, 48 e 9, os quais, somados aos valores anteriores, dariam: 146, 24, 186, 268, 52 e 121.

Observe-se que na amostragem simples, tendo em vista as condições estabelecidas, o número de elementos a extrair do universo considerado eleva-se a cêrca de 87% do mesmo, ao passo que com a distribuição proporcional êsse número se reduz a 65%, aproximadamente. Na amostragem estratificada com distribuição ótima, o tamanho da amostra não chegaria a atingir a 2% do tamanho do universo. Esta redução considerável que se verifica de um tipo de amostragem para outro, encontra explicação no fato de as médias $\tilde{X}_i$ (V Quadro 1) apresentarem grande variabilidade e, bem assim, os desvios padrões σ_i; conseqüentemente, a variância externa (de um estrato para outro) é muito grande Ora, a variância total, em se tratando de amostragem simples, é, como sabemos, igual à variância interna σ_I^2 mais a variância externa σ_E^2, ou, em símbolos·

$$\sigma^2 = \sigma_I^2 + \sigma_E^2$$

daí o tamanho da amostra ser bastante elevado Na amostragem estratificada com distribuição proporcional, a variância total fica reduzida sòmente à variância interna σ_I^2, pois, conforme já vimos, a estratificação elimina completamente a variância externa σ_E^2 O tamanho da amostra, com a eliminação de uma das causas de variabilidade, sofre por isso uma redução sensível em relação à amostragem simples Na amostragem estratificada com distribuição ótima, além de ficar eliminada a variância externa σ_E^2, desaparece também a variância dos desvios padrões, conforme mostramos anteriormente Sendo, no exemplo em causa, muito grande a variância dos desvios padrões, resulta que a variância total se reduz consideràvelmente, o que conduz a um tamanho de amostra ínfimo em relação ao obtido para os demais tipos de amostragem Observe-se que a maior redução se verifica no estrato 1, onde a variância interna é pequena, o último estrato, ao contrário, fica aumentado na amostragem ótima, por ser êle o de maior variância

APÊNDICE

Variâncias das médias

Tipos de amostragem	EXTRAÇÕES	
	Com reposição	Sem reposição
Simples	$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$	$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{\sigma^2}{n}$
Estratificada com distribuição proporcional	$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma_I^2}{n}$	$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{\sigma_I^2}{n}$
Estratificada com distribuição ótima	$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma_I^2 - \sigma_\sigma^2}{n}$	$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{\sigma_I^2}{n} - \frac{\sigma_\sigma}{n}$

Tamanho da amostra

Tipos de amostragem	EXTRAÇÕES	
	Com reposição	Sem reposição
Simples	$n \geq \frac{k^2 \sigma^2}{E^2}$	$n \geq \frac{k^2 \sigma^2 N}{E^2 (N-1) + k^2 \sigma^2}$
Estratificada com distribuição proporcional	$n \geq \frac{k^2 \sigma_I^2}{E^2}$	$n \geq \frac{k^2 \sigma_I^2 N}{E^2 (N-1) + k^2 \sigma_I^2}$
Estratificada com distribuição ótima	$n \geq \frac{k^2 \left(\sigma_I^2 - \sigma_\sigma^2\right)}{E^2}$	$n \geq \frac{k^2 \sigma_I^2 N - k^2 \sigma_I^2 (N-1)}{E^2 (N-1) + k^2 \sigma_I^2}$

$$\sigma_I^2 = \frac{\Sigma N_i \sigma_i^2}{\Sigma N_i}$$

$$\sigma_\sigma^2 = \frac{\Sigma N_i \sigma_i^2}{\Sigma N_i} - \left(\frac{\Sigma N_i \sigma_i^2}{\Sigma N_i}\right)$$

EXPORTAÇÃO

Um país latino-americano comprou ao Brasil, em 1965, mais de 100 milhões de dólares de mercadorias, três outros importaram acima de 10 milhões e cinco nos fizeram compras entre 1 e 10 milhões de dólares As importações dos restantes se situaram abaixo de um milhão de dólares A Argentina, que é o país latino-americano que mais nos vende, importou do Brasil 140,9 milhões de dólares em 1965, nessa corrente, extremamente diversificada, predominaram as matérias-primas (49,9 milhões), gêneros alimentícios e bebidas (39,8 milhões) e manufaturas em geral Individualmente, os principais produtos brasileiros importados pela Argentina, nesse ano, foram tábuas de pinho (29,5 milhões), café em grão (21,7 milhões), barras de ferro e aço (9,9 milhões), chapas de ferro e aço (8,2 milhões), minério de ferro (7,5 milhões) e banana (5,2 milhões) Outros itens de pêso são as chapas de aço, cacau, erva-mate, pneumáticos e tecidos de juta As importações feitas pelo Chile, também muito diversificadas, somaram 19,1 milhões de dólares em 1965, preponderaram os gêneros alimentícios, principalmente café (7,2 milhões), açúcar (2,6 milhões) e erva-mate (2,2 milhões), num total de 13,6 milhões de dólares O Peru comprou ao Brasil 11,9 milhões e o Uruguai 11,1 milhões; o arroz (8,4 milhões de dólares) foi o principal item das aquisições peruanas ao nosso país e a erva-mate, o pinho e o açúcar, das uruguaianas Importações do Brasil superiores a um milhão de dólares foram feitas pela Venezuela (3,1 milhões), Colômbia (2,8 milhões), Paraguai (2,2 milhões) e Bolívia (1,2 milhões) As compras do México somaram 9,1 milhões de dólares, sobretudo de maquinaria e veículos (3,8 milhões no item de embarcações), elastômeros (1,7 milhões) e gêneros alimentícios (750 mil dólares).

PESCA DA BALEIA

Embora não se coloque entre os grandes países baleeiros (Noruega, Reino Unido, Japão, Alemanha Ocidental, África do Sul), o Brasil apresenta resultados expressivos na pesca da baleia. Em algumas temporadas, o número de animais caçados atingiu mais de meio milhar, tendo mesmo — no ano baleeiro de 1960/61 — atingido nada menos de 1 083. Em 1959/60 foram capturadas 813 baleias, em 1961/62, 756, nas duas temporadas mais recentes, 1962/63 e 1963/64, o número diminuiu para 404 e 260, respectivamente. Na América do Sul, dois países figuram com resultados bastante avultados: o Peru, que entre 1958 e 1963 apontou mais de 3 000 baleias por ano (2.066 em 1963/64) e o Chile, que vinha mantendo seu quantitativo acima de 2 000 baleias e o viu reduzido para pouco mais de 1 500 em 1962/63 e 1963/64 Cabe notar que até 1960 a Argentina esteve presente nos quadros baleeiros como bom produtor (1 860 em 1957/58 e pouco menos de 1 000 nas duas temporadas subseqüentes), mas deixou de figurar nos últimos anos. De conformidade com os levantamentos da FAO, o total de baleias capturadas (incluídas tôdas as espécies) se mantém anualmente acima de 60 000, com o auge de 66 090 em 1961/62 e o mínimo de 63 001 em 1963/64 A principal espécie caçada é o cachalote. Dados relativos ao ano de 1964, situavam na Paraíba um aproveitamento de produtos e subprodutos baleeiros da ordem de meio bilhão de cruzeiros: 800 toneladas de xarque (carne de baleia salgada), 720 toneladas de óleo, 220 de carne de baleia congelada, 210 de adubos, 160 de farinha de ossos e 12 de barbatanas

CIMENTO

O Brasil encontra-se entre os países que produzem mais de 100 mil toneladas de cimento por mês Estamos com uma produção anual superior a 5 milhões de toneladas Desde 1962 que o quantitativo mensal de cimento produzido pelo Brasil ultrapassa a casa das 400 mil toneladas Numerosos outros países produzem cimento em grande quantidade, destacando-se os Estados Unidos, com a média mensal da ordem de 5 milhões de toneladas (as estatísticas de cimento norte-americanas só se referem às entregas), e a URSS, que entre 1959 e 1965 teve sua produção aumentada de 3 232 mil para 6 033 mil toneladas mensais Cinco outros produtores de vulto são a Alemanha Ocidental (média mensal, em 1965, de 2 843 mil toneladas), Japão (2.724 mil toneladas), França (1 882 mil toneladas), Itália (1.686 mil t) e Reino

Unido (1 414 mil t) No grupo intermediário (países que produzem entre 500 mil e 1 milhão de toneladas de cimento por mês), surgem a Índia (884 mil t em 1965), a Espanha (829 mil t), Polônia (798 mil t), Canadá (638 mil t) e Alemanha Oriental (507 mil t) O Brasil figura no terceiro grupo, ainda abaixo da Bélgica e da Tchecoslováquia, mas acima de todos os países americanos, exceto os Estados Unidos e o Canadá. O México está produzindo 367 mil toneladas mensais, a Argentina, 275 mil toneladas, os demais menos de 200 mil toneladas por mês Entre 1950 e 1965, a produção de cimento no Brasil (tipo Portland comum) viu aumentado de quatro vêzes o seu volume Pode-se, no entanto, observar que, se a produção triplicou entre 1950 e 1960, entre 1961 e 1965 permaneceu mais ou menos estacionária, especialmente nos dois últimos anos do período Acredita-se que dentro de três anos o Brasil poderá estar produzindo 7 milhões de toneladas por ano, se a nova política habitacional exercer a esperada pressão no consumo e as fábricas puderem equipar-se para atender ao incremento da demanda

PRODUÇÃO DE CAL

A produção nacional de cal em 1965 — revelam as estimativas — situou-se em tôrno de 1,220 mil toneladas, no valor de 24,8 bilhões de cruzeiros Nossa produção acha-se concentrada nas Regiões Sul e Leste, notadamente nos Estados de São Paulo, Minas Gerais, Rio de Janeiro e, em menor escala, na Bahia, Paraná e Rio Grande do Sul, uma vez que Ceará e Pernambuco, os dois maiores produtores do Nordeste, figuram, no conjunto nacional com parcelas relativamente insignificantes Os dados apresentados referem-se à cal virgem e extinta ou hidratada, cujas matérias-primas empregadas são pedras calcáreas e conchas de mariscos Em 1965, a Região Sul teve sua produção estimada em perto de 543 mil toneladas, valendo aproximadamente 11,5 bilhões de cruzeiros, ou 46,4% do valor total. São Paulo é responsável por 368 mil toneladas, no valor de 8,5 bilhões (34,3%). Ainda na Região Sul dois Estados — Paraná e Rio Grande do Sul — apresentam contribuição de certo destaque A produção paranaense foi da ordem de 101 mil toneladas, no valor de 1,6 bilhões (6,6%), e a do Rio Grande do Sul, de 65 mil toneladas, valendo mais de 1,2 bilhões (5%). Na Região Leste, Minas Gerais e Estado do Rio figuram, respectivamente, com os totais de 234 mil e 116 mil toneladas O valor da produção mineira andou à volta de 4,9 bilhões (19,6%), enquanto a fluminense se aproximou da casa de 3,6 bilhões (14,5%). A produção baiana, por sua vez, alcançou 106 mil toneladas (1,7 bilhões de cruzeiros, ou 6,9%) Na Região Nordeste, apenas dois Estados — Ceará e Pernambuco — apresentam quantitativos merecedores de registro A primeira daquelas Unidades, produziu, em 1965, mais de 77 mil toneladas, no valor de 822,7 milhões de cruzeiros (3,3%), enquanto a produção de Pernambuco, embora em nível mais modesto — 52 mil toneladas—, atingiu a casa de 929,5 milhões de cruzeiros, representando 3,7% do valor total da produção nacional em 1965. No conjunto, a participação da Região foi de 10,1% É inexpressiva a contribuição das Regiões Centro-Oeste e Norte No ano findo, a participação dessas Regiões está expressa em 504,8 milhões (2%) e 39,7 milhões (0,2%), respectivamente

PRODUÇÃO DE MANTEIGA

Manteve-se estacionária a produção nacional de manteiga no biênio 1964/65. Estimativas indicam que a produção anual no período foi da ordem de 25 mil toneladas, atingindo o valor de 38,5 bilhões de cruzeiros em 1965 Minas Gerais é responsável poi mais da metade da manteiga produzida no País. Em 1965, a manteiga de procedência mineira somou cêrca de 13 mil toneladas, representando 52,8 do total geral, valendo quase 20,3 bilhões de cruzeiros Com substanciais parcelas também figuram os Estados de São Paulo e Goiás A produção do Estado bandeirante no referido ano atingiu perto de 3,7 mil toneladas (14,9%), ou 5,9 bilhões de cruzeiros, seguido de perto pelo Estado de Goiás — 3,2 mil toneladas (13%) —, representando cêrca de 5 bilhões de cruzeiros. Foi igualmente expressiva a participação do Rio Grande do Sul e do Estado do Rio, o Estado sulista teve uma produção estimada em tôrno de 1.200 toneladas (4,8% do total), no valor de mais de 1,8 bilhões de cruzeiros, ao passo que o Estado do Rio figurou com um quantitativo de 1 056 toneladas, ou 1,6 bilhões de cruzeiros. Na faixa de 600 a 900 toneladas assinalaram-se dois Estados — Guanabara, com 842 t (3,4%), valendo 1,3 bilhões, e Bahia, com 613 t (2,5%), ou 889 milhões de cruzeiros Com produção em menor escala aparecem Santa Catarina — 428 t —, Paraná — 204 t —, Pernambuco — 187 t —, Espírito Santo — 173 t — e Mato Grosso — 85 t

VESTUÁRIO E TECIDOS

A indústria têxtil brasileira produziu em 1965 mais de 290 milhões de metros de tecidos De conformidade com as apurações que representam cêrca de 80% da indústria nacional, as fábricas produziram 196 426 806 metros de tecidos de algodão (65 produtores informantes), 16 757 735 metros de tecidos de lã (46 informantes) e 82.480 894 metros de tecidos de fios artificiais (82 informantes) Nesses totais estão compreendidas as fábricas que alteraram sua linha de produção em 1965, passando a trabalhar com outros tipos de fios É interessante observar que o mesmo órgão apurou em 1965 a produção de itens específicos do vestuário, como sejam camisas, ternos e calçados. A produção de camisas para homens, exclusive blusões, em 108 fábricas representativas, foi de 9 794.531 unidades e a de ternos e costumes masculinos, inclusive peças avulsas, foi de 2 265 778 unidades, informando 33 fábricas. A produção de calçados foi superior a 18 milhões de pares: 10 771 427 pares de calçados para homens (128 fábricas informantes) e 7 661.547 pares de calçados para senhoras (87 fábricas informantes)

RESOLUÇÕES DA JEC

RESOLUÇÃO JEC-884, DE 7 DE OUTUBRO DE 1966

Abre Crédito Especial de Cr$ 360 000 000 para atender a aquisição da loja, subloja e sobreloja do Edifício Nobel, na Avenida Franklin Roosevelt, 146-A

A JUNTA EXECUTIVA CENTRAL DO CONSELHO NACIONAL DE ESTATÍSTICA, usando das suas atribuições, e

considerando a conveniência de manter os Serviços da Biblioteca e Intercâmbio, da Diretoria de Divulgação e Documentação no local em que se encontram,

considerando que, em vista das dificuldades que seriam criadas para a instalação dos referidos Serviços em outro local, se tornou aconselhável a aquisição do imóvel,

considerando justo o preço — Cr$ 335 379 500 — indicado no parecer do Grupo Especial de Trabalho com base no laudo da comissão avaliadora;

considerando que o proprietário declarou aceitar o preço resultante do referido laudo de avaliação,

considerando a necessidade de se prever recursos destinados a atender as despesas decorrente da aquisição,

considerando, finalmente. não consignar o orçamento vigente do Conselho Nacional de Estatística dotação específica para aquisição de imóveis,

RESOLVE

Artigo único — Fica aberto pela Secretaria-Geral do Conselho Nacional de Estatística, mediante destaque dos recursos existentes na conta "Convênios Nacionais de Estatística Municipal", o crédito especial de Cr$ 360 000 000 (trezentos e sessenta milhões de cruzeiros), destinado à aquisição da loja, sobreloja e subloja, do Edifício Nobel, na Avenida Franklin Roosevelt, 146-A, no Estado da Guanabara, e demais despesas decorrente da aquisição

RESOLUÇÃO JEC-885, DE 19 DE OUTUBRO DE 1966

Autoriza destaques e suplementações no orçamento do Conselho Nacional de Estatística — tabelas explicativas da Secretaria-Geral do CNE e Inspetorias Regionais de Estatística Municipal

A JUNTA EXECUTIVA CENTRAL DO CONSELHO NACIONAL DE ESTATÍSTICA, usando das suas atribuições, e

considerando que os planos de trabalho do Conselho Nacional de Estatística, para o término do corrente exercício, impõem o refôrço de algumas das verbas integrantes das tabelas explicativas do orçamento, tanto da Secretaria-Geral como das Inspetorias Regionais, a que se refere a RES. JEC-868, de 29-12-1965;

considerando que o refôrço necessário às verbas com insuficiência de recursos orçamentários poderá ser efetivado mediante destaques de recursos existentes em outras verbas,

considerando, finalmente, as providências encarecidas pelo Serviço Econômico e Financeiro da Secretaria-Geral do CNE, através da proposição constante do prot. nº 12 246/66,

RESOLVE:

Artigo único — Ficam autorizados os destaques e suplementações das verbas a seguir especificadas, no montante de Cr$ 1 094 120 000 (Hum bilhão, noventa e quatro milhões, cento e vinte mil cruzeiros), mediante transferência dos recursos próprios, consignados nas tabelas explicativas da Secretaria-Geral e das Inspetorias Regionais de Estatística Municipal, do orçamento de 1966:

DESTAQUES

VERBA 3 0 0 0 — DESPESAS CORRENTES

3 1 0 0 — DESPESAS DE CUSTEIO

3 1 1 0 — PESSOAL

3 1 1 1 — PESSOAL CIVIL

		Cr$	Cr$
3 1 1 1 01 00 —	VENCIMENTOS E VANTAGENS FIXAS		
3 1 1 1 01 01 —	Vencimentos:		
	Secretaria-Geral do CNE	32 000 000	
	Inspetorias Regionais de Estatística	164 320 000	196 320 000
3 1 1 1 01 05 —	Gratificação de função.		
	Secretaria-Geral do CNE	124 000 000	
	Inspetorias Regionais de Estatística	52 520 000	176 520 000
3 1 1 1 01 10 —	Gratificação de Raios X:		
	Inspetorias Regionais de Estatística		1 800 000
3 1 1 1 01 12 —	Gratificação especial para complementação do salário-mínimo		
	Secretaria-Geral do CNE	27 000 000	
	Inspetorias Regionais de Estatística	49 550 000	76 550 000
3 1 1 1 02 00 —	DESPESAS VARIÁVEIS COM PESSOAL CIVIL:		
3 1 1 1 02 02 —	Diárias:		
	Secretaria-Geral do CNE	4 000 000	
	Inspetorias Regionais de Estatística	12 600 000	16 600 000
3 1 1 1 02 03 —	Substituições:		
	Inspetorias Regionais de Estatística		5 760 000
3 1 1 1 02 04 —	Gratificação pela prestação de serviço extraordinário		
	Inspetorias Regionais de Estatística		2 300 000
3 1 1 1 02 05 —	Gratificação pela representação de gabinete:		
	Inspetorias Regionais de Estatística		660.000
3 1 1 1 02 06 —	Gratificação pelos encargos de seleção e aperfeiçoamento de pessoal		
	Secretaria-Geral do CNE		3 000 000
3 1 1 1 02 11 —	Salário de pessoal temporário		
	Secretaria-Geral do CNE		8 000 000
3 1 1 1 02 12 —	Diversos:		
	01 — Gratificação pela execução de trabalho técnico ou científico:		
	Secretaria-Geral do CNE		1 000 000

3 1 2 0 — MATERIAL DE CONSUMO

		Cr$	Cr$
3 1 2 02 00 —	Impressos, artigos de expediente, desenho, cartografia, geodésia, topografia e ensino		
	Secretaria-Geral do CNE	10 000 000	
	Inspetorias Regionais de Estatística	51 600 000	61 600 000
3 1 2 03 00 —	Artigos de higiene, conservação, acondicionamento e embalagem		
	Inspetorias Regionais de Estatística		10 600 000
3 1 2 04 00 —	Combustíveis e lubrificantes		
	Inspetorias Regionais de Estatística		7 700 000
3 1 2 05 00 —	Materiais e acessórios de máquinas, de viaturas, de aparelhos, de instrumentos e de móveis		
	Inspetorias Regionais de Estatística		9 000 000
3 1 2 10 00 —	Matérias primas e produtos manufaturados ou semimanufaturados destinados a transformação, material para conservação de bens imóveis		
	Secretaria-Geral do CNE	30 000 000	
	Inspetorias Regionais de Estatística	58 500 000	88 500 000
3 1 2 11 00 —	Produtos químicos, biológicos, farmacêutico e odontológico, vidraçaria, artigos cirúrgicos e outros de laboratório, enfermaria, gabinetes técnicos ou cientfíficos		
	Inspetorias Regionais de Estatística		770 000
3 1 2 13 00 —	Vestuários, uniformes, artigos para esportes, jogos e divertimentos infantis, seus equipamentos e respectivos acessórios, calçados, roupa de cama e mesa, copa, cosinha e banho:		
	Secretaria-Geral do CNE	14 000 000	
	Inspetorias Regionais de Estatística	31 540 000	45 540 000
3 1 2 14 00 —	Material para fotografia, filmagem, radiografia, gravação, radiofonia e telecomunicações		
	Secretaria-Geral do CNE	6 000 000	
	Inspetorias Regionais de Estatística	4 820 000	10 820 000

		Cr$	Cr$
3.1.2 17.00 —	Outros materiais de consumo:		
	02 — Instrumentos de coleta e material de registro, contrôle e apuração estatística:		
	Secretaria-Geral do CNE		5 000 000
3.1.3 0 —	SERVIÇOS DE TERCEIROS		
3 1 3 01.00 —	Acondicionamento e transporte de encomendas, cargas e animais:		
	Inspetorias Regionais de Estatística		8.960 000
3 1 3.02 00 —	Passagens, transportes de pessoas e de suas bagagens, pedágios:		
	Secretaria-Geral do CNE	15 000 000	
	Inspetorias Regionais de Estatística	25.200.000	40.200 000
3 1 3.03 00 —	Assinatura de jornais e de recortes de publicações periódicas:		
	Inspetorias Regionais de Estatística		60 000
3 1.3 05 00 —	Serviços de asseio e higiene, taxas de água, esgôto, lixo e outras correlatas:		
	Inspetorias Regionais de Estatística		100 000
3.1.3.06 00 —	Reparos, adaptações e conservação de taxas móveis e imóveis:		
	Inspetorias Regionais de Estatística .		1 000 000
3.1 3.07.00 —	Serviços de divulgação, de impressão e de encadernação:		
	Secretaria-Geral do CNE	90.000 000	
	Inspetorias Regionais de Estatística	6.200.000	96 200 000
3 1 3 08 00 —	Serviços médicos, hospitalares, funerários e judiciários:		
	Inspetorias Regionais de Estatística		1.700.000
3 1.3 09 00 —	Serviço de comunicação em geral:		
	Inspetorias Regionais de Estatística		5.600.000
3.1 3 10 00 —	Locação de bens móveis e imóveis; tributos e despesas de condomínio:		
	Inspetorias Regionais de Estatística		5.120 000
3.1 3 11.00 —	Seguros em geral:		
	Inspetorias Regionais de Estatística		10 000 000

		Cr$	Cr$
3.1.3.16 00 —	Outros serviços de terceiros:		
	02 — Serviços bancários:		
	Inspetorias Regionais de Estatística		3 000 000
	07 — Serviços e tarefas de caráter temporário, esporádicos e de urgência:		
	Secretaria-Geral do CNE	18 000.000	
	Inspetorias Regionais de Estatística .	950.000	18 950 000
	3 1 4 0 — ENCARGOS DIVERSOS		
3 1 4 04 00 —	Festividades, recepções, hospedagens e homenagens		
	Inspetorias Regionais de Estatística		100 000
3 1 4 10 00 —	Assistência social		
	Secretaria-Geral do CNE	2 000 000	
	Inspetorias Regionais de Estatística	100 000	2 100 000
3 1 4 13 00 —	Outros encargos:		
	07 — Impressão de "Sêlo de Estatística" e de "Livro de Registro de Estatística":		
	Secretaria-Geral do CNE		60 000 000
	08 — Devolução da "Quota de Estatística":		
	Inspetorias Regionais de Estatística		3 010 000
	09 — Aluguel do equipamento mecânico:		
	Secretaria-Geral do CNE		10 000 000
	12 — Diversos:		
	Inspetorias Regionais de Estatística .		50 000
	Total da consignação — 3 1 0 0		994 190 000
	3 2 0 0 — TRANSFERÊNCIAS CORRENTES		
	3 2 3 0 — INATIVOS		
	3 2 3 01 00 — PESSOAL CIVIL		
3 2 3 01 01 —	Proventos:		
	Inspetorias Regionais de Estatística		4 160 000
3 2 3 01 03 —	Abono provisório e novas aposentadorias:		
	Inspetorias Regionais de Estatística		2 400.000
	3 2 4 0 — PENSIONISTAS		
3 2 4 01 00 —	Pensões vitalícias:		
	Inspetorias Regionais de Estatística .		42 920 000
3 2 4 02 00 —	Abono provisório e novas pensões:		
	Inspetorias Regionais de Estatística		2 640.000

	Cr$	Cr$
3 2 5 0 — SALÁRIO-FAMÍLIA		
3 2 5 03 00 — Inativos civis: Inspetorias Regionais de Estatística		17 000 000
3 2 5 05 00 — Pensionistas: Inspetorias Regionais de Estatística		7 780 000
VERBA 4 0 0 0 — DESPESAS DE CAPITAL		
4 1 0 0 — INVESTIMENTOS		
4 1 1 0 — OBRAS PÚBLICAS		
4 1 1 3 — Prosseguimento e conclusão de obras: Inspetorias Regionais de Estatística		4 000 000
4 1 3 0 — EQUIPAMENTOS E INSTALAÇÕES		
4 1 3 1 — Máquinas, motores e aparelhos Inspetorias Regionais de Estatística		1 000 000
4 1 4 0 — MATERIAL PERMANENTE		
4 1 4 02 00 — Material bibliográfico, discotecas e filmotecas, objetos históricos, obras de arte e peças para museus: Inspetorias Regionais de Estatística		570 000
4 1 4 03 00 — Ferramentas e utensílios de oficinas Inspetorias Regionais de Estatística		24 000
4 1 4 04 00 — Material artístico e instrumentos de música; insígnias, flâmulas e bandeiras, artigos para esportes e para jogos e divertimentos infantis Inspetorias Regionais de Estatística		30 000
4 1 4 06 00 — Veículos de tração pessoal e animais: Inspetorias Regionais de Estatística		750 000
4 1 4 07 00 — Modêlos e utensílios de escritórios, biblioteca, ensino, laboratório e gabinete técnico ou científico Inspetorias Regionais de Estatística		36 000
4 1 4 08 00 — Mobiliário em geral		
Secretaria-Geral do CNE	10 000 000	
Inspetorias Regionais de Estatística .	6 440 000	16 440 000

		Cr$	Cr$
4 1 4 11 00 —	Outros materiais de uso duradouro		
	Inspetorias Regionais de Estatística		180 000
	TOTAL DA VERBA — 4 0 0 0		23 030 000
	TOTAL DOS DESTAQUES		1 094 120 000

SUPLEMENTAÇÕES

VERBA 3 0 0 0 — DESPESAS CORRENTES
3 1 0 0 — DESPESAS DE CUSTEIO
3 1 1 0 — PESSOAL
3 1 1 1 — PESSOAL CIVIL

		Cr$	Cr$
3 1 1 1 01 00 —	VENCIMENTOS E VANTAGENS FIXAS:		
3 1 1 1 01 01 —	Vencimentos		
	Inspetorias Regionais de Estatística		30 000 000
3 1 1 1 01 04 —	Auxílio para diferença de "Caixa"		
	Secretaria-Geral do CNE	3 000 000	
	Inspetorias Regionais de Estatística	12 550 000	15 550 000
3 1 1 1 01 05 —	Gratificação de função:		
	Inspetorias Regionais de Estatística		5 000 000
3 1 1 1 01 08 —	Gratificação adicional por tempo de serviço		
	Secretaria-Geral do CNE	145 000 000	
	Inspetorias Regionais de Estatística	73 600 000	218 600 000
3 1 1 1 02 00 —	DESPESAS VARIÁVEIS COM O PESSOAL		
3 1 1 1 02 01 —	Ajuda de custo		
	Inspetorias Regionais de Estatística		7 800 000
3 1 1 1 02 02 —	Diárias		
	Inspetorias Regionais de Estatística		19 800 000
3 1 1 1 02 03 —	Substituições:		
	Inspetorias Regionais de Estatística		6 000 000
3 1 1 1 02 04 —	Gratificação pela prestação de serviço extraordinário		
	Secretaria-Geral do CNE		50 000 000
3 1 1 1 02 05 —	Gratificação pela representação de gabinete		
	Secretaria-Geral do CNE		1 000 000
3 1 2 0 —	MATERIAL DE CONSUMO		
3 1 2 03 00 —	Artigos de higiene, conservação, acondicionamento e embalagem:		
	Secretaria-Geral do CNE		5 000 000
3 1 2 05 00 —	Material e acessórios de máquinas, de viaturas, de aparelhos, de instrumentos e de móveis:		
	Inspetorias Regionais de Estatística		5 600 000

		Cr$	Cr$
3 1.2.10 00 —	Matérias primas e produtos manufaturados ou semimanufaturados, destinados à transformações; material para conservação de bens imóveis:		
	Inspetorias Regionais de Estatística . .		1 000 000
3 1 3 0 —	SERVIÇOS DE TERCEIROS		
3 1 3 01 00 —	Acondicionamento e transporte de encomendas, cargas e animais:		
	Inspetorias Regionais de Estatística		1 500 000
3 1 3 02 00 —	Passagens, transportes de pessoas e de suas bagagens, pedágios		
	Inspetorias Regionais de Estatística		8 000 000
3 1 3 03 00 —	Assinaturas de jornais e de recortes de publicações períodicas		
	Inspetorias Regionais de Estatística		800 000
3 1 3 04 00 —	Iluminação, fôrça motriz e gás:		
	Inspetorias Regionais de Estatística		1 000 000
3 1 3 05 00 —	Serviços de asseio e higiene, taxas de água, esgôto, lixo e outras correlatas		
	Secretaria-Geral do CNE	11 500 000	
	Inspetorias Regionais de Estatística	12 050 000	23 550 000
3 1 3 06 00 —	Reparos, adaptações e conservação de bens móveis e imóveis:		
	Inspetorias Regionais de Estatística		31 700 000
3 1 3 07 00 —	Serviços de divulgação, de impressão e de encadernação:		
	Inspetorias Regionais de Estatística		300 000
3 1 3 09 00 —	Serviços de comunicação em geral·		
	Secretaria-Geral do CNE	11 000 000	
	Inspetorias Regionais de Estatística	6 000 000	17 000 000
3 1 3 10 00 —	Locação de bens móveis e imóveis; tributos e despesas de condomínio		
	Secretaria-Geral do CNE	36 500 000	
	Inspetorias Regionais de Estatística	17 500 000	54 000 000

		Cr$	Cr$
3 1 3 16 00 —	Outros serviços de terceiros:		
	02 — Serviços bancários: Inspetorias Regionais de Estatística		3 300 000
	07 — Serviços e tarefas de caráter temporário, esporádicos e de urgência: Inspetorias Regionais de Estatística		2 600 000
	3 1 4 0 — ENCARGOS DIVERSOS		
	3 1 4 0 — ENCARGOS DIVERSOS		
3 1 4 08 00 —	Exposições, congressos e conferências Secretaria-Geral do CNE		5.000 000
3 1 4 13 00 —	Outros encargos:		
	02 — Assembléia-Geral do CNE Secretaria-Geral do CNE		4 000 000
	04 — Quotas de presença em reuniões: Secretaria-Geral do CNE		11 000 000
	06 — Comissões e indenização de despesas pela arrecadação e fiscalização da "Quota de Estatística" e coleta de dados estatísticos		
	Secretaria-Geral do CNE	6 000 000	
	Inspetorias Regionais de Estatística	97 700 000	103 700 000
	08 — Devolução da "Quota" de Estatística" Inspetorias Regionais de Estatística		5 000 000
	12 — Diversos·		
	Secretaria-Geral do CNE	1 500 000	
	Inspetorias Regionais de Estatística	390 000	1 890 000
	TOTAL DA CONSIGNAÇÃO — 3 1 0 0		639 690 000
3 2 0 0 —	TRANSFERÊNCIAS CORRENTES		
	3 2 3 0 — INATIVOS		
3 2 3 01 00 —	PESSOAL CIVIL		
3 2 3 01 01 —	PROVENTOS:		
	Secretaria-Geral do CNE	36 000 000	
	Inspetorias Regionais de Estatística	62 260 000	98 260 000
3.2 3 01 02 —	Vantagens incorporadas		
	Secretaria-Geral do CNE	12 000 000	
	Inspetorias Regionais de Estatística	17 580 000	29 580 000
3 2 3 01 03 —	Abono provisório e novas aposentadorias:		
	Secretaria-Geral do CNE	25 000 000	
	Inspetorias Regionais de Estatística	1 500 000	26 500 000

	Cr$	Cr$
3 2 4 0 — PENSIONISTAS		
3 2 4 01 00 — Pensões Vitalícias: Inspetorias Regionais de Estatística		240.000
3 2 5 0 — SALÁRIO-FAMÍLIA		
Inspetorias Regionais de Estatística .		132 740 000
3 2 5 03 00 — Inativos civis: Inspetorias Regionais de Estatística		27.880 000
3 2 5 05 00 — Pensionistas:		
Secretaria-Geral do CNE	500 000	
Inspetorias Regionais de Estatística	16 700 000	17 200 000
3 2 9 5 — DIVERSAS TRANSFERÊNCIAS CORRENTES		
3 2 9 5 — Pessoal 1) Auxílio doença Inspetorias Regionais de Estatística		4 000 000
TOTAL DA CONSIGNAÇÃO — 3 2 0 0		336 400 000
TOTAL DA VERBA — 3 0 0 0		976 090 000

VERBA 4 0 0 0 — DESPESAS DE CAPITAL

4 1 0 0 — INVESTIMENTOS		
4 1 1 0 — OBRAS PÚBLICAS		
4 1 1 3 — Prosseguimento e conclusão de obras Inspetorias Regionais de Estatística		3 600 000
4 1 3 0 — EQUIPAMENTOS E INSTALAÇÕES		
4 1 3 1 — Máquinas, motores e aparelhos:		
Secretaria-Geral do CNE	20 000 000	
Inspetorias Regionais de Estatística	7 550 000	27 550 000
4 1 3 4 — Automóveis, autocaminhões e autoveículos de tração mecânica: Secretaria-Geral do CNE		80 000 000
4 1 4 0 — MATERIAL PERMANENTE		
4 1 4 02 00 — Utensílios de copa e cosinha, dormitório e enfermaria: Inspetorias Regionais de Estatística		280 000
4 1 4 07 00 — Modêlos e utensílios de escritório, biblioteca, ensino, laboratório e gabinete técnico ou científico:		
Secretaria-Geral do CNE	5 000 000	
Inspetorias Regionais de Estatística	500 000	5 500 000

		Cr$
4 1 4 08 00 — Mobiliário em geral: Inspetorias Regionais de Estatística		1 100 000
TOTAL DA VERBA — 4 0 0 0 ..		118 030 000
TOTAL DAS SUPLEMENTAÇÕES .		1 094 120 000

RESUMO

VERBAS	DESTAQUES	SUPLEMENTAÇÕES
	Cr$	Cr$
3 0 0 0 — DESPESAS CORRENTES		
Secretaria-Geral do CNE	459 000 000	364 000 000
Inspetorias Regionais de Estatística	612 090 000	612 090 000
4 0 0 0 — DESPESA DE CAPITAL		
Secretaria-Geral do CNE	10 000 000	105 000 000
Inspetorias Regionais de Estatística	13 030 000	13 030 000
TOTAL	1 094 120 000	1 094 120 000

RESOLUÇÃO JEC-836, DE 26 DE OUTUBRO DE 1966

Altera as Normas para Apresentação Tabular da Estatística Brasileira

A JUNTA EXECUTIVA CENTRAL DO CONSELHO NACIONAL DE ESTATÍSTICA, usando das suas atribuições, e

considerando o disposto nas Resoluções AG-75, AG-158 e AG-731, relativamente à fixação de normas para a apresentação tabular da estatística brasileira,

considerando que, após quase sete anos de vigência das normas aprovadas, se reconheceu a necessidade de sua revisão;

considerando a conveniência de fazer observar, entre aquelas normas, as que são recomendadas pela Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) e pelo Instituto Nacional de Pesos e Medidas, no que se aplica à estatística,

considerando, finalmente, os estudos realizados a respeito pela Comissão Técnica de Revisão e Aperfeiçoamento das Campanhas Estatísticas e pela Comissão Especial desta Junta designada para revê-los,

RESOLVE

Artigo único — Ficam adotadas, para apresentação tabular da estatística brasileira, as normas constantes no anexo à presente Resolução, elaboradas com base nos estudos referidos no último dos consideranda acima e com o aproveitamento das recomendações pertinentes da Associação Brasileira de Normas Técnicas e do Instituto Nacional de Pesos e Medidas

NORMAS PARA APRESENTAÇÃO TABULAR DA ESTATÍSTICA BRASILEIRA

SUMÁRIO

1 — *Objetivo e Campo de Aplicação*

Estas normas têm o objetivo de orientar a apresentação racional e uniforme dos dados estatísticos, em forma tabular, no Sistema Estatístico subordinado ao Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE).

2 — *Definições*

Uma tabela estatística compõe-se de elementos essenciais e elementos complementares.

2 1 — Os elementos essenciais de uma tabela estatística são: *o título, o corpo, o cabeçalho e a coluna indicadora*

2 1 1 — *Título* é a indicação que precede a tabela e que contém a designação do fato observado, o local e a época em que foi registrado.

2 1 2 — *Corpo* é o conjunto de *colunas* e *linhas* que contém, respectivamente, em ordem vertical e horizontal, as informações sôbre o fato observado.

2 1 2 1 — *Casa* é o cruzamento de uma coluna com uma linha

2 1 2 2 — As casas não devem ficar em branco, apresentando sempre um número ou um sinal convencional

2 1 3 — *Cabeçalho* é a parte superior da tabela que especifica o conteúdo das colunas

2 1 4 — *Coluna indicadora* é a parte da tabela que especifica o conteúdo das linhas

2 1 4 1 — Uma tabela pode ter mais de uma coluna indicadora

2 2 — Os elementos complementares de uma tabela estatística são· a *fonte,* as *notas* e as *chamadas,* e se situam de preferência no rodapé da tabela

2 2 1 — *Fonte* é a indicação da entidade responsável pelo fornecimento dos dados ou pela sua elaboração

2 2 2 — *Notas* são informações de natureza geral, destinadas a conceituar ou esclarecer o conteúdo das tabelas, ou a indicar a metodologia adotada no levantamento ou na elaboração dos dados

2 2 3 — *Chamadas* são informações de natureza específica sôbre determinada parte da tabela, destinadas a conceituar ou esclarecer dados.

2 2 3 1 — As chamadas são indicadas no corpo da tabela em algarismos arábicos, entre parênteses, à esquerda nas *casas* e à direita na *coluna indicadora*

2 2 3 2 — A numeração das chamadas na tabela será sucessiva, de cima para baixo, e da esquerda para a direita

2 2 3 3 — A distribuição das chamadas no rodapé da tabela obedecerá à ordem de sua sucessão na tabela, separando-se umas das outras por um ponto ( )

2 3 3 4 — As chamadas de uma tabela que ocupe mais de uma página devem figurar no rodapé da tabela na última página, de acôrdo com a sua sucessão na mesma

3 — *Numeração e Indicação dos Títulos e Subtítulos*

A numeração dos títulos e subtítulos de um ou de vários conjuntos tabulares obedecerá à norma para a numeração progressiva das secções de um documento, elaborada pela Associação Brasileira de Normas Técnicas (NB-69, ver Anexo)

Ex.: 3 4 — Agropecuária

3 4 1 — Estrutura e meio de produção

3 4 2 — Principais culturas agrícolas

3 4 2 1 — Índices

3 4 2 2 — Culturas permanentes

3 4 2 2 (a) — Área cultivada

3 4 2 2 (b) — Quantidade produzida

3 4 2 3 — Culturas temporárias

3 4 2 3 (a) — Área cultivada

3 4 2 3 (b) — Quantidade produzida

4 — *Especificação dos Dados*

4 1 — A especificação dos dados pode figurar tanto na coluna indicadora como no cabeçalho da tabela, ou ainda em ambos, quando se tratar de tabelas de mais de uma entrada

4 1 1 — Quando a especificação dos dados figurar na coluna indicadora, será seguida de linha pontilhada até à separação da primeira coluna de dados

4 2 — A rubrica que engloba várias especificações terá uma das seguintes denominações

a) *outros*, quando o agrupamento tiver sido feito na fase de organização da tabela, por conveniência de apresentação,

b) *não declarados*, quando o agrupamento tiver sido feito na fase da apuração dos dados, por falta ou insuficiência de informação dos declarantes;

c) *não especificados*, quando o agrupamento não tiver sido previsto na fase da coleta de dados

5 — *Indicação de Intervalos Parciais nas Distribuições de Freqüência*

5 1 — Nas distribuições de freqüência, os intervalos parciais devem ser apresentados de modo a evitar dúvida entre o limite superior de uma classe e o inferior da classe seguinte

5 1 1 — Para êsse fim, poderá ser usada a notação ⊢ ou ⊣ significando a inclusão do valor limite

Exemplo: 5 ⊢ 10 inclui o valor 5 e exclui o valor 10

5 2 — São de evitar, nas classes extremas, as expressões "menos de" e "mais de", salvo quando houver especial conveniência para usá-las.

6 — *Emprêgo de Sinais Convencionais*

6 1 — Empregam-se os seguintes sinais convencionais

a) — (traço), quando o dado fôr nulo,

b) ... (três pontos), quando não se dispuser do dado,

c) 0 (zero), 0,0 (zero vírgula zero), 0,00 (zero vírgula zero zero), quando o valor numérico fôr menor do que a metade da unidade ou fração decimal adotada para a expressão do dado,

d) *x* (letra *x*), quando o dado fôr omitido a fim de evitar a individualização das informações.

6 2 — A indicação dos sinais convencionais figurará nas publicações estatísticas, antecedendo as tabelas.

7 — *Emprêgo de Unidades de Medida e de seus Símbolos*

7 1 — As unidades de medida, seus múltiplos e submúltiplos devem ser designadas pelos nomes exatos incluídos no "Quadro de Unidades Legais" aprovado pelo Decreto n º 52 423, de 30 de agôsto de 1963

7 2 — O nome da unidade pode ser substituído pelo respectivo símbolo como consta do "Quadro" referido em 7 1

Exemplos:

g para o grama (e não *gr*)

kg para o quilograma (e não *Kg*)

t para a tonelada (e não *ton* ou *T*)

m para o metro (e não *mt* ou *M*)

m² para o metro quadrado (e não *mq*)

cm³ para o centímetro cúbico (e não *cc*)

s para o segundo (de tempo) — e não *seg*

min para o minuto (de tempo) — e não *m*

ºC para a temperatura Celsius (centígrada)

7 3 — Qualquer outra grandeza não constante do "Quadro" referido em 7 1 poderá ser expressa na unidade mais conveniente, desde que seja compreensível por si mesma ou venha claramente definida

Exemplos

toneladas-quilômetro, t km
operários-dia
tiros por minuto

7 4 — O símbolo não deve ser seguido de ponto final ou da letra *s* em sinal de plural

7 5 — Quando o valor numérico de uma grandeza fôr fracionário, o símbolo deve ser escrito no final e não intercalado

Exemplos

50,25 kg (e não 50 kg,25)

$50 \frac{1}{4}$ kg (e não 50 kg $\frac{1}{4}$)

7 6 — Os símbolos serão escritos na mesma linha dos números, e não em forma de expoente

Exemplos

132 m e não 132^{m}
3 d 12 h 4 min 10 s e não 3^{d} 12^{h} 4^{min} 10^{s}

7 7 — Excetuam-se da regra 7 6 as unidades sexagesimais de ângulo.

Exemplo 15º 10' 25"

8 — *Indicação da Data de Referência dos Dados*

8 1 — Indicar-se-á, sempre que a natureza do fênomeno estudado o exigir, a data da referência dos dados

8 2 — A indicação dos meses poderá ser abreviada pelas suas três primeiras letras

8 3 — Quando os dados se referirem a uma série de anos civis consecutivos, indicam-se três algarismos, no caso de variar o século, e dois nos demais casos, separados por um hífen (-)

Exemplos

1892-915
1960-65

8 4 — Quando os dados se referirem a uma série de anos civis não consecutivos, indicam-se o primeiro e o último, ambos em algarismos completos, separados por um hífen (-)

Exemplo 1950-1965

8 5 — Quando os dados se referiram a um período de doze meses diferentes do ano civil, indicam-se o primeiro e a parte variável do segundo, separados por uma barra inclinada (/)

Exemplo: 1960/61

9 — *Apresentação dos Dados*

9 1 — Escrita de Números

9 1.1 — A parte inteira dos números será separada por pontos em classes de três algarismos, da direita para a esquerda

Exemplo 12 422 384

9 1 1 1 — Excetuam-se os números já tradicionalmente escritos de outra forma, entre êles o ano do calendário (1966, 1832)

9 1 2 — Na parte decimal, essa separação será feita da esquerda para a direita

Exemplo 3,103 41

9 1 3 — A separação da parte inteira da parte decimal de um número será feita por uma vírgula

9 1 4 — Sempre que necessário, será chamada a atenção do leitor para o sistema inglês de escrita de números, que troca a vírgula pelo ponto e vice-versa

9 1 5 — Haverá especial cuidado na expressão literal do *bilhão* ou *bilião,* que no Brasil, França (milliard) e Estados Unidos (billion) vale *mil milhões* (1 000 000 000) e em Portugal, Espanha, Inglaterra e Alemanha vale *um milhão de milhões* (1 000 000 000 000)

9 1 6 — O uso de algarismos romanos deve ser evitado, inclusive em datas

9 2 — Arredondamento de Números

9 2 1 — Quando o primeiro algarismo a ser abandonado fôr 0, 1, 2 3 ou 4, fica inalterado o último algarismo a permanecer

Exemplo 48,23 passa a 48,2

9 2 2 — Quando o primeiro algarismo a ser abandonado fôr 6, 7, 8 ou 9, aumenta-se de uma unidade o último algarismo a permanecer

Exemplos:

23,07 passa a 23,1

34,99 passa a 35,0

9 2 3 — Quando o primeiro algarismo a ser abandonado fôr 5, haverá duas soluções:

a) como regra geral, segue-se o item 9 2 2
Exemplo 12,502 52 passa a 12,503

b) se ao 5 só se seguirem zeros, o último algarismo a ser conservado só será aumentado se fôr ímpar

Exemplos

24,650 000 0 passa a 24,6
24,750 000 0 passa a 24,8

9 2 4 — São de evitar os arredondamentos sucessivos, e fica recomendada a volta aos dados originais caso se proceda a nôvo arredondamento

Exemplo: 17,444 52 para 17,4 ou para 17
e não para 17,445 para 17,45 para 17,5 para 18

9 2 5 — Quando houver parcelas e total, e ocorrer divergência no arredondamento, corrigir-se-á na parcela (ou nas parcelas) onde o êrro relativo fôr menor

Exemplo

2,4	para	2
13,4		14
16,1		16
31,9		32

9 2 6 — A mesma regra se aplicará sucessivamente quando houver subtotais (totais parciais) intercalados.

9 3 — Quando os dados se referirem a uma base geográfica, aplicar-se-ão os seguintes critérios:

a) a ordem geográfica das Unidades da Federação e respectivos agrupamentos em Regiões Fisiográficas será a indicada pelo Conselho Nacional de Geografia, a saber:

REGIÃO NORTE

Rondônia
Acre
Amazonas
Roraima
Pará
Amapá

REGIÃO NORDESTE

Maranhão
Piauí
Ceará
Rio Grande do Norte
Paraíba
Pernambuco
Alagoas
Fernando de Noronha

REGIÃO LESTE

Sergipe
Bahia
Minas Gerais
Espírito Santo
Rio de Janeiro
Guanabara

REGIÃO SUL

São Paulo
Paraná
Santa Catarina
Rio Grande do Sul

REGIÃO CENTRO-OESTE

Mato Grosso
Goiás
Distrito Federal

b) a ordem alfabética para a indicação dos demais casos, devendo as divisões territoriais ser agrupadas segundo as convenções em vigor.

Exemplo: *países* segundo os *continentes*, *municípios* e *cidades*, segundo as *Unidades da Federação*, *distritos* e *vilas*, segundo os *municípios*

9 3.1 — Poderá ser adotado outro critério de especificação, que não a ordem alfabética, desde que a natureza do fenômeno observado assim o aconselhe.

9 4 — A soma dos dados numéricos de uma linha ou coluna será sempre indicada destacadamente pela palavra *total*, exceto quando se referir a uma base geográfica, caso em que receberá o nome do conjunto da mesma.

9 4 1 — É facultativo que o total preceda ou suceda às parcelas; em qualquer dos casos o modo de apresentação deve ser uniforme.

9 4.2 — A soma de totais parciais será indicada pela expressão *total geral*

10 — *Apresentação de Tabelas*

10 1 — As tabelas, excluídos os títulos, serão delimitadas, no alto e em baixo, por traços horizontais grossos, preferencialmente

10.2 — Recomenda-se não delimitar as tabelas, à direita e à esquerda, por traços verticais.

10 3 — Será facultativo o emprêgo de traços verticais para separação das colunas no corpo da tabela.

10 4 — Quando uma tabela, por excessiva altura, tiver de ocupar mais de uma página, não será delimitada na parte inferior, repetindo-se o cabeçalho na página seguinte. Neste caso, deve-se usar, no alto do cabeçalho ou dentro da coluna indicadora, a designação *continua* ou *conclusão*, conforme o caso

10 5 — Quando uma tabela ocupar páginas confrontantes, tôdas as linhas devem ser numeradas na primeira e na última coluna

10 5 1 — Nos agrupamentos ou chaves, será numerada apenas a linha inicial do grupo ou o vértice da chave

10 6 — Quando não fôr conveniente a apresentação de uma tabela em páginas confrontantes, deverá a mesma ser dividida em duas ou mais

10 6 1 — Se o disposto em 10 6 se tornar impraticável, por serem as colunas insuscetíveis de agrupamento, deve-se desmembrar a tabela em secções, estas dispostas umas abaixo das outras e separadas por um traço horizontal duplo

UNIDADES DA FEDERAÇÃO	PORTOS DE DESTINO (continua)							
	Total	A	B	C	D	E	F	G

UNIDADES DA FEDERAÇÃO	PORTOS DE DESTINO (conclusão)							
	H	I	J	K	L	M	N	O

10 7 — Quando a tabela tiver poucas colunas e muitas linhas, poderá ser disposta em duas ou mais partes, lado a lado, separando-se as partes por um traço vertical duplo

Exemplo

MEIO CIRCULANTE EM 31 DEZEMBRO

ANOS	Cr$ 1 000 000	ANOS	Cr$ 1 000 000	ANOS	Cr$ 1 000 000
1948		1954		1960	
1949		1955		1961	
1950		1956		1962	
1951		1957		1963	
1952		1958		1964	
1953		1959		1965	

10 8 — Deve-se evitar tabela disposta de maneira que sua leitura exija a colocação da página ou volume em posição diferente da normal.

10.8.1 — Quando não fôr possível o recomendado em 10 8, deve-se apresentar a tabela de forma que a rotação da página para leitura seja no sentido dos ponteiros do relógio

10 9 — As tabelas intercaladas em texto corrido devem estar situadas na altura em que são citadas pela primeira vez.

10 10 — Quando o texto fôr distribuído por duas ou mais colunas, e a tabela ocupar mais de uma coluna, localizar-se-á de preferência na base da página.

10.10.1 — Não sendo possível o recomendado em 10 10, a parte do texto de cada coluna que se encontra acima da tabela deverá ter continuação imediatamente abaixo, na mesma coluna, prosseguindo depois na coluna seguinte, acima da tabela

11 — *Disposições Gerais*

11.1 — Tôda tabela deve ter significação própria, de modo a prescindir, quando isolada, de consultas a texto.

11.1.1 — Êsse critério deixa de ser aplicado se se tratar de dados numéricos de tal maneira integrados no texto que a ordem lógica do pensamento não seja interrompida por sua intercalação

11.2 — Evitar-se-á a apresentação de tabelas em que a maior parte das casas indicaria a inexistência do fenômeno

11.3 — Estas Normas de Apresentação Tabular entram em vigor a partir de 1.º de janeiro de 1967.

12 — *Anexo*

Norma para a numeração progressiva das seções de um documento (NB-69).

NUMERAÇÃO PROGRESSIVA DAS SEÇÕES DE UM DOCUMENTO (NB-69)

1 — *Objetivo*

Esta norma tem por objetivo descrever um sistema de numeração progressiva das partes de um documento, de modo a permitir: exposição mais clara da matéria, localização imediata de cada parte e das alterações eventualmente introduzidas no texto.

2 — *Campo de Aplicação*

Esta norma é especialmente recomendada na redação de documentos submetidos à discussão, apreciação ou inquérito (documentos de trabalho em reuniões, congressos, mesas redondas, etc ; normas, especificações, regulamentos, pareceres, relatórios, notas informativas, etc), assim como nos documentos expositivos em geral (livros e documentos técnicos ou didáticos, etc).

2 1 — Esta norma não é indicada para obras e documentos que tenham sistematização própria (dicionários, vocabulários, etc), ou, ainda, que não tenham necessidade de numeração progressiva (romances, poesias).

2.2 — Na aplicação desta norma não se deverá cair no exagêro de subdividir demasiadamente as seções, sacrificando-se, assim, a principal qualidade do sistema, que é a concisão Recomenda-se, para isso, não ultrapassar o máximo de seis algarismos, nem subdividir as seções além da quinária.

3 — *Definições*

a) seções: (*) partes em que é dividido o texto do documento, cada uma delas contendo as matérias consideradas afins, na exposição ordenada do assunto do texto que se divide;

b) seções primárias: seções que resultam da primeira divisão do texto do documento (geralmente correspondentes à divisão "capítulos"),

c) seções secundárias, terciárias, quaternárias, quinárias: seções que resultam da divisão do texto de uma seção primária, secundária, terciária, quaternária, respectivamente;

d) indicativo de uma seção: grupo numérico, constituído de acôrdo com as regras expostas em 4.2, que permite a localização imediata da seção por êle referida.

4 — *Numeração e indicativos*

4 0 — A presente seção primária (ou capítulo) trata da maneira de numerar as várias seções de um documento Esta numeração progressiva não deve ser confundida com o sistema de classificação decimal, cuja estrutura é diferente.

4 1 — As seções primárias numeram-se seguidamente com a série natural dos números inteiros a partir de 1, pela ordem de sua colocação no documento. O indicativo de cada uma delas é o número que lhe foi atribuído, escrito em algarismos arábicos. Exemplo: os quinze capítulos em que foi dividido um documento serão numerados seguidamente de 1 a 15

4 2 — As seções secundárias, terciárias, quaternárias, quinárias, numeram-se seguidamente com a série natural dos números inteiros a partir de 1, pela ordem de sua colocação na respectiva seção a que pertencem. O indicativo de cada uma delas é constituído pelo indicativo da seção a que pertence, seguido do número atribuído à seção de que se trata, com um ponto de separação, e repetindo o mesmo processo até a seção primária correspondente. Exemplo: a presente seção secundária tem o indicativo 4.2 e se subdivide em duas seções terciárias, cujos indicativos são 4 2 1 e 4 2 2.

4.2 1 — O zero poderá ser empregado para caracterizar uma nota explicativa, considerações preliminares, introdução ou generalidades referentes à seção que está sendo subdividida. Recomenda-se empregar o zero apenas na subdivisão das seções que têm o título destacado, omitindo-se o seu emprêgo nas seções sem título.

4 2 2 — O ponto de separação dispensa o emprêgo do zero na frente de um indicativo, quando o número das subdivisões fôr superior a 10 Exemplo: se a seção secundária 4.5 estivesse dividida em 14 seções terciárias, teriam estas os indicativos 4 5.1, 4 5 2, 4 5 14 e não 4 5 01, 4 5.02, etc

4.3 — O indicativo da seção é colocado imediatamente antes do título (ou da primeira palavra do texto, se a seção não tiver título), com um travessão de separação. Na apresentação tipográfica o indicativo será destacado em negrito (ou grifo).

4 4 — A leitura de um indicativo constituído por mais de um número faz-se lendo os números que o constituem pela ordem de sua colocação. Exemplo: o indicativo 4 5 14 ler-se-á "quatro cinco catorze" e significa que a seção de que se trata é a seção terciária n.º 14 da seção secundária n.º 5 da seção primária n.º 4 do documento

4 5 — O texto de uma seção do documento pode incluir vários parágrafos ou uma série ordenada de alíneas ou itens.

(*) Usualmente se empiegam outios têimos com a mesma acepção, tais como: paite, capítulo, item, tópico, etc

4 5 1 — Convém evitar a existência de parágrafos separados dentro de uma seção, sendo preferível considerá-los subdivisões da seção e numerá-los como tal

4 5.2 — As alíneas incluídas numa seção caracterizam-se por meio de letras minúsculas do alfabeto latino (a, b, c, .) pela sua ordem A letra, seguida de um parêntese, é colocada imediatamente antes da primeira palavra do texto da alínea. Exemplo: seção 3 desta norma.

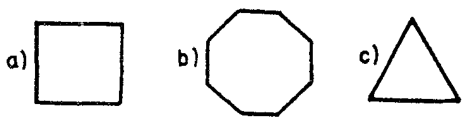
4 5.2.1 — Se o número de alíneaas fôr superior a 26, depois de esgotadas as letras do alfabeto (inclusive k, w, y) poderão ser empregadas, em continuação, letras duplas (a, b, c, ..., x, y, z; aa, bb, cc, , zz) ou grupos de duas letras (aa, ab, ac, , az; ba, bb, bc, , bz; za, zb, zc, . , zz)

4 5 3 — Os itens incluídos numa seção caracterizam-se como subdivisões da respectiva seção

4 5 4 — Pode referenciar-se abreviadamente uma alínea ou item por meio do indicativo da seção em que está incluído, seguido imediatamente da letra ou número ordinal que o caracteriza, com a letra ou número entre parênteses. Exemplo: a seção 3 inclui quatro alíneas que podem referenciar-se abreviadamente por 3(a), 3(b), 3(c) e 3(d).

4.5 5 — Se o documento contiver figuras ou fórmulas, estas serão referenciadas com o próprio indicativo da seção Quando houver várias figuras ou fórmulas dentro do mesmo parágrafo ou seção, as primeiras serão referenciadas como alíneas e as segundas como itens (*)

Exemplo Fig 4 5 5 (b), fórmula 4 5 5 3



A-B-C . ... (4 5 5 1)

(A-B) (-B) + (AB-AC-B2) = (A-B) C + (AB-AC-B2) (4 5 5 2)

A (A-B-C) = B (A-B-C) (4 5 5 3)

$A \neq B$ . ... (4 5 5 4)

4 5 6 — Os quadros serão referenciados pelo indicativo da seção a que pertencem. Quando houver vários quadros na mesma seção, serão distinguidos como alíneas

4 6 — Os textos complementares, suplementares, finais ou afins, anexados ao documento poderão constituir uma seção primária em continuação, com seções secundárias correspondentes a cada um dos anexados. Exemplo se êste documento exigisse quatro anexos, teriam êles sucessivamente os indicativos 6.1 a 6 4.

4 6 1 — Os anexos deverão trazer, logo depois do indicativo próprio, entre parênteses, o indicativo do texto a que se referem, precedido de "ver" Exemplo: se o documento anexado 6 2 se referisse à seção 4 1, seria indicado: 6 2 (ver 4 1).

4 6 2 — Os documentos anexados a anexos constituirão seções terciárias Exemplo: se o anexo 6 2 tivesse três anexados próprios, êsses seriam indicados 6.2 1, 6 2.2, 6 2 3.

4 6 3 — Quando um texto suplementar destinar-se a ser incorporado ao texto principal do documento, o indicativo dêle deverá ser aquêle que corresponderia à sua exata colocação no texto principal (ver 1) Também a sua localização deverá ser assinalada no texto da redação provisória, onde figurará apenas o respectivo indicativo, seguido, entre parênteses, da indicação remissiva: "(ver p.)"

5 — *Títulos*

5.1 — Os títulos das seções primárias, secundárias, etc. serão destacados gradativamente, seguindo-se, de preferência, as recomendações contidas no projeto em elaboração sôbre apresentação de originais

(*) Neste último caso o indicativo poderá ser post-pôsto, entre parênteses

5 1 1 — De um modo geral, não deverão ser intituladas as subdivisões de uma seção sem título.

5 1 2 — O uso ou não uso de títulos deve ser sistemático; dessa forma dever-se-á evitar que, no mesmo documento, seções do mesmo nível ora tenham títulos, ora não.

5 1 3 — Os títulos de tôdas as seções do mesmo nível de um documento serão escritos, preferìvelmente, da mesma maneira.

6 — *Paginação*

A fim de facilitar a organização de sumários parciais e a edição independente das várias partes de um manual ou dos vários capítulos de um documento provisório, a numeração das páginas poderá ser feita individualmente, por partes ou capítulos, a partir de 1 Neste caso o indicativo da seção primária deverá preceder o número da página do qual será separado por um hífen ou travessão.

Exemplo: 1-1 a 1-15, 2-1 a 2-20; p 3-5, etc

RESOLUÇÃO JEC-887, DE 26 DE OUTUBRO DE 1966

Aprova destaque e suplementações no orçamento do Serviço Gráfico do IBGE, correspondente ao exercício financeiro de 1966

A JUNTA EXECUTIVA CENTRAL DO CONSELHO NACIONAL DE ESTATÍSTICA, no uso de suas atribuições, e

considerando que se fazem necessários alguns reajustamentos nas rubricas orçamentárias do Serviço Gráfico, de maneira a lhe facultar o atendimento de suas despesas dentro das suas atuais necessidades,

considerando que o orçamento vigente do referido Serviço permite os destaques e suplementações de verbas sem ampliação do teto fixado pela Resolução JEC-869, de 29-12-65,

RESOLVE

Artigo único — Ficam aprovados o destaque e suplementações abaixo especificados nas tabelas explicativas do orçamento do Serviço Gráfico no exercício de 1966

DESTAQUE

1 — Despesas Industriais

1 2 — Material

	Cr$	Cr$
19 02 — Material de Transformação		66 000 000
TOTAL DO DESTAQUE		66 000 000

SUPLEMENTAÇÃO

1 — Despesas Industriais

1 1 — Despesa de Pessoal

14 05 — Salário-família		30 000 000
2 — Despesas Administrativas e Comerciais		
2 1 — Despesas de Pessoal		
27 05 — Salário-família	12 500 000	
2 2 — Despesas de Material		
32 02 — Conservação e Manutenção de Veículos	5 000 000	

		Cr$	Cr$
33 04 — Material de Consumo		300.000	
35.06 — Material de Limpeza e Reparação		500.000	
	2.3 — Despesas Diversas		
41.06 — Selos, Estampilhas e Telegramas		500.000	18.800.000
	3 — Despesas a Ratear		
	3 1 — Despesas de Pessoal		
50 07 — Salário-família		9.000 000	
	3 2 — Despesas de Material		
53 03 — Assistência Social . . .		3 200.000	
	3 3 — Despesas Diversas		
54 01 — Assistência Jurídica		2 000.000	
58.06 — Telefones e Telefonemas		3.000.000	17.200.000
TOTAL DA SUPLEMENTAÇÃO			66 000 000

RESOLUÇÃO JEC-888, DE 26 DE OUTUBRO DE 1966

Abre "Crédito Especial de Cr$ 300.000.000 (trezentos milhões de cruzeiros) destinado a cobrir as despesas com a implantação das Pesquisas Domiciliares no Brasil

A JUNTA EXECUTIVA CENTRAL DO CONSELHO NACIONAL DE ESTATÍSTICA, usando das suas atribuições, e

considerando o convênio firmado, em 21-1-1966, entre o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, o Ministério do Planejamento e Coordenação Econômica e a USAID/Brasil para o planejamento de um programa de pesquisas domiciliares para o Brasil;

considerando que o convênio referido possibilitou a realização dos estudos iniciais e execução de um teste experimental das pesquisas referidas;

considerando que a implantação dessas pesquisas em âmbito nacional em caráter contínuo requer o dispêndio de recursos adicionais não previstos em orçamento;

considerando, finalmente, que na conformidade do parecer do Serviço Econômico e Financeiro, constante do processo n.° 11 932/66, os encargos financeiros decorrentes da implantação dos trabalhos das referidas pesquisas sòmente poderão correr à conta de "Crédito Especial",

RESOLVE:

Artigo único — Fica aberto pela Secretaria-Geral do Conselho Nacional de Estatística, mediante destaque dos recursos existentes na conta "Convênios Nacionais de Estatística Municipal", o crédito especial de Cr$ 300.000.000 (trezentos milhões de cruzeiros) destinado a atender as despesas decorrentes da implantação das pesquisas domiciliares por amostragem no Brasil, em caráter contínuo, na conformidade do processo n.° 11.932/66

RESOLUÇÃO JEC-889, DE 4 DE NOVEMBRO DE 1966

Abre crédito especial de Cr$ 120 000 000 para pagamento de diferença de vencimentos e gratificações relativas aos anos de 1964 e 1965.

A JUNTA EXECUTIVA CENTRAL DO CONSELHO NACIONAL DE ESTATÍSTICA, usando das suas atribuições, e

considerando que os ocupantes das séries de classes de Estatísticos foram enquadrados na conformidade dos Decretos n.os 55 301/64 e 57.837/66, com direito a percepção, a partir de 1° de junho de 1964, de diferença de vencimentos e outras vantagens, considerando a Ordem de Serviço, publicada no BS-733, de 22-7-1966, bem como os elementos contidos no memorando SP/GAB-52, que esclarece ser do montante de Cr$ 140 788.618 (cento e quarenta milhões e setecentos e oitenta e oito mil seiscentos e dezoito cruzeiros) o total das despesas atinentes aos exercícios de 1964 e 1965, correspondente ao pessoal do quadro da Administração Central do Conselho,

considerando que os recursos consignados em "Restos a Pagar", dos exercícios de 1964 e 1965, atendem, apenas, a parte dos encargos no montante de Cr$ 20.788.618 (vinte milhões e setecentos e oitenta e oito mil e seiscentos e dezoito cruzeiros), havendo necessidade, assim, de se dar cobertura, com a previsão dos recursos, para o pagamento de restante dos encargos no montante de Cr$ 120 000 000 (cento e vinte milhões de cruzeiros), na conformidade das informações do Serviço Econômico e Financeiro, constantes do processo n.º 12 568/66,

RESOLVE:

Artigo único — Fica aberto, pela Secretaria-Geral do Conselho Nacional de Estatística, mediante destaque dos recursos existentes na conta "Convênios Nacionais de Estatística Municipal", o crédito especial de Cr$ 120 000 000, destinado ao pagamento da diferença de vencimentos, de gratificação adicional por tempo de serviço e de gratificação pela prestação de serviços extraordinários, aos ocupantes da série das classes de Estatísticos da Administração Central.

RESOLUÇÃO JEC-890, DE 9 DE NOVEMBRO DE 1966

Abre Crédito Especial para atender ao pagamento de despesas de exercícios findos

A JUNTA EXECUTIVA CENTRAL DO CONSELHO NACIONAL DE ESTATÍSTICA, usando das suas atribuições, e

considerando a necessidade de atender ao pagamento de Serviço de Terceiros — Locação de bens móveis e imóveis; tributos e despesas de condomínio, relativas aos exercícios de 1962, 1963, 1964 e 1965, no montante de Cr$ 20.732.577 (vinte milhões, setecentos e trinta e dois mil, quinhentos e setenta e sete cruzeiros), segundo exposição de motivos do Serviço de Material, sob n.º SCC/20, de 9-8-1966, pareceres dos Serviços Jurídicos, sob n.ºs 617 e 617-A, de 22 e 23-8-1966 e informação do Serviço Econômico e Financeiro da Secretaria-Geral do Conselho Nacional de Estatística, contidos no processo n.º 14.388/61;

considerando que, por aludirem a exercícios findos, tais despesas só poderão correr à conta de "Crédito Especial",

RESOLVE:

Artigo único — Fica aberto, pela Secretaria-Geral do Conselho Nacional de Estatística, mediante destaque dos recursos existentes na conta "Convênios Nacionais de Estatística Municipal", o "Crédito Especial" de Cr$ 20.732.577 (vinte milhões, setecentos e trinta e dois mil, quinhentos e setenta e sete cruzeiros), destinado a atender ao pagamento de despesas de exercícios findos, na conformidade do processo n.º 14 388/61

RESOLUÇÃO JEC-891, DE 16 DE NOVEMBRO DE 1966

Concede auxílio especial ao Departamento Estadual de Estatística de Minas Gerais, destinado a suplementar o auxílio regular de 1966, no valor de Cr$ 10 000 000 (dez milhões de cruzeiros)

A JUNTA EXECUTIVA CENTRAL DO CONSELHO NACIONAL DE ESTATÍSTICA, usando de suas atribuições, e

considerando a solicitação formulada, bem como as justificativas apresentadas, pelo Departamento Estadual de Estatística de Minas Gerais, através de seus ofícios n.ºs G/64 e G/199, no sentido de ser concedido ao Departamento Estadual de Estatística daquele Estado uma suplementação, ao auxílio regular, de Cr$ 20 000 000 (vinte milhões de cruzeiros), para o fim específico de proporcionar melhores condições de trabalho e equipamento adequado para os órgãos da sua repartição;

considerando que, na conformidade dos pareceres emitidos pelo Serviço Econômico e Financeiro da Secretaria-Geral, constantes do processo n.º 3 776/66, o auxílio, em dinheiro, destinado à suplementação do auxílio regular, poderá ser reduzido para Cr$ 10 000.000 (dez milhões de cruzeiros), tendo em vista que as máquinas de calcular e de somar poderão ser fornecidas, mediante cessão, pela Secretaria-Geral do Conselho,

RESOLVE:

Artigo único — Fica aberto, pela Secretaria-Geral do Conselho Nacional de Estatística, o crédito especial de Cr$ 10 000 000 (dez milhões de cruzeiros), mediante destaque dos recursos existentes na conta "Convênios Nacionais de Estatística Municipal", destinado à suplementação do auxílio regular, concedido ao Departamento Estadual de Estatística do Estado de Minas Gerais, para o exercício de 1966, pela Resolução JEC/874, de 2 de fevereiro de 1966.

RESOLUÇÃO JEC-892, DE 16 DE NOVEMBRO DE 1966

Abre crédito especial de Cr$ 4 551 000 (quatro milhões, quinhentos e cinqüenta e um mil cruzeiros), destinado a suplementar o auxílio regular, do exercício de 1966, do Departamento Estadual de Estatística do Maranhão.

A JUNTA EXECUTIVA CENTRAL DO CONSELHO NACIONAL DE ESTATÍSTICA, usando de suas atribuições, e

considerando o pedido formulado pelo Departamento Estadual de Estatística do Maranhão, através do ofício n.° JERE/8, de 28 de junho de 1966, para que seja atribuído, àquele Departamento Estadual de Estatística, um auxílio suplementar de Cr$ 4 551 000 (quatro milhões, quinhentos e cinqüenta e um mil cruzeiros), destinado principalmente ao atendimento dos encargos normais das Verbas 2 — Material e 3 — Serviços e Encargos, uma vez que o auxílio regular, concedido para o exercício de 1966, atenderá apenas parcialmente aos encargos da Verba 1 — Pessoal;

considerando, ainda, os pareceres emitidos pelo Serviço Econômico e Financeiro da Secretaria-Geral dêste Conselho, constantes do processo n.º 8 080/66, opinando pela concessão do auxílio especial solicitado como suplementação do auxílio regular de 1966,

RESOLVE:

Artigo único — Fica aberto, na Secretaria-Geral do Conselho Nacional de Estatística, mediante apropriação dos recursos existentes na conta "Convênios Nacionais de Estatística Municipal" o crédito especial de Cr$ 4 551 000 (quatro milhões, quinhentos e cinqüenta e um mil cruzeiros) destinado a suplementar o auxílio regular do exercício de 1966, concedido ao Departamento Estadual de Estatística do Maranhão, na conformidade da Resolução JEC/874, de 2 de fevereiro de 1966.

RESOLUÇÃO JEC-893, DE 16 DE NOVEMBRO DE 1966

Concede auxílio especial de Cr$ 4 000 000 (quatro milhões de cruzeiros), ao Departamento Estadual de Estatística do Espírito Santo, destinado a suplementar o auxílio regular de 1966

A JUNTA EXECUTIVA CENTRAL DO CONSELHO NACIONAL DE ESTATÍSTICA, usando de suas atribuições, e

considerando a solicitação formulada pelo Departamento Estadual de Estatística do Estado do Espírito Santo, através do ofício JERE/006, de 4 de abril de 1966, no sentido de ser concedido ao Departamento Estadual de Estatística daquele Estado uma suplementação de Cr$ 4 000 000 (quatro milhões de cruzeiros), para atendimento dos encargos normais correspondentes às Verbas II — Material e III — Serviços e Encargos, uma vez que o auxílio regular concedido, para o exercício de 1966, atenderá, apenas, às Verbas I — Pessoal e II — Quotas de presença em reuniões;

considerando, ainda, os pareceres emitidos a respeito pelo Serviço Econômico e Financeiro da Secretaria-Geral dêste Conselho e constantes do processo n.° 4 446/66, opinando pela concessão do auxílio solicitado,

RESOLVE:

Artigo único — Fica aberto, pela Secretaria-Geral do Conselho Nacional de Estatística, o crédito especial de Cr$ 4 000 000 (quatro milhões de cruzeiros), mediante destaque dos recursos existentes na conta "Convênios Nacionais de Estatística Municipal", destinado à suplementação do auxílio regular, do exercício de 1966, concedido ao Departamento Estadual de Estatística do Espírito Santo, na conformidade da Resolução JEC/874, de 2 de fevereiro de 1966.

RESOLUÇÃO JEC-894, DE 16 DE NOVEMBRO DE 1966

Abre crédito especial de Cr$ 4 025 000 (quatro milhões, vinte e cinco mil cruzeiros), destinado a suplementar o auxílio regular, do exercício de 1966, do Departamento Estadual de Estatística do Ceará

A JUNTA EXECUTIVA CENTRAL DO CONSELHO NACIONAL DE ESTATÍSTICA, usando das suas atribuições, e

considerando o pedido formulado pelo Departamento Estadual de Estatística do Estado do Ceará, através do ofício SA-DE/202/316, de 19 de julho de 1966, e da Res. JERE-210, de 30 de agôsto de 1966, para que seja atribuído àquele Departamento Estadual de Estatística uma suplementação ao auxílio regular, de Cr$ 7.540 000 (sete milhões, quinhentos e quarenta mil cruzeiros), destinada ao atendimento de encargos nas Verbas 1 — Pessoal, 2 — Material e 3 — Serviços e Encargos, tendo em vista a insuficiência do auxílio regular concedido para o exercício de 1966, de Cr$ 8 336 000 (oito milhões, trezentos e trinta e seis mil cruzeiros);

considerando que o Serviço Econômico e Financeiro da Secretaria-Geral do Conselho propõe a redução de Cr$ 7 540 000 para Cr$ 4 025 000, do refôrço solicitado, visando atender, apenas, os encargos de "pessoal" e de "quotas de presença em reuniões", na conformidade dos pareceres constantes do processo n.º 4 356/66,

RESOLVE:

Artigo único — Fica aberto, na Secretaria-Geral do Conselho Nacional de Estatística, mediante apropriação dos recursos existentes na conta "Convênios Nacionais de Estatística Municipal", o crédito especial de Cr$ 4 025 000 (quatro milhões, vinte e cinco mil cruzeiros), destinado a suplementar o auxílio regular, do exercício de 1966, concedido ao Departamento Estadual do Ceará na conformidade da Resolução JEC/874, de 2 de fevereiro de 1966

RESOLUÇÃO JEC-895, DE 16 DE NOVEMBRO DE 1966

Abre crédito especial de Cr$ 3 672 000 (três milhões seiscentos e setenta e dois mil cruzeiros) destinado a suplementar o auxílio regular, do exercício de 1966, do Departamento Estadual de Estatística de Sergipe

A JUNTA EXECUTIVA CENTRAL DO CONSELHO NACIONAL DE ESTATÍSTICA, usando das suas atribuições, e

considerando o pedido formulado pelo Diretor do Departamento Estadual de Estatística do Estado de Sergipe, através do ofício n.º D GAB/113, de 31 de maio de 1966, no sentido de que seja atribuído, ao Departamento Estadual de Estatística daquele Estado, uma suplementação, ao seu auxílio regular, do montante de Cr$ 3 672 000 (três milhões, seiscentos e setenta e dois mil cruzeiros) destinada à cobertura do "deficit financeiro" previsto, sobretudo nas verbas de "pessoal e de "quotas de presença em reunião", em virtude da aplicação do Decreto n.º 57 900, de 2 de março de 1966, que modificou, a partir de março de 1966, os níveis do salário mínimo em todo o País,

considerando, ainda, que o Serviço Econômico e Financeiro da Secretaria-Geral, entendendo válidas as justificativas do Diretor do Departamento, opina pela concessão do auxílio solicitado, destinado ao pagamento dos novos níveis do salário mínimo, na conformidade dos pareceres constantes do processo n.º 6 924/66,

RESOLVE

Artigo único — Fica aberto, na Secretaria-Geral do Conselho Nacional de Estatística, mediante destaque dos recursos existentes na conta "Convênios Nacionais de Estatística Municipal", o crédito especial de Cr$ 3 672 000 (três milhões, seiscentos e setenta e dois mil cruzeiros), destinado à suplementação do auxílio regular concedido, para o exercício de 1966, àquele Departamento Estadual, por fôrça da Resolução JEC/874, de 2 de fevereiro de 1966

RESOLUÇÃO JEC-896, DE 23 DE NOVEMBRO DE 1966

Abre "Crédito Especial" de Cr$ 380.000 000 (trezentos e oitenta milhões de cruzeiros) destinado a complementar o crédito de que trata a Resolução JEC/866, de 22 de dezembro de 1965.

A JUNTA EXECUTIVA CENTRAL DO CONSELHO NACIONAL DE ESTATÍSTICA, usando das suas atribuições, e

considerando que o "Crédito Especial" aberto pela Resolução JEC/866, de 22 de dezembro de 1965, destinado ao reequipamento do Serviço Gráfico, levou em conta a taxa de Cr$ 1.850 (hum mil, oitocentos e cinqüenta cruzeiros) para o dólar;

considerando que, a partir de novembro de 1965, referida taxa sofreu um reajustamento da ordem de 20% (vinte por cento) elevando a taxa do dólar de Cr$ 1.850 para Cr$ 2 220, tornando, em virtude dêsse reajustamento, o Crédito Especial — Cr$ 1.900 000 000 — insuficiente para a aquisição do equipamento gráfico, na conformidade do plano aprovado;

considerando, enfim, a solicitação da Superintendência do Serviço Gráfico, bem como as informações e pareceres favoráveis à abertura do "Crédito Especial" de Cr$ 380 000 000 para suplementação do crédito de que trata a Resolução JEC/866/65, constantes do processo n.º 13 501/65,

RESOLVE:

Artigo único — Fica aberto, pela Secretaria-Geral do Conselho Nacional de Estatística, mediante destaque dos recursos existentes na conta "Convênios Nacionais de Estatística Municipal", o "Crédito Especial" de Cr$ 380.000.000 (trezentos e oitenta milhões de cruzeiros) como suplementação do crédito de que trata a Resolução JEC/866/65, destinado ao reequipamento do Serviço Gráfico

RESOLUÇÃO JEC-897, DE 30 DE NOVEMBRO DE 1966

Concede filiação à seção de Estatística do Sindicato Nacional da Indústria do Cimento

A JUNTA EXECUTIVA CENTRAL DO CONSELHO NACIONAL DE ESTATÍSTICA, usando das suas atribuições, e

considerando que o Sindicato Nacional da Indústria do Cimento requereu filiação, ao Conselho Nacional de Estatística, de sua Seção de Estatística, na conformidade do que dispõe o artigo 3.º da Resolução JEC-773/63,

considerando que o órgão filiando atende devidamente às exigências da citada Resolução, conforme consta do processo n.º 11.532/62,

RESOLVE

Art 1.º — É concedida filiação da Seção de Estatística do Sindicato Nacional da Indústria do Cimento ao Conselho Nacional de Estatística, do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, na conformidade do disposto na Resolução JEC-773/63

Art. 2.º — O têrmo de filiação, de acôrdo com o artigo 4.º da mesma Resolução, será lavrado dentro do prazo de trinta dias

RESOLUÇÃO JEC-898, DE 30 DE NOVEMBRO DE 1966

Concede auxílio especial ao Departamento Estadual de Estatística do Piauí, no valor de Cr$ 1 160 400, destinado a suplementar o auxílio regular do exercício de 1966

A JUNTA EXECUTIVA CENTRAL DO CONSELHO NACIONAL DE ESTATÍSTICA, usando das suas atribuições, e

considerando a solicitação formulada pelo Departamento Estadual de Estatística do Estado do Piauí, no sentido de ser concedido um auxílio suplementar para refôrço de seus recursos, uma vez que o auxílio regular se tornou insuficiente, considerando o parecer emitido a respeito pela Comissão de Orçamento e Tomada de Contas da Junta Executiva Central e constante do processo n.º 4.137/66, que conclui pela concessão do auxílio,

RESOLVE:

Artigo único — Fica aberto, pela Secretaria-Geral do Conselho Nacional de Estatística, crédito especial de Cr$ 1 160 400 (hum milhão, cento e sessenta mil e quatrocentos cruzeiros), mediante destaque dos recursos existentes na conta "Convênios Nacionais de Estatística Municipal", destinado a suplementação do auxílio regular, no exercício de 1966, concedido ao Departamento Estadual de Estatística do Estado do Piauí.

RESOLUÇÃO JEC-899, DE 30 DE NOVEMBRO DE 1966

Concede auxílio especial, no valor de Cr$ 300 000 (trezentos mil cruzeiros), ao Departamento Estadual de Estatística de Mato Grosso, destinado a suplementar o auxílio regular de 1966

A JUNTA EXECUTIVA CENTRAL DO CONSELHO NACIONAL DE ESTATÍSTICA, usando de suas atribuições, e

considerando a solicitação formulada pela Junta Executiva Regional de Estatística do Estado de Mato Grosso, através da Resolução da JERE/201, de 26-9-66, no sentido de ser concedido ao Departamento Estadual de Estatística daquele Estado uma suplementação, ao auxílio regular, de Cr$ 300 000 (trezentos mil cruzeiros), para atendimento dos encargos normais;

considerando, ainda os pareceres emitidos a respeito pelo Serviço Econômico e Financeiro da Secretaria-Geral dêste Conselho e constantes do processo n º 11 889/66,

RESOLVE:

Artigo único — Fica aberto, pela Secretaria-Geral do Conselho Nacional de Estatística, crédito especial de Cr$ 300 000 (trezentos mil cruzeiros), mediante destaque dos recursos existentes na conta "Convênios Nacionais de Estatística Municipal", destinado à suplementação do auxílio regular, no exercício de 1966, concedido ao Departamento Estadual de Estatística de Mato Grosso

RESOLUÇÃO JEC-900, DE 7 DE DEZEMBRO DE 1966

Eleva o limite previsto no artigo 45 da Resolução JEC/844, de 31 de março de 1965.

A JUNTA EXECUTIVA CENTRAL DO CONSELHO NACIONAL DE ESTATÍSTICA, usando de suas atribuições, e

considerando não mais atender às necessidades da administração o limite de duas vêzes o maior salário mínimo vigente no País, fixado pelo artigo 45 da Resolução JEC/844, conforme justificativas constantes do Processo n º 12 825/66, da Secretaria-Geral;

considerando a recomendação n º 11, da Resolução AG/845, de 17 de junho de 1966, que sugere a revisão do citado limite;

considerando, finalmente, que a elevação do referido limite de duas (2) para cinco (5) vêzes o maior salário mínimo vigente no País vem ao encontro das necessidades do Serviço Gráfico,

RESOLVE

Art. 1 º — O artigo 45 da Resolução JEC/844, de 31 de março de 1965, passa a ter a seguinte redação· "Art 45 — Fica o Superintendente do Serviço Gráfico autorizado a efetuar pagamentos relacionados com aquisição de material e execução de serviços até o limite de cinco (5) vêzes o maior salário mínimo em vigor no País, à conta dos adiantamentos quinzenais fornecidos pela Secretaria-Geral (Administração Central), para custeio das despesas de pessoal e outras, de pronto pagamento"

Art 2.º — A presente Resolução entra em vigor na data de sua publicação, revogadas as disposições em contrário

RESOLUÇÃO JEC-901, DE 7 DE DEZEMBRO DE 1966

Abre crédito especial de Cr$ 8 100 000 (oito milhões e cem mil cruzeiros) para refôrço do auxílio regular, no exercício de 1966, do Departamento Estadual de Estatística do Rio Grande do Sul.

A JUNTA EXECUTIVA CENTRAL DO CONSELHO NACIONAL DE ESTATÍSTICA, usando de suas atribuições, e

considerando que, no exercício de 1965, foi atribuído ao Departamento Estadual de Estatística do Rio Grande do Sul o auxílio de Cr$ 16.300.000 (dezesseis milhões e trezentos mil cruzeiros), como resultante de cálculo feito com base, apenas, na arrecadação da "quota de estatística" do interior, de 1964, uma vez que a arrecadação da Capital, no montante de Cr$ 153.492 725 (cento e cinqüenta e três milhões, quatrocentos e noventa e dois mil, setecentos e vinte e cinco cruzeiros), estava sendo depositada em consignação e "sub-judice";

considerando que o Departamento Estadual de Estatística do Rio Grande do Sul se beneficiaria, no exercício de 1965, com o auxílio de Cr$ 24 400.000 (vinte e quatro milhões, quatrocentos mil cruzeiros) se a importância de Cr$ 153 492 725 (cento e cinqüenta e três milhões, quatrocentos e noventa e dois mil, setecentos e vinte e cinco cruzeiros) fôsse computada como receita de 1964, para efeito de cálculo respectivo, na forma da AG-800/62, havendo, portanto, uma diferença a seu favor de Cr$ 8 100.000 (oito milhões e cem mil cruzeiros);

considerando que a referida importância, de Cr$ 153 492 725 (cento e cinqüenta e três milhões, quatrocentos e noventa e dois mil, setecentos e vinte e cinco cruzeiros), relativa à arrecadação, do exercício de 1964, do Município de Pôrto Alegre — Capital, até então depositada à disposição da Justiça, foi liberada e colocada à disposição do Conselho Nacional de Estatística em 2 de maio de 1966,

considerando que, com a liberação e o depósito da importância referida — Cr$ 153.492 725 — no Banco do Brasil à disposição dos Convênios Nacionais de Estatística Municipal, desapareceu o fato que impedia o estudo requerido pela Junta Executiva Regional de Estatística, através da Resolução n.º 196, de 19 de agôsto de 1966;

considerando, finalmente, os pareceres emitidos pelo Serviço Econômico e Financeiro da Secretaria-Geral dêste Conselho, constantes do processo n.º 10 844/66, favoráveis à concessão do auxílio sob a forma de "Crédito Especial",

RESOLVE:

Artigo único — Fica aberto, na Secretaria-Geral do Conselho Nacional de Estatística, mediante apropriação dos recursos existentes na conta "Convênios Nacionais de Estatística Municipal", crédito especial de Cr$ 8 100 000 (oito milhões e cem mil cruzeiros), destinado ao refôrço do auxílio regular concedido ao Departamento Estadual de Estatística do Rio Grande do Sul, no exercício de 1966, na conformidade da Resolução JEC/874, de 2 de fevereiro de 1966

RESOLUÇÃO JEC-902, DE 7 DE DEZEMBRO DE 1965

Concede auxílio especial, no valor de Cr$ 4 500 000 (quatro milhões e quinhentos mil cruzeiros), ao Departamento Estadual de Estatística de Pernambuco, destinado a suplementar o auxílio regular de 1966

A JUNTA EXECUTIVA CENTRAL DO CONSELHO NACIONAL DE ESTATÍSTICA, usando de suas atribuições, e

considerando a solicitação formulada pela Junta Executiva Regional de Estatística do Estado de Pernambuco, através da Resolução JERE/156, de 21-9-66, no sentido de ser concedido, ao Departamento Estadual de Estatística de Pernambuco, uma suplementação ao auxílio regular, para atendimento dos encargos normais correspondentes às Verbas II — Material e III — Serviços e Encargos;

considerando, ainda, os pareceres constantes do processo n.º 11 614/66, opinando pela concessão do auxílio, no valor de Cr$ 4 500 000 (quatro milhões e quinhentos mil cruzeiros), destinado à suplementação do auxílio regular,

RESOLVE:

Artigo único — Fica aberto, pela Secretaria-Geral do Conselho Nacional de Estatística, crédito especial de Cr$ 4 500 000 (quatro milhões e quinhentos mil cruzeiros), mediante destaque dos recursos existentes na conta "Convênios Nacionais de Estatística Municipal", destinado à suplementação do auxílio regular, no exercício de 1966, concedido ao Departamento Estadual de Estatística de Pernambuco

RESOLUÇÃO JEC-903, DE 7 DE DEZEMBRO DE 1966

Concede filiação ao Serviço de Coordenação e Processamento de Dados do Serviço Nacional de Aprendizagem Comercial

A JUNTA EXECUTIVA CENTRAL DO CONSELHO NACIONAL DE ESTATÍSTICA, usando das suas atribuições, e

considerando que o Serviço Nacional de Aprendizagem Comercial requereu filiação, ao Conselho Nacional de Estatística, de seu Serviço de Processamento de Dados, na conformidade do que dispõe o artigo 3 º da Resolução JEC-773/63,

considerando que o órgão filiando atende devidamente às exigências da citada Resolução, conforme consta do processo n º 9 692/66,

RESOLVE

Art 1 º — É concedida filiação do Serviço de Processamento de Dados do Serviço Nacional de Aprendizagem Comercial ao Conselho Nacional de Estatística, do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, na conformidade do disposto na Resolução JEC-773/63

Art 2 º — O têrmo de filiação, de acôrdo com o artigo 4 º da mesma Resolução, será lavrado dentro do prazo de trinta dias

RESOLUÇÃO JEC-904, DE 21 DE DEZEMBRO DE 1966

Aprova o orçamento do Conselho Nacional de Estatística do IBGE, para o exercício de 1967

A JUNTA EXECUTIVA CENTRAL DO CONSELHO NACIONAL DE ESTATÍSTICA, usando de suas atribuições,

RESOLVE

Art 1 º — O orçamento geral do Conselho Nacional de Estatística do IBGE, para o exercício de 1967, discriminado pelos anexos integrantes desta Resolução, estima a Receita em Cr$ 30 551 617 000 (trinta bilhões, quinhentos e cinqüenta e um milhões, seiscentos e dezessete mil cruzeiros) e limita a Despesa em Cr$ 30 551.617 000 (trinta bilhões, quinhentos e cinqüenta e um milhões, seiscentos e dezessete mil cruzeiros)

Art 2.º — A receita será realizada mediante o recebimento do "Auxílio", concedido pelo Govêrno da União, de acôrdo com o anexo da Lei n º 5 189, de 8 de dezembro de 1966, a arrecadação da "quota de estatística", ex-vi da legislação em vigor, e de outras receitas orçamentárias, na forma das especificações constantes do anexo n º 2 e subanexo 1 e 2, sob o grupamento seguinte:

1 0 0 00 — RECEITAS CORRENTES

1 1 0 00 — RECEITA TRIBUTÁRIA

1 1 2 00 — TAXAS

1 1 2 11 — Taxa de Estatística

	Cr$	Cr$
Rondônia	4 911 000	
Acre	12 834 000	
Amazonas	32 689 000	
Roraima	1 076 000	
Pará	77 687 000	
Amapá	6 931 000	
Maranhão	20 285 000	
Piauí	23 324 000	
Ceará	95 414 000	
Rio Grande do Norte	43 276 000	
Paraíba	47 878 000	

Pernambuco	229 315 000	
Alagoas	41 212 000	
Sergipe	36 096 000	
Bahia	245 458 000	
Minas Gerais	544 299 000	
Espírito Santo	70 033.000	
Rio de Janeiro	263 682 000	
Guanabara	1	
São Paulo	2 543 858 999	
Paraná	315 028 000	
Santa Catarina	135 151 000	
Rio Grande do Sul	510 303 000	
Mato Grosso	75 719 000	
Goiás	82 178 000	
Distrito Federal	41 362 000	5 500 000 000

1 2 0 00 — RECEITA PATRIMONIAL		400 000 000
1 4 0 00 — TRANSFERÊNCIAS CORRENTES "Auxílio da União", ex-vi da Lei n.º 5 189, de 8 de dezembro de 1966		23 616 397 000
1 5 0 00 — RECEITAS DIVERSAS		155 617.000
5 0 0 00 — OUTRAS RECEITAS		
Saldos de exercícios anteriores		879 603 000
TOTAL DA RECEITA		30 551 617.000

Art 3.º — A despesa será realizada na forma do anexo n.º 2 e subanexo 3 e 4, com o atendimento dos encargos e manutenção dos serviços do Conselho Nacional de Estatística, obedecida a seguinte discriminação:

3 0 0 0 — DESPESAS CORRENTES		
3 1 0 0 — DESPESAS DE CUSTEIO		
3 1 1 0 — Pessoal	22 953 447 000	
3 1 2 0 — Material	1 207 000 000	
3 1 3 0 — Serviços de Terceiros	1 871 000 000	
3 1 4 0 — Encargos Diversos	494 000 000	26 525 447 000
3 2 0 0 — TRANSFERÊNCIAS CORRENTES		3.253 170 000
TOTAL DE DESPESAS CORRENTES		29 778 617 000
4 0 0 0 — DESPESA DE CAPITAL		
4 1 0 0 — INVESTIMENTOS		773 000 000
TOTAL DA DESPESA		30 551 617 000

Art. 4.º — O auxílio financeiro destinado aos Órgãos Centrais Regionais de Estatística, na forma do Decreto-Lei n.º 4 181/42, no montante de Cr$ 660 000 000 (seiscentos e sessenta milhões de cruzeiros), será distribuído e aplicado em obediência às disposições contidas nas Resoluções AG-848/66 e JEC-495/55.

Art 5.º — As propostas de destaques e suplementações a serem submetidas à Junta Executiva Central, no presente orçamento, sòmente serão admitidas a partir da 1.ª sessão ordinária do mês de julho e, na conformidade do Art. 7.º, do Decreto n.º 55 511, de 11-11-65, até 29 de outubro de 1967

RESOLUÇÕES DA CCN

RESOLUÇÃO CCN-79, DE 21 DE DEZEMBRO DE 1966

Aprova o Orçamento do Serviço Nacional de Recenseamento para o exercício financeiro de 1967.

A Comissão Censitária Nacional, usando de suas atribuições,

RESOLVE:

Art. 1.º — O Orçamento do Serviço Nacional de Recenseamento, para o exercício de 1967, a seguir discriminado, estima a RECEITA em Cr$ 7 205 741.000, (sete bilhões, duzentos e cinco milhões, setecentos e quarenta e um mil cruzeiros) e limita a DESPESA em Cr$ 7 205 741.000 (sete bilhões, duzentos e cinco milhões, setecentos e quarenta e um mil cruzeiros).

Art. 2 º — A Receita será realizada mediante o recebimento do auxílio concedido pelo Govêrno da União, de acôrdo com a Lei nº 5 189, de 12 de dezembro de 1966, e de rendas patrimoniais provenientes da execução de serviços de apuração para terceiros nos equipamentos — eletrônicos e mecânicos — operados pelo Serviço Nacional de Recenseamento e receitas diversas, na forma das especificações abaixo:

	Cr$ 1 000	Cr$ 1 000
RECEITA ORÇAMENTÁRIA		
1.0 0.00 — RECEITAS CORRENTES		
1 2 0.00 — RECEITA PATRIMONIAL		
1.2.1.50 — Outras Receitas Patrimoniais		
50.01 — Receita de serviços de apuração	50 000	
1 4.0 00 — TRANSFERÊNCIAS CORRENTES		
1.4.8 00 — Contribuições da União	6 713 564	
1.5.0.00 — RECEITAS DIVERSAS		
1.5.8 00 — Eventuais .	2 000	6 765 564
2 0 0.00 — RECEITAS DE CAPITAL		
2.4 0.00 — Transferências de Capital		
2 4 1 00 — Auxílio da União		440 177
TOTAL DA RECEITA		7 205.741

Art. 3.º — A Despesa será realizada com o atendimento dos encargos e manutenção das tarefas censitárias no Serviço Nacional de Recenseamento, obedecida a seguinte discriminação:

3 0 0 0 — DESPESAS CORRENTES	1 000
3 1 0 0 — DESPESAS DE CUSTEIO	
3 1 1.0 — PESSOAL	
3 1 1 1 — PESSOAL CIVIL	
01 00 — Vencimentos e vantagens fixas	
01 — Vencimentos	2 328 996
04 — Auxílio para Diferença de Caixa .	3 360
05 — Gratificação de Função	176 496
07 — Gratificação pela Participação em Órgão de Deliberação Coletiva	1 095
08 — Gratificação Adicional por tempo de serviço (Qüinqüênios)	45 562
09 — Gratificação pelo exercício em regime de tempo integral e dedicação exclusiva . .	234 126

		Cr$ Cr$ 1 000
02.00	— Despesas variáveis com o pessoal civil	
01	— Ajuda de Custo .	5 000
02	— Diárias	26.000
03	— Substituições	6.000
04	— Gratificação pela prestação de serviço extraordinário	167 856
05	— Gratificação pela representação de Gabinete	12.120
11	— Salário de Pessoal Temporário (Itens I e II do Artigo 3º do decreto nº 50 314, de 4-3-61)	344.031
	Total do Elemento 3 1 1 0	3.350 642

3 1 2 0 — MATERIAL DE CONSUMO

02 00	— Impressos, Artigos de Expediente, Desenho, Cartografia, Geodésia, Topografia e Ensino	107.245
03 00	— Artigos de Higiene, Conservação, Acondicionamento e Embalagem ...	34.735
04 00	— Combustíveis e Lubrificantes .	20.770
05 00	— Materiais e Acessórios de Máquinas, de Viaturas, de Aparelhos, de Instrumentos e de Móveis	449 445
10 00	— Matérias-Primas e Produtos Manufaturados, ou Semi-manufaturados destinados à transformação; Material para conservação de bens imóveis	100.000
11 00	— Produtos Químicos, Biológicos, Farmacêuticos e Odontológicos, Vidraria, artigos cirúrgicos e outros de uso em Laboratório, Enfermaria, Gabinetes Técnicos e Científicos ..	4 057
13 00	— Vestuários, Uniformes, Artigos para Esporte, Jogos e Divertimentos Infantis, seus equipamentos e respectivos acessórios calçados, roupa de cama, mesa, copa, cozinha e banho	11 544
15 00	— Lâmpadas Incandescentes e Fluorescentes; Acessórios para Instalações Elétricas	53 375
17 00	— Outros Materiais de Consumo	
01	— Materiais para apuração eletromecânica e eletrônica	258 700
	Total do Elemento 3 1 2 0	1 039.871

		Cr$
	3 1 3 0 — SERVIÇOS DE TERCEIROS	1 000
01 00	— Acondicionamento e Transporte de Encomendas, Cargas e Animais	4 000
02 00	— Passagens, Transportes de Pessoas e suas Bagagens, Pedágios .	11 000
03 00	— Assinaturas de Jornais e de Recortes de Publicações Periódicas	1 300
04 00	— Iluminação, Fôrça Motriz e Gás	69 000
05 00	— Serviços de Asseio e Higiene, Taxas de Água, Esgôto, Lixo e outras correlatas	6.000
06 00	— Reparos, Adaptações e Conservação de Bens Móveis e Imóveis	50 000
07 00	— Serviço de Divulgação, de Impressão e de Encadernação	1 200.000 1 200 000
09 00	— Serviços de Comunicação em Geral .. .	15 000
10 00	— Locação de Bens Móveis e Imóveis; Tributo e Despesas de Condomínio . .	17 000
11 00	— Seguros em Geral .	52.000
16 00	— Outros Serviços de Terceiros	
01	— Serviços de Seleção e Aperfeiçoamento de Pessoal	6 000
02	— Aluguel de Equipamentos Mecânicos, Eletromecânicos e Eletrônicos	400 000
03	— Serviços de Manutenção de Equipamentos Mecânicos, Eletromecânicos e Eletrônicos .	300.000
	Total do Elemento 3 1 3 0	2 131.300

3 1 4 0 — ENCARGOS DIVERSOS

		Cr$ 1 000
01 00	— Despesas Miúdas de Pronto Pagamento	2 000
04 00	— Festividades, Recepções, Hospedagens e Homenagens	6 000
10 00	— Assistência Social .	6 000
13 00	— Outros Encargos	
	Despesas com a execução de serviços para terceiros nos Equipamentos de Apuração (Resolução CCN/32/62)	100 000
	Total do Elemento 3 1 4.0 . ..	114.000
	TOTAL DAS DESPESAS DE CUSTEIO	6 635.813

3 2 0 0 — TRANSFERÊNCIAS CORRENTES

3 2 4 0 — PENSIONISTAS

03 00	— Outras pensões .. .	621
	Total do Elemento 3 2 4 0 . .	621

3 2 5 0 — SALÁRIO-FAMÍLIA

01 00	— Pessoal Civil	67.200
	Total do Elemento 3 2 5 0	67 200

3 2 8 0 — CONTRIBUIÇÕES DE PREVIDÊNCIA SOCIAL

01 00	— Fundo de Benefício (Lei n o 3 807 de 26-8-60)	61.930
	Total do Elemento 3 2 8 0 .	61 930
	TOTAL DE TRANSFERÊNCIAS CORRENTES	129.751

4 0 0 0 — DESPESAS DE CAPITAL

4 1 0 0 — INVESTIMENTOS

4 1 3 0 — EQUIPAMENTOS E INSTALAÇÕES

4 1 3 1	— Máquinas, Motores e Aparelhos .	355 937
4 1 3 7	— Diversos Equipamentos e Instalações	63.480
	Total do Elemento 4 1 3 0 . .	419 417

4 1 4 0 — MATERIAL PERMANENTE 1.000

02 00	— Material Bibliográfico, Discotecas e Filmotecas, Objetos Históricos, Obras de Arte e Peças para Museus	1.500
03 00	— Ferramentas e Utensílios de Oficina	9.260
05 00	— Utensílios de Copa, Cozinha, Dormitório e Enfermaria	500
08 00	— Mobiliário em Geral	9 000
11 00	— Outros Materiais de Uso Duradouro . . .	500
	Total do Elemento 4 1 4 0 .	20 760
	TOTAL DAS DESPESAS DE CAPITAL	440 177

RESUMO

DESPESAS CORRENTES

3 1 0 0 — DESPESA DE CUSTEIO	6 635 813
3 2 0 0 — TRANSFERÊNCIAS CORRENTES	129 751

DESPESAS DE CAPITAL

4 1 0 0 — Investimentos .	440 177
TOTAL GERAL	7 205 741

RESOLUÇÃO CCN-80, DE 21 DE DEZEMBRO DE 1966

Abre Crédito Especial para pagamento de diferença de Gratificação.

A Comissão Censitária Nacional, usando de suas atribuições e

considerando as informações constantes do processo n.º 3 352/66 encaminhado pela Direção do Serviço Nacional de Recenseamento;

considerando que nos têrmos da Portaria n.º 1, de 22-7-66, do Serviço de Pessoal da Secretaria-Geral do CNE, que efetuou o enquadramento provisório dos ocupantes dos cargos de Estatístico do CNE, conforme o disposto no Decreto n.º 57 837, de 17-2-66, aquela Direção é obrigada a efetuar o pagamento ao servidor AMARO PALHA CORRÊA, Estatístico Nível 22, da diferença de gratificação de Função, relativa a seis meses e 17 dias do exercício de 1964,

considerando que a despesa, conseqüente, se refere a exercício anterior e não existem recursos no orçamento vigente,

RESOLVE:

Artigo único — Fica aberto, no Serviço Nacional de Recenseamento, o Crédito Especial de Cr$ 172 454 (cento e setenta e dois mil, quatrocentos e cinqüenta e quatro cruzeiros), mediante a apropriação de recursos existentes na conta "Responsabilidades por Encargos Realizáveis ou a Liquidar" para pagamento ao servidor AMARO PALHA CORRÊA, Estatístico Nível 22, da despesa relacionada no Processo SNR 3 352/66, referente à Gratificação de Função em virtude do enquadramento provisório efetuado pela Portaria n.º 1, de 22-7-66, do Serviço de Pessoal da Secretaria-Geral do CNE

REUNIÃO DA COMISSÃO DE ESTATÍSTICA DAS NAÇÕES UNIDAS

Realizou-se no período de 10 a 20 de outubro do ano passado, em Genebra, a 14ª Sessão da Comissão de Estatística das Nações Unidas, que reuniu técnicos da maioria dos países do mundo, bem como especialistas de outros organismos internacionais, como a Organização Internacional do Trabalho, a Organização para a Alimentação e a Agricultura, a UNESCO, a Organização Mundial da Saúde e o GATT O Brasil fêz-se representar pelo Secretário-Geral do Conselho Nacional de Estatística, professor Sebastião Aguiar Ayres

A sessão presidida pelo Sr Petter Jakob Bjerve, da Noruega, devotou-se ao exame de três itens: o programa de trabalho integrado no campo das estatísticas internacionais, as contas nacionais e os programas para os Censos demográfico de habitação a realizarem-se em 1970

Programa Integrado de Trabalho no campo das estatísticas internacionais

A Comissão examinou o relatório de uma reunião que setores especializados de organizações internacionais realizaram sôbre atividades estatísticas (documento E/CN.3/350) e aprovou a proposta de que fôsse constituída uma comissão coordenadora das atividades estatísticas subordinada à Comissão Administrativa de Coordenação, que se encarregaria de associar os principais órgãos de estatística das diversas organizações internacionais. Foi feita a recomendação de que o Conselho Econômico e Social (ECOSOC) aprovasse uma resolução sôbre coordenação estatística, indicando o Secretário-Geral para, assessorado pelos organismos especializados, preparar um relatório sôbre os diversos setores da Estatística que necessitem de normas internacionais e outro sôbre métodos práticos através dos quais a Comissão possa rever e fazer recomendações relativas a propostas nesse terreno

A Comissão tratou dos programas de estatística das Nações Unidas, dos organismos especializados e do Instituto Interamericano de Estatística, através do exame do Relatório intitulado *Programa Qüinqüenal Integrado de Estatísticas Internacionais* e solicitou que outros relatórios do mesmo tipo fôssem apresentados nas próximas sessões

Foi examinado também o problema das medidas a serem adotadas a fim de evitar a duplicação no pedido de dados estatísticos que são feitos aos governos pelas Organizações Internacionais, e solicitou-se que documento similar fôsse presente ao plenário da próxima sessão, incluindo informações particularizadas sôbre dados que os organismos internacionais continuam a coletar regularmente junto aos órgãos nacionais

A Comissão tratou ainda da relação entre a população e os censos agrícolas, examinando documento preparado pelo Escritório das Nações Unidas e a Divisão de Estatística da FAO Outro tema discutido foi o da organização de uma Classificação por Categorias Econômicas Gerais, concluindo-se a respeito, que a mesma deveria ser revisada à luz dos pontos de vista expendidos pela Comissão, para depois ser distribuída aos países membros para comentário, a fim de que uma versão revista da mesma pudesse ser examinada na próxima sessão

Contas e Balanços Nacionais

Nas sessões realizadas para tratar do tema geral das Contas Nacionais, foi examinada a extensão e a revisão do Sistema de Contas Nacionais (SNA), com base na Proposta de Revisão do Sistema de Contas Nacionais, no Relatório da Segunda Sessão do Grupo de Técnicos sôbre Revisão das Contas Nacionais e no documento sôbre Revisão do Sistema de Contas

A Comissão constatou que as propostas contidas nesses documentos forneciam a base para uma revisão do Sistema de Contas Nacionais e concluiu que até meados de 1967 deveria ser preparada uma nova apresentação do Sistema, incluindo capítulos adicionais sôbre contas nacionais a preços constantes e um estudo de análise intersetorial, a fim de ser submetida ao exame dos órgãos nacionais de estatística Depois que as reuniões regionais tenham examinado e discutido o nôvo documento, o Grupo de Técnicos no assunto reunir-se-á também, em fins do mesmo ano, com o objetivo de rever o trabalho e tomar decisões a respeito do assunto. A nova apresentação, com um resumo dos comentários feitos pelos diversos países e os pontos de vista expendidos pelo Grupo de Técnicos, será encaminhada aos membros da Comissão em janeiro de 1968, a fim de ser objeto das decisões da 15.ª sessão

Tomando como base de discussão o Relatório do Grupo de Técnicos e um estudo de autoria do professor Richard Stone, a Comisssão concluiu que seria de interêsse levar a cabo uma pesquisa a respeito das características das estatísticas de balancetes, planejadas e apuradas pelas repartições nacionais de estatística A Comissão discutiu um sistema de estatísticas de distribuição da renda que suplementa o sistema de contas nacionais instituído com base no documento sôbre Estatística da Distribuição da Renda; examinou, também, o Relatório do Grupo de Técnicos e o estudo apresentado pela Sr.ª M Mód, da Hungria, intitulado *Estatística da Renda da População,* admitindo que êsses três documentos facilitaram de muito o estudo das diretrizes internacionais no campo das estatísticas da distribuição de renda e o exame das implicações dessas estatísticas na revisão dos sistemas de contas nacionais.

Em vista de a Repartição de Estatística estar elaborando trabalho para exame de um grupo de técnicos que se reunirá em princípios de 1967 com o fito de reexaminar o problema da distribuição da renda no contexto de uma política social, a Comissão admitiu discutir, em sua próxima sessão, as questões de ordem estatística que daí se originassem

A Comissão examinou ainda estudo sôbre progressos feitos em prol do interrelacionamento entre o Sistema de Contas Nacionais e o Sistema de Produto Material, e exprimiu sua satisfação pelo grau em que se ampliou o campo comum entre ambos os setores de estudo

Programas dos Censos Demográfico e de Habitação a realizar-se em 1970

A Comissão reviu os princípios e as recomendações para os censos demográfico e domiciliar, examinou relatório técnico a respeito do assunto e acolheu os dois grupos de recomendações, com emendas aprovadas durante a sessão, salientou, em seguida, a importância das contribuições feitas para o levantamento das informações estatístisticas necessárias a caracterizar os progressos feitos na consecução dos objetivos assinalados para a Década do Desenvolvimento

Foi feita solicitação ao ECOSOC no sentido de ser aprovada resolução sôbre os princípios e recomendações para os Censos Demográficos de Habitação a realizarem-se em 1970, prevendo-se a distribuição de recomendações a respeito e a mobilização de todos os recursos disponíveis para assistir os governos na realização das mesmas

Resoluções aprovadas

No decorrer da reunião foram aprovadas resoluções sôbre coordenação estatística, revisão e desenvolvimento dos sistemas de contas nacionais; estatísticas da distribuição da renda, relações entre o sistema de contas nacionais e o sistema de produto material, e princípios e recomendações para os censos demográfico e de habitação de 1970

Ao final da sessão, foi acolhida pelo plenário a indicação da cidade de Nova Iorque para sede da próxima sessão a realizar-se em 1968

JOÃO ULRICH EBERHARD JOCHMANN

O falecimento do Estatístico aposentado *João Ulrich Eberhard Jochmann,* ocorrido a 7 de dezembro último na cidade de Augsburg, Alemanha Ocidental, deixou consternados os círculos estatísticos brasileiros, bem como todos os que o conheceram pessoalmente ou privaram de sua intimidade

Nasceu João Jochmann em Berlim, a 25 de novembro de 1900, sendo seus pais Augusto Carlos Frederico Jochmann e Maria Francisca Elisabeth Jochmann. Fêz os cursos primário e secundário em Berlim, e o superior naquela cidade e em Friburgo. Em 1926, ingressou como funcionário no Departamento Central de Estatística de Reich, onde se houve com zêlo e dedicação no desempenho de várias comissões que lhe foram confiadas Com o advento do nazismo, em 1933, transferiu-se para o Brasil, estabelecendo residência em Curitiba, Paraná, onde se dedicou ao magistério durante cêrca de três anos O seu ingresso no Sistema Estatístico Brasileiro verificou-se em 1937, quando foi designado pelo Govêrno paranaense para prestar serviços ao Departamento Estadual de Estatística, na qualidade de Estatístico-chefe. Em agôsto de 1939, a Secretaria de Interior e Justiça do Paraná o colocou à disposição da Secretaria-Geral do Conselho Nacional de Estatística, onde mais adiante, seria enquadrado na carreira de Estatístico Foi um dos mais diligentes colaboradores de Mário Augusto Teixeira de Freitas na tarefa de organização da Secretaria-Geral, prestando relevantes serviços no setor das estatísticas industriais Foi, ainda, o autor do planejamento do "Anuário Estatístico do Brasil", na segunda fase desta publicação, iniciada em 1946 e quando foram estabelecidas linhas mestras que vêm sendo observadas até hoje

Na qualidade de chefe do antigo Serviço de Documentação e Informações Estatísticas, despendeu grandes esforços na revisão do modêlo de coleta e de plano de apuração do Registro Industrial Desempenhou várias comissões com invulgar eficiência Em 1950, representou o Conselho Nacional de Estatística junto à comissão instituída pelo Ministro do Trabalho para o estudo dos problemas relacionados com a estatística industrial, campo em que se especializara. No mesmo ano, visitou os Estados sulinos, realizando estudos destinados ao planejamento do censo industrial. Em 1957, assessorou o Secretário-Geral do Conselho Nacional de Estatística na 30ª Sessão do Instituto Internacional de Estatística, levada a cabo em Estocolmo, Suécia. Entre várias realizações que assinalam a sua permanência na Secretaria-Geral, registre-se a organização do "Boletim Estatístico", cujo primeiro número circulou rigorosamente dentro do prazo estabelecido pela Direção

Técnico dos mais categorizados, estendeu a sua colaboração a outros órgãos especializados, como o Instituto Brasileiro de Economia, da Fundação Getúlio Vargas, o Centro Brasileiro de Pesquisas Educacionais e o antigo Instituto Nacional de Imigração e Colonização

Colaborou nos periódicos editados pelo Instituto e em outros brasileiros, entre êsses "O Observador Econômico e Financeiro".

Aposentando-se em 1959, em virtude do seu estado de saúde, regressou à Alemanha no ano seguinte, tornando-se ali um ponto de referência obrigatório para quantos, colegas e amigos do Brasil, visitavam aquêle país. Não obstante os seus padecimentos, empreendeu vários trabalhos ligados à reunião e tradução de documentos informativos a respeito do Brasil, necessários ao estudo de projetos relacionados com investimentos alemães em realizações brasileiras

Consorciado com D Martha Kohler, deixa quatro filhos, todos brasileiros: Pedro Maria Bernardo, Norberto Maria, Mário Frederico e Mônica Maria Marcelina

Uma bibliografia dos trabalhos publicados por João Jochmann será apresentada a seguir:

1 — APRESENTAÇÃO de estatísticas segundo regiões. *Revista de Finanças Públicas,* Rio de Janeiro, *15* (173/174): 16-8, maio/jun. 1955, tab.

2 — ASPECTOS da nossa indústria *Observador Econômico e Financeiro,* Rio de Janeiro, 13 (156): 22-7, jan. 1949, fot. Primeiro de uma série de três artigos sôbre as condições de trabalho na indústria nacional em Estados do sul.

3 — EPÍLOGO a Malthus *Revista de Finanças Públicas,* Rio de Janeiro, *15* (177): 13-22, set 1955.

4 — ESTATÍSTICAS regionais. *Revista de Finanças Públicas,* Rio de Janeiro, *15* (179/180): 11-3, nov./dez. 1955, gráf

5 — L'ÉTAT actual des recherches regionales au Brésil (O estado atual das pesquisas regionais no Brasil) *Bulletin de l'Institut Internacional de Statistique,* Haye, *35* (4): 425-38, 1957 (Tabelas em anexo) (Parte E — A estatística das regiões do interior de um país) (Resumo em Inglês).

6 — EXPORTAÇÃO do Brasil, em confronto com a de outros países, *Revista Brasileira de Estatística,* Rio de Janeiro, *1* (1); 123-33, jan/mar 1940 (Secção Colaboração).

7 — A HULHA da Alemanha e do Ruhr. *Observador Econômico e Financeiro,* Rio de Janeiro, *13* (146): 61-5, mar 1948, mapa, tab

8 — INDÚSTRIAS inusitadas num Brasil em progresso *Observador Econômico e Financeiro,* Rio de Janeiro, *14* (157): 20-5, fev 1949, fot. (Encontros em longa viagem)

Segundo da série sôbre as condições de trabalho na indústria nacional em Estados do Sul

9 — À MARGEM da industrialização. *Revista Brasileira de Estatística,* Rio de Janeiro, *1* (3): 535-45, jul/set 1940 (Secção Colaboração)

10 — NOMENCLATURA brasileira de mercadorias *Observador Econômico e Financeiro,* Rio de Janeiro, *17* (203): 72-4, dez. 1952, tab. (Aperfeiçoamento da estatística comercial).

11 — ONDE o capital vive em paz com o trabalho. *Observador Econômico e Financeiro,* Rio de Janeiro, *14* (158): 29-34, mar 1949, fot

Terceiro da série sôbre as condições de trabalho na indústria nacional em Estados do Sul

12 — PADRÕES de alimentação dos industriários no Brasil. *Revista Brasileira dos Municípios,* Rio de Janeiro, *8* (32): 299-314, out/dez 1955 (Colaboração)

13 — A POPULAÇÃO do Distrito Federal. *Boletim do Conselho Técnico de Economia e Finanças,* Rio de Janeiro, *11* (130/131): 16-9, out/nov 1951

14 — O PROBLEMA da assimilação *Revista Brasileira dos Municípios,* Rio de Janeiro, *9* (33): 11-3 (Colaboração)

15 — RESENHA retrospectiva sôbre a economia brasileira. *Revista Brasileira de Estatística,* Rio de Janeiro, *3* (10): 279-90, abr/jun 1942. (Colaboração)

16 — A SIDERURGIA no mundo *O Observador Econômico e Financeiro,* Rio de Janeiro, *15* (175): 51-7, agô 1950, fot tab

17 — SÔBRE o cálculo da renda nacional *O Observador Econômico e Financeiro,* Rio de Janeiro, *12* (140): 61-4, set 1947, tab

18 — TAMANHO das cidades, e padrão de vida do operário industrial, Revista Brasileira dos Municípios, Rio de Janeiro, 7 (27) · 125-32, jul/set 1954 (Colaboração).

PADRE LEBRET *

Ao ensejo da morte do Padre Lebret, a revista Développement et Civilisations, em seu n.º 27, relativo a setembro de 1966, reuniu manifestações de pesar de diversas personalidades mundiais A RBE transcreve a seguir algumas dessas manifestações a fim de dar ao leitor brasileiro um retrato que, por sua multiplicidade, estará bem próximo da verdadeira personalidade do fundador do Movimento Economia e Humanismo.

* Extraído da Revista "Développement et Civilisations", de l'Institut de Recherche et de Formations en Vue du Développement Harmonise", n.º 27, set de 1966 Tradução de Ruth Göttert

"Os países em desenvolvimento perderam um amigo inteiramente devotado e altamente qualificado pelo espírito e pelo coração."

Alioune Diop
(Diretor da Sociedade Africana de Cultura)

"O seu exemplo proporcionou-me a determinação para me devotar à integração dos aspectos humanos da vida na aplicação da Ciência e da Técnica É o que buscamos em nossos esforços em favor do desenvolvimento"

Antony Chullikal
(Professor indiano de Economia e Teoria Política)

No exato momento em que íamos rodar o presente número, a morte atingia o nosso fundador. Regressando urgentemente de sua estação de cura anual, para se submeter a uma intervenção cirúrgica, Louis Joseph Lebret, com o qual eu dirigia a Revista há vários anos, sucumbiu vitimado pelo terrível mal que o havia atingido no ano passado

E na sexta-feira, 22 de julho, na Igreja dos Dominicanos, em St. Honoré, os embaixadores do Senegal, de Madagascar e do Daomé, representantes de diversos Estados e ministros franceses, principais colaboradores de "Développement et Civilisations", do IRFED, de "Économie et Humanisme", da CINAM, do IRAM e numerosos amigos e antigos companheiros de trabalho do Padre Lebret, ouviram o panegírico, feito pelo Reverendo Padre Nielli O P , daquele que há tanto tempo nos guiava, esclarecia e apoiava

A maior homenagem que seus amigos podem oferecer a um homem como o nosso fundador é continuar a sua obra Nós o faremos, principalmente através desta Revista Léopold Sedar Senghor analisou magnìficamente a sua obra pela rádio senegalesa; nossos amigos Perroux e André Philip ressaltaram os seus principais aspectos em dois jornais diários. Os principais trechos das comovedoras cartas recebidas e das homenagens que lhe foram prestadas foram transmitidos aos nossos leitores.

Quanto a mim, do meu amigo Louis Joseph Lebret, do pregador dominicano, do pesquisador apaixonado pelo desenvolvimento econômico e social, desejo ressaltar três características que me parecem essenciais

Êle possuía a *fôrça profunda dos pacifistas* e sem jamais se exaltar ou queixar-se demonstrava incrível determinação sempre que se tratava de defender os seus princípios Humilde em suas atitudes, respeitando os direitos dos outros, acho que, no fundo, só cedia a Deus

Amava ao próximo de todo o coração e *das categorias as mais diversas*: jovens e velhos marinheiros da Bretanha, camponeses da África Negra ou da América Latina, tecnocratas ocidentais e economistas preeminentes, universitários e pessoas humildes de Lion, Paris, Beirute, todos se sensibilizaram por seu amor profundo, sem reservas

Dispunha do dom de dar a um pensamento profundo, a uma iniciativa, *uma formulação clara e simples* que a todos causava grande admiração. Atualmente as expressões "estudo global do problema do desenvolvimento", "pesquisa multidisciplinar" e "desenvolvimento harmonioso" são empregadas em todo o mundo e cada um gostaria de ser o primeiro a revelar e expressar a necessidade de reduzir os problemas econômicos às dimensões do homem, que é quem se beneficiará ou sofrerá com as suas soluções

Criação intelectual é sugerir a outrem, impor-lhes as idéias de fôrça que resultarão em atos responsáveis O Padre Lebret foi, portanto, no sentido pleno da palavra, um criador.

Robert Buron

Para o Senegal, o Padre Lebret foi o pai do nosso Planejamento Quando resolvemos elaborar um plano, fizemos um apêlo ao Padre Lebret, pois sabíamos que êle era um dos animadores do movimento Economia e Humanismo

Êle foi mais do que nosso ministro da economia, foi nosso mestre em assuntos econômicos e o Senegal lamentará profundamente o seu desaparecimento

No plano pessoal, era um amigo e nos sentíamos em comunhão de pensamentos. Foi uma grande perda para a França, e principalmente para o Senegal

Léopold Sedar Senghor
(Presidente da República do Senegal)

UMA FONTE DE MEDITAÇÃO SÔBRE TUDO O QUE É FUNDAMENTAL NO HOMEM

Quando, no dia 22 de julho último, no quadro grandioso da Igreja dos Dominicanos, em Paris, tive o privilégio de, ao lado de todos os seus, dar o último adeus ao Padre Lebret, ocorreram-me as palavras de uma antiga canção malgaxe

"Ry masoandro mody ô, masina koa
Sambatra ny mody nahavita soa!"

que, adaptadas às circunstâncias do

Padre Lebret, poderiam ser traduzidas mais ou menos assim:

"Feliz daquele que, como o sol
| crepuscular,
Retorna para junto do Pai, após
| tanto realizar!"

Como é difícil a análise, mesmo sumária, de uma vida tão maravilhosamente realizada, com tanta autenticidade, dedicada ao serviço dos menos favorecidos, preocupada com as motivações e manifestações, visíveis ou ocultas da miséria alheia, pela angústia de dois têrços da humanidade que vêem, a cada dia, agravar-se o seu drama; que em tôrno de seu conceito de "desenvolvimento harmonioso" em todos os níveis viu reunir-se mulheres e homens de tôdas as nacionalidades em entusiástica aprovação; que se empenhou na luta contra o subdesenvolvimento, seja na África, na Ásia, na América do Sul, em Madagascar, seja por ocasião dos confrontos que se verificaram em Conferências Internacionais; que formou filósofos, pesquisadores, difundindo elementos de meditação relativamente a tudo que é fundamental ao homem

Tudo isso êle realizou através do seu sacerdócio a serviço de Deus no mundo, foi um Sacerdote em sua "totalidade".

São os mais deserdados, os pobres, que perdem um antigo companheiro, um advogado esclarecido e bondoso, um guia querido e fiel.

Cada grupo humano recebeu algo dos ensinamentos de Lebret, as nações ricas, as proletárias, as encarregadas de organizar o mundo, econômica, social e humanamente, as encarregadas da aproximação entre os homens e as comunidades espirituais

Conseqüentemente, a humanidade inteira sentirá o vazio deixado por êle.

Todos nós — seus irmãos, seus amigos, discípulos, conhecidos ou desconhecidos, de diferentes latitudes, que trabalhamos segundo a "ética de Lebret" — devemos agora fazer face às responsabilidades novas criadas pela sua partida, acrescentando-as às que êle nos deixou.

Mais do que nunca, nosso mundo, destroçado pela violência, pelo ódio, pelo desequilíbrio e pelas injustiças, necessita que se realize o "testamento Lebret": um pouco mais de amor, de justiça e de alma, visando a uma permanente valorização das "finalidades ontológicas totais" do Homem

Jules Razafimbahiny
(Embaixador da República Malgaxe em Londres, Roma, Atenas e Tel-Aviv)

PRESENÇA DO PADRE LEBRET

Tendo viajado muito, sabemos que as idéias e a obra do Padre Lebret serão inseparáveis de um período da história de França. Pode-se delas dizer o que André Malraux disse — soberbamente — dos maiores políticos do nosso país: elas estão "presentes no mundo".

Essa generosidade tem, atualmente, oportunidades históricas pouco contestáveis. Os países colonizados, de direito ou de fato, despertam e com uma impaciência que tem quase sempre tanto de desajeitada quanto de compreensível livram-se do jugo da desigualdade política, da preeminência industrial e do domínio financeiro.

A Ásia necessita de enormes esforços. A paz, aos olhos de todos, torna-se indivisível. Muitos compreendem agora que o economista, quando não se trai, é um dos artesões da paz.

O economista procede à análise científica e à elaboração científica e técnica de um grupo humano, das lutas e da cooperação entre os indivíduos e os grupos que têm por objeto tudo que é contábil

Essa nova contabilidade é muito diferente da contabilidade comercial. Não se limita apenas às mercadorias e aos elementos que recebem um preço nos mercados, ela leva em consideração as variáveis humanas: saúde, educação, formação profissional e geral; baseia-se em um levantamento rigoroso do indivíduo, em tabelas sôbre a fadiga ou trabalho exaustivo, em rações alimentares "normais", em modelos calculados de habitação normal e assim por diante. Ela não contabiliza sòmente em valôres do mercado, e sim em unidades físicas, transformadas por coeficientes adequados em quantidades econômicas Êsse cálculo é coletivo: refere-se a grupos, à coordenação dos grupos para a produção e a organização; engloba, sem suplantá-los, os cálculos das emprêsas e os domésticos.

O animador de *Economie et Humanimes,* que soube reunir e formar equipes numerosas e dedicadas, foi um dos primeiros a compreender que a economia de cada homem e de todos os homens é *a própria economia. Não é homem de ciência* aquêle que, vendo de relance a superfície da realidade, recusa-se a analisar, calcular e introduzir nos programas aplicáveis e operantes os custos e os rendimentos dos recursos humanos.

As idéias e os conceitos liberativos de podêres econômicos, de efeitos de domínio e de treinamento, de pólos de crescimento e de desenvolvimento, de crescimento e de desenvolvimento harmonizados foram estudados pelo fundador do IRFED, enriquecidos e eplicados no campo, tanto quanto possível em têrmos estatísticos, visando à elaboração de programas e de planos próprios para "preservar", "observar" e "elevar" os homens. Por isso o Padre Lebret, religioso, economista de convicção e de ação, foi também uma grande figura política É essa inspiração que resplandece em suas últimas obras (1958-1965): *Manifesto para uma civilização solidária; Suicídio ou sobrevivência do Ocidente; Dinâmica concreta do desenvolvimento*"

O Padre Lebret contribuiu para uma obra muito mais grandiosa do que a que eu tentei esboçar com pressa e com pesar. Favoreceu a admirável tomada de consciência do catolicismo em relação às novas dimensões da doutrina católica. Os cristãos e os humanistas da declaração dos direitos dispõem-se a descobrir as condições nas quais as suas iniciativas mais sinceras possam convergir e frutificar Tudo isso é lento, hesitante, cheio de prudências legítimas e até de desconfianças intempestivas, é um "raio de aurora" em uma noite de absurdos violentos Para êsse raio de aurora voltam-se os olhares de todos aquêles que compreendem não existir progresso econômico *separado* nem caridade completa, sem a devida consideração pelo progresso humano

François Perroux
Professor do "Collège de France"
(Extraído de "La Croix", 21-7-1966)

Na conferência mundial sôbre comércio e desenvolvimento, realizada em Genebra, foi êle o animador da delegação do Vaticano Nessa ocasião o reencontrei, pois o conhecia desde a fundação de "Economie et Humanisme" e já havia lido seus principais livros; constatei, então, a sua energia, sua doce obstinação que se escondia sob um sorriso apaziguador, às vêzes algo irônico No decorrer de longas conversações, alcancei o significado do seus "desenvolvimento integral harmonioso"

O Padre Lebret era, antes de tudo, um "cristão atuante no mundo", sua fé expressava-se pelo amor ao próximo, em tôdas as circustâncias, em qualquer problema do mais pobre, do mais humilhado e ofendido Foi essa preocupação com o próximo que o levou a dar prioridade aos problemas da metade da humanidade que, libertando-se do domínio colonial, procura adquirir a liberdade política, e independência e ingressar nos primeiros estádios da economia moderna. Constatando a impossibilidade de impedir a instabilidade de preços e de fornecer ajuda financeira e técnica eficaz, devido ao jôgo do mercado clássico, êle confirmou a necessidade de uma *planificação* das primeiras etapas do desenvolvimento, estabeleceu métodos e ensinou aos homens que eram capazes de os aplicar Principalmente, demonstrou a insuficiência das políticas centralizadas no crescimento econômico; crescimento em que a questão é muito mais séria, ainda, nos países subdesenvolvidos do que nos industrializados Trata-se, antes de mais nada, de procurar melhorar o nível de vida de *todos* e uma modificação dos *gêneros de vida*, em condições que apelem para a dignidade e a responsabilidade do homem, daí essa insistência sôbre um desenvolvimento integral e o papel de animador que êle desempenhou nas primeiras experiências de *animação rural*, que constituem o elemento decisivo para o desenvolvimento no campo; daí, também, a característica insistente, dramática, às vêzes, das suas intervenções na conferência de Genebra, procurando fazer com que os países industriais, tanto do Ocidente, como do Oriente, tomassem consciência de suas pesadas responsabilidades, em relação aos deserdados da terra

"Économie et Humanisme", IRFED (Centro Internacional de Pesquisas e de Formação para o Desenvolvimento Harmonioso), *"Développement et Civilisations"*, e numerosos outros organismos que, pouco a pouco, adquiriram sua personalidade própria e sua função autônoma, foram fundados pelo Padre Lebret. Êle soube formar ao seu redor equipes de homens de tôdas as nações, de tôdas as religiões e de tôdas as opiniões filosóficas ou políticas, procurando ajudar seus irmãos do "mundo subdesenvolvido"

Essas equipes se manterão e coordenarão sua ação dentro da sua diversidade de vocação Dessa forma terá expressão aquilo que o Padre Lebret elaborou durante tôda a sua vida: uma "escola francesa do desenvolvimento", que acentua o humano, o social e a responsabilidade de cada um A mais sincera homenagem que podemos prestar ao nosso amigo é continuarmos a sua obra com o mesmo espírito de liberdade e de amor ao próximo.

André Philip
Professor da Faculdade de Direito e Ciências Econômicas de Paris
(Extraído de "Monde, 25-7-1966)

UM AMIGO DOS POVOS E DOS HOMENS

Êsse amigo de todos os países e dos homens, dos humildes e dos poderosos, deixou-nos para a sua realização final. Sua missão não estava terminada; ela não é, porém, das que podem ser concluídas Em nome do mundo, tanto na França como no Brasil, no Líbano, na ONU, em Roma, na África, milhares de homens e mulheres vão continuá-la. O padre Lebret deixa atrás de si (os que o conheceram bem o sabem) milhares de sucessores: êle os convenceu da necessidade e da possibilidade de agir em prol do "bem comum" e lhes deu a certeza de que essa ação, aparentemente destinada a reveses e à ineficácia, pode, na realidade, transformar o mundo, quer em suas relações internacionais quer nas realidades mais simples da vida quotidiana

François-Xavier Hutin
(Extraído de "Ouest-France", 23-7-1966)

ÊLE PROCURAVA SEMPRE A EFICÁCIA

Crítico firme e franco dos esforços desastrados feitos ou propostos pelos pretensos técnicos do desenvolvimento, o Padre Lebret não aderiu ao desespêro dos pessimistas que julgam qualquer esfôrço impossível e ineficaz Sublinhando que é preciso examinar cada um de todos os aspectos dos problemas e não apenas aquêles que dependem das técnicas aprovadas, pois paga-se caro a negligência dos fatôres humanos, como poderia o Padre Lebret propor métodos simples — simples demais, segundo a opinião de alguns — para assegurar o desenvolvimento? É que, no meu modo de ver, êle compreendeu — o que esquecem os especialistas — que é mais importante agir de modo harmonioso, mesmo por métodos um tanto sumários, do que seguir em uma direção única

Como compreender de outra maneira as suas justas cóleras contra a ineficácia do dinheiro e, o que é mais grave, dos esforços humanos empregados na assistência técnica, quer seja multilateral ou bilateral e que, ao mesmo tempo, a sua assistência tenha sido tão total na campanha mundial contra a fome? E, entretanto, os esforços dessa campanha, e singularmente os do Comitê francês, não foram irrisórios, materialmente falando, comparados aos que êle criticara? No Comitê Francês, êle se empenhava sempre em tornar mais eficazes os projetos propostos

Michel Cépede
(Presidente da Comissão Interministerial da FAO)

ÊLE TORNOU CONSCIENTE MILHARES DE HOMENS

À fôrça de pregar escrevendo, conversando, agindo, conseguiu ser um dos primeiros a tornar conscientes milhares de homens sôbre o drama do século: o dos países em desenvolvimento e a fome mundial

Seus livros se espalharam e, no Ocidente, foram manuseados por todos que procuravam agir, lidos pelos que buscam a verdade, compreendidos por tantos corações que, através de suas linhas, vibravam de alegria, exclamando: "mas, isto é exatamente o que eu procurava!"

As pessoas que não o conheciam desejavam encontrar êsse Padre "combativo", que dizia, como era preciso e em voz alta, o que elas próprias pensavam, de modo confuso e falando baixo e que muitas outras nem ousavam mencionar

Acolhia príncipes ou pobres e seus nomes acrescentavam-se a centenas de outros, constituindo uma rêde cujas malhas recobriam a terra. E os que vinham, adquiriam logo uma outra dimensão· êle os revelava a si mesmos Formava-os responsáveis.

François-Régis Hutin
(Extraído de "Ouest-France", 25-7-66)

O REALISMO DE SEUS PROPÓSITOS E DE SEUS PROJETOS

O Padre Lebret aproveitou, com uma inteligência apaixonada e rigorosa, as leis e as exigências de um programa semelhante[1] Êle não estudou em universidades, formou-se, dia a dia, através das duras lições de múltiplas experiências, desde o modesto empreendimento no litoral bretão aos programas internacionais de planificação Daí o realismo de seus propósitos e de seus projetos, em que o apêlo evangélico encarregava-se da liberação dos homens

Foi um dos que insistiram em que a "pesquisa" seja empreendida institucionalmente no mais alto nível, tanto nas disciplinas profanas (êle era Diretor científico do CNRS) como para os cristãos, dentro da inteligência da fé Exigência radical de uma invenção permanente, em uma humanidade alcançando a consciência de sua verdade histórica, em uma mutação acelerada. O Concílio ia registrar expressamente essa lei para a Igreja, para a verdade da Igreja no mundo atual

Padre M D Chenu, O P
(Extrato de "Témoignage Chrétien", 28-7-1966)

UM HOMEM PROVIDENCIAL

Êle era, para mim, o homem providencial, aquêle que dá Esperança como se confere um sacramento Aquêle que restituiu ao homem tôdas as suas dimensões, nas suas verdadei-

[1] Programa acima definido por François Perroux

ras perspectivas, sem nada minimizar, nem da angústia nem da luta. Lembro-me do dia em que, em seu pequeno escritório sob a livraria de "Économie et Humanisme", êle me convidou a reunir-se à sua equipe

Vivendo e trabalhando a seu lado, dediquei-me à causa, tornei a aprender Encontrei-me a mim mesmo e aprendi a aceitar o que encontrei como se aceita que uma pereira só dá peras. Não era, entretanto um pedagogo Sua fôrça, porém, e o seu amor marcavam profundamente a sua brilhante inteligência.

Foi no início dêsse ano que êle batizou minha filhinha Regressava de Roma, fìsicamente esgotado Todavia, impregnado do espírito do Concílio, transformou essa cerimônia, com seus comentários claros e adequados, em manifestação luminosa do Verbo e do Espírito Santo, que nenhum dos presentes poderá esquecer Jamais se assistiu a um sacramento assim

Em abril, seus sofrimentos não lhe davam mais descanso Todavia, ninguém pôde impedi-lo de viajar 50 horas de avião, em menos de uma semana, para fazer a conferência para a qual era sempre convidado nas Semanas Sociais do Chile Por mera coincidência, fizemos juntos a viagem de Paris a Santiago e pude compreender a que ponto o empreendimento estava acima de suas fôrças À minha filial observação por ter aceito êsse compromisso, êle, simplesmente, respondeu-me: "Tenho muitos amigos na América Latina e é importante que os veja pela última vez"

O inevitável, caro Padre, deve ser aceito Portanto, permaneçamos serenos e otimistas. Ademais, por que chorar? Pois o Salmista disse: — "Adormeço em teu seio, Senhor, Tu me criaste."

Antoine Kher
(Ex-Diretor dos Cursos do IRFED)

TUA MENSAGEM FOI COMPREENDIDA

Louis Lebret, meu caro mestre, meu caro amigo, apóstolo do desenvolvimento, deste tua vida pelos povos deserdados.

Podias escolher os pobres dos países ricos e escolheste, também, os das nações pobres. Viste muito mais longe do que o teu próprio país, nivelaste as tuas responsabilidades no mundo

Ensinaste-nos três coisas A primeira respeitar os outros homens Segunda: sermos responsáveis conscientes a serviço do bem comum Terceira: contarmos com os nossos próprios recursos, dentro do espírito de solidariedade familiar, local, nacional e internacional, elevando-nos acima da vida quotidiana para atingir a universal Meu amigo, meu mestre, meu irmão, podes partir tranqüilo, tua mensagem foi compreendida

Michel Dembélé
(Chefe de Gabinete do Ministério do Comércio, da Indústria e do Artesanato do Senegal)

Acabou-se de imprimir no Serviço Gráfico do IBGE, aos vinte e nove dias do mês de maio de mil novecentos e sessenta e sete, 31º da criação do Instituto

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA

PRESIDENTE
SEBASTIÃO AGUIAR AYRES

O Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, criado pelo Decreto n.º 24 609, de 6 de julho de 1934, é uma entidade de natureza federativa, subordinada diretamente à Presidência da República. Tem por fim, mediante a progressiva articulação e cooperação das três ordens administrativas da organização política da República e da iniciativa particular, promover e fazer executar, ou orientar tècnicamente, em regime racionalizado, o levantamento sistemático de tôdas as estatísticas nacionais, bem como incentivar e coordenar as atividades geográficas dentro do País, no sentido de estabelecer a cooperação geral para o conhecimento metódico e sistematizado do território brasileiro. Dentro do seu campo de atividades, coordena os diferentes serviços de estatística e de geografia, fixa diretivas, estabelece normas técnicas, faz divulgação, propõe reformas, recebe, analisa e utiliza sugestões, forma especialistas, prepara ambiente favorável às iniciativas necessárias, reclamando, em benefício dos seus objetivos, a colaboração das três órbitas de Govêrno e os esforços conjugados de todos os brasileiros de boa vontade.

ESQUEMA ESTRUTURAL

A formação estrutural do Instituto compreende três sistemas permanentes — o dos Serviços Estatísticos, o dos Serviços Geográficos e o dos Serviços Censitários.

I — SISTEMA DOS SERVIÇOS ESTATÍSTICOS

O Sistema dos Serviços Estatísticos compõe-se do Conselho Nacional de Estatística e do Quadro Executivo.

A — CONSELHO NACIONAL DE ESTATÍSTICA, órgão de orientação e coordenação geral, criado pelo Decreto n.º 24 609, de 6 de julho de 1934, consta de:

1. Um "ÓRGÃO ADMINISTRATIVO", que é a Secretaria-Geral do Conselho.

2. "ÓRGÃOS DELIBERATIVOS", que são: a *Assembléia-Geral,* composta dos membros da Junta Executiva Central, representando a União, e dos Presidentes das Juntas Executivas Regionais, representando os Estados, o Distrito Federal e os Territórios (reúne-se anualmente no mês de julho); a *Junta Executiva Central,* composta do Presidente do Instituto, dos Diretores das Repartições Centrais de Estatística, representando os respectivos Ministérios, e de representantes designados pelos Ministérios da Viação e Obras Públicas, Relações Exteriores, Guerra, Marinha e Aeronáutica (reúne-se ordinàriamente no primeiro dia útil de cada quinzena e delibera "ad referendum" da Assembléia-Geral); as *Juntas Executivas Regionais,* no Distrito Federal, nos Estados e Territórios de composição variável, mas guardada a possível analogia com a JEC (reúnem-se ordinàriamente no primeiro dia útil de cada quinzena).

3. "ÓRGÃOS OPINATIVOS", subdivididos em *Comissões Técnicas,* isto é, "Comissões Permanentes" (estatísticas fisiográficas, estatísticas demográficas, estatísticas econômicas etc.) e tantas "Comissões Especiais" quantas necessárias, e *Corpo de Consultores-Técnicos,* compostos de 36 membros eleitos pela Assembléia-Geral.

B — QUADRO EXECUTIVO (cooperação federativa):

1. "ORGANIZAÇÃO FEDERAL", isto é, as seis Repartições Centrais de Estatística — Serviço de Estatística Demográfica, Moral e Política (Ministério da Justiça), Serviço de Estatística da Educação e Cultura (Ministério da Educação), Serviço de Estatística da Previdência e Trabalho (Ministério do Trabalho), Serviço de Estatística da Produção (Ministério da Agricultura), Serviço de Estatística Econômica e Financeira (Ministério da Fazenda) e Serviço de Estatística da Saúde (Ministério da Saúde); e órgãos cooperadores: Serviços e Secções de estatística especializada em diferentes departamentos administrativos.

2. "ORGANIZAÇÃO REGIONAL", isto é, as repartições Centrais de Estatística Geral existentes nos Estados — Departamentos Estaduais de Estatística, e no Distrito Federal e no Território do Acre — Departamento de Geografia e Estatística, mais os órgãos cooperadores: Serviços e Secções de estatística especializada em diferentes departamentos administrativos regionais.

3. "ORGANIZAÇÃO LOCAL", isto é, as Agências Municipais de Estatística, existentes em todos os Municípios, subordinadas administrativamente à Secretaria-Geral do CNE, através da respectiva Inspetoria Regional das Agências Municipais e, tècnicamente, ao Departamento Estadual de Estatística.

II — SISTEMA DOS SERVIÇOS GEOGRÁFICOS

O Sistema dos Serviços Geográficos compõe-se do Conselho Nacional de Geografia e do Quadro Executivo.

A — CONSELHO NACIONAL DE GEOGRAFIA, órgão de orientação e coordenação, criado pelo Decreto n.º 1 527, de 24 de março de 1937, consta de:

1. Um "ÓRGÃO ADMINISTRATIVO", que é a Secretaria-Geral do Conselho.

2. "ÓRGÃOS DELIBERATIVOS", ou sejam a *Assembléia-Geral,* composta dos membros do Diretório Central, representando a União, e dos presidentes dos Diretórios Regionais, representando os Estados e os Territórios (reúne-se anualmente no mês de julho); o *Diretório Central,* composto do Presidente do Instituto, do Secretário-Geral do CNG, de um delegado técnico de cada Ministério, de um representante especial do Ministério da Educação e Cultura pelas instituições do ensino da Geografia, de um representante do Govêrno Municipal da Capital da República e de um representante do CNE (reúne-se ordinàriamente no terceiro dia útil de cada quinzena); os *Diretórios Regionais,* nos Estados e nos Territórios de composição variável, mas guardada a possível analogia com o DG (reúnem-se ordinàriamente uma vez por mês).

3. "ÓRGÃOS OPINATIVOS", isto é, *Comissões Técnicas,* tantas quantas necessárias, e *Corpo de Consultores-Técnicos,* subdividido em Consultoria Nacional articulada com o DC e 21 Consultorias Regionais, articuladas com os respectivos DR.

B — QUADRO EXECUTIVO (cooperação federativa):

1. "ORGANIZAÇÃO FEDERAL", com um órgão executivo central, — o Serviço de Geografia e Estatística Fisiográfica — e órgãos cooperadores — Serviços especializados dos Ministérios da Agricultura, Viação, Trabalho, Educação, Fazenda, Relações Exteriores e Justiça, e dos Ministérios Militares (colaboração condicionada).

2. "ORGANIZAÇÃO REGIONAL", isto é, as repartições e institutos que funcionam como órgãos centrais de Geografia nos Estados.

3. "ORGANIZAÇÃO LOCAL", os Diretórios Municipais, Corpos de Informações e Serviços Municipais com atividades geográficas.

Sede do INSTITUTO: Av. Franklin Roosevelt, 166
RIO DE JANEIRO

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA

CONSELHO NACIONAL DE ESTATÍSTICA

Quadro executivo em 31-XII-1966

ORGANIZAÇÃO FEDERAL:

Serviço de Estatística Demográfica, Moral e Política — Ministério da Justiça e Negócios Interiores
Diretor — *RUBENS D'ALMADA HORTA PÔRTO*

Serviço de Estatística Econômica e Financeira — Ministério da Fazenda
Diretor — *CORY LOUREIRO ACIOLI*

Serviço de Estatística da Produção — Ministério da Agricultura
Diretor — *HILTON CUNHA*

Serviço de Estatística da Previdência e Trabalho — Ministério do Trabalho e Previdência Social
Diretor — *MILTON RANGEL DA SILVA*

Serviço de Estatística da Educação e Cultura — Ministério da Educação e Cultura
Diretor — *JOÃO TÔRRES JATOBÁ*

Serviço de Estatística da Saúde — Ministério da Saúde
Diretor — *ALCEU VICENTE W. DE CARVALHO*

Divisão de Estatística Industrial e Comercial — Ministério da Indústria e do Comércio
Diretor — *LAURO SODRÉ VIVEIROS DE CASTRO*

ORGANIZAÇÃO REGIONAL:

Território do Amapá .... — Serviço de Geografia e Estatística
Diretor: *Edvaldo Bezerra Pinto*

Território de Rondônia .... — Serviço de Geografia e Estatística
Diretor: *Rubens Cantanhede Mota*

Território de Roraima .... — Serviço de Geografia e Estatística
Diretor: *José Dulce Ayres Leitão*

Acre .... — Departamento de Geografia e Estatística
Diretor: *Raimundo Gomes de Lima*

Amazonas .... — Departamento Estadual de Estatística
Diretora: *Maria dos Remédios V. de Oliveira*

Pará .... — Departamento Estadual de Estatística
Diretor: *Orion Klautau*

Maranhão .... — Departamento Estadual de Estatística
Diretora: *Conceição de Maria Corrêa Bezerra*

Piauí .... — Departamento Estadual de Estatística
Diretora: *Terezinha Pinheiro Leal Nunes*

Ceará .... — Departamento Estadual de Estatística
Diretor: *Waldehyr Furtado do Nascimento*

Rio Grande do Norte .... — Departamento Estadual de Estatística
Diretor: *Cel. Francisco Bilac Faria*

Paraíba .... — Departamento Estadual de Estatística
Diretor: *Normando Guedes Pereira*

Pernambuco .... — Departamento Estadual de Estatística
Diretor: *Laercio Coutinho de Barros*

Alagoas .... — Departamento Estadual de Estatística
Diretor: *José Maria de Carvalho Veras*

Sergipe .... — Serviço Estadual de Geografia e Estatística
Diretor: *Paulo Gomes Dantas*

Bahia .... — Departamento Estadual de Estatística
Diretor: *Waldemar de Oliveira Passos*

Minas Gerais .... — Departamento Estadual de Estatística
Direttor: *Wilson Getúlio*

Espírito Santo .... — Departamento Estadual de Estatística
Diretor: *Murilo de Castro Amaral*

Rio de Janeiro .... — Departamento Estadual de Estatística
Diretor: *Aldemar Alegria*

Guanabara .... — Divisão de Estatística da Coordenação de Planos e Orçamento
Diretor: *Carlos Alberto Teixeira Leite*

São Paulo .... — Departamento de Estatística do Estado
Diretor: *Wlademir Pereira*

Paraná .... — Departamento Estadual de Estatística
Diretor: *Odebal Bond Carneiro*

Santa Catarina .... — Departamento Estadual de Estatística
Diretor: *Francisco Furtado Maia*

Rio Grande do Sul .... — Departamento Estadual de Estatística
Diretor: *Adalberto Tostes*

Goiás .... — Departamento Estadual de Estatística
Diretor: *Manoel Braz*

Mato Grosso .... — Departamento Estadual de Estatística
Diretora: *Hermelinda Corrêa da Costa e Silva*

Distrito Federal .... — Divisão de Geografia e Estatística
Diretor: *Iberê S. Goulart*

Nota — Colaboram com essas repartições as Agências Municipais de Estatística, além de numerosos órgãos de estatística especializada; da União, dos Estados e dos Municípios.

Serviço Gráfico do IBGE — 37227