FUNDAÇÃO IBGE
INSTITUTO BRASILEIRO DE ESTATISTICA
Centro Brasileiro de Estudos Demográficos

TÁBUAS DE PERMANÊNCIA E SEU EMPRÊGO EM DEMOGRAFIA

João Lyra Madeira

METODO

Número 1
1969

TÁBUAS DE PERMANÊNCIA E SEU EMPRÊGO EM DEMOGRAFIA

(ERRATA)

Pág.	Parágrafo	Referência	Retificação
12	3.1	9ª linha	G_o em lugar de K_o
12	3.1	18ª linha	saidas em lugar de saíadas
14	3.3	15ª linha	q^i_3 e q^i_1 em lugar de q^i_3 e q^i_2
14	3.3	3 últimas linhas	Suprimir
15	3.3	Fórmulas (3.3-4) e (3.3-5)	Suprimir
15	3.3	7ª linha	$N + \sum_{r=1}^{n} \beta_r K_r$ em lugar de $\sum_{r=o}^{n} \beta_r K_r$
15	3.3	Fórmula (3.3-8)	$\sum_{r=o}^{n} \alpha_r q^r_3$ em lugar de $\sum_{r=o}^{n} \alpha_r q^r_2$
29	6.4	Quadro: Classe 40-50	0,055946 em lugar de 0,059946
32	7.3	16ª linha	$Pr\,({}_iX > x)$ em lugar de $P_r({}_iX < x)$
32	7.3	17ª linha	$Pr\,({}_{(i)}X > x)$ em lugar de $Pr({}_{(i)}X < x)$
34	7.6	4ª linha	$q(i)$, $q(\tilde{i})$ em lugar de $\hat{q}^i$, $\hat{q}^{(i)}$
34	7.6	Fórmula (7.6.2)	$1 - q_{z_\alpha}(i)$ em lugar de $1 - q_{z_\alpha}$
34	7.7	Quadro - 2ª coluna	$1 - \hat{q}_x(i)$ em lugar de $1 - \hat{q}^{(i)}_{2,x}$
34	7.7	Quadro - 6ª coluna	$\prod_{\alpha=1}^{k} \left[1 - {}_4\hat{q}_{z_\alpha}(\tilde{i})\right]$ em lugar de $\prod_{\alpha=1}^{k} \left[1 - {}_4\hat{q}zx\,(\tilde{i})\right]$
35	7.7	11ª linha (Fórmula)	$1 - q_{z_\alpha}(j)$ em lugar de $1 - \hat{q}(j)$
39	8.1	Desigualdade (8.1-1)	Supõe que a causa i é menos importante que o conjunto das demais causas

TÁBUAS DE PERMANÊNCIA E SEU EMPRÊGO EM DEMOGRAFIA

JOÃO LYRA MADEIRA

FUNDAÇÃO IBGE

Presidente: *Sebastião Aguiar Ayres*

INSTITUTO BRASILEIRO DE ESTATÍSTICA

Diretor-Superintendente: *Raul Romero de Oliveira*

CENTRO BRASILEIRO DE ESTUDOS DEMOGRÁFICOS

Diretor: *João Lyra Madeira*

APRESENTAÇÃO

A presente monografia, primeira da série de monografias "Metodológicas" do Centro Brasileiro de Estudos Demográficos, constitui publicação de trabalho já antigo do autor, com uma redação algo atualizada e alguns complementos novos. Embora se pudesse reformular a redação em têrmos inteiramente atuais, preferiu-se manter, tanto quanto possível, a orientação primitiva. De qualquer modo, o assunto é inteiramente atual e de utilidade prática.

João Lyra Madeira
DIRETOR DO CBED

1 — INTRODUÇÃO

1.1 — Em muitos problemas de Análise Demográfica utilizam-se tábuas de sobrevivência; assim, os estudos realizados através do coeficiente líquido de reprodução, ou taxa intrínseca de crescimento de Lotka, constituem exemplos clássicos de emprêgo dessas tábuas em Demografia. As estimativas e projeções de população pelo método das componentes constituem outro exemplo. Mas a tábua de sobrevivência, nesses casos, se apresenta como um tipo particular, denominado *tábua de decremento único,* em contraposição às tábuas de *decremento múltiplo,* cada vez mais necessárias em face do aperfeiçoamento das técnicas existentes e do advento de novas técnicas de análise. Para dar um exemplo simples consideremos o coeficiente líquido de reprodução, geralmente calculado combinando-se uma tábua de sobrevivência com uma tábua de fecundidade geral feminina (taxas de fecundidade por idades). Ora, a crise de 1929/30 demonstrou que os fatôres econômicos influem intensamente, a curto prazo, sôbre a fecundidade geral, provocando uma intensa redução da taxa de natalidade. Todavia, essa redução a curto prazo se faz sentir, principalmente, através da nupcialidade. Não é tanto a redução da fecundidade dos casais já constituídos, mas, principalmente, a diminuição drástica dos casamentos nos anos de crise, o principal fator responsável pela diminuição dos nascimentos. Uma análise mais realista da reprodução deve rsultar, portanto, da combinação não apenas de uma tábua de mortalidade (sobrevivência) e uma tábua de fecundidade geral, mas da combinação de mortalidade, nupcialidade e fecundidade legítima e ilegítima. Assim, uma variação da natalidade pode ser atribuída tanto a uma modificação da fecundidade, como a uma eventual alteração da mortalidade ou ainda a uma mudança da nupcialidade. Em conseqüência, torna-se necessário considerar o grupo de mulheres que atingem a idade fecunda (15 anos, digamos) sujeito a duas causas de eliminação: morte e casamento. A tábua de fecundidade legítima seria aplicada ao grupo de casadas e a de fecundidade ilegítima ao grupo de solteiras. A tábua que represente, em cada idade posterior, $x > 15$, a proporção de mulheres sobreviventes que permanecem solteiras constitui um exemplo de *tábua de permanência, com duas causas de eliminação;* o número de solteiras eliminadas na classe de idade x, $x+1$ (ou x, $x+h$) constituiria a *tábua de eliminação por morte e casamento.* Êsse tipo de problema de um modo geral conduz à construção ou determinação de tábuas (ou funções) de permanência,

ou eliminação correspondentes a diversas causas. Torna-se necessário, então, determinar a ação isolada de cada uma delas e, em seguida, combiná-las adequadamente para reconstituir o resultado dêsse complexo de causas, quando agem conjuntamente.

1.2 — Um segundo exemplo pode ser extraído da própria tábua de mortalidade (decremento único) pela consideração das diferentes causas de morte. Na realidade, cada causa de morte pode ser interpretada como *uma* causa de eliminação, de modo que qualquer tábua de mortalidade pode ser tratada como uma tábua de permanência com tantas causas de eliminação quantas forem as causas de morte consideradas isoladamente: tuberculose, doenças do aparelho digestivo, doenças do coração (cardiopatias), etc. Um problema que pode ocorrer, relacionado com essa separação das diferentes causas de morte, é do estudo da importância relativa de uma determinada causa ou grupo de causas. O melhor meio de se avaliar essa importância será, por exemplo, construir uma tábua fictícia em que aquela causa especificada fique excluída e comparar as conseqüências dessa supressão sôbre a vida média, o crescimento da população, etc. Se a supressão da tuberculose, como causa de morte, tiver como conseqüência um aumento de 3 anos na vida média ao nascer e a supressão da sífilis proporcionar um aumento de 4 anos, essa diferença dará uma idéia concreta das importâncias relativas dessas duas causas de morte. Outros elementos de comparação poderiam ser: a alteração da taxa líquida de reprodução, da taxa de crescimento de Lotka, ou do número de habitantes ao fim de 20 ou 30 anos, decorrentes da supressão de uma ou outra causa de morte. Um outro problema ainda mais importante seria, por exemplo, a fixação de uma política médico-sanitária de máxima eficiência, tendo em vista os gastos necessários para conseguir determinadas reduções em cada uma das causas de morte de um determinado grupo de causas a serem objeto de um plano de saúde. O plano geral seria subdividido em um certo número de planos parciais, cada um referindo-se a uma determinada causa de morte (ou de invalidez, total ou parcial). A cada plano parcial seria alocada uma fração dos recursos, determinada de modo que uma certa função objetivo (vida média, vida econômicamente ativa, taxa de crescimento, etc.) fôsse maximizada.

1.3 — Um terceiro tipo de problema resulta da interpretação da função de permanência como função de segurança (*Reliability Function*). Supondo existirem vários tipos ou causas de falhas, pode-se querer analisar a importância relativa de cada uma; um exemplo, no campo da Demografia, seria o estudo comparativo de diferentes métodos anticonceptivos. Nesse caso, o grupo considerado é um grupo de casais em vez de um grupo de indivíduos; a tábua de permanência representará a proporção de casais que permanecem sem manifestações de gravidez ao fim de tempo t, (1, 2, 3, ... meses). Pode-se então determinar, nessas condições, o número médio de meses (permanência média) que um casal convive sem que se manifeste uma gravidez, quando não há qualquer proteção de anticonceptivos. Se o casal utiliza um

método anticonceptivo, a média deverá aumentar tanto mais quanto mais eficiente fôr o método utilizado. Pode-se então considerar um número inicial de, digamos, 1 000 casais e determinar, nessas condições, quantos permanecem "protegidos" pelo método ao fim de 1, 2, 3, ... meses. O grupo pode ser considerado como sujeito a, pelo menos, três causas de eliminação: morte de um dos cônjuges, substituição do método (por inadaptação) e falha do método. Se designarmos essas causas de eliminação, respectivamente, por 1, 2 e 3, é claro que o método será tanto mais eficiente quanto menor fôr a eliminação pela causa 3 e de adaptação tanto mais fácil quanto menor fôr a eliminação pela causa 2. Em definitivo, o melhor método é aquêle que apresentar uma menor eliminação pelo conjunto de causas 2 e 3. A comparação entre diferentes métodos torna-se, então, uma tarefa relativamente simples; determina-se a duração média da proteção proporcionada pelos diferentes métodos quando agem, apenas, as causas 2 e 3 e decide-se em favor daquele de maior duração média. O problema apresenta uma pequena complicação porque não se pode considerar, de fato, em igualdade de condições as duas causas de eliminação 2 e 3, anteriormente definidas. Para sermos rigorosos, teríamos de considerar que a eliminação pela causa 3 implica em uma gravidez certa, visto que essa é a própria razão que determinou a identificação da falha, ao passo que a mudança de método, ou o simples abandono, dará lugar, apenas, a um aumento da probabilidade de subseqüente gravidez. Trata-se, porém, aqui de um mero pormenor de técnica sôbre o qual não nos deteremos no momento. Poderíamos, por equanto, dizer que a eficiência do método depende apenas das suas falhas, isto é, da freqüência de eliminação pela causa 3.

2 — DEFINIÇÕES E CONCEITOS BÁSICOS *

2.1 — Uma tábua de mortalidade é um caso particular de tábua de eliminação, correspondendo a tábua de sobrevivência à de permanência. De modo geral, denomina-se, portanto, tábua de permanência (ou função de permanência) a uma representação tabular .ou função matemática) que indique, para um grupo sujeito a várias causas de eliminação, a proporção dos que permanecem no grupo ao fim de 1, 2 ... t unidades de tempo (ou ao fim de um tempo, t, qualquer). Assim, se considerarmos um grupo de "operários na indústria, existentes em certo instante inicial (origem) e solteiros", a tábua de permanência indicará quantos operários da indústria, dêsse grupo, nêle continuarão ainda ao fim de 1, 2, 3, ... unidades de tempo. Na realidade, em vez de número absoluto costuma-se indicar a fração que permanece no grupo.

2.2 — No caso considerado, as causas de eliminação seriam evidentemente 3: morte, casamento e mudança de atividade. Podemos consi-

* Êste capítulo e o seguinte constituem um resumo, com nova redação, de parte de uma tese do autor, não publicada e apresentada em concurso em 1935.

derar, de um outro ponto-de-vista, que os componentes do grupo inicial são caracterizados pelo fato de possuirem três atributos: i) estarem vivos; ii) serem solteiros e iii) serem empregados em atividade industrial como operários. Assim a eliminação por motivo de mudança de emprêgo inclui os que passam para outras atividades (comércio, agricultura, etc.) e, bem assim, os que, permanecendo na indústria, deixam de ser operários (passam a empregados de escritório, a empregadores, etc.). Além disso, se a participação no grupo depende de um registro, (Associação de operários, digamos) a ser renovado periòdicamente (como, por exemplo, mediante pagamento de mensalidades ou anuidades) dever-se-á incluir no conjunto de atributos iniciais, além dos 3 indicados anteriormente, mais o de "estar inscrito no grupo" ao qual corresponderá mais uma causa de saída: o "abandono" (por falta de pagamento, por exemplo).

2.3 — Considere-se um certo grupo constituído por N indivíduos no instante $t = 0$, quando todos êles são possuidores de um certo número de atributos. Dentre êsses, alguns são permanentes mas outros são transitórios e podem ser perdidos; êsse serão designados pelos números 1, 2, 3, ... k. Sempre que fôr necessário incluir como atributo o fato de o indivíduo "eprtencer ao grupo "G" ou "estar inscrito no grupo "G", representaremos êsse atributo particular pelo número "0", de modo que a série anterior constará então de $k + 1$ atributos: 0, 1, 2 ... k. Com o decorrer do tempo, os componentes do grupo inicial vão perdendo alguns atributos, de modo que ao fim do tempo t, o número inicial, N, estará reduzido a N (t) idivíduos ainda portadores de todos os atributos originais. Se o grupo G não admite novos entrados após o instante $t = 0$, a função

$$P(t) = N(t)/N$$

é denominada função de permanência relativa ao conjunto de atributos considerados. Portanto a função de permanência é a função representativa da fração dos componentes iniciais do grupo "G" que permanecem com as mesmas características originais, isto é, continuam possuidores de todos os $k + 1$ atributos. Há atributos que só podem ser perdidos em caráter definitivo, como por exemplo, a vida, denominando-se, por isso, atributos "irrecuperáveis" *; por outro lado, há outros atributos que depois de perdidos podem ser readquiridos, denominando-se, por êsse motivo, de atributos "recuperáveis". Em alguns casos atributo perdido poderia ser imediatamente readquirido, ficando o indivíduo sujeito a perdê-lo novamente, (por exemplo o atributo "0"); são êsses atributos denominados "imediatamente recuperáveis". Em outros, o atributo perdido só pode ser readquirido ao fim de algum tempo, denominando-se,

* No futuro talvez êsse atributo seja francamente recuperável.

simplesmente de "recuperáveis" sem outra classificação. A perda de um atributo constitui sempre uma eliminação do grupo, ainda que o mesmo atributo seja imediatamente recuperável. Nesse caso a eliminação será imediatamente seguida de uma *entrada* no grupo.

2.4 — Uma vez que podem ocorrer entradas no grupo G, teremos de levá-lo em consideração no nosso estudo. Por outro lado, a cada atributo correspondem, em geral, várias causas de eliminação. De fato, se considerarmos, por exemplo, as diferentes causas de morte de invalidez, concluiremos que os atributos "vida" ou "validez" podem ser perdidos, cada um dêles, por um grande número de causas. Na realidade, o problema que se pretende examinar pode ser enunciado nos seguintes trmos: dado um grupo G, sujeito a novos entrados e de onde cada indivíduo pode ser eliminado por uma das $n + 1$ causas de eliminação de um conjunto O de causas,

$$(O) : 0, 1, 2, \ldots n \qquad n > k$$

sendo k o número de atributos definidores do grupo original, determinar a função de permanência (ou eliminação) correspondente a um grupo fechado (sem novos entrados) no qual apenas agem as causas de eliminação pertencentes a um subconjunto E de O. Dêsse modo,

$$E \subseteq O$$

onde o símbolo $\subseteq$ quer dizer que em E se incluem alguns dos componentes de O, podendo, eventualmente, incluirem-se todos, no caso em que E e O sejam o mesmo conjunto. Em geral, porém, os dois conjuntos são diferentes. O conjunto O denomina-se conjunto básico de observação (CBO) e o conjunto E, conjunto básico de eliminação (CBE). Ambos os conjuntos têm, como elementos, *causas de eliminação,* especificadas de acôrdo com o critério que fôr fixado em cada caso.

Um dos objetivos da observação de grupos em que os indivíduos estão sujeitos a diferentes causas de eliminação é a determinação das freqüências relativas a cada uma das causas com a finiladede de estimar certas probabilidades necessárias ao estudo da incidência dos diferentes fenômenos de eliminação que podem ocorrer. Os grupos de indivíduos (pessoas, animais ou coisas) que são submetidos a essa observação denominam-se grupos estatíticos.

2.5 — Considere-se um sistema S, submetido a observação estatística, o qual coincide, inicialmente, com um certo grupo estatístico que indicaremos pela letra G. Os elementos da G podem ser pessoas, animais, coisas, etc. Mais do que isso, podem ser grupos de pessoas (casais, famílias, etc.) de animais ou de coisas. Sòmente para facilidade de exposição identificamos os elementos do grupo G a pessoas. No instante inicial o grupo G (e portanto o sistema S) terá N componentes, todos

êles possuidores de um certo conjunto de atributos definidores do grupo G, dentre os quais um certo conjunto A se constitue de k + 1 atributos não permanentes.

$$(A) \quad 0, 1, 2, \ldots k \qquad (2.5\text{-}1)$$

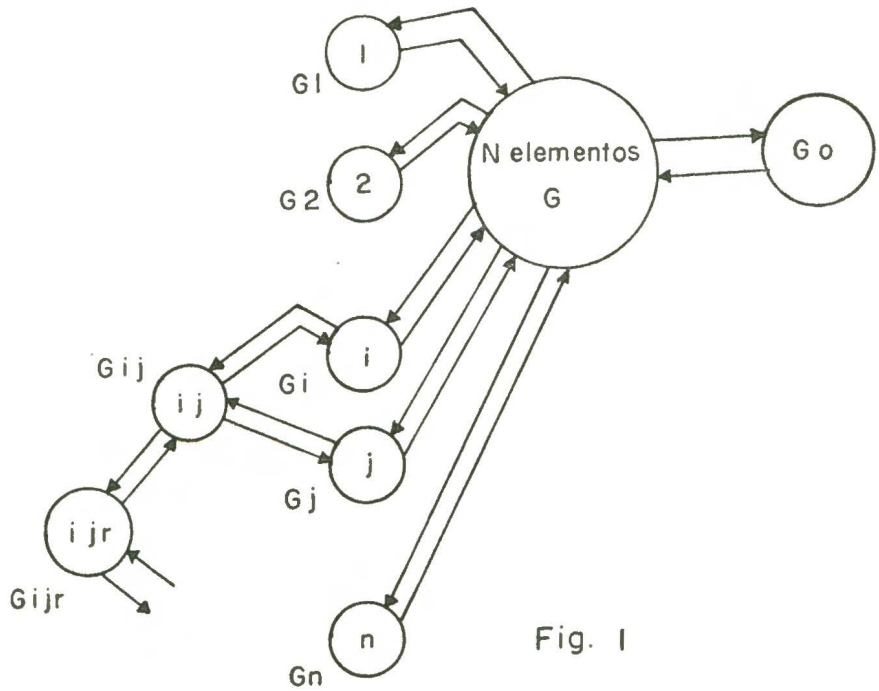


Fig. 1

Cada um dêsses atributos pode ser perdido por diversas causas, sendo então o indivíduo eliminado do grupo G, passando a constituir novos grupos derivados de G. Se os componentes de G, são, por sua vez, grupos, os atributos se referem a êsses grupos e não aos seus componentes individuais.

Assim, o casal será o elemento do grupo G se o estudo se referir à proteção de anticonceptivos. Nesse caso uma das causas de eliminação será, por exemplo, a morte *de um qualquer dos cônjuges,* de modo que os elementos de G são grupos (casais) *que se extinguem com a 1.ª morte.* Mas, se os elementos de G fôssem, por exemplo, famílias, poder-se-ia considerar que a morte só eliminaria o grupo quando morresse o último sobrevivente da família. Teríamos assim, como elemento G, grupos extinguindo-se *com a última morte.* Considerando portanto um casal, primeiro como "casal" e depois como "família", a probabilidade de eliminação, por morte, seria, no primeiro caso, e na hipótese de independência;

$$1 - p_x p_y = q_x + q_y - q_x q_y$$

onde x e y são idades da mulher e do marido, $p_x p_y$ são as respectivas probabilidades de sobrevivência e $q_x = 1 - p_x$, $q_y = 1 - p_y$, as probabilidades anuais de morte. No segundo caso a mesma probabilidade de eliminação por morte de cada elemento do grupo G teria uma expressão mais complexa, dada a coexistência de grupos (de 2 componentes) e e indivíduos, como elementos de G.

2.6 — Cada atributo não permanente pode ser perdido por diferentes causas de eliminação que constituem um nôvo conjunto O, que denominamos (CBO), o qual, novamente renumerado, seria consituído, como se disse em 2.4, por n + 1 causas de eliminação.

$$0, 1, 2 \ldots n; \quad n > k \qquad (2.6\text{-}1)$$

Observe-se que a causa de eliminação "0" corresponde exatamente ao atributo "0" (pertence a G), mas o número das demais causas de eliminação em (2.6-1) não se correspondem com os números dos atributos em (2.5-1).

A fig. 1 — indica o que vai ocorrer à medida que o tempo passa. Em função de cada causa de eliminação vão sendo formados grupos derivados de primeira ordem, G_i, (i = 1, 2, ... n) consituídos pelos eliminados de G pela causa i. As duplas flexas sugerem que os atributos perdidos são recuperáveis; embora isso não ocorra sempre, colocamos em todos os grupos derivados a dupla flexa. A partir dos grupos derivados de 1.ª ordem formam-se os grupos derivados de 2.ª ordem $G_{i,j}$ ($i \neq j = 1, 2, \ldots n$) constituídos pelos que foram eliminados de G pela causa i e de G_i pela causa j; dos grupos de 2.ª ordem, G_{ij}, surgem os de 3.ª, G_{ijr} ($i \neq j \neq r = 1, 2, \ldots n$) constituídos pelos eliminados de G pela causa i, de G_i pela causa j e de G_{ij} pela causa r.

Todos os grupos derivados em função das causas de eliminação 1, 2, ... n constituem o sistema S que, como dissemos, coincide inicialmente com o grupo G, único existente no comêço da observação. O grupo G_o, situado fora do sistema S, fornece os novos entrados no sistema e recebe os saídos pela perda do atributo "0". Os diferentes grupos constituem diferentes estados por que podem passar os elementos ao sistema S.

Todavia, em G podem entrar também todos os que proveem dos grupos derivados de 1.ª ordem mediante a recuperação do atributo perdido. De modo geral, um grupo derivado, de ordem h, apresenta saídas que constituem entradas nos grupos derivados de ordem h + 1 e entradas provenientes das saíadas dos grupos de ordem h — 1. Admite-se que as saídas do sistema só se dão através do grupo original G, embora se pudesse modificar essa hipótese, caso fôsse necessário fazê-lo.

Um sistema S, como o indicado, conistitui um sistema estatístico aberto; no caso, porém, de não existir o grupo G_o, o sistema será fechado. Quanto ao grupo G, com o qual coincide inicialmente o sistema S, êle é denominado grupo original e será um grupo estatístico fechado sòmente quando forem atendidas as duas condições: i) fizer parte de um sistema S fechado e ii) referir-se a causas de eliminação correspondente a atributos não recuperáveis.

Quando fôr atendida apenas a primeira condição, o grupo G diz-se semi-fechado.

O objetivo do presente estudo é estabelecer, de forma sistemática, uma técnica de análise de grupos abertos sujeitos a um complexo amplo O, de causas de eliminação em observação (CBO), para obter tábuas de permanência e eliminação aplicáveis a grupos fechados, ou semi-fechados, sujeitos a um conjunto E, menos amplo, de causas de eliminação, (CBE), fazendo parte de O. Isso pode ser indicado, como dissemos por $E \subseteq O$; pode-se adotar, também, a indicação CBE $\subseteq$ CBO.

2.7 — O estudo pode compreender apenas o grupo original G, ou um dos grupos derivados, ou, ainda, todo o sistema S, ou grande parte dêle. Uma tábua de solteiros conistitui a evoluçuo do grupo original sujeito a duas causas de eliminação: morte e casamento. Se quisermos, porém, analisar o grupo de casados que se vai formando a partir do grupo original de solteiros, o estudo abrangerá também um grupo derivado (os casados). No caso, os dois grupos constituem todo o sistema S. Se quisermos estudar a evolução de um grupo inicialmente constituído por operários solteiros na indústria, teremos 3 causas de eliminação: morte, casamento, saída do emprêgo. O estudo da evolução do número de operários solteiros da indústria limita-se ao grupo original. No caso, porém, haveria 3 grupos derivados de 1.ª ordem: "mortos", "casados" e "operários dedicados a atividades não industriais, ou não operários da indústria". Dois grupos derivados de 1.ª ordem (os casados e os saídos do emprêgo) constituirão grupos derivados de 2.ª ordem (casados e saídos; saídos e casados); êsses, por sua vez constituiriam grupos de 3.ª ordem (casados, saídos e mortos, etc.). Haveria assim várias possibilidades, indo até o estudo global de todo o sistema S. Eventualmente vários grupos derivados poderiam ser estudados em conjunto.

3 — TRÊS TIPOS DE FREQÜÊNCIA

3.1 — Vamos limitar o presente estudo ao grupo original. Dentro do esquema estabelecido no capítulo anterior, considere-se um período unitário de tempo em que se observa o grupo original, G, definido em um certo CBO e sejam:

N — o número de componentes do grupo, no início do período;

E_i — o número de eliminados durante o período de observação pela causa i; i=0, 1, 2, ... n;

K_i — o número dos que ingressam durante o período de observação no grupo G, provenientes de fora (K_o) ou de algum grupo derivado (G_i), consituído por todos aquêles que anteriormente foram eliminados pela causa *i*;

α_i — a fração de período que, em média, cada um dos eliminados pela causa *i* permanece fora de observação. Se tôdas as saídas ocorressem em início de período, seria $\alpha_i = 1$; se ao contrário, ocorressem em final de período, seria $\alpha_i =$ o. Em geral elas se verificam *durante* o intervalo considerado, de modo que $0 < \alpha_i < 1$, podendo-se adotar, na maioria dos casos, $\alpha_i = 1/2$, o que equivale a admitir-se uma distribuição uniforme das saíadas.

β_i — a fração de período durante a qual, em média, ficam em observação K_i entrados durante o período. Por motivos análogos, resulta $0 < \beta_i < 1$, podendo adotar-se $\beta_i = 1/2$ sempre que fôr lícita a hipótese de distribuição uniforme das entradas.

Os componentes do grupo existentes no início do período de observação que nêle permanecem até o final, isto é, durante um período inteiro, é dado pela expressão.

$$N - \sum_{r=o}^{n} E_r$$

Por outro lado, os que são eliminados durante o período, pela causa i, permanecem em observação, em média por um tempo $1 - \alpha_i$ de modo que o tempo total de observação dêsse grupo será dado pela expressão:

$$\sum_{r=o}^{n} (1 - \alpha_r) E_r$$

Anàlogamente, os que são admitidos no grupo G durante o período de estudo ficam em observação por um tempo total dado pela expressão

$$\sum_{r=o}^{n} \beta_r K_r$$

Portanto, o número total de "indivíduos período" em jôgo durante o intervalo unitário de observação será

$$N^* = (N - \sum_r E_r).1 + \sum_r (1 - \alpha_r) E_r + \sum_r \beta_r K_r$$

ou simplificando

$$N^* = N - \sum_r \alpha_r E_r + \sum_r \beta_r K_r \qquad (3.1\text{-}1)$$

Se o período unitário adotado é o ano N *, será o número de "indivíduos ano" ou de "pessoas ano" de observação; se o período fôr mensal, ter-se-á o total de "indivíduos-mês" e assim por diante. Essas denominações serão adequadamente alteradas se os elementos de G forem grupos em vez de indivíduos.

3.2 — Denomina-se freqüência de eliminação (pela causa i) *do 1.º tipo,* ou, alternativamente, freqüência de eliminação por "indivíduo período", ou, ainda, taxa central de eliminação (pela causa *i*), ao quociente, representado por q_1[1]:

$$q_1^i = E_i / N^* \qquad (3.2\text{-}1)$$

A taxa central de mortalidade é uma freqüência dêsse tipo; para um grupo fechado a taxa central na idade x, representada por m_x, é dada, como se sabe, pela expressão:

$$m_x = d_x \Big/ \left(l_x - \frac{1}{2} d_x\right)$$

Denomina-se freqüência de eliminação (pela causa *i*) *do 2.º tipo,* ou simplesmente, taxa de eliminação (pela causa *i*) para o período uni-

tário considerado (taxa anual, taxa mensal, etc.) e indica-se por q_2^i, ao quociente:

$$q_2^i = E_i/(N^* + \alpha_i E_i) \qquad (3.2\text{-}2)$$

A taxa anual de mortalidade pertence a êsse tipo.

Denomina-se freqüência de eliminação (pela causa i) *do 3.º tipo,* ou, simplesmente, *taxa aparente de eliminação* para o período considerado (ano, mês, etc.) e indica-se por q_3^i, ao quociente:

$$q_3^i = E_i \Big/ \left(N^* + \sum_{r=o}^{n} \alpha_r E_r\right) \qquad (3.2\text{-}3)$$

$$= E_i \Big/ \left(N + \sum_{r=o}^{n} \beta_r K_r\right) \qquad (3.2\text{-}4)$$

O denominador de q_2^i constitui o que se denomina tempo de exposição ao risco de eliminação pela causa i; indicando-o por $\overline{N}$ resulta

$$\overline{N} = N^* + \alpha_i E_i = N - \sum_{r \neq i} \alpha_r E_r + \sum_{r=o}^{n} \beta_r K_r$$

O mesmo total pode nenominar-se *número equivalente de exposto ao risco,* representando o número de indivíduos que, no início do período de observação, estariam sujeitos à eliminação pela causa *i,* se essa causa agisse sòzinha.

3.3 — Algumas relações de fácil obtenção ocorrem entre os três tipos de freqüência de eliminação definidos no parágrafo 3.2, como veremos a seguir. De fato, dividindo-se ambos os membros de (3.2-2) por N*, e comparando-se com (3.2-1) resulta:

$$q_2^i = q_1^i/(1 + \alpha_i q_1^i) \qquad (3.3\text{-}1)$$

ou, alternativamente

$$q_1^i = q_2^i/(1 - \alpha_i q_2^i) \qquad (3.3\text{-}2)$$

Essas relações são as que ocorrem, evidentemente, entre a taxa central de mortalidade, m_x (freqüência do 1.º tipo) e a taxa anual de mortalidade, q_x (freqüência do 2.º tipo):

$$q_x = m_x/(1 + m_x/2) = 2m_x/(2 + m_x)$$

Para se estabelecer uma relação entre q_3^i e q_1^i, basta utilizar a expressão 3.2-3) dividindo ambos os têrmos do 2.º membro por N*;

$$q_3^i = q_1^i \Big/ \left(1 + \sum_{r=o}^{n} \alpha_r, q_1^r\right) \qquad (3.3\text{-}3)$$

Do mesmo modo entre as freqüências q_3^i e q_2^i pode-se estabelecer relação análoga dividindo-se ambos os têrmos do 2.º membro de (3.2-3) por $N^* + \alpha_i E_i$

$$q_3^i = q_1^i \Big/ \left(1 + \sum_{r=o}^{n} \alpha_r q_2^r\right) = \qquad (3.3\text{-}4)$$

$$= q_2^i \Big/ \left(1 + \sum_{r=o}^{n} \alpha_r q_2^r - \alpha_i q_2^i\right) \qquad (3.3\text{-}5)$$

De maior interêsse prático são, no entanto, as relações inversas, que permitem determinar q_1^i e q_2^i a partir da taxa de eliminação aparente q_3^i, uma vez que essa última é fàcilmente calculável de forma direta. De fato, se nas expressões de q_1^i e q_2^i dividimos ambos os têrmos de fração do segundo membro por $\sum_{r=o}^{n} \beta_r K_r$, resulta, tendo em vista o significado de N *,

$$q_1^i = q_3^i \Big/ \left(1 - \sum_{r=o}^{n} \alpha_r q_3^r\right) \qquad (3.3\text{-}6)$$

$$q_2^i = q_3^i \Big/ \left(1 - \sum_{r \neq o}^{n} \alpha_r q_3^r\right) \qquad (3.3\text{-}7)$$

$$= q_3^i \Big/ \left(1 - \sum_{r=o}^{n} \alpha_r q_2^r + \alpha_i q_3^i\right) \qquad (3.3\text{-}8)$$

Das relações anteriores é fácil estabelecer o seguinte:

$$q_3^i < q_2^i < q_1^i \qquad (3.3\text{-}9)$$

3.4 — Considere-se o grupo G, tendo, inicialmente, N componentes. A taxa aparente de eliminação pela causa i será:

$$q_3^i = E_i \Big/ \left(N + \sum_{r=o}^{n} \beta_r K_r\right) \; ; \quad i = 0, 1, 2 \ldots n \qquad (3.4\text{-}1)$$

Pondo-se $\sum_{r=o} E_i = E$ e multiplicando-se e dividindo-se o 2.º membro por E, resulta:

$$q_3^i = \frac{E_i}{E} \cdot \frac{E}{N + \sum_{r} \beta_r K_r} \qquad (3.4\text{-}2)$$

Ora, a 2.ª fração é a freqüência de eliminação do 2.º tipo relativa à causa:

$$S = 0 \cup 1 \cup 2 \ldots \cup N$$

isto é, a qualquer das causas de eliminação que agem sôbre o grupo. Assim:

$$q_3^i = \lambda_i q_2^s \qquad (3.4\text{-}3)$$

o que constitui uma relação importante entre a freqüência aparente de eliminação por uma causa *i*, qualquer, e a freqüência global de eliminação do 2.º tipo. Como se verifica λ_i representa a composição dos eliminados durante o período de observação, segundo as causas de eliminação.

4 — UM ESQUEMA DE URNAS

4.1 — O estudo de grupos sujeitos a mais de uma causa de eliminação pode apresentar, na aplicação do esquema anterior, algumas dúvidas quanto à possibilidade concreta de certas causas de eliminação agirem sòzinhas, ou agirem em conjunto, de maneira independente. Se admitirmos, por exemplo, que o grupo observado é um grupo de homens solteiros, a eliminação pode-se dar por *morte* ou por *casamento*. Qual o sentido concreto, por exemplo, da expressão: intensidade de eliminação por casamento quando se suprime a mortalidade? No entanto é precisamente a essa expressão que teremos de atribuir um sentido rigoroso. Por outro lado, havendo um complexo de causas atuando sobre o grupo, cada indivíduo estará sujeito ao risco de ser atingido por mais de uma das causas de eliminação consideradas. Expressões, como por exemplo a probabilidade de ser atngido pela causa i e depois pela causa j durante o mesmo período de observação, têm de adquirir um sentido claro quaisquer que sejam os significados de i e j. Se a causa i significa o "casamento" e j "morte" não há dúvida quanto à expressão: "atingido pela causa i e depois pela causa j". De fato essa expressão traduz que alguém *casou e depois morreu*. Mas como interpretar a expressão "atngido pela causa j e depois pela causa i"? Podemos falar de alguém que "morreu e depois casou?" Essa expressão tem um sabor estranho de humor negro. Devemos no entanto admitir que alguém que estivesse com o casamento marcado para princípio de junho, digamos, e fôsse atingido por um acidente mortal em fins de maio, seria um daqueles que, se houvesse possibilidade material, "teria morrido e depois casado". De qualquer modo, se quisermos estimar a probabilidade de casamento (taxas de nupcialidade) na hipótese de ter sido extinta a mortalidade, não podemos deixar de lado essa posibilidade, através de uma estimativa capaz de levar em conta a extensão em que o declínio gradativo da mortalidade amplia o número de casamentos. Esta seria a contra partida do caso apontado, em que há uma evidente redução dêsse número em conseqüência de interferência da mortalidade, efeito que se pretende eliminar através da medida de sua possível extensão.

4.2 — Voltemos portanto ao caso geral de $n + 1$ causas de eliminação agindo conjuntamente sôbre um grupo. Qualquer uma dessas causas de eliminação pode ser encarada em relação à sua intensidade própria, quando agindo sòzinha sôbre o mesmo grupo de indivíduos. Pode-se alegar que essa idéia é artificial uma vez que os diferentes fenômenos biométricos não agem nunca sòzinhos, mas sempre em conjunto, constituindo um complexo de causas de eliminação, tôdas elas competindo entre si. Assim nunca haverá aquela situação que se imaginou no exemplo anterior de intensidade de eliminação por casamento *quando se suprime a mortalidade, pela razão óbvia de que a mortalidade nunca pode ser suprimida*. Não devemos porém esquecer que essa interferência declina com o declínio da própria mortalidade. A nupcialidade sofria antigamente uma interferência muito maior quando a mortalidade era mais elevada. Todos, ou quase todos os indivíduos que são hoje poupados em virtude do aperfeiçoamento da técnica médico-sanitária, ficam sujeitos ao "risco de casar" o que não ocorria antigamente quando a morte encontrava menor resistência. Assim, podemos admitir que a

nupcialidade está cada vez mais liberada da interferência da mortalidade, de modo que a sua intensidade pode manifestar-se de forma cada vez mais "pura" à medida que a mortalidade se reduz. Ora, se não podemos realizar pràticamente podemos pelo menos imaginar êsse processo de liberação levado até o seu limite extremo em que a nupcialidade estaria inteiramente livre da interferência competitiva da mortalidade. Teríamos assim a sua intensidade "pura", de modo que só então as freqüências de casamento que ocorressem nessa situação limite seriam estimativas das *probabilidades absolutas de casamento* (ou taxas líquidas de nupcialidade), isto é, *probabilidades de eliminação por casamento (a partir de um grupo de solteiros) quando a mortalidade fôsse inteiramente suprimida.* Generalizando, podemos supor a mesma situação em relação a outras causas, que eventualmente poderiam interferir na nupcialidade, e assim chegar a probabilidades absolutas de casamento (ou taxas líquidas de nupcialidade) na hipótese de estar êsse fenômeno agindo sòzinho, isto é, se forem suprimidas tôdas as demais causas de eliminação que atuam sôbre o grupo estudado.

4.3 — Vamos admitir que, para cada causa *i* de eliminação — $i = 0, 1, 2 \ldots n$ — seja conhecida a probabilidade absoluta de eliminação $q(i)$, durante um período unitário prefixado, isto é, a probabilidade de que um indivíduo do grupo seja eliminado pela causa *i*, quando ela age sò zinha (excluídas portanto tôdas as demais causas de eliminação). À cada causa *i* faremos corresponder uma urna, de número *i*, cujas bolas, brancas e pretas, tôdas elas levando o número *i* da urna a que pertencem, satisfazem a proporção exata das probabilidades absolutas correspondentes. Assim, sendo T o número total de bolas de cada urna, haveria na urna *i* as seguintes quantidades:

a) de bolas pretas: $T\,q(i)$
b) de bolas brancas: $T\,[1-q(i)]$

Há conveniência em abandonar o número total T (que se poderia supor infinito) e supor a urna *i* caracterizada pelas proporções:

de bolas pretas: $q(i)$
de bolas brancas: $1 - q(i)$

Teríamos, então, um sistema de $n + 1$ urnas separadas, a urna U_i referindo-se a eliminação pela causa *i* quando agisse sòzinha. Assim:

Urna U_0 — Saídas por causas não incluídas nas demais urnas. Representa saídas do sistema S.

Urna U_1 — Saídas pela causa *1*
Urna U_2 — Saídas pela causa *2*

.
.
.

Urna U_i — Saídas pela causa *i*

.
.
.

Urna U_n — Saídas pela causa *n*

Considere-se um grupo G, (que para facilitar suporemos fechado) obervado durante um período unitário no início do qual existem N indivíduos. A ação de uma certa causa *i*, com a supressão de tôdas as demais causas de eliminação, isto é, a eliminação pela causa i *quando ela age sòzinha* equivale ao seguinte esquema: cada indivíduo do grupo se aproxima da urna U_i e extrai uma bola anotando a côr (preta ou branca) e devolvendo-a em seguida à mesma urna. Se a bola fôr preta isso quer dizer que o indivíduo será eliminado pela causa i durante o período de observação; em caso contrário, êle continuará no grupo até o final do período. O sistema de urnas poderá ser ampliado para levar em conta os fatores de que depende a taxa de eliminação pela causa *i*; assim se essa taxa depender da idade e da profissão, haverá um sistema de urnas idêntico ao indicado para cada grupo da mesma idade e mesma profissão. O número de indivíduos de cada grupo que é igual ao número de bolas a serem extraídas de cada urna será N (x, π) onde x representa a classe de idade e π a profissão: pode-se imaginar, por exemplo, 15 classes de idades e 20 profissões, de modo que haveria 300 sistemas de urnas, cada um compreendendo tantas urnas quantas fôssem as causas de eliminação consideradas.

4.4 — Voltando ao istema único de urnas referido inicialmente, verifica-se que, pelo processo indicado, será extraída uma amostra de N bolas da urna U_i (i = é, 1, 2, ... n) de modo que o número de bolas pretas representa os eliminados pela causa *i*.

Assim, as freqüências relativas de bolas pretas retiradas de cada urna são estimativas das probabilidades absolutas de eliminação pela causa rorrespondente. Representando por N_i o número de bolas pretas retiradas da Urna U_i, resulta:

$$q(i) = N_i/N \qquad\qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Tal é o esquema destinado a representar, em relação ao grupo G, a ação isolada de cada uma dentre $n + 1$ causas de eliminação.

4.5 — Vamos analisar agora, através dêste mesmo esquema, a ação conjunta das $n + 1$ causas de eliminação. Admitiu-se, no parágrafo anterior, que as extrações eram feitas com reposição, de modo que cada indivíduo, ao extrair a sua *bola* i, encontrasse a urna com a composição inalterada. O mesmo poderia conseguir, é claro, se cada urna tivesse um número infinito de bolas, com a composição requerida em brancas e prestas. Pode-se admitir, para analisar a ação conjunta das $n + 1$ causas de eliminação, que a extração é feita em tôdas as urnas. Para isso, cada um dos N indivíduos do grupo retiraria *uma bola de cada urna,* segundo uma ordem aleatoria determinada, por exemplo, por uma extração prévia em uma urna especial E. Nessa urna figuraria, em fichas adequadas, tôdas as ordens possíveis das $n + 1$ urnas disponíveis: uma ficha par cada ordenação possível dos $n + 1$, números 0, 1, 2, ... n. É claro que cada ficha representaria, pela particular ordenação nela inscrita, um ponto de um espaço amostra $n + 1$ dimensional. Nessas condições, cada um dos N indivíduos do grupo retiraria uma ficha de E e em seguida, uma bola de cada urna, na ordem indicada na ficha, de modo que o conjunto das $n + 1$ bolas extraídas represen-

tasse uma possibilidade aleatória de ação das diferentes causas de eliminação. Por exemplo, se houvesse sòmente três causas de eliminação, 1, 2, 3 a urna E conteria 6 fichas, correspondentes às seguintes combinações numéricas: 123, 132, 213, 231, 312, 321, isto é, o "espaço amostra" considerado anteriormente seria constituído por 6 pontos do espaço tri-dimensional, cada ponto tendo para coordenadas (x, y, z) um particular terno dos números 1, 2 e 3. Se um indivíduo do grupo extrair da urna E a ficha 213, isto quer dizer que êle deverá retirar uma bola da urana 2, em seguido uma da de número 1 e , por fim, uma da de número 3, ou por outras palavras, *as bolas extraídas devem ser consideradas na ordem indicada na ficha.*

Uma vez terminada a operação, tanto a ficha como as bolas deverão ser devolvidas às respectivas urnas e a operação será repetida com outro indivíduo do grupo até que todos tenham feito as suas extrações. O resultado final será indicado pela quantidade de bolas brancas e pretas associadas aos respectivos números. Assim, a extração de uma *bola preta de número i* indicará que o indivíduo será atingido pela causa *i* durante o período unitário considerado e a de uma *bola branca de número i* significará, ao contrário, que o indivíduo não será atingido pela causa *i* durante o mesmo intervalo.

Suponhamos que o número 1 signifique "morte", o número 2, "casamento" e o número 3, "perda do emprêgo". O grupo inicial G será, nesse caso, um grupo de "indivíduos solteiros e empregados". Se o indivíduo que retirou da urna E a ficha de número 213, extrai, em seguida, uma bola branca de cada uma das urnas correspondentes, isso significa, para nós, que êle estará *vivo, solteiro e empregado* ao final do período, isto é, não terá sido eliminado nem por morte, nem por casamento, nem por abandono de emprêgo. Se, no entanto, êle tiver extraído, digamos, bola preta de cada uma das referidas urnas, isso quer dizer que foi eliminado concomitantemente pelas *3 causas consideradas,* e, face à ordem das urnas, *êle terá casado, depois morrido e posteriormente perdido o emprêgo.* Note-se que a perda do emprêgo não é uma decorrência da morte mas é independente dela. Se a bola da urna 3 fôsse branca e as duas outras pretas, o indivíduo teria casado, depois morrido *mas continuaria empregado até o final* do período. Anàlogamente, o indivíduo que extraísse a ficha 123 poderia retirar bolas pretas das urnas 1 e 2 o que significaria uma morte seguida de um casamento: *o indivíduo moreria para depois casar !*

Como se verifica, expressões que têm siginifcado concreto inteiramente estranho ao senso comum, adquire um sentido óbvio e claro no esquema por nós estabelecido. No estudo que se vai proceder admite-se a validade dêsse esquema com o objetivo de analisar as influências isoladas de cada causa de eliminação interveniente em um conjunto de causas competitivas.

Dado um grupo sujeito a $n + 1$ causas de eliminação, é possível, como veremos, determinar estimativas da probabilidade absolutas de eliminação correspondentes a cada causa, isto é, na hipótese de que os efeitos de tôdas as demais fôssem suprimidos.

A evolução do grupo real sã pode ser acompanhada, na realidade, sob a ação conjugada dêsse complexo de causas. No entanto é de extrema utilidade conhecer-se a influência exercida por uma dada causa *i* (ou por um conjunto de causas) de modo a se estabelecer a evolução que teria o grupo se aquela causa fôsse *suprimida ou apenas reduzida* em uma medida prefixada. De fato, a melhor forma de se estudar a influência que uma dada causa de eliminação exerce sôbre a evolução de um grupo de indivíduos, consiste em suprimir essa causa e verificar as conseqüências dessa supressão sôbre a evolução de grupo.

Um outro problema importante coniste em se estabelecer o custo de uma dada redução, ou de um determinado efeito final sôbre a evolução de um grupo.

Um outro problma importante consiste em se estabelecer o custo de uma dada redução, ou de um determinado efeito final sôbre a evolução de um grupo. Êsses aspectos serão analisados noutra parte dêste trabalho.

5 — DUAS CAUSAS DE ELIMINAÇÃO: MODÊLO PROBABILÍSTICO

5.1 — A fim de realizar uma análise rigorosa do que pode ocorrer em um grupo sujeito a mais de uma causa de eliminação, vamos supor que agem sòmente duas causas, i e j, indicadas neste parágrafo por A e B. Admitiremos que A e B agem independentemente uma da outra, na forma do esquema do parágrafo anterior, de modo que, embora a ação de qualquer delas venha como conseqüência *eliminar o indivíduo* do *grupo,* isso não modique a probabilidade de vir êle a ser atingido pela outra causa de eliminação. Considere-se um período unitário de tempo e sejam:

— Q(A), a probabilidade, para cada indivíduo do grupo, de ser atngido, durante o período de observação, sòmente pela cauasa A;

— Q(B), a probabilidade, para cada indivíduo do grupo, de ser atingido, durante o período de observações, sòmente pela causa B;

— $Q(\overset{1}{AB})$, a probabilidade, para cada indivíduo do grupo, de ser atingido, durante o período de obervação, por ambasa as causas de eliminação, na seguinte ordem: A em primeiro e B em segundo;

— Q(AB), a probabilidade, para cada indivíduo do grupo de ser atingido, durante o período de obervação, por ambas as causas de eliminação, na seguinte ordem: B em primeiro e A em segundo.

— Q(AB), a probabilidade, para cada indivíduo do grupo de ser atingido, durante o período de obervação, por ambas as causas de eliminação, *em qualquer ordem*:

$$Q(AB) = Q(\overset{1}{AB}) + Q(\overset{1}{AB})$$

— q (A), a probabilidade, para cada indivíduo do grupo, de ser eliminado pela causa A, durante o período de observação, *quando A age sòzinha* (isto é, quando fica suprimida a causa B);

— q (B), a probabilidade, para cada indivíduo do grupo, de ser eliminado pela causa B, durante o período de observação, *quando B age sòzinha* (isto é, quando fica suprimida a causa A);

— q_A^o e q_B^o, as probabilidades, para cada indivíduo, de ser eliminado, durante o período de observação, respectivamente por A e por B quando as duas causas agem conjuntamente;

Se representarmos por N_A e N_B o número de eliminandos pelas causas A e B, durante o período de observação de um grupo fechado de indivíduos inicialmente, as estimativas de q_A^o e q_B^o serão dadas pelas freqüências do terceiro tipo.

Representando essas estimativas por $\hat{q}_A^o$ e $\hat{q}_B^o$ resulta:

$$\hat{q}_A^o = N_A/N; \; \hat{q}_B^o = N_B/N \qquad (5.1\text{-}1)$$

Por outro lado,

$$q(A) = Q(A) + Q(AB) = Q(A) + Q(\overset{1}{AB} + Q(\overset{1}{AB})$$

$$q_A^o = Q(A) + Q(\overset{1}{AB})$$

Donde:

$$q(A) = q_A^o + Q(\overset{1}{AB}) \qquad (5.1\text{-}2)$$

Em virtude da independência de A e B, pode-se escrever:

$$Q(\overset{1}{AB}) = \theta_A \cdot Q(AB) = \theta_A \cdot q(A) \cdot q(B) \qquad 0 \leq \theta_A \leq 1$$

$$Q(\overset{1}{AB}) = \theta_B \cdot Q(AB) = \theta_B q(A) \cdot q(B) \qquad 0 \leq \theta_B \leq 1$$

$$\theta_A + \theta_B = 1$$

Substituindo-se o último valor de $Q(\overset{1}{AB})$ em (5.1-2) resulta:

$$q(A) = q_A^o + \theta_B \, q(A) \cdot q(B) \qquad 5.1\text{-}3)$$

Expressão análoga obtém-se para q(B):

$$q(B) = q_B^o + \theta_A \cdot q(A) \, q(B) \qquad (51\text{-}4)$$

Donde, finalmente:

$$q(A) = q_A^o \cdot \left[1 - \theta_B \, q(B)\right]^{-1} \qquad (5.1\text{-}5)$$

$$q(B) = q_B^o \cdot \left[1 - \theta_A \, q(A)\right]^{-1} \qquad (5.1\text{-}6)$$

Como a expressão de q(A) depende de q(B) e a de q(B) depende de q(A) pode-se substituir o valor de uma na outra. Assim, substituindo-se (5.1-6) no denominador de (5.1-5) e simplificando resulta a seguinte equação do 2.º grau:

$$\theta_A \, q^2(A) - \left[1 + \theta_A q_A^o - \theta_B \, q_B^o\right] q(A) + q_A^o = 0 \qquad (5.1\text{-}7)$$

Donde:

$$q(A) = \frac{(1 + \theta_A q_A^o - \theta_B q_B^o) \pm \sqrt{(1 + \theta_A q_A^o - \theta_B q_B^o)^2 - 4\,\theta_A q_A^o}}{2\,\theta_A} \qquad (5.1\text{-}8)$$

e outra análoga para q(B)

$$q(B) = \frac{(1 + \theta_B q_B^o - \theta_A q_A^o) \pm \sqrt{(1 + \theta_B q_B^o - \theta_A q_A^o)^2 - 4\,\theta_B q_B^o}}{2\,\theta_B} \qquad (5.1\text{-}9)$$

Essas expressões apresentam as seguintes características: em primeiro lugar, sòmente o sinal (menos) antes do radical corresponde a valores compatíveis com a probabilidade calculada; em segundo lugar, a expressão sub-radical pode ser modificada no sentido de facilitar o cálculo de uma das probabilidades quando já se calculou a outra. De fato, pode-se escrever

$$(1 + \theta_A q_A^o - \theta_B q_B^o)^2 - 4\,\theta_A q_A^o = R(A, B)$$

ou, desenvolvendo o trinômio do 1.º membro e recompondo os têrmos:

$$R(A, B) = (1 - \theta_A q_A^o - \theta_B q_B^o)^2 - 4\,\theta_A \theta_B q_A^o q_B^o$$

expressão que não se altera pela troca de A por B e B por A. Assim,

$$q(A) = (2\,\theta_A)^{-1}\left[1 + \theta_A q_A^o - \theta_B q_B^o - \sqrt{R(AB)}\right. \qquad (5.1\text{-}10)$$

$$q(B) = (2\,\theta_B)^{-1}\left[1 + \theta_B q_B^o - \theta_A q_A^o - \sqrt{R(AB)}\right. \qquad (5.1\text{-}11)$$

Estimativas de q(A) e q(B), representadas por $\hat{q}(A)$ e $\hat{q}(B)$, podem ser obtidas mediante substituição de q_A^o e q_B^o pelas suas estimativas (5.1-1).

Para simplificar suponhamos um grupo de 100 000 indivíduos, do qual 10 000 foram eliminados, durante um ano de observação, pela causa A e 2000 pela causa B. Adotando as anotações anteriores:

$$N = 100\,000; \quad N_A = 10\,000; \quad N_B = 2\,000$$

$$\hat{q}_A^o = N_A/N = 0{,}10; \quad \hat{q}_B^o = N_B/N = 0{,}02$$

As fórmulas (5.1-10) e (5.1-11) permitem então obter, supondo $\theta_A = \theta_B = 1/2$:

$$\hat{q}(A) = 1{,}04 - \sqrt{0{,}8816} = 0{,}1010644$$

$$\hat{q}(B) = 0{,}96 - \sqrt{0{,}8816} = 0{,}C210644$$

valores que pouco diferem das correspondentes taxas aparentes.

5.2 — A partir das expressões (5.1-5) e (5.1-6) pode-se estabelecer um método de aproximações sucessivas para o cálculo $\hat{q}(A)$ e $\hat{q}(B)$, as quais podem ser representadas pelas notações: ${}_1\hat{q}(A)$, ${}_2\hat{q}(A)$, ... e $\hat{q}_1(B)$, ${}_2\hat{q}(B)$, ... etc.

A primeira aproximação de q(A) será obtida substituindo-se o denominador da expressão de q(A) — fórmula (5.1-5) — o valor de q(B) pela taxa aparente $\hat{q}_B^o$. Assim:

$$_1\hat{q}(A) = \hat{q}_A^o \left[1 - \theta_B \, \hat{q}_B^o\right]^{-1} \qquad (5.2\text{-}1)$$

de modo geral, a aproximação de ordem K + 1 será =

$$_{k+1}\hat{q}(A) = \hat{q}_A^o \left[1 - \theta_B \, {}_k\hat{q}(B)\right]^{-1} \qquad (5.2\text{-}2)$$

$$_{k+1}\hat{q}(B) = \hat{q}_B^o \left[1 - \theta_A \, {}_k\hat{q}(A)\right]^{-1} \qquad (5.2\text{-}3)$$

No caso do exemplo do parágrafo anterior resulta:

1.º aproximação:

$$_1\hat{q}(A) = \hat{q}_A^o / 1 - \theta_B \, \hat{q}_B^o = 0.10/0.99 = 0.1010101$$

$$_1\hat{q}(B) = \hat{q}_B / 1 - \theta_A \, \hat{q}_A = 0.20/0.95 = 0.0210526$$

2.º aproximação

$$_2\hat{q}(A) = \hat{q}_A^o / 1 - \theta_B \, {}_1\hat{q}(B) = 0.10/0.98944737 = 0.1010638$$

$$_2\hat{q}(B) = \hat{q}_B^o / 1 - \theta_A \, {}_1\hat{q}(A) = 0.02/09494949 = 0.0210638$$

Assim, do ponto de vista prático, a 2.ª aproximação pode ser considerada exata, no exemplo dado, uma vez que o êrro é de apenas 6 unidades na 7.ª decimal, tanto em $\hat{q}(A)$ como em $\hat{q}(B)$. Mesmo na 1.ª aproximação o êrro é sòmente de 5 unidades da 5.ª decimal no primeiro caso e de 1 unidade da mesma decimal no segundo. Note-se que, uma vez calculada a 1.ª aproximação de q(A) ela pode ser utilizada logo para o cálculo da 2.ª aproximação de q(B), sem ser necessário passar pela 1.ª, da qual se partirá para a 3.ª aproximação de q(A), sem passar pela 2.ª e assim por diante, queimando-se dêsse modo algumas etapas. Assim, no exemplo dado, o cálculo de $_1q(A)$ permitirá logo obter

$$_2\hat{q}(B) = 0{,}0210638$$

com o qual se determinará

$$_3\hat{q}(A) = 0{,}1010644$$

Como se verifica, o método de aproximação sucessivas permite obter resultados de boa qualidade mediante cálculos relativamente simples.

5.3 — O estudo feito nos parágrafos anteriores, para o caso de 2 atributos A e B podem ser aplicados quando um dêles, B por exemplo, se subdivide em dois outros, por união:

$$B = J \cup K$$

É então possível, dispondo-se das observações referentes a três causas de eliminação A, J, K, considerar, de cada vez, apenas duas

A e JUK

J e AUK

K e AUJ

A cada caso, separadamente, pode-se aplicar a teoria correspondente a duas causas de eliminação, tal como foi desenvolvida nos parágrafos anterores. O exemplo numérico que se dá a seguir esclarece as várias etapas do trabalho para a determinação de estimativas das probabilidades absolutas de diferentes causas de morte.

6 — DETERMINAÇÃO DAS PROBABILIDADES: EXEMPLO NUMÉRICO *

6.1 — Os dados para êste exemplo se referem à mortalidade do estado da Guanabara, no período 1939/41 e constam dos quadros I e II. O primeiro fornece as taxas de mortalidade (freqüência do 2.º tipo) para diferentes classes de idades e o segundo indica a distribuição dos óbitos segundo as causas, especificadas apenas a tuberculose e a sífilis. As freqüências se referem ao intervalo $x \vdash x + h$ indicado na 1.ª coluna, embora a notação só faça referência ao limite inferior. Adota-se pois $q(x)$ em vez de $q(x, x + h)$, suprimindo-se qualquer indicação de idade em benefício da simplicidade da notação sempre que ela não seja indispensável para a compreensão dos resultados.

QUADRO I

Freqüências anuais de óbitos (2.º tipo), por classes de idades, na GB, durante o período de 1939/41

CLASSES DE IDADES $x \vdash x + h$	$\hat{q}_2(x)$
0 ⊢ 1	0,14554
1 ⊢ 5	0,11507
5 ⊢ 10	0,02162
10 ⊢ 20	0,04166
20 ⊢ 30	0,09438
30 ⊢ 40	0,12847
40 ⊢ 50	0,18675
50 ⊢ 60	0,28630

* Exemplo dado aos alunos no curso de "Introdução à Ciência Atuarial" ministrado pelo autor em 1943 no Instituto de Resseguros do Brasil.

No quadro II figuram os valores de $1\,000\,\lambda_i$ (ver fórmula 3.4-3), indicando-se a *tuberculose* pelo índice "i', a *sífilis* por "j" e as *demais causas* pela letra "k". Os valores de λ_i permitem, mediante aplicação da fórmula (3.4-3), determinar as freqüências do 3.º tipo, constantes do quadro III.

QUADRO II

Valôres de $1\,000\,\lambda_i$, $1\,000\,\lambda_j$ e $1\,000\,\lambda_k$ por classes de idades

(Ver formula 3.4-3)

CLASSES DE IDADES x ⊢ x + h	CAUSAS DE MORTE			TOTAIS
	1 000 λ_i Tuberculose	1 000 λ_j Sífilis	1 000 λk Demais causas	
0 ⊢ 1.....	5,21	273,93	720,86	1 000,00
1 ⊢ 5.....	43,32	96,65	860,03	1 000,00
5 ⊢ 10.....	90,49	95,11	814,50	1 000,00
10 ⊢ 20.....	326,01	101,74	572,25	1 000,00
20 ⊢ 30.....	491,15	91,42	417,43	1 000,00
30 ⊢ 40.....	400,73	165,21	434,06	1 000,00
40 ⊢ 50.....	278,81	239,04	482,15	1 000,00
50 ⊢ 60.....	183,72	304,01	512,27	1 000,00

QUADRO III

Freqüências do 3.º tipo por classes de idades — GB, 1939/41

CLASSES DE IDADES x ⊢ x + h	$q_3^i(x)$	$q_3^j(x)$	$q_3^k(x)$	TOTAIS $q_3(x)$
0 ⊢ 1.....	0,00076	0,03987	0,10491	0,14554
1 ⊢ 5.....	0,00499	0,01112	0,09896	0,11507
5 ⊢ 10.....	0,00196	0,00205	0,01761	0,02162
10 ⊢ 29.....	0,01358	0,00424	0,02384	0,04166
20 ⊢ 30.....	0,04635	0,00863	0,03940	0,09438
30 ⊢ 40.....	0,05148	0,02123	0,05576	0,12847
40 ⊢ 50.....	0,05207	0,04464	0,09004	0,18675
50 ⊢ 60.....	0,05260	0,08704	0,14666	0,28630

O cálculo da 1.ª, 2.ª e 3.ª aproximações das probabilidades absolutas (estimativas) foi feito mediante aplicação de (5.2-1), (5.2-2) e (5.2-3), identificando-se a causa "A" com uma das causas "i" ou "j" e B com as causas restantes. Assim, quando A é identificada à causa "i", B representará "j + k", isto é, "sífilis e demais causas" da classi-

ficação primitiva. Quando "A" é identificada a "j", B será representado por "i + k"; etc. A fim de facilitar a notação, indicaremos por "(i)" a expressão *"tôdas as causas exceto i"*, de modo que q_3^{i+j}, q_3^{i+k} e q_3^{j+k}, serão representadas respectivamente por

$$q_3^{(k)},\ q_3^{(j)} \text{ e } q_3^{(i)},$$

suprimindo-se, nesse caso, a indicação da idade para não sobrecarregar a notação.

Assim resulta, para cada idade:

$$q_3^{(k)} = q_3^{i+j} = q_3^{i} + q_3^{j}$$

e duas outras expressões análogas. A estimativa de q será indicada pelo símbolo $\hat{q}$.

QUADRO IV

Valôres de $\hat{q}_3^{(i)}$, $\hat{q}_3^{(j)}$ e $\hat{q}_3^{(k)}$ por classes de idades

CLASSES DE IDADES	$\hat{q}_3^{(k)}$	$\hat{q}_3^{(j)}$	$\hat{q}_3^{(i)}$
0 ⊢ 1.....	0,04063	0,10567	0,14478
1 ⊢ 5.....	0,01611	0,10395	0,11008
5 ⊢ 10.....	0,00401	0,01957	0,01966
10 ⊢ 20.....	0,01782	0,03742	0,02808
20 ⊢ 30.....	0,05498	0,08575	0,04803
30 ⊢ 40.....	0,07271	0,10724	0,07699
40 ⊢ 50.....	0,09671	0,14211	0,13468
50 ⊢ 60.....	0,13964	0,19926	0,23370

6.2 — Com o auxílio dêsses valôres e supondo $\alpha_i = \alpha_j = \alpha_k = 1/2$, foram calculadas as taxas constantes do quadro V, que constituem a 1.ª aproximação das estimativas das probabilidades absolutas. Adotaremos para a k^ma^ aproximação de q (A) — ver cap. 5 — a notação $_kq$ (A) onde "A' representa aqui, como no capítulo 5, a causa de eliminação a que a probabilidade se refere, ficando assim suprimida, a indicação da idade sempre que não seja absolutamente indispensável. A causa "não A", isto é, *tôdas as causas exceto A* será indicada, neste caso, por "$\tilde{A}$". Assim $q(\tilde{i})$ é a probabilidade de eliminação por qualquer causa exceto i; a notação "(i)" do parágrafo anterior fica pois substituída por "$\tilde{i}$" quando se tratar de probabilidades absolutas. Cabe observar desde logo que adotamos $\alpha_i = \alpha_j = 1/2$ para tôdas as clases de idades por motivos de simplicidade, embora reconhecendo que, pelo menos para a classe 0 ⊢ 1, o valor devesse ser outro. Isso, porém, não afeta o método e tem pouca influência nos resultados.

QUADRO V

Estimativas das probabilidades absolutas (1.ª aprox.)

CLASSES DE IDADES $x \vdash x + h$	${}_1\hat{q}(i)$	${}_1\hat{q}(j)$	${}_1\hat{q}(k)$
0 ⊢ 1.....	0,000819	0,049204	0,107085
1 ⊢ 5.....	0,005281	0,011730	0,099764
5 ⊢ 10.....	0,001979	0,002070	0,017645
10 ⊢ 20.....	0,013773	0,004321	0,024054
20 ⊢ 30.....	0,047490	0,009017	0,040514
30 ⊢ 40.....	0,053541	0,022433	0,057864
40 ⊢ 50.....	0,055830	0,048055	0,094615
50 ⊢ 60.....	0,059560	0,096671	0,157584

Com os resultados do Quadro V podem ser calculadas, diretamente, a 2.ª aproximação ${}_2\hat{q}(\tilde{i}) = {}_2\hat{q}(j + k)$, das estimativas das probabilidades absolutas de eliminação por tôdas as causas *excluída a causa i* (tuberculose), a partir das quais se obtém a 3.ª aproximação ${}_3\hat{q}(i)$ das estimativas das probabilidades absolutas de eliminação por tuberculose. O quadro VI fornece os valôres assim obtidos para ${}_2\hat{q}(i)$ e o quadro VII apresenta o cálculo de ${}_3\hat{q}(i)$. Todos os α foram supostos iguais a 1/2. Os valores de ${}_4\hat{q}(i)$ do quadro VII permitem calcular ${}_3\hat{q}(\tilde{i})$ e êstes últimos determinam ${}_5\hat{q}(i)$.

Os resultados finais constam do quadro VIII, suprimidos os cálculos intermediários.

Verifica-se que entre a 1.ª e 3.ª aproximações de $\hat{q}(i)$ houve pequenas alterações; a 3.ª e 5.ª aproximações, no entanto, fornecem pràticamente os mesmos resultados até a 6.ª decimal exceto para as classes de idades: 20 ⊢ 30, que apresentou uma diferença de 6 unidades da 6.ª decimal e 50 ⊢ 60, com uma unidade dessa casa.

6.3 — O mesmo cálculo foi repetido para a causa de eliminação "j" (sífilis) para a que forem obtidas as estimativas ${}_1\hat{q}(j)$, ${}_3\hat{q}(j)$ e ${}_5\hat{q}(j)$, constantes do quadro IX.

QUADRO VI

Valôres de ${}_2\hat{q}(j + k) \equiv {}_2\hat{q}(\tilde{i})$. (2.ª aproximação)

CLASSES DE IDADES	$\hat{q}_3^{(i)}$ (*)	$0{,}5\ {}_1\hat{q}(i)$	$1 - 0{,}5\ {}_1\hat{q}(i)$	${}_2\hat{q}(\tilde{i})$
0 ⊢ 1.....	0,14478	0,0004095	0,9995905	0,144839
1 ⊢ 5.....	0,11008	0,0026405	0,9973595	0,110371
5 ⊢ 10.....	0,01966	0,0009895	0,9990105	0,019679
10 ⊢ 20.....	0,02808	0,0068865	0,9931135	0,028275
20 ⊢ 30.....	0,04803	0,0237450	0,9762550	0,049198
30 ⊢ 40.....	0,07699	0,0267705	0,9732295	0,079108
40 ⊢ 50.....	0,13468	0,0279150	0,9720850	0,138547
50 ⊢ 60.....	0,23370	0,0297800	0,9702200	0,240873

(*) Última coluna do quadro IV.

QUADRO VII

Valôres de $_3\hat{q}(i)$ (3.ª aproximação)

CLASSES DE IDADES	$0,5\ {}_2\hat{q}(i)$	$1 - 0,5\ {}_2\hat{q}(i)$	$_3\hat{q}(i)$
0 ⊢ 1	0,0724195	0,9275805	0,000819
⊢ 5	0,0551855	0,9448145	0,005281
51 ⊢ 10	0,0098395	0,9901605	0,001970
10 ⊢ 20	0,0141375	0,9858625	0,013775
20 ⊢ 30	0,0245990	0,9754010	0,047519
30 ⊢ 40	0,0395540	0,9604460	0,053600
40 ⊢ 50	0,0692535	0,9307265	0,055946
50 ⊢ 60	0,1204365	0,8795635	0,059802

Por desnecessários à inteligência do assunto deixamos de apresentar aqui todos os cálculos intermediários, análogos aos anteriores e bem assim os valôres de $_2\hat{q}(\tilde{j})$ e $_4\hat{q}(\tilde{j})$.

Nesse caso ó ocorreu uma únisa diferença de 3 unidades da 5.ª decimal para a classe 50 ⊢ 60 entre a 3.ª e 5.ª aproximações, ficando inalterados todos os demais resultados até a 6.ª decimal.

QUADRO VIII

por classes de idades

CLASSES DE IDADES	$_4\hat{q}(i)$	$_5\hat{q}(i)$
0 — 1	0,144839	0,000819
1 ⊢ 5	0,110371	0,005281
5 ⊢ 10	0,019679	0,001979
10 ⊢ 20	0,028275	0,013775
20 ⊥ 30	0,049199	0,047519
30 ⊢ 40	0,079110	0,053600
40 ⊢ 50	0,138557	0,055946
50 ⊢ 60	0,240903	0,059803

QUADRO IX

Estimativas de $q(\tilde{j})$ — 1.ª, 3.ª e 5.ª aproximações

CLASSES DE IDADES	VALORES DE $\hat{q}(i)$ — SÍFILIS		
	1.ª aprox.	3.ª aprox.	5.ª aprox.
0 ⊢ 1	0,042094	0,042145	0,042145
1 ⊢ 5	0,011730	0,011733	0,011733
5 ⊢ 10	0,002070	0,002070	0,002070
10 ⊢ 20	0,004321	0,004321	0,004321
20 ⊢ 30	0,009017	0,009018	0,009018
30 ⊢ 40	0,022433	0,022447	0,022447
40 ⊢ 50	0,048055	0,048145	0,048145
50 ⊢ 60	0,096671	0,097218	0,097255

Em conclusão, portanto, a 3.ª aproximação já pode ser adotada como estimativas exatas, podendo-se eventualmente ir-se até a 5.ª aproximação. Na prática, poderíamos denominar as 3.ª e 5.ª aproximações de 2.ª e 3.ª respectivamente, uma vez que não são necessários os valôres das aproximações intermediárias (2.ª e 4.º).

6.4 — Em livro recente (*Introduction to Stochastic Processes in Biostatistics* — 1968) Ching Long Chiang estuda o problema dos riscos competitivos (*competing risks*) por um caminho que, embora diferindo na forma, conduz essencialmente aos mesmos resultados obtidos em 1950 por Jerzy Neyman (*Firts Curse in Probability and Statistics*). Com as notações por nós utilizadas chega Long Chiang às seguintes expressões das probabilidades absolutas (*net probabilities*):

$$q(i) = 1 - (1 - q)^{q_3^i/q} \qquad \text{(Form. 2.13-Cap. 11)}$$

onde $q = \sum_i q_3^i$ é a probabilidade de eliminação global (por qualquer

QUADRO X

Valôres de q (i) e q (i) calculados pelo método proposto e pelas fórmulas de Chiang

CLASSES DE IDADES	$\hat{q}$ (i)		$\hat{q}$ (ī)	
	Presente trabalho	Chiang	Presente trabalho	Chiang
0 ⊢ 1.....	0,000819	0,000821	0,144839	0,144838
1 ⊢ 5.....	0,005281	0,005287	0,110371	0,110367
5 ⊢ 10.....	0,001989	0,001980	0,019679	0,019679
10 ⊢ 20.....	0,013775	0,013775	0,028275	0,028274
20 ⊢ 30.....	0,047519	0,047519	0,049199	0,049199
30 ⊢ 40.....	0,053600	0,053610	0,079110	0,079101
40 ⊢ 50.....	0,059946	0,056008	0,138557	0,138499
50 ⊢ 60.....	0,059803	0,060087	0,240903	0,240674
60.....	—	—	—	—

causa). Anàlogamente, a probabilidade de eliminação por *qualquer causa, exceto i,* mantida a anotação do presente trabalho, é, segundo Chiang:

$$q(\bar{i}) = 1 - (1 - q)^{(q - q_3^i)/q} \qquad \text{(Form. 2.14-Cap.11)}$$

Dessa expressão pode-se fàcilmente obter:

$$q(\bar{i}) = 1 - \frac{1 - q}{1 - q(i)} = \frac{q - q(i)}{1 - q(i)} \qquad (6.4\text{-}1)$$

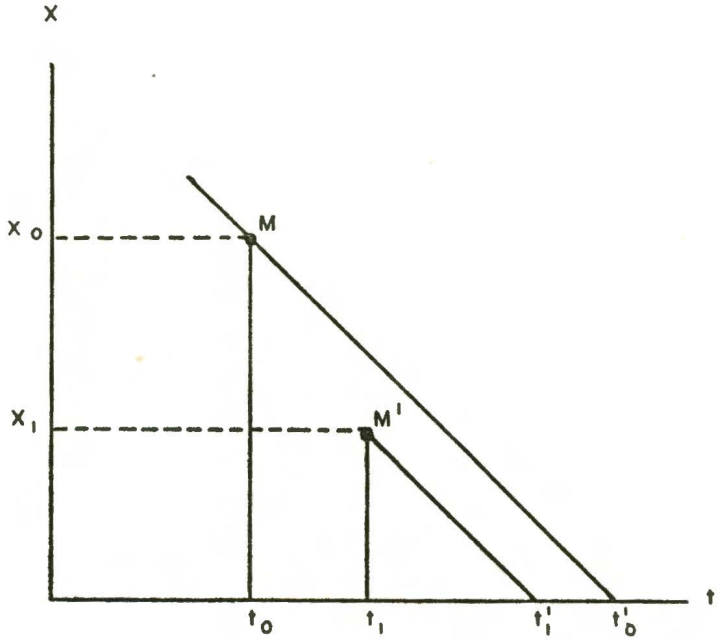
No quadro X figuram as estimativas de q(i) e q(ī), calculadas pelo método indicado neste trabalho, comparadas com as obtidas pelas fórmulas de Long Chiang.

Como se verifica os resultados são pràticamente os mesmos.

7 — AS FUNÇÕES DE PERMANÊNCIA E ELIMINAÇÃO NO GRUPO FUNDAMENTAL: CONCEITO, DETERMINAÇÃO E APLICAÇÕES

7.1 — Considere-se novamente o grupo G, que se supõe fechado, contando, inicialmente, N elementos (indivíduos ou grupos) representados por pessoas, animais ou coisas e sujeito a $n + 1$ causas de eliminação, 0, 1, 2, ... n. Cada elemento permanecerá no grupo até ser eliminado por uma causa qualquer. No esquema utilizado no capítulo 4, admite-se que o fenômeno pode ser representado por uma série de extrações em um sistema de urnas em que as proporções de bolas brancas e pretas concidem com as probabilidades de permanência em G (bola branca) ou de eliminação de G (bola preta) durante um certo intervalo de tempo (ano, mês, dia, hora, etc.) Assim, no início de cada período, todos os elementos que ainda permanecem no grupo G realizam suas extrações no sistema de urnas, (ou alguém as realiza por êles) na forma indicada. Todavia, a eliminação ocorrerá durante o período, em um instante qualquer. Pode-se imaginar, por exemplo, que todos aquêles que tenham extraído bola preta devam sortear, em seguida, numa distribuição retangular, um ponto do intervalo $0 \vdash 1$, a fim de determinar o momento exato em que se dará a eliminação. Os que extrairem *duas* bolas pretas, numa ordem determinada aleatòriamente, (i, j, por exemplo) deverão sortear, além do ponto do intervalo $0 \vdash 1$, relativo à eliminação pela causa *i*, um outro para a causa j. Se o primeiro fôsse, digamos, o ponto de abcissa z, $(0 \leq z < 1)$, então, para a causa j, seria sorteado um segundo ponto, do intervalo $z \vdash 1$, e assim por diante. Nessas condições, a permanência de cada elemento no grupo até o momento em que ocorrer a eliminação, pelo processo indicado, será uma variável aleatória contínua. Note-se que supomos essa segunda extração realizada em um universo retangular por mero critério de simplificação; na prática poderá ocorrer que o tipo de universo seja outro.

7.2 — Considere-se um sistema de eixos coordenados (Fig. 2) em que o tempo, contado a partir de uma origem arbitrária, é representado no eixo das abcissas. Em um ponto A de abcissa t_0, um indivíduo ingressa no grupo G; êsse ponto A do eixo dos tempos representa o seu "ponto de entrada". A partir daí, conta-se no eixo das ordenadas o tempo durante o qual êle permaneceu no grupo até o momento x_0 em que êle foi eliminado. O ponto M representa o seu ponto de eliminação, x_0 o seu tempo de permanência e a linha AM denomina-se linha de permanência, no grupo G (do elemento considerado). Outro indivíduo, entrado no ponto A′ (instante t_1) terá uma outra linha de permanência de comprimento A′M′, diferente do anterior. Por outro lado, traçando-se as linhas inclinadas de 135% em relação ao eixo dos tempos verifica-se que a eliminação de 1.º indivíduo, m, deu-se no ins-



- FIG. 2 -

tante t'_0 e a do 2.º, m', no instante t'_1. Todos os pontos de uma mesma linha inclinada, referem-se a fatos que ocorrem ou a situação que existem no *mesmo instante,* daí denominarem-se essas linhas de "linhas censitárias", uma vez que uma operação censitária tem como objetivo, precisamente, levantar a situação existente em um determinado instante, isto é, os dados referentes a todos os pontos situados sôbre uma dessas linhas inclinadas.

7.3 — Assim, a cada um dos N indivíduos do grupo G corresponde uma linha de permanência, cujo comprimento é uma variável aleatória, X_m, (m = 1, 2, 3, ... N), que será denominada "tempo de permanência" do indivíduo m, grupo G. É claro que a cada indivíduo corresponde um tempo de permanência próprio, diferente de todos os demais. Na prática porém somos levados a considerar que certos subgrupos, dentro do grupo G, podem ter aproximadamente o mesmo tempo de permanência. Assim, o tempo de permanência em vida (vida média) será suposto igual para todos os indivíduos de idades próximas, incluidos na mesma classe de idades etc. Isso, porém, não altera o nosso raciocínio. Seja um indivíduo qualquer do grupo e X (suprimido, por facilidade, o índice m) o tempo de permanência a êle associado. A

variável X, suposta contínua, terá então, uma certa densidade de probabilidade f (x):

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[Pr(x \leq X \leq x + \Delta x)/\Delta x \right] \qquad (7.2\text{-}1)$$

e uma função de distribuição

$$F(x) = \int_0^x f(z)\, dz = Pr(X \leq x)$$

Denomina-se função de permanência, P(x), ao complemento da função de distribuição:

$$P(x) = 1 - F(x) = Pr(X > x) \qquad (7.2\text{-}2)$$

Quando a função de permanência é definida apenas em um conjunto discreto x_0, x_1, ... x_n de valôres de x (em geral inteiros) denomina-se tábua de permanência. Se representarmos por G^i um grupo fictício em que os mesmos indivíduos do grupo G são eliminados apenas pela causa i, e por $G^{(i)}$ aquêle em que os indivíduos são eliminados por tôdas as causas, exceto a causa i, poderemos definir, de forma análoga, as funções de permanência.

$$P_i(x) = 1 - F_i(x) = Pr({}_iX < x)$$

$$P_{(i)}(x) = 1 - F_{(i)}(x) = Pr({}_{(i)}X < x)$$

onde ${}_iX$ e ${}_{(i)}X$ representam respectivamente, os tempos de permanência quando age apenas a causa i (${}_iX$) ou quando agem tôdas as causas exceto a causa i (${}_{(i)}X$).

7.4 — Entre as diferentes funções de permanência, $P_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots n$ e a função de permanência global P(x), existe a relação óbvia.

$$P(x) = \prod_{r=1}^{n} P_r(x) \qquad (7.4\text{-}1)$$

Essa relação resulta do fato de admitir-se a independência entre as diferentes causas de eliminação, consideradas no CBE, circunstância que não deve ser esquecida nas aplicações.
Se decompusermos o CBE em dois subconjuntos A e (A), sem elementos comuns, obtém-se, em face dos resultados anteriores:

$$P_A(x) = \prod_{r \in A} P_r(x)$$

$$P_{(A)}(x) = \prod_{r \in A} P_r(x)$$

De modo que:

$$P(x) = P_A(x) \cdot P_{(A)}(x) \qquad (7.4\text{-}2)$$

Essa expressão é de grande utilidade uma vez que permite determinar $P_{(A)}(X)$ quando são conhecidas P(X) e $P_A(X)$, ou vice-versa.
Assim:

$$P_{(A)}(x) = P(x)/P_A(x) \qquad (7.4\text{-}3)$$

Adiante será utilizado êsse resultado.

7.5 — Além da função de permanência tem importância também a função de eliminação $\mu(x)$, também denominada, algo impròpriamente, de taxa instantânea de eliminação.

A função de eliminação é definida a partir da relação

$$\mu(x) = -\frac{1}{P(x)} \cdot \frac{dP(x)}{dx} = -\frac{d}{dx} \lg_e P(x) \qquad (7.5\text{-}1)$$

Definições análogas valem para $\mu_i(x)$ e $\mu_{(i)}(x)$ referentes aos grupos G^i e $G^{(i)}$. Por integração da equação anterior obtem-se:

$$P(x) = e^{-\int_0^x \mu(z)\,dz} \qquad (7.5\text{-}2)$$

Equações análogas são evidentemente válidas para relacionar $\mu_i(x)$ e $\mu_{(i)}(x)$ às funções de permanência $P_i(x)$ e $P_{(i)}(x)$. Da mesma equação (7.5-1) obtém-se multiplicando ambos os membros por $P(x)dx$ e integrando, tendo em vista que $P(0) = 1$:

$$P(x) = 1 - \int_0^x P(z)\,\mu(z)\,dz \qquad (7.5\text{-}3)$$

válidas também para os grupos G^i e $G^{(i)}$. Por outro lado, resulta por derivação logaritma da igualdade (7.4-1):

$$\mu(x) = \sum_{r=1}^{n} \mu_r(x) \qquad (7.5\text{-}4)$$

A comparação das linhas de evolução dos grupos G, G^i e $G^{(i)}$ através dos conceitos definidos anteriormente cinstitui um excelente meio de se avaliar a importância de uma determinada causa de eliminação, como veremos adiante.

A equação (7.5-2) permite obter fàcilmente o valor alterado de $P(x)$ em função de uma modificação em $\mu(x)$ da forma $\alpha\mu(x) + \beta$. Por substituição na integral do expoente resulta imediatamente a nova probabilidade de permanência $P_1(x)$:

$$P_1(x) = [P(x)]^{\alpha}\ e^{-\beta x}$$

7.6 — Quando não se conhece a expressão analítica da função de permanência (ou de eliminação) é possível determiná-la, aproximadamente, através de valôres que ela assume em um conjunto discreto de valôres de x.

Suponha-se, para isso, o intervalo $(0, x)$ subdividido em k intervalos parciais $Z\alpha$, $\alpha = 1, 2, \ldots k$) de tal modo que não haja pontos comuns a dois quaisquer dentre êles e que a união de todos os subintervalos seja o intervalo total $(0, x)$. Êsses subintervalos são contíguos e constituem uma partição de $(0, x)$. Torna-se então possível estabelecer estimativas de $P(x)$ $P_1(x)$ e $P_{(i)}(x)$ nos extremos dos intervalos, sendo

$Z_1 = 0$ e $Z_k = x$. Essas funções serão obtidas nos extremos dos intervalos

$$Z_\alpha = \sum_{V=1}^{\alpha} z_v \qquad \alpha = 1, 2, \ldots k.$$

a partir das estimativas de $\hat{q}^i$, $\hat{q}^{(i)}$ e $\hat{q}$ relativas a cada intervalo De fato:

$$P(x) = \prod_{\alpha=1}^{k} \left[1 - q_{z_\alpha}\right] \qquad (7.6\text{-}1)$$

$$P_i(x) = \prod_{\alpha=1}^{k} \left[1 - q_{z_\alpha}\right] \qquad (7.6\text{-}2)$$

$$P_{(i)}(x) = \prod_{\alpha=1}^{k} \left[1 - q_{z_\alpha}(i)\right] \qquad (7.6\text{-}3)$$

Uma forma alternativa para $P_{(i)}(x)$ resulta do emprêgo da expressão (7.3-2), quando se supõe que A reduz-se à causa i. Obtém-se por êsse modo:

$$P_{(i)}(x) = P(x)/P_i(x) = \prod_{\alpha=1}^{k} \frac{1 - q_{z_\alpha}}{1 - q_{z_\alpha}(i)} \qquad (7.6\text{-}4)$$

Faremos, a seguir, algumas aplicações dêsses resultados.

7.7 — Utilizemos as estimativas das probabilidades absolutas de morte por tuberculose obtidas no capítulo 6 com objetivo de determinar a função de permanência nos extremos inferiores de cada um dos intervalos de idades ali considerados.

QUADRO XI

Funções de Permanência para tuberculose

$\hat{P}_i(x)$ e $\hat{P}_{(i)}(x)$

CLASSES DE IDADES $x \vdash x + h$	$1 - \hat{q}^{(i)}_{2,x}$	$\hat{P}_i(x)$	$\hat{P}(x)$	$\hat{P}_{(i)}(x)$	
				$\hat{P}(x)/\hat{P}i(x)$	$\prod_{\alpha=1}^{k} [1 - {}_4\hat{q}_{zx}(i)]$
0 ⊢ 1....	0,999181	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000
1 ⊢ 5....	0,994719	0,9991810	0,8544600	0,8551603	0,8551600
5 ⊢ 10....	0,998121	0,9939043	0,7561373	0,7607747	0,7607751
10 ⊢ 20....	0,986225	0,9920368	0,7397896	0,7457280	0,7458038
20 ⊢ 30....	0,952475	0,9783715	0,7089700	0,7246429	0,7247162
30 ⊢ 40....	0,946400	0,9318744	0,6420574	0,6889956	0,6888761
40 ⊢ 50....	0,944054	0,8819259	0,5595723	0,6344890	0,6343791
50 ⊢ 60....	0,940197	0,8325857	0,4550721	0,5465770	0,5464815
60 ⊢.....	—	0,7827946	0,3247850	0,4149045	0,4148423

A função de permanência $P_{(i)}(x)$, onde *i* representa a "tuberculose", foi obtida pelos dois caminhos indicados: diretamente, pela aplicação de (7.6-3) e indiretamente pela aplicação de (7.6-4), isto é, por divisão de $P(x)$ por $P_i(x)$. Os resultados encontram-se no quadro XI.

Como se verifica os valores obtidos pelos dois métodos diferem muito pouco. Do ponto de vista prático qualquer dos dois pode ser adotado.

Cálculo análogo foi feito para a "sífilis", utilizando apenas a determinação de $P_{(j)}(x)$ através de $P_j(x)$. Do mesmo modo a função de permanência correspondente a tôdas as causas *excluídas i e j*, foi obtida a partir da mesma equação, identificando-se "A" com o conjunto "i, j" e "B" com "(i, j)" isto é, tôdas as causas exceto i e j.

$$\hat{P}_{(i,j)}(x) = \hat{P}(x) / \hat{P}_{i,j}(x)$$

onde

$$\hat{P}_{i,j}(z_\alpha) = \prod_{\alpha=1}^{k} \left[1 - \hat{q}_{z_\alpha}(i)\right]\left[1 - \hat{q}(j)\right]$$

Os resultados encontram-se nos quadros XI (Exclusão da sífilis) e XII (Exclusão da tuberculose e da sífilis). As figuras 3, 4 e 5 dão uma visão gráfica dêsses resultados.

QUADRO XII

Funções de Permanência para sífilis: $P_j(x)$ e $P_{(j)}(x)$

CLASSES DE IDADES $x \vdash x + h$	$1 - {}_5\hat{q}_x(j)$	$\hat{P}_j(x)$	$\hat{P}(x) = P(x)/P_i(x)$
0 ⊢ 1.....	0,957855	1,0000000	1,00000
1 ⊢ 5.....	0,988267	0,9578550	0,89206
5 ⊢ 10.....	0,997930	0,9466165	0,79968
10 ⊢ 20.....	0,995679	0,9446570	0,78402
20 ⊢ 30.....	0,990982	0,9405751	0,75461
30 ⊢ 40.....	0,977553	0,9320930	0,68961
40 ⊢ 50.....	0,951855	0,9111703	0,61482
50 ⊢ 60.....	0,902745	0,8673020	0,52529
60 ⊢.....	—	0,7829526	0,41529

7.8 — Admite-se a seguir que a densidade de probabilidade da variável X, definida em 7.3 éuma função que, ou será limitada, isto é,

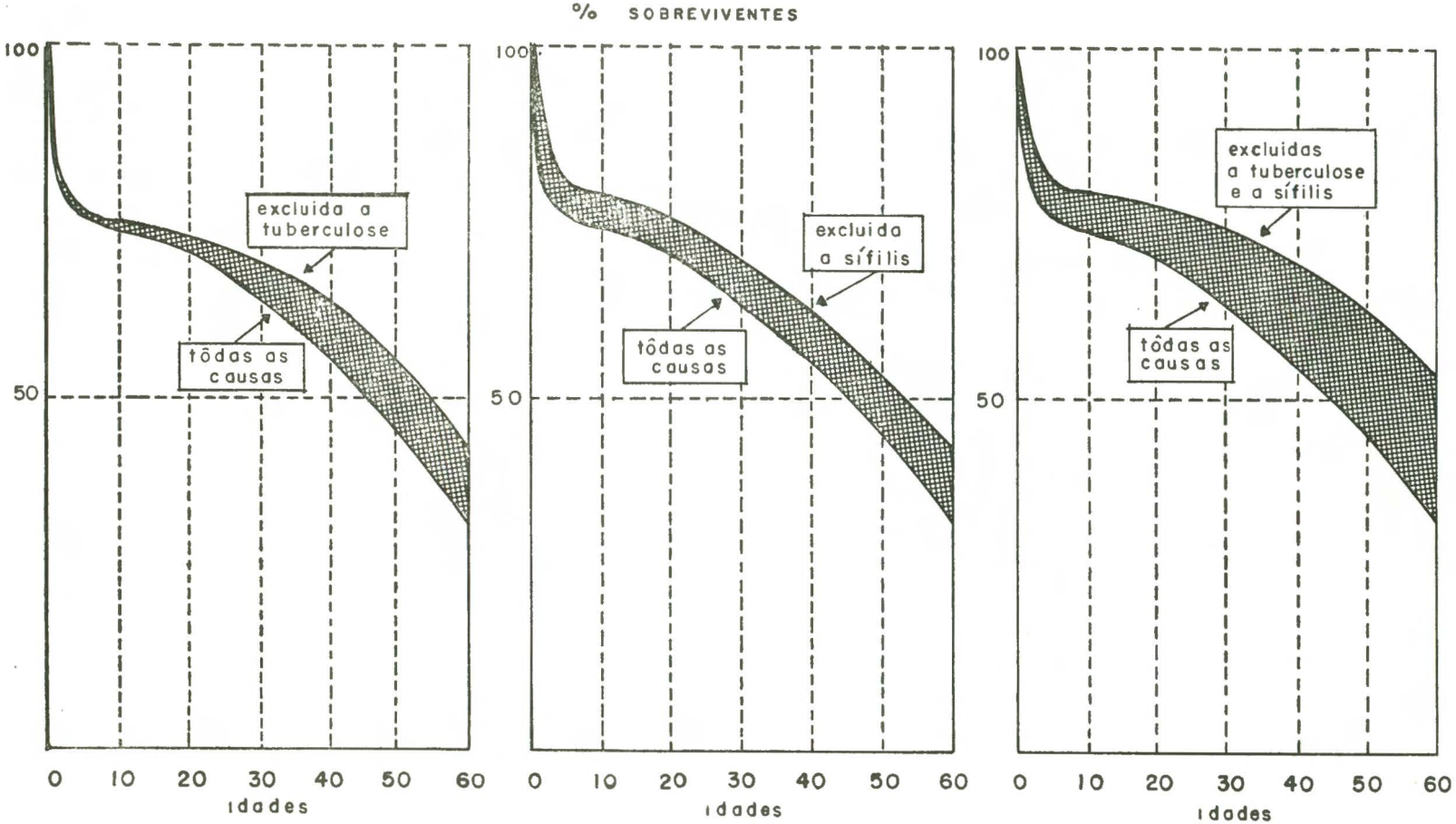
$$0 \leq f(x) \leq 1 \qquad 0 \leq x \leq w$$

$$f(x) = 0 \qquad x > w$$

ou decrescerá tão ràpidamente, quando x aumente, de modo que

$$\lim_{x \to \infty} \left| x.f.(x) \right| = 0 \qquad (7.8\text{-}1)$$

EFEITOS DA EXCLUSÃO DA MORTALIDADE POR TUBERCULOSE E SÍFILIS



QUADRO XIII

Funções de permanência para tuberculose e sífilis: $P_{i,j}(x)$ e $P_{(i,j)}(x)$

CLASSES DE IDADES	$\hat{P}_{i,j}(x)$	$\hat{P}_{(i,j)}(x) = \hat{P}(x)/\hat{P}_{i,j}(x)$
0 ⊢ 1.....	1,0000000	1,00000
1 ⊢ 5.....	0,9570705	0,89278
5 ⊢ 10.....	0,9408462	0,80459
10 ⊢ 20.....	0,9371345	0,79031
20 ⊢ 30.....	0,9202319	0,77130
30 ⊢ 40.....	0,8685937	0,74003
40 ⊢ 50.....	0,8035848	0,69713
50 ⊢ 60.....	0,7221033	0,63092
60 e +.....	0,6128914	0,53052

Cabe observar que o primeiro caso se inclui, evidentemente, no segundo, uma vez que, para $x>w$ os produtos $x.f(x)$ são todos nulos, resultando portanto nulo o seu limite. Assim, podemos nos restringir à condição expressa pela igualdade (7.8-1). O *tempo médio de permanência* no grupo G é, por definição, a esperança matemática da variável aleatória X:

$$E(X) = \int_0^\infty x f(x)\, dx \qquad (7.8\text{-}4)$$

O limite superior da integral resulta do fato de que, em face da condição (7.8-1), o campo da variável X pode ser todo o campo real não negativo. Dada a relação entre $f(x)$, $F(x)$ e $P(x)$, isto é,

$$f(x)\, dx = dF(x) = -\, dP(x)$$

obtém-se:

$$E(x) = -\int_0^\infty x \cdot dP(x) = -\left| x \cdot f(x) \right|_0^\infty + \int_0^\infty P(x) \cdot dx$$

A primeira parcela é nula nos dois limites de modo que resulta, por fim, representando por $\bar{e}_0$ êsse tempo médio:

$$\bar{e}_0 = E(X) = \int_0^\infty P(x) \cdot dx \qquad (3.8\text{-}3)$$

Ainda é possível escrever essa última expressão, tendo em vista a relação entre $P(x)$ e $\mu(x)$:

$$\bar{e}_0 = \int_0^\infty e^{-\int_0^x \mu(z)\, dz} \cdot dx \qquad (7.8\text{-}3')$$

Quanto à variância de ela pode ser estabelecida a partir da variância de e_0, estabelecida por Chiang (*Introduction*... etc. Cap. 10, § 5.2),

para o caso da mortalidade, supondo ali, $\alpha = 0$. A variância de amostragem (*Sample Variance*) é estabelecida pelo mesmo autor no Capítulo 12, § 2.5.

7.9 — Além do tempo médio de permanência obtido no parágrafo anterior, é importante a determinação do *tempo médio remanescente* (de permanência), isto é, do tempo médio de permanência daqueles que atingiram x anos de permanência (no caso da mortalidade, seria a vida média na idade x). Representa-se por $P(y|x)$ a função de permanência condicional, isto é:

$$P(y|x) = Pr(X > y|X = x) \qquad y > x$$

Pode-se então escrever:

$$P(y|x) = Py)/P(x)$$

Por definição, o tempo médio de permanência remanescente é a esperança matemática condicional da variável aleatória $X - x$, onde x é um valor fixo. Ora, a densidade de probabilidade condicional dessa variável é:

$$f(y|x) = f(y)/P(x) \qquad y > x \tag{7.9-2}$$

de modo que a média condicional de $X - x$ será:

$$\bar{e}_x = E(X - x|x) = \int_x^{\infty} (y - x) \cdot f(y|x) \cdot dy =$$

$$\frac{1}{P(x)} \int_x^{\infty} (y - x) \cdot f(y) \cdot dy = - \frac{1}{P(x)} \int_x^{\infty} (y - x) \cdot dP(y) =$$

$$\frac{1}{P(x)} \left\{ \left| (y - x)\, P(x) \right|_0^{\infty} + \int_x^{\infty} P(y) \cdot dy \right\}$$

Donde, em face da condição (7.8-1, resulta, finalmente:

$$\bar{e}_x = E(X - x|x) = \frac{1}{P(x)} \int_x^{\infty} P(y) \cdot dy \tag{7.9-3}$$

A variância de e_x é dada por Chiang (idem, ib), para o caso da mortalidade. A mesma expressão é aplicável aqui, com a mortalidade substituída pelo conjunto de causas de CBE.

7.10 — Há um outro tipo de tempo de permanência que ainda merece ser considerado. Trata-se da permanência média entre duas épocas. Assim, para os que atingiram o tempo de permanência x, qual o

tempo esperado entre y e z, sendo y e z fixos e $x < y < z$. Pondo $y - x = m$ e $z - y = n$, resulta:

$$ {}_{m|}\bar{e}_{x:\overline{n}|} = E_n^m (X - x - m \mid x) = \frac{1}{P(x)} \int_y^z P(s) \cdot ds \qquad (7.9\text{-}4) $$

Denomina-se êsse tempo de "tempo médio de permanência interceptado", sendo *m* o período de "diferimento" e *n* o de duração. Diz-se então que se trata do tempo médio de permanência, para a idade x, diferido de m e temporário de n. É claro que, para diferentes valôres de m e n, obtém-se diferentes tipos de tempo médio, inclusive o definido no parágrafo 7.9 ($m = 0$ e $n = \infty$).

7.11 — Tôdas as grandezas definidas nos parágrafos 7.8 a 7.10, se referem ao grupo G. Definições análogas podem ser dadas para os componentes dos grupos G^i e $G^{(i)}$, resultando, no caso geral do parágrafo 7.10, os tempos médios interceptados, ${}_{m|}\bar{e}_{x:\overline{n}|}$, ${}_{m|}\bar{e}^{i}_{x:\overline{n}|}$ e ${}_{m|}\bar{e}^{(i)}_{x:\overline{n}|}$. Não é necessário desenvolver novamente as expressões dessas grandezas, inteiramente análigoas às obtidas anteriormente. Supondo $m = 0$ e comparando-se os valôres de $\bar{e}_{x:\overline{n}|}$, $\bar{e}^{i}_{x:\overline{n}|}$ e $\bar{e}^{(i)}_{x:\overline{n}|}$, tem-se um meio bastante simples de se julgar a importância da causa *i*, entre o complexo de causas que compõe o CBE considerado. No capítulo seguinte fazem-se algumas aplicações dêsse critério comparativo.

8 — ANÁLISE COMPARATIVA DOS RESULTADOS

8.1 —A fim de comparar os andamentos dos grupos G, G^i e $G^{(i)}$, torna-se necessário dispor de um índice que permita atingir a êsse objetivo, de forma simples e resumida. Cabe, inicialmente, estabelecer uma ordenação entre os tempos médios dos grupos G, G^i e $G^{(i)}$, comparando-os, ainda, com o valor máximo, *n* que qualquer d' êles poderia asusmir:

$$ \bar{e}_{x:\overline{n}|} < \bar{e}^{(i)}_{x:\overline{n}|} < \bar{e}^{i}_{x:\overline{n}|} < n \qquad (8.1\text{-}1) $$

Além disso, nessa desigualdade, o segundo têrmo tanto mais próximo do primeiro e o terceiro do último quanto menos importante fôr a causa i, dentro do complexo de causas incluídas no CBE. As diferenças

$$ \Delta_1^i = \bar{e}^{(i)}_{x:\overline{n}|} - \bar{e}_{x:\overline{n}|}; \ \Delta_2^i = \bar{e}^{i}_{x:\overline{n}|} - \bar{e}_{x:\overline{n}|}: \ \Delta_3^i = \bar{e}^{i}_{x:\overline{n}|} - \bar{e}^{(i)}_{x:\overline{n}|} $$

aferirão a importância da *causa i;* analisemos cada uma delas, separadamente.

a) Consideremos, em primeiro lugar, $\Delta_1^i = \bar{e}^{(i)}_{x:\overline{n}|}$. Se a causa *i* é pouco importante, fará pouca diferença a sua eliminação, de modo que Δ_1^i, será pequeno. Na medida em que essa importância vai aumentando, Δ_1^i vai crescendo de modo que se a causa *i* tiver uma importância decisiva, Δ_1^i atingirá um valor mais elevado. Em têrmos matemáticos podemos, escrever:

I) Se a causa *i* declina de importância, $\Delta_1^i \rightarrow 0$;

II) Se a causa i aumenta de importância, $\Delta_1^i \rightarrow n - \bar{e}_{x:\overline{n}|} = \Delta_{max}$. O índice:

$$I_1 = \Delta_1^i / \Delta_{max}$$

variará entre 0 e 1, conforme a importância relativa da causa *i*

b) Consideremos, agora, a diferença Δ_2. Ocorre exatamente o contrário: essa diferença aumenta, tendendo para o valor máximo $\Delta_{max} = n - \bar{e}_{x:\overline{n}|}$ quando a importância da *causa* i declina, e tendendo para 0, se essa importância se eleva. O índice.

$$I_2 = 1 - \Delta_2^i / \Delta_{max} = (\Delta_{max}^i - \Delta_2) / \Delta_{max}$$

variará igualmente entre 0 e 1, conforme a importância relativa da causa *i*.

c) Analisemos, agora, a terceira parcela, Δ_3. Desde logo se verifica uma relação simples entre as três diferenças consideradas:

$$\Delta_3^i = \Delta_2^i - \Delta_1^i$$

Quando a causa *i* é pouco importante $\bar{e}_{x:\overline{n}|}$ é próximo de *n* e $e_{x:\overline{n}|}$ vizinho de $\bar{e}_{x:\overline{n}|}$ de modo que Δ^i_3 se aproxima de $n - \bar{e}_{x:\overline{n}|} = \Delta_{max}$; em caso contrário, quando a importância de *i* é grande e cresce, Δ^i_3 declina, passa por 0, quando $\bar{e}^i_{x:\overline{n}|} = e^{(i)}_{x:\overline{n}|}$, isto é, quando *i* é tão importante quando às demais causas (do ponto de vista do tempo médio de permanência) continuando a declinar, tendendo para um valor negativo igual a $-\Delta_{max}$, a medida que a importância de *i* se torna cada vez mais decisiva.

Assim, a relação

$$-\Delta_3^i / \Delta_{max} = R$$

varia de -1 e $+1$, assumindo o valor 0, quando a causa i tiver tanta importância quanto as demais causas, em têrmos de tempo médio de permanência. Pode-se adotar como terceiro índice para medir a importância relativa da causa *i*, a expressão:

$$I_3 = 1/2(1 + R) = 1/2\{[(\Delta_{max} - \Delta_2^i)/\Delta_{max}] + \Delta_1^i/\Delta_{max} = 1/2\,(I_1^* + I_2)$$

Em todos os índices considerados o valor máximo admitido para o tempo de permanência média fôr igual a *n*, o que implica em uma taxa de eliminação igual a 0. Realmente êste será o máximo valor admissível, mas poderá não ser o máximo razoàvelmente possível. Poderíamos, então, considerar um limite superior (inferior a n, é claro) decorrente de hipóteses adequadas sôbre intensidade de eliminação fìsicamente atingível, como nível inferior. Assim, em lugar de uma taxa de eliminação igual a 0, poder-se-ia supor a existência de um valor residual, impossível de ser mais reduzido, pelo menos dentro das condições conhecidas de atuação das diferentes causas incluídas no CBE.

8.2 — Voltemos ao problema tratado no capítulo 6. As tábuas de permanência correspondentes aos diversos casos (tábuas de sobrevivência) acham-se representadas no gráfico 1 — Figs. 1, 2 e 3 — onde se incluem, comparadas com a tábua relativa a tôdas as causas de eliminação (linha inferior) as que resultam

a) pela eliminação da tuberculose
b) pela eliminação da sífilis
c) pela eliminação da tuberculose e da sífilis.

A região hachurada dá uma idéia do ganho decorrente da eliminação e mede a influência de cada uma das causas sobre a função de sobrevivência.

QUADRO XIV

Tempos médios de permanência

n = 60 (Vida média ao nascer, temporária de 60) até 60 anos (TMP)

CAUSAS DE ELIMINAÇÃO INCLUÍDAS	TMP (vida média)	$\frac{100.\ TMP}{n}$	Acréscimo relativo % $\frac{TMP}{36,868} - 1$
1 — Tôdas as causas (CBE).....	36,868	61,45	—
2 — Só a tuberculose.....	55,072	91,79	49,4
3 — Tôdas, exceto tuberculose.....	39,676	66,13	7,6
4 — Só sífilis.....	54,666	91,11	48,3
5 — Tôdas, exceto sífilis.....	40,129	66,88	8,8
6 — Só tuberculose e sífilis.....	50,365	83,94	36,6
7 — Tôdas, exceto tuberculose e sífilis.....	43,326	72,21	17,5

O quadro XIV, fornece os valôres de $\bar{e}_{x:\overline{n}|}$, $\overset{i}{\bar{e}}_{x:\overline{n}|}$ e $\overset{(i)}{\bar{e}}_{x:\overline{n}|}$, para um CBE constituído por tôdas as causas de morte, com eliminação da tuberculose, da sífilis e de ambas as causas, com os respectivos valôres em % do tempo máximo admisível, n, e com o acréscimo relativo em cada caso.

Verifica-se que a tuberculose absorve 7,6% do tempo médio de permanência (vida média) enquanto a sífilis atinge 8,8%.

No quadro seguinte (XV) figuram as diferenças Δ_1, Δ_2, Δ_3, e os índices I_1, I_2, I_3.

QUADRO XV

Δ_{max} = 23,137

CAUSA DE ELIMINAÇÃO	DIFERENÇAS			ÍNDICES %		
	Δ_1	Δ_2	Δ_3	I_1	I_2	I_3
Tuberculose.....	2,808	18,204	15,396	121,4	213,2	167,3
Sífilis.....	3,261	17,798	14,537	140,9	230,8	185,8
Tuberculose e sífilis..	6,458	13,497	7,039	279,1	416,6	347,8

8.3 — Sôbre os índices I_1, I_2 e I_3 devemos fazer algumas considerações. Na realidade o índice "ideal" seria o 3.º, média dos dois primeiros, ao qual se pode chegar por outro caminho.

De fato, suponhamos um grupo não sujeito a qualquer causa de eliminação. O tempo médio de permanência seria n; se sôbre êsse grupo passasse a atuar apenas a causa *i* o tempo se reduziria a $\overset{i}{\bar{e}}_{x:\overline{n}|}$. A diferença $n - \overset{i}{\bar{e}}_{x:\overline{n}|}$ representa, portanto, a influência devida *à inclusão da causa i*. Por outro lado, se o grupo tivesse sujeito a um certo CBE, com tempo de permanência $\bar{e}_{x:\overline{n}|}$, a retirada da causa *i* provocaria um aumento dêsse tempo, medido pela diferença $\overset{(i)}{\bar{e}}_{x:\overline{n}|} - \bar{e}_{x:\overline{n}|}$

A média das alterações devidas *à inclusão* de uma única causa de eliminação *i* e a sua *retirada* a partir de um conjunto CBE prefixado seria, então:

$$M = \frac{1}{2}\left[(n - \overset{i}{e}_{x:\overline{n}|} + \overset{(i)}{e}_{x:\overline{n}|} - \bar{e}_{x:\overline{n}|}\right] = \frac{1}{2}\left[(n - \bar{e}_{x:\overline{n}|} - (\overset{i}{\bar{e}}_{x:\overline{n}|} - \overset{(i)}{\bar{e}}_{x:\overline{n}|}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}(\Delta_{max} - \Delta_3)$$

Dividindo-se por Δ_{max} resulta

$$M = \frac{1}{2}(1 + R) = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)$$

Assim, M representa a influência média medida em anos de permanência, decorrente da inclusão da causa *i* a um grupo sem eliminação e a sua exclusão a partir de um certo conjunto básico préfixado. Note-se que a influência da exclusão da causa *i*, quando existem outras causas de eliminação, depende do CBE que se adote como ponto de partida. Isso é evidente uma vez que o tempo poupado pela retirada da causa *i*, será mais ou menos aproveitado conforme as outras causas atuantes. Se não houver nenhuma causa além de *i*, o aproveitamento será integral; se houver outra causa aquêle tempo ficará reduzido em parte pela ação dessas outras causas. Nessas condições, embora o índice I_3 represente melhor a influência da causa *i* nas duas possíveis formas de *inclusão* e *exclusão*, deve-se notar que a *inclusão* é feita a partir de uma situação teórica na qual se supõe não haver qualquer causa de eliminação e a *exclusão* se realiza a partir de um certo CBE prefixado.

Assim, o que acontece de fato é que cada índice tem o seu sentido próprio. O índice I, representa a influência (medida em aumento percentual do tempo de permanência) decorrente da *exclusão* da tuberculose dentre o conjunto de causas que constituía o CBE existente no Estado da Guanabara na época em exame (1939/41). Nesse sentido a tuberculose exercia uma influência de 12,1%, a sífilis de 14,1% e as duas em conjunto de 27,9%. O índice I_2, representa a ação que exerceria a causa *i* se passasse a atual sôbre um grupo não sujeito prèviamente a qualquer causa de eliminação; êle traduz a ação máxima da causa *i*. Nesse caso, a tuberculose exerceria uma influência de 21,3%, a sífilis de 23,1% e as duas em conjunto de 41,7%, em relação ao tempo máximo de permanêcia, n. Quanto a I_3, êle representa, simplesmente, a média dêsses dois tipos de influência.